КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2022 Т. 14 № 2 С. 335–342
DOI: 10.20537/2076-7633-2022-14-2-335-342

Ки&М

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

УДК: 519.8

Обоснование связи модели Бэкмана с вырождающимися функциями затрат с моделью стабильной динамики

Е. В. Котлярова[1,a], К. Ю. Кривошеев[1,b], Е. В. Гасникова[1,c], Ю. И. Шароватова[1,d], А. В. Шурупов[2,e]

[1]Национальный исследовательский университет «Московский физико-технический институт»,
Россия, 141701, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9
[2]Российский университет транспорта,
Россия, 127994, г. Москва, ул. Образцова, д. 9, стр. 9

E-mail: [a] kotlyarova.ev@phystech.edu, [b] krivosheev.kyu@phystech.edu, [c] egasnikov@yandex.ru,
[d] julia.i.moroz@gmail.com, [e] a.shurupov@rut.digital

Получено 20.01.2022.
Принято к публикации 13.02.2022.

С 50-х годов XX века транспортное моделирование крупных мегаполисов стало усиленно развиваться. Появились первые модели равновесного распределения потоков по путям. Наиболее популярной (и использующейся до сих пор) моделью была модель Бэкмана и др. 1955 г. В основу этой модели положены два принципа Вардропа. На современном теоретико-игровом языке можно кратко описать суть модели как поиск равновесия Нэша в популяционной игре загрузки, в которой потери игроков (водителей) рассчитываются исходя из выбранного пути и загрузках на этом пути, при фиксированных корреспонденциях. Загрузки (затраты) на пути рассчитываются как сумма затрат на различных участках дороги (ребрах графа транспортной сети). Затраты на ребре (время проезда по ребру) определяется величиной потока автомобилей на этом ребре. Поток на ребре, в свою очередь, определяется суммой потоков по всем путям, проходящим через заданное ребро. Таким образом, затраты на проезд по пути определяются не только выбором пути, но и тем, какие пути выбрали остальные водители. Таким образом, мы находимся в стандартной теоретико-игровой постановке. Специфика формирования функций затрат позволяет сводить поиск равновесия к решению задачи оптимизации (игра потенциальная). Эта задача оптимизации будет выпуклой, если функции затрат монотонно неубывающие. Собственно, различные предположения о функциях затрат формируют различные модели. Наиболее популярной моделью является модель с функцией затрат BPR. Такие функции используются при расчетах реальных городов повсеместно. Однако в начале XXI века Ю. Е. Нестеровым и А. де Пальмой было показано, что модели типа Бэкмана имеют серьезные недостатки. Эти недостатки можно исправить, используя модель, которую авторы назвали моделью стабильной динамики. Поиск равновесия в такой модели также сводится к задаче оптимизации. Точнее, даже задаче линейного программирования. В 2013 г. А. В. Гасниковым было обнаружено, что модель стабильной динамики может быть получена предельным переходом, связанным с поведением функции затрат, из модели Бэкмана. Однако обоснование упомянутого предельного перехода было сделано в нескольких важных (для практики), но все-таки частных случаях. В общем случае вопрос о возможности такого предельного перехода, насколько нам известно, остается открытым. Данная работа закрывает данный зазор. В статье в общем случае приводится обоснование возможности отмеченного предельного перехода (когда функция затрат на проезд по ребру как функция потока по ребру вырождается в функцию, равную постоянным затратам до достижения пропускной способности, и равна плюс бесконечности, при превышении пропускной способности).

Ключевые слова: модель равновесного распределения потоков по путям, модель Бэкмана, модель стабильной динамики

Исследование Е. В. Гасниковой было выполнено при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (госзадание), № 075-00337-20-03, номер проекта 0714-2020-0005.

COMPUTER RESEARCH AND MODELING
2022 VOL. 14 NO. 2 P. 335–342
DOI: 10.20537/2076-7633-2022-14-2-335-342

MATHEMATICAL MODELING AND NUMERICAL SIMULATION

UDC: 519.8

Proof of the connection between the Backman model with degenerate cost functions and the model of stable dynamics

E. V. Kotliarova[1,a], K. Yu. Krivosheev[1,b], E. V. Gasnikova[1,c], Yu. I. Sharovatova[1,d], A. V. Shurupov[2,e]

[1]National Research University Moscow Institute of Physics and Technology,
9 Institute lane, Dolgoprudny, 141701, Russia
[2]Russian University of Transport,
9/9 Obraztsova st., Moscow, 127994, Russia

E-mail: [a] kotlyarova.ev@phystech.edu, [b] krivosheev.kyu@phystech.edu, [c] egasnikov@yandex.ru,
[d] julia.i.moroz@gmail.com, [e] a.shurupov@rut.digital

Received 20.01.2022.
Accepted for publication 13.02.2022.

Since 1950s the field of city transport modelling has progressed rapidly. The first equilibrium distribution models of traffic flow appeared. The most popular model (which is still being widely used) was the Beckmann model, based on the two Wardrop principles. The core of the model could be briefly described as the search for the Nash equilibrium in a population demand game, in which losses of agents (drivers) are calculated based on the chosen path and demands of this path with correspondences being fixed. The demands (costs) of a path are calculated as the sum of the demands of different path segments (graph edges), that are included in the path. The costs of an edge (edge travel time) are determined by the amount of traffic on this edge (more traffic means larger travel time). The flow on a graph edge is determined by the sum of flows over all paths passing through the given edge. Thus, the cost of traveling along a path is determined not only by the choice of the path, but also by the paths other drivers have chosen. Thus, it is a standard game theory task. The way cost functions are constructed allows us to narrow the search for equilibrium to solving an optimization problem (game is potential in this case). If the cost functions are monotone and non-decreasing, the optimization problem is convex. Actually, different assumptions about the cost functions form different models. The most popular model is based on the BPR cost function. Such functions are massively used in calculations of real cities. However, in the beginning of the XXI century, Yu. E. Nesterov and A. de Palma showed that Beckmann-type models have serious weak points. Those could be fixed using the stable dynamics model, as it was called by the authors. The search for equilibrium here could be also reduced to an optimization problem, moreover, the problem of linear programming. In 2013, A. V. Gasnikov discovered that the stable dynamics model can be obtained by a passage to the limit in the Beckmann model. However, it was made only for several practically important, but still special cases. Generally, the question if this passage to the limit is possible remains open. In this paper, we provide the justification of the possibility of the above-mentioned passage to the limit in the general case, when the cost function for traveling along the edge as a function of the flow along the edge degenerates into a function equal to fixed costs until the capacity is reached and it is equal to plus infinity when the capacity is exceeded.

Keywords: equilibrium distribution model of traffic flow, Beckmann's transportation network equilibrium model, stable dynamics model

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2022, vol. 14, no. 2, pp. 335–342 (Russian).

The research of E. V. Gasnikova is supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Goszadaniye), No. 075-00337-20-03, project No. 0714-2020-0005.

Введение

Модель равновесного распределения потоков Бэкмана остается наиболее популярной для моделирования на протяжении более чем полувека [Гасников и др., 2013; Beckmann, McGuire, Winsten, 1955]. Одним из ключевых понятий в этой модели являются функции $\tau_e(f_e \mid \mu)$, которые выражают удельные затраты на проезд по дуге e, где f_e — это величина потока по дуге e. Как правило, предполагают, что это (строго) возрастающие гладкие функции от f_e (иногда и выпуклые). В более же новой модели стабильной динамики удельные затраты рассчитываются [Nesterov, Nemirovski, 2013; Nesterov, de Palma, 2003] следующим образом. Каждому ребру $e \in E$ ставятся в соответствие параметры $\overline{f}_e$ и $\overline{t}_e$. Они имеют следующую трактовку: $\overline{f}_e$ — максимальная пропускная способность ребра e, $\overline{t}_e$ — минимальные временные издержки, необходимые для прохождения ребра e. Тогда затраты считаются следующим образом. Пусть f — вектор распределения потоков по ребрам, инициируемый равновесным распределением потоков по маршрутам, а t — вектор временных издержек, соответствующий распределению f. Тогда, если транспортная система находится в стабильном состоянии, всегда выполняются неравенства $f \leqslant \overline{f}$ и $t \geqslant \overline{t}$. При этом считается, что если поток по ребру f_e меньше, чем максимальная пропускная способность ребра $\overline{f}_e$, то все автомобили в потоке двигаются с максимальной скоростью, а их временные издержки t_e минимальны и равны $\overline{t}_e$. Если же поток по ребру f_e становится равным пропускной способности ребра $\overline{f}_e$, то временные издержки водителей t_e могут быть сколь угодно большими.

Нетривиальным является следующее наблюдение. Если рассмотреть энтропийно-регуляризованный функционал

$$\Psi(x)_T = \Psi(f(x)) + T \sum_{w \in W} \sum_{p \in P_w} x_p \log x_p \to \min_{\substack{x \in X \\ f = \Theta x}}$$

и взять предел 1, то переход к двойственной задаче (для задачи минимизации этого функционала на множестве X) дает стохастический вариант модели стабильной динамики. В книге [Гасников, Гасникова, 2020] была продемонстрирована такая связь модели стабильной динамики с моделью Бэкмана только для нескольких функций $\tau_e(f_e \mid \mu)$ конкретного вида. В этой же статье авторы предлагают более широкое доказательство, которое делает возможным предельный переход между двумя моделями для любых функций, удовлетворяющих определенным условиям. То есть с ее помощью мы установим, что если

$$\tau_e(f_e \mid \mu) \xrightarrow[\mu \to 0+]{} \begin{cases} \overline{t}_e, & 0 \leqslant f_e \leqslant \overline{f}_e, \\ \left[\overline{t}_e, \infty\right), & f_e = \overline{f}_e, \end{cases} \tag{1}$$

где $x(\mu)$ — равновесное распределение потоков по путям в модели Бэкмана при функциях затрат на ребрах $\tau_e(f_e \mid \mu)$), то

$$\tau_e^{\mu}\left(f_e\left(x(\mu)\right)\right) \xrightarrow[\mu \to 0+]{} t_e,$$
$$f_e\left(x(\mu)\right) \xrightarrow[\mu \to 0+]{} f_e,$$

где пара (t, f) — равновесие в модели стабильной динамики с тем же графом и матрицей корреспонденций, что и в модели Бэкмана, и с ребрами, характеризующимися набором $(\overline{t}, \overline{f})$ из определения функций $\tau_e(f_e \mid \mu)$.

Доказательство будет разбито на две части: в первой будет рассмотрен случай таких потоков f_e, $e \in E$, что $f_e < \overline{f}_e$, а во второй мы рассмотрим особенность, возникающую при $f_e = \overline{f}_e$.

Постановка задачи и тривиальная часть доказательства

Лемма 1. *Пусть $\tau_e\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ возрастает для любого $e \in E$. Тогда*

$$\min_{\substack{x \in X \\ f = \Theta x}} \left\{ \sum_{e \in E} \sigma_e(f_e) \right\} = \sup_{t \in \operatorname{dom} \sigma^*} \left\{ \sum_{w \in W} d_w T_w(t) - \sum_{e \in E} \sigma_e^*(t_e) \right\}. \tag{2}$$

Эта лемма известна из литературы [Гасников, Гасникова, 2020; Nesterov, de Palma, 2003], как и ее доказательство, но она понадобится нам далее. Перейдем к предмету статьи.

Теорема 1. *Пусть для любого значения параметра $\mu > 0$ функции $\tau_e(\cdot \mid \mu)$ удовлетворяют следующим условиям:*

1) $\tau_e(f_e \mid \mu) = -\infty$ *при* $f_e < 0$*,*

2) $\tau_e(f_e \mid \mu) \geqslant 0$ *при* $f_e \geqslant 0$*,*

3) $\tau_e(\cdot \mid \mu)$ *строго возрастает на* $\operatorname{dom} \tau_e(\cdot \mid \mu) = \{f_e \in \mathbb{R}\colon -\infty < \tau_e(f_e \mid \mu) < +\infty\}$.

При всех $\mu > 0$ доопределим

$$\tau_e^{-1}(t_e \mid \mu) = \begin{cases} 0, & \text{если } t_e < \tau_e(0 \mid \mu), \\ +\infty, & \text{если } t_e > \tau_e(+\infty \mid \mu). \end{cases}$$

Пусть

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \tau_e^{-1}(z \mid \mu) - F_e(z) \right| dz \xrightarrow[\mu \to +0]{} 0, \tag{3}$$

где

$$F_e(t_e) = \begin{cases} 0, & \text{если } t_e \leqslant \bar{t}_e, \\ \bar{f}_e, & \text{если } t_e > \bar{t}_e. \end{cases}$$

Тогда

$$\lim_{\mu \to +0} \min_{\substack{x \in X \\ f = \Theta x}} \left\{ \sum_{e \in E} \sigma_e(f_e \mid \mu) \right\} = \sup_{t \geqslant \bar{t}} \left\{ \sum_{w \in W} d_w T_w(t) - \langle \bar{f}, t - \bar{t} \rangle \right\}.$$

Доказательство.

Заметим, что для любого $\mu > 0$

$$\begin{aligned} \sigma_e(f_e \mid \mu) &= +\infty, && \text{если } f_e < 0, \\ \sigma_e(f_e \mid \mu) &\geqslant \tau_e(0 \mid \mu) f_e, && \text{если } f_e \geqslant 0. \end{aligned}$$

Это следует из предположений 1), 3) и формулы $\sigma_e(f_e \mid \mu) = \int_0^{f_e} \tau_e(z \mid \mu)\, dz$.

Лемма 2. *При любых μ, t_e*

$$\sigma_e^*(t_e \mid \mu) = \int\limits_0^{t_e} \tau_e^{-1}(z \mid \mu)\, dz.$$

Доказательство.

Пусть сначала $t_e \leqslant \tau_e(0 \mid \mu)$. Тогда

$$\sigma_e^*(t_e \mid \mu) = \sup_{f_e} \{t_e f_e - \sigma_e(f_e \mid \mu)\} = \sup_{f_e \geqslant 0} \{t_e f_e - \sigma_e(f_e \mid \mu)\} \leqslant \sup_{f_e \geqslant 0} \{t_e f_e - \tau_e(0 \mid \mu) f_e\} = 0.$$

С другой стороны, при $f_e = 0$ выражение $t_e f_e - \sigma_e(f_e \mid \mu)$ всегда равно нулю. Таким образом, $\sigma_e^*(t_e \mid \mu) = 0$ для любых $\mu > 0$, $t_e \leqslant \tau_e(0 \mid \mu)$. Пусть теперь $t_e > \tau_e(0 \mid \mu)$. Рассмотрим оптимизационную задачу:

$$t_e f_e - \sigma_e(f_e \mid \mu) \to \max_{f_e}.$$

Приравняем производную к нулю:

$$t_e - \tau_e(f_e \mid \mu) = 0 \quad \Rightarrow \quad f_e = \tau_e^{-1}(t_e \mid \mu).$$

Следовательно,

$$\sigma_e^*(t_e \mid \mu) = t_e \tau_e^{-1}(t_e \mid \mu) - \sigma_e(\tau_e^{-1}(t_e \mid \mu) \mid \mu).$$

Отсюда

$$\frac{\partial \sigma_e^*(t_e \mid \mu)}{\partial t_e} = \tau_e^{-1}(t_e \mid \mu) + t_e \frac{\partial \tau_e^{-1}(t_e \mid \mu)}{\partial t_e} - t_e \frac{\partial \tau_e^{-1}(t_e \mid \mu)}{\partial t_e} = \tau_e^{-1}(t_e \mid \mu)$$

при всех $t_e > \tau_e(0 \mid \mu)$. Таким образом,

$$\sigma_e^*(t_e \mid \mu) = \int\limits_0^{t_e} \tau_e^{-1}(z \mid \mu)\, dz.$$

Лемма доказана. □

Пусть

$$S_e^*(t_e) = \begin{cases} 0, \text{ если } t_e \leqslant \bar{t}_e, \\ \bar{f}_e(t_e - \bar{t}_e), \text{ если иначе.} \end{cases}$$

Имеем

$$\left| S_e^*(t_e) - \sigma_e^*(t_e \mid \mu) \right| = \left| \int\limits_0^{t_e} F_e(z)\, dz - \int\limits_0^{t_e} \tau_e^{-1}(z \mid \mu)\, dz \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^{t_e} \left| F_e(z) - \tau_e^{-1}(z \mid \mu) \right| dz \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} \left| F_e(z) - \tau_e^{-1}(z \mid \mu) \right| dz \xrightarrow[\mu \to +0]{} 0$$

равномерно по $t_e \in \mathbb{R}$. По лемме 1,

$$\lim_{\mu \to +0} \min_{\substack{x \in X \\ f = \Theta x}} \left\{ \sum_{e \in E} \sigma_e(f_e \mid \mu) \right\} = \lim_{\mu \to +0} \sup_{t \in \operatorname{dom} \sigma^*} \left\{ \sum_{w \in W} d_w T_w(t) - \sum_{e \in E} \sigma_e^*(t_e \mid \mu) \right\}.$$

В силу доказанной выше равномерной сходимости $\sigma_e^*(\cdot \mid \mu)$ можно поменять местами операции супремума и взятия предела. Получим

$$\lim_{\mu\to+0} \sup_{t\in\operatorname{dom}\sigma^*} \left\{ \sum_{w\in W} d_w T_w(t) - \sum_{e\in E} \sigma_e^*(t_e \mid \mu) \right\} = \sup_{t\in\operatorname{dom}\sigma^*} \left\{ \sum_{w\in W} d_w T_w(t) - \lim_{\mu\to+0} \sum_{e\in E} \sigma_e^*(t_e \mid \mu) \right\} =$$

$$= \sup_{t} \left\{ \sum_{w\in W} d_w T_w(t) - \sum_{e\in E} S_e^*(t_e) \right\} = \sup_{t\geqslant \bar{t}} \left\{ \sum_{w\in W} d_w T_w(t) - \langle \overline{f},\, t - \bar{t} \rangle \right\},$$

что и требовалось доказать. □

Замечание 1. Пусть

$$\tau_e(f_e \mid \mu) = \bar{t}_e \left(1 - \mu \ln \left(1 - \frac{f_e}{\overline{f}_e} \right) \right), \quad f_e \geqslant 0.$$

При $f_e < 0$ определим $\tau_e(f_e \mid \mu) = -\infty$. Тогда

$$\tau_e^{-1}(t_e \mid \mu) = \begin{cases} \overline{f}_e \left(1 - \exp\left(-\dfrac{t_e - \bar{t}_e}{\bar{t}_e \mu} \right) \right), & \text{если } t_e > \bar{t}_e, \\ 0, & \text{если иначе.} \end{cases}$$

Ключевое предположение (3) теоремы 1 в этом случае выполняется. Для функций

$$\tau_e(f_e \mid \mu) = \bar{t}_e \left(1 + \mu \frac{\overline{f}_e}{\overline{f}_e - f_e} \right),$$

$$\tau_e(f_e \mid \mu) = \bar{t}_e \left(1 + \gamma \left(\frac{f_e}{\overline{f}_e} \right)^{1/\mu} \right)$$

предположение (3) не выполняется.

Рассмотрение особенности

Для того чтобы найти равновесие в транспортной сети, необходимо решить задачу поиска равновесного распределения потоков

$$\min_{\substack{x\in X \\ f=\Theta x}} \sum_{e\in E} \sigma_e(f_e \mid \mu), \tag{4}$$

где

$$\sigma_e(f_e \mid \mu) = \int_0^{f_e} \tau_e(z \mid \mu)\, dz. \tag{5}$$

Далее считаем, что везде $f_e \geqslant 0$. Введем предположения 1–3.

Предположение 1. *$\tau_e(f_e \mid \mu)$ — неубывающая функция от f_e для всех $\mu > 0$, $e \in E$. Причем $\tau_e(f_e \mid \mu) \geqslant \bar{t}_e$.*

Предположение 2. $\lim\limits_{\mu\to0+} \tau_e(f_e \mid \mu) = \bar{t}_e$, $f_e < \overline{f}_e$, $\lim\limits_{\mu\to0+} \tau_e(\overline{f}_e \mid \mu) = +\infty$ *для всех* $e \in E$.

Предположение 3. *Пересечение транспортного потока $T = \{f = \Theta x,\ x \in X\}$ и множества $\overline{F} = \{f : f \leqslant \overline{f}\}$ не пусто. Пусть E' — такой набор ребер (возможно пустой), что $\min\limits_{f\in T\cap\overline{F}} f_e = \overline{f}_e$ тогда и только тогда, когда $e \in E'$.*

При выполнении предположений 1–3 для всех $e \in E'$ выполняется $\lim\limits_{\mu\to0+} \sigma_e(\overline{f}_e \mid \mu) = \overline{f}_e \bar{t}_e$. Заметим также, что

Замечание 2. Из предположения 2 следует, что $\lim\limits_{\mu\to 0+} \sigma_e(f_e \mid \mu) = f_e\bar{t}_e$, $f_e < \overline{f}_e$.

Замечание 3. Если $T \cap \overline{F} \neq \varnothing$ и $\tau_e(f_e \mid \mu) = \bar{t}_e\left(1 + \gamma\left(\frac{f_e}{\overline{f}_e}\right)^{1/\mu}\right)$, то предположения 1–3 выполняются.

Теорема 2. *Пусть справедливы предположения* 1–3. *Пусть* $f^\mu \in T$ *— решение задачи* (4). *Тогда задача* (*см. замечание* 2)

$$\min_{\substack{x\in X\\ f=\Theta x\\ f\leqslant \overline{f}}} \sum_{e\in E} f_e\bar{t}_e \tag{6}$$

имеет решение $f^0 \in T \cap \overline{F}$, *причем*

$$\Psi_\mu(f^\mu) = \sum_{e\in E} \sigma_e(f_e^\mu \mid \mu) \xrightarrow[\mu\to 0+]{} \sum_{e\in E} f_e^0\bar{t}_e = \Psi_0(f^0) \tag{7}$$

и

$$\Psi_0(f^\mu) \xrightarrow[\mu\to 0+]{} \Psi_0(f^0). \tag{8}$$

Доказательство.

Существование решения задач (4) и (6) следует из того, что выпуклая функция на выпуклом компакте достигает минимума. Целевые функции выпуклы по предположению 1 и по выпуклости линейных функций. Компактность, в свою очередь, появляется из-за компактности T (потому что X — компакт). Выпуклость ограничений также следует из их линейности. Из предположения 3 следует, что $\exists \widetilde{f} \in T \cap \overline{F}$, $\delta > 0$:

$$\forall e \in E \setminus E' \to \widetilde{f}_e \leqslant \overline{f}_e - \delta. \tag{9}$$

Из выпуклости $T \cap \overline{F}$ следует, что весь отрезок $[\widetilde{f}, f^0] \subset T \cap \overline{F}$. Из предположений 1–3 и $|E| < \infty$ следует, что $\forall \epsilon\ \exists \mu(\epsilon)$, $\widetilde{f^\epsilon} \in [\widetilde{f}, f^0]$:

$$\forall \mu \leqslant \mu(\epsilon) \to \Psi_\mu(\widetilde{f^\epsilon}) \leqslant \Psi_0(f^0) + \epsilon. \tag{10}$$

Следовательно, $\forall \mu \leqslant \mu(\epsilon) \to \Psi_\mu(f_\mu) \leqslant \Psi_0(f^0) + \epsilon$. Из предположения 1 следует, что $\Psi_\mu(f) \geqslant \Psi_0(f)$. Таким образом, получаем (7) и (8). Что и требовалось доказать. □

Заключение

В статье была исчерпывающе обоснована связь между моделью стабильной динамики (или Нестерова – Де Пальмы) и моделью Бэкмана. И хотя ранее это уже было частично проделано в работе [Гасников, Гасникова, 2020], о полном доказательстве авторам ничего не известно. Отметим также, что эта задача была предложена А. В. Гасниковым в качестве проекта для сдачи курса по математическому моделированию транспортных потоков и в итоге была решена одним из студентов в соавторстве с Е. В. Котляровой.

Список литературы (References)

Гасников А. В., Гасникова Е. В. Модели равновесного распределения транспортных потоков в больших сетях. — М.: МФТИ, 2020.

Gasnikov A. V., Gasnikova E. V. Transportnye osnovaniya kompozitsii gorodskogo plana [Modeli ravnovesnogo raspredeleniya transportnyh potokov v bol'shih setyah]. — Moscow: MIPT, 2020 (in Russian).

Гасников А. В., Кленов С. Л., Нурминский Е. А., Холодов Я. А., Шамрай Н. Б. Введение в математическое моделирование транспортных потоков / под ред. А. В. Гасникова с приложениями М. Л. Бланка, К. В. Воронцова и Ю. В. Чеховича, Е. В. Гасниковой, А. А. Замятина и В. А. Малышева, А. В. Колесникова, Ю. Е. Нестерова и С. В. Шпирко, А. М. Райгородского, с предисловием руководителя департамента транспорта г. Москвы М. С. Ликсутова. — М.: МЦНМО, 2013. — 427 с. — 2-е изд.

Gasnikov A. V. Vvedenie v matematicheskoe modelirovanie transportnykh potokov [Introduction to the mathematical modeling of traffic flows] / ed. A. V. Gasnikov. — Moscow: MCCME, 2013 (in Russian).

Beckmann M., McGuire C. B., Winsten C. B. Studies in the economics of transportation. — Santa Monica: RAND Corporation, 1955.

Nesterov Yu., Nemirovski A. On first order algorithms for l_1 / nuclear norm minimization // Acta Numerica. — 2013. — Vol. 22. — P. 509–575.

Nesterov Yu., de Palma A. Stationary dynamic solutions in congested transportation Networks: Summary and Perspectives // Networks Spatial Econ. — 2003. — Vol. 3, No. 3. — P. 371–395.