КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2022 Т. 14 № 1 С. 179–203
DOI: 10.20537/2076-7633-2022-14-1-179-203

Ки&М

МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ И СОЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

УДК: 519.876.2

Теоретико-игровые и рефлексивные модели боевых действий

В. О. Корепанов[1,a], А. Г. Чхартишвили[1,b], В. В. Шумов[2,c]

[1]Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН,
Россия, 117997, г. Москва, Профсоюзная ул., д. 65
[2]Международный научно-исследовательский институт проблем управления,
Россия, 117312, г. Москва, проспект 60-летия Октября, д. 9

E-mail: [a] kvsevolodo@mail.ru, [b] sandro_ch@mail.ru, [c] v.v.shumov@yandex.ru

Получено 23.12.2021, после доработки — 28.01.2022.
Принято к публикации 08.02.2022.

Моделирование боевых действий является актуальной научной и практической задачей, направленной на предоставление командирам и штабам количественных оснований для принятия решений. Авторами предложена функция победы в боевых и военных действиях, основанная на функции конфликта Г. Таллока и учитывающая масштаб боевых (военных) действий. На достаточном объеме данных военной статистики выполнена оценка параметра масштаба и найдены его значения для тактического, оперативного и стратегического уровней. Исследованы теоретико-игровые модели «наступление – оборона», в которых стороны решают ближайшую и последующую задачи, имея построение войск в один или несколько эшелонов. На первом этапе моделирования находится решение ближайшей задачи — прорыв (удержание) пунктов обороны, на втором — решение последующей задачи — разгром противника в глубине обороны (контратака и восстановление обороны). Для тактического уровня с использованием равновесия Нэша найдены решения ближайшей задачи (распределение сил сторон по пунктам обороны) в антагонистической игре по трем критериям: а) прорыв слабейшего пункта; б) прорыв хотя бы одного пункта; в) средневзвешенная вероятность. Показано, что наступающей стороне целесообразно использовать критерий «прорыв хотя бы одного пункта», при котором, при прочих равных условиях, обеспечивается максимальная вероятность прорыва пунктов обороны. На втором этапе моделирования для частного случая (стороны при прорыве и удержании пунктов обороны руководствуются критерием прорыва слабейшего пункта) решена задача распределения сил и средств между тактическими задачами (эшелонами) по двум критериям: а) максимизация вероятности прорыва пункта обороны и вероятности разгрома противника в глубине обороны; б) максимизация минимального значения из названных вероятностей (критерий гарантированного результата). Важным аспектом боевых действий является информированность. Рассмотрены несколько примеров рефлексивных игр (игр, характеризующихся сложной взаимной информированностью) и осуществления информационного управления. Показано, при каких условиях информационное управление увеличивает выигрыш игрока, и найдено оптимальное информационное управление.

Ключевые слова: математическая модель, бой, наступление, оборона, функция победы, теоретико-игровая модель, рефлексивное и информационное управление

COMPUTER RESEARCH AND MODELING
2022 VOL. 14 NO. 1 P. 179–203
DOI: 10.20537/2076-7633-2022-14-1-179-203

Ки&М

MODELS OF ECONOMIC AND SOCIAL SYSTEMS

UDC: 519.876.2

Game-theoretic and reflexive combat models

V. O. Korepanov[1,a], A. G. Chkhartishvili[1,b], V. V. Shumov[2,c]

[1]V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences,
65, Profsoyuznaya st., Moscow, 117997, Russia
[2]International Research Institute for Advanced Systems,
9, Prospekt 60-Letiya Oktyabrya, Moscow, 117312, Russia

E-mail: [a] kvsevolodo@mail.ru, [b] sandro_ch@mail.ru, [c] v.v.shumov@yandex.ru

Received 23.12.2021, after completion — 28.01.2022.
Accepted for publication 08.02.2022.

Modeling combat operations is an urgent scientific and practical task aimed at providing commanders and staffs with quantitative grounds for making decisions. The authors proposed the function of victory in combat and military operations, based on the function of the conflict by G. Tullock and taking into account the scale of combat (military) operations. On a sufficient volume of military statistics, the scale parameter was assessed and its values were found for the tactical, operational and strategic levels. The game-theoretic models «offensive – defense», in which the sides solve the immediate and subsequent tasks, having the formation of troops in one or several echelons, have been investigated. At the first stage of modeling, the solution of the immediate task is found — the breakthrough (holding) of defense points, at the second — the solution of the subsequent task — the defeat of the enemy in the depth of the defense (counterattack and restoration of defense). For the tactical level, using the Nash equilibrium, solutions were found for the closest problem (distribution of the forces of the sides by points of defense) in an antagonistic game according to three criteria: a) breakthrough of the weakest point, b) breakthrough of at least one point, and c) weighted average probability. It is shown that it is advisable for the attacking side to use the criterion of «breaking through at least one point», in which, all other things being equal, the maximum probability of breaking through the points of defense is ensured. At the second stage of modeling for a particular case (the sides are guided by the criterion of breaking through the weakest point when breaking through and holding defense points), the problem of distributing forces and facilities between tactical tasks (echelons) was solved according to two criteria: a) maximizing the probability of breaking through the defense point and the probability of defeating the enemy in depth defense, b) maximizing the minimum value of the named probabilities (the criterion of the guaranteed result). Awareness is an important aspect of combat operations. Several examples of reflexive games (games characterized by complex mutual awareness) and information management are considered. It is shown under what conditions information control increases the player's payoff, and the optimal information control is found.

Keywords: mathematical model, battle, offensive, defense, victory function, game-theoretic model, reflexive and information control

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2022, vol. 14, no. 1, pp. 179–203 (Russian).

1. Введение

Управление войсками представляет собой целенаправленную деятельность командиров, штабов и других органов управления по поддержанию боевой готовности и боеспособности войск, подготовке их к бою и руководству ими при выполнении поставленных задач [Тактика, 1987]. Двум основным фазам управления войсками (подготовка и ведение боевых действий) можно поставить в соответствие комплекс моделей, классификация которых представлена на рис. 1.

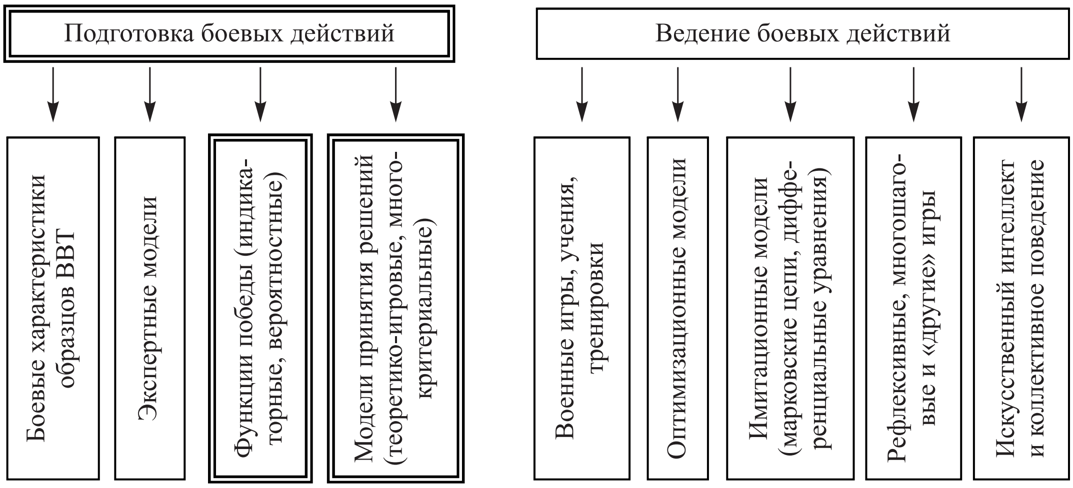

Рис. 1. Классификация моделей боевых действий

На этапе подготовки моделирование боевых действий в общем случае сводится к отысканию построения войск (размещению сил и средств на местности, их эшелонированию и распределению), при котором противнику наносится максимально возможный урон.

Последовательность моделирования может быть следующей.

На первом этапе выполняются анализ тактических характеристик боевых средств и расчет (возможно, с привлечением экспертов) параметра боевого превосходства подразделения (части, соединения) над ожидаемым в бою, сражении, операции подразделением (частью, соединением) противника в моральном и технологическом отношении [Буравлев, Цырендоржиев, Брезгин, 2009; Дорохов, Ищук, 2017].

На втором этапе выбирается вид функции победы подразделения (части, соединения) [Шумов, 2020]: индикаторного (игра полковника Блотто [Применение, 1961]) или вероятностного типа, а во втором случае — на основе отношения (функция Ю. Б. Гермейера [Гермейер, 1971], функция Г. Таллока [Tullock, 1980]) или разности сил (модель Д. Макфаддена и Д. Хиршляйфена [Jia, Skaperdas, Vaidya, 2013]).

Третий этап моделирования обычно заключается в постановке теоретико-игровой задачи «наступление – оборона» и отыскании оптимальных решений на распределение войск между задачами и пунктами (районами, позициями). По возможности также выполняется планирование (прогнозирование) темпа наступления при прорыве обороны и в ее глубине, обоснование мероприятий по введению противника в заблуждение.

На заключительном этапе выполняются верификация модели, проверка результатов расчетов на соответствие принципам военного искусства и опыту боевых действий (свидетельством «правильности» моделей является соответствие результатов моделирования принципам военного искусства [Осипов, 1915]).

Ведение боевых действий (вторая фаза управления) исследуется в ходе военных игр, учений и тренировок, проводимых с использованием имитационных и других моделей и систем поддержки принятия решений с различной степенью автоматизации процессов боя [Новиков, 2012; Aggregated, 2000] и не является предметом рассмотрения в настоящей работе.

Основоположником моделирования боевых действий по праву считается российский генерал Михаил Павлович Осипов. В своей работе «Влияние численности сражающихся сторон на их потери» [Осипов, 1915], опубликованной в 1915 г. в «Военном сборнике» (ныне — журнал «Военная мысль»), на основе анализа результатов 38 сражений регулярных войск XIX и XX веков им сформулирована модель динамики боя, найдено решение и оценены параметры модели.

Формальное обоснование моделей Осипова – Ланчестера [Осипов, 1915; Lanchester, 1916] (метод динамики средних) можно найти в работе [Вентцель, 1964]. Основные понятия теории антагонистических игр разработаны Э. Борелем [Borel, 1921]. В нашей стране и за рубежом модели боевых действий разрабатывались в рамках научной дисциплины «исследование операций» (см., например, работы [Гермейер, 1971; Краснощеков, Петров, 1983; Васин, Морозов, 2003; Васин, 2005; Васин, Краснощеков, Морозов, 2008; Morse, Kimball, 1951; Карлин, 1964; Вагнер, 1972]). Классическая теоретико-игровая задача «нападение – защита» сформулирована и решена Ю. Б. Гермейером [Гермейер, 1971] (как модификация модели О. Гросса), в которой две стороны распределяют ограниченные ресурсы по пунктам обороны.

Обзор работ по моделированию военных действий можно найти в статье Д. А. Новикова «Иерархические модели военных действий» [Новиков, 2012], где рассмотрены ланчестеровские модели, игра полковника Блотто (игра, в которой две стороны одновременно и независимо распределяют свои ресурсы между объектами — полями сражений, одновременными конкурсами/аукционами, группами избирателей и т. д.), а также функции конфликта индикаторного и вероятностного типов.

Субъекты принимают решения на основе иерархии представлений о существенных параметрах, причем неизбежно в силу тех или иных причин существует несовпадение между представлениями (рефлексивной реальностью) и объективной реальностью. Систематическое исследование рефлексии в управлении началось в 60-е годы XX века [Лефевр, 1973], в последнее десятилетие разработан комплекс математических моделей информационной и стратегической рефлексии [Новиков, Чхартишвили, 2012].

Цель настоящей работы — обобщение и развитие результатов по моделированию боевых действий [Корепанов, Новиков, 2011; Шумов, 2019; Шумов, Корепанов, 2020; Шумов, Корепанов, 2021] по следующим направлениям:

- во-первых, статистическое обоснование функции победы в бою, сражении, операции, учитывающей моральные и технологические характеристики боевых единиц, масштаб боевых действий;

- во-вторых, разработка теоретико-игровых моделей «наступление – оборона», в которых наступающая сторона решает две задачи: ближайшая (прорыв обороны противника) и последующая (разгром резервов противника, захват объекта в глубине обороны). Отметим, что в существующих теоретико-игровых моделях формализуется только первая задача, то есть такие модели можно называть, например, моделями встречного боя, но не моделями наступления (обороны);

- в-третьих, учет в моделях боя информированности сторон.

Таким образом, особенностью рассматриваемых ниже моделей боя является использование в них функций конфликта (победы), отражающих антагонистический характер конфликта: рост усилий первой стороны увеличивает ее шансы на успех, так же как и снижение усилий второй стороны [Hirshleifer, 2000]. Основной акцент в данной работе сделан на анализе функций победы и решении теоретико-игровых задач оптимального распределения ресурсов по задачам и направлениям (объектам, пунктам).

2. Теоретико-игровая модель «наступление – оборона»

Теоретико-игровая модель «наступление – оборона» является развитием моделей Гросса – Гермейера – Васина «нападение – защита» [Карлин, 1964; Гермейер, 1971; Васин, Морозов, 2003], в которых исследуется задача прорыва пунктов обороны. В качестве агрегированной функции технологии боя использована функция победы в бою (сражении, операции).

2.1. Функция победы в бою, сражении и операции

В общем случае функции конфликта (конкурса) подразделяются на (основание классификации — метод обоснования модели) стохастические (теоретико-вероятностные) модели; модели, построенные на основе аксиом (предположений); конкурсные и аукционные модели, полученные на основе дизайна экономических механизмов (mechanism design), модели на основе агрегирования микроэкономических показателей (подмоделей).

Положим, что в конфликте (конкурсе, аукционе) участвуют две стороны. Их усилия (ресурсы) обозначим через $x > 0$ и $y > 0$ соответственно. Любой комбинации усилий сторон поставлены в соответствие вероятности успеха (победы) — $p_x(x, y)$ и $p_y(x, y)$. Достаточно хорошо исследованным является следующий класс функций победы:

$$p_x(x, y) = \frac{f_x(x)}{f_x(x) + f_y(y)}, \tag{1}$$

где $f_x(\cdot)$ и $f_y(\cdot)$ — неотрицательные, строго возрастающие функции. Отметим наиболее часто встречающиеся функциональные формы модели (1). Модель Г. Таллока:

$$p_x(x, y) = \frac{x^\mu}{x^\mu + y^\mu} = \frac{(x/y)^\mu}{(x/y)^\mu + 1},$$

где $\mu > 0$ — параметр решительности сторон, относится к классу моделей на основе отношения усилий (результат зависит от отношения усилий сторон).

Модель Д. Макфаддена и Д. Хиршляйфена:

$$p_x(x, y) = \frac{\exp(\mu x)}{\exp(\mu x) + \exp(\mu y)} = \frac{1}{1 + \exp(\mu(y - x))},$$

относится к классу моделей на основе разности усилий. К этому же классу относится пробит-модель $p_x(x, y) = \Phi(x - y)$, где Φ — функция Лапласа.

Исторически первой функцией победы, используемой при моделировании боя, является функция победы Гросса – Гермейера. В работе [Гермейер, 1971] рассмотрена следующая целевая функция наступающих (общее количество средств нападения, прорвавшихся через все пункты):

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \max[x_i - \mu_i y_i, 0], \tag{2}$$

где μ_i — количество средств нападения, которое может уничтожить одна единица средств защиты на пункте i; x_i (y_i) — количество средств нападения (защиты); n — количество пунктов обороны.

Восстановим функцию победы в боестолкновении Ю. Б. Гермейера. Заметим, что в последнем выражении используется следующая вероятность прорыва обороны на пункте i:

$$\pi_x(x_i, y_i) = \begin{cases} \dfrac{\beta_i x_i - y_i}{\beta_i x_i}, & \beta_i x_i - y_i \geqslant 0, \\ 0, & \beta_i x_i - y_i < 0, \end{cases} \qquad \beta_i = \frac{1}{\mu_i},$$

а количество прорвавшихся единиц определяется как произведение $\pi_x(x_i, y_i)$ и x_i. То есть при $\pi_x(x_i, y_i) = 0$ вероятность победы $p_x(x_i, y_i) = 0{,}5$, так как $\beta_i x_i = y_i$. Естественно предположить, что $p_x(x_i, y_i) = 1$ при $y_i = 0$. Рассмотрим простейший линейный по $p_x(x_i, y_i)$ случай вида функции победы: $2p_x(x_i, y_i) - 1 = \pi_x(x_i, y_i)$. Тогда получим

$$2p_x(x_i, y_i) - 1 = \frac{\beta_i x_i - y_i}{\beta_i x_i}, \quad p_x(x_i, y_i) = \frac{2\beta_i x_i - y_i}{2\beta_i x_i}, \quad 2\beta_i x_i \geqslant y_i. \tag{3}$$

Содержательно трудно объяснить наличие в функции победы Ю. Гермейера сомножителя 2 в числителе и знаменателе и использование функции разности сил.

Укажем недостатки целевой функции вида (2). В военной науке доказано [Осипов, 1915], что всякий бой есть психологический акт, заканчивающийся отказом от него одной из сторон. Поэтому в ходе боя бойцы делятся на три группы: активно участвующие в бою, убитые или раненные, отказавшиеся от участия в бою (дезертиры, имитирующие болезнь и т. д.). В модели (2) третья группа не учитывается, по умолчанию полагается, что количество прорвавшихся единиц равно разности между общим их количеством и количеством пораженных единиц.

В работах А. А. Васина и Н. И. Цыганова [Васин, Цыганов, 2021; Васин, Цыганов, 2021a] впервые исследована аналитическая зависимость формы функции победы от масштаба боя (корня из среднего геометрического начальных численностей сторон).

С. Скапердас и др. отмечают, что, несмотря на наличие значительного числа публикаций по моделированию конфликтов, конкурсов и аукционов в различных сферах деятельности, лишь в небольшом количестве публикаций затрагиваются вопросы верификации функций конфликта на реальных данных [Jia, Skaperdas, Vaidya, 2013].

Рассмотрим расширение функции конфликта Г. Таллока в целях моделирования боя, сражения, операции. Определим вероятность победы первой стороны по формуле [Шумов, 2020]

$$p_x(x, y) = \frac{(\beta x)^m}{(\beta x)^m + (y)^m} = \frac{q^m}{q^m + 1}, \quad q = \frac{\beta x}{y} > 0, \tag{4}$$

где $\beta > 0$ — параметр боевого (морального и технологического) превосходства первой стороны над второй, q — отношение сил сторон, m — параметр формы (масштаба боевых действий). В общем случае технологическое (тактическое) превосходство (и значение параметра β) определяется, во-первых, тактико-техническими характеристиками сил и средств сторон и, во-вторых, характеристиками местности и степенью ее подготовки к боевым действиям.

Если сделать замену переменной, то получим распределение Парето:

$$p_x(z) = \frac{q^m}{q^m + 1} = \frac{z^m - 1}{z^m} = 1 - z^{-m}, \quad z^m = q^m + 1, \quad z \geqslant 1, \tag{5}$$

обладающее свойством самоподобия (распределение значений, превышающих величину $z_0 \geqslant 1$, также является распределением Парето). Содержательно это означает, что боевые действия батальона, полка могут быть описаны тем же распределением, что и боевые действия дивизии, в составе которой они действуют. Математическому свойству самоподобия соответствует важнейший принцип военного искусства, требующий учета одних и тех же факторов, определяющих успех любого боя, сражения и операции [Речь, 1985].

Перечислим особенности функции победы (4). Во-первых, вероятность победы второй стороны есть вероятность проигрыша первой, то есть $p_y(x, y) = 1 - p_x(x, y)$. Во-вторых, функция $p_x(x, y)$ строго возрастает по x и строго убывает по y. В-третьих, функция симметрична или анонимна (если усилия сторон поменять местами, то их вероятности победы также изменятся) и относится к классу моделей на основе отношения сил, что соответствует сложившейся практике оперативно-тактических расчетов [Morse, Kimball, 1951; Цыгичко, Стоили, 1997]. В-четвертых, внутри одной формы боевых (военных, специальных) действий функция победы является однородной функцией нулевой степени, то есть $p_y(tx, ty) = p_y(x, y)$, $t > 0$. В-пятых, параметр формы m функции победы позволяет учесть особенности специальных действий (борьбы с нерегулярными формированиями противника), боевых действий на тактическом и оперативном уровне, военных действий (стратегических операций).

Аналитическая оценка параметра β боевого превосходства вытекает из определения боя (совокупность согласованных по цели, месту и времени ударов, огня и маневра войск) и исследована ранее [Шумов, 2020]. Статистическая оценка параметра β выполнена методом максимального правдоподобия.

Для статистической оценки параметра формы необходимо собрать и обработать данные по результатам боев, сражений, операций (исход конфликта, боевой состав участников и др.). Если на оперативном и стратегическом уровне статистические данные представлены в литературе (см. [Осипов, 1915; Великая, 2010] и др.), то на тактическом уровне (бои, в которых участвуют общевойсковые и другие подразделения) достоверных данных очень мало по следующим причинам: во-первых, необходимо сопоставить архивные данные о численности и боевом составе сторон, включая разграничительные линии; во-вторых, одно подразделение (часть, соединение) может действовать на стыке противника, и не всегда возможно из архивных данных выявить численный состав противника, принимавшего участие в бою даже при наличии исходных данных; в-третьих, боевые действия отличаются динамизмом и в ходе боя численности сторон могут существенно меняться (ввод в бой новых подразделений, вывод подразделений в резерв или перемещение в новый район). В этой связи для оценки параметра формы на тактическом уровне использовалась международная база данных инцидентов в морском пространстве, по которой можно точно установить численности сторон и исход силового акта.

На рис. 2 показаны доли успешных пиратских и разбойных актов на море, по данным международной статистики инцидентов в морском пространстве за 2010–2020 годы (объем выборки — $n = 714$, оценка параметра превосходства пиратов — $\beta = 1{,}42$) [Шумов, Сидоренко, Цезарь, 2021].

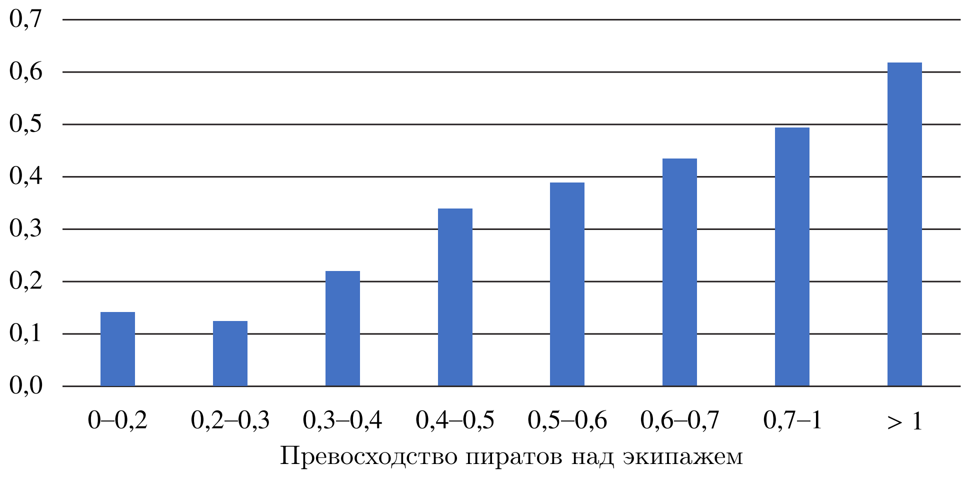

Рис. 2. Доля успешных пиратских и разбойных актов на море

Параметр формы равен $m = 1$ с уровнем значимости 0,05 по статистическому критерию хи-квадрат Фишера (при шести степенях свободы).

На рис. 3 показаны доли побед сильнейшей по численности стороны в сражениях XIX – нач. XX веков (данные взяты из [Осипов, 1915], $\beta = 1$, объем выборки — $n = 38$). Параметр формы равен $m = 3$ с уровнем значимости 0,01 по статистическому критерию хи-квадрат Пирсона (при четырех степенях свободы).

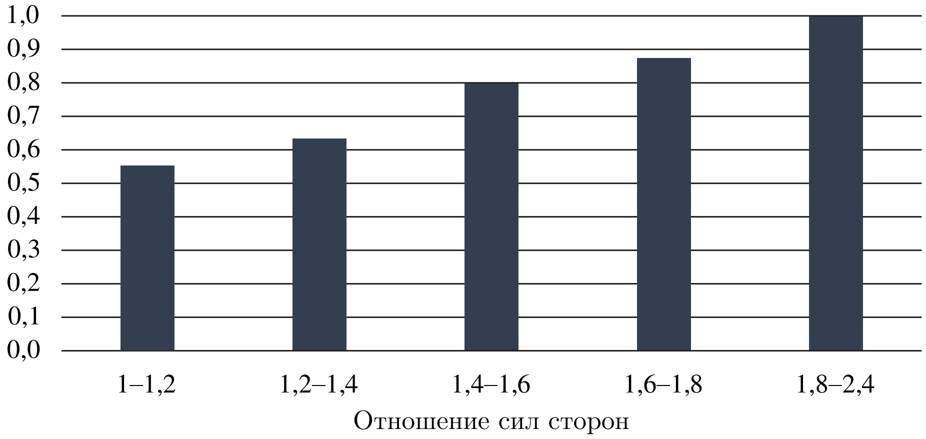

Рис. 3. Доля побед сильнейшей стороны в сражениях XIX – нач. XX вв.

На рис. 4 показаны доли побед сильнейшей по численности стороны в стратегических оборонительных и наступательных операциях в годы Великой Отечественной войны 1941–1945 гг. (данные взяты из [Великая, 2010], $\beta = 1$, объем выборки — $n = 46$). Параметр формы равен $m =$ $= 3$ с уровнем значимости 0,01 по статистическому критерию хи-квадрат Пирсона (при четырех степенях свободы).

Рис. 4. Доля побед сильнейшей стороны в стратегических операциях в годы Великой Отечественной войны

Из формулы (4) находим требуемое отношение сил q для победы над противником с заданной вероятностью p_x:

$$q = \sqrt[m]{\frac{p_x}{1 - p_x}}. \tag{6}$$

Результаты расчетов представлены в табл. 1.

Таблица 1. Необходимое превосходство над противником

Вероятность победы над противником, p_x	Параметр m формы модели (6)			
	m = 0,5	m = 1	m = 2	m = 3
0,7	5,4 : 1	2,3 : 1	1,5 : 1	1,3 : 1
0,75	9,0 : 1	3,0 : 1	1,7 : 1	1,4 : 1
0,8	16,0 : 1	4,0 : 1	2,0 : 1	1,6 : 1
0,9	81,0 : 1	9,0 : 1	3,0 : 1	2,1 : 1

При преобладании нетрадиционных форм боя (нападения из засад, партизанские действия и т. д.) и при моделировании контртеррористических и специальных операций целесообразно использовать значение параметра формы m = 0,5. Чтобы добиться высокой вероятности победы, необходимо обеспечить многократное превосходство в силах и средствах над противником. Например, вероятность победы 0,75 достигается при боевом превосходстве над противником q = 9. Данный результат подтверждается практикой контртеррористических и специальных операций: опыт внутренних конфликтов свидетельствует о том, что соотношение численности правительственных войск к повстанцам должно быть в пределах от 8 : 1 до 10 : 1 (то есть восемь-десять единиц к одной). Многие государства Запада исходят именно из таких показателей при определении численности сил правопорядка [Контртеррористическая, 2000].

Действия подразделений и частей в наступлении и обороне могут быть описаны моделью отношения сил со значением параметра формы m = 1. В этом случае вероятность победы 0,75 достигается при трехкратном превосходстве в силах и средствах над противником, что соответствует сложившимся представлениям о ведении общевойскового боя.

При моделировании действий дивизий (корпусов, армий) в сражении (операции) представляется обоснованным использовать значение параметра формы m = 2–3. Здесь успех сражения (операции) почти гарантирован при 2–3-кратном общем превосходстве над противником в силах и средствах. Президент Академии военных наук генерал армии М. А. Гареев отмечал, что за время Великой Отечественной войны не было ни одной успешной оборонительной операции, проведенной значительно меньшими силами, чем у наступающего противника. Возможно отражение атак превосходящих сил противника в тактическом звене, но не в оперативно-стратегическом [Ионин, 2005].

Следовательно, содержательная и статистическая оценки параметра формы функции победы дают основания полагать, что параметр формы отражает характер и масштаб действий. Актуальной научной задачей является статистическая оценка параметра формы функции победы в контртеррористических и специальных операциях, характерными особенностями которых являются следующие: во-первых, стремление противника по возможности затеряться в толпе гражданских лиц; во-вторых, целью операции является не только разгром противника, но и его нейтрализация, недопущение выхода из определенного района, для чего создаются специальные элементы боевого порядка (группы блокирования и прикрытия, фильтрационные пункты и т. д.).

2.2. Постановка задачи на моделирование

Пусть имеется n обороняемых пунктов (районов, участков, полос) с номерами $i = 1, \ldots, n$, где возможен прорыв средствами наступающих; R_x и R_y — количества боевых средств у наступающих (игрок Н) и обороняющихся (игрок О). Ресурсы R_x и R_y полагаются бесконечно делимыми, что позволит учесть действия своих, приданных и поддерживающих единиц, когда их усилия попеременно направлены на различные пункты и задачи.

Наступающая сторона состоит из боевых единиц, предназначенных для решения ближайшей (прорыва обороны противника) и последующей (отражения контратаки резервов противника, занятия рубежа или объекта в глубине обороны) задачи.

Вектор средств игрока Н:

$$x = (x_1, \dots, x_n, u) \in X = \left\{ x \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} x_i + u = R_x \right\}, \quad r_x = R_x - u, \quad x_i, u \in \Re^+, \tag{7}$$

где $x_i \geqslant 0$ — количество средств решения ближайшей задачи (первого эшелона), действующих на пункте i; r_x — суммарное количество средств решения ближайшей задачи; $u > 0$ — количество средств решения последующей задачи (второго эшелона).

Обороняющаяся сторона состоит из войск первого эшелона и резерва (или второго эшелона). Задача первого эшелона заключается в недопущении прорыва пунктов обороны, задача резерва (второго эшелона) — в нанесении контрудара в случае прорыва обороны или удержании второй линии обороны.

Вектор средств игрока О:

$$y = (y_1, \dots, y_n, w) \in Y = \left\{ y \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} y_i + w = R_y \right\}, \quad r_y = R_y - w, \quad y_i, w \in \Re^+, \tag{8}$$

где $y_i \geqslant 0$ — количество средств первого эшелона, имеющих задачу обороны пункта i; r_y — суммарное количество средств решения первой задачи (удержания пунктов обороны); $w > 0$ — количество средств резерва, предназначенных для нанесения контрудара в случае прорыва пункта i (вторая задача).

Положим, что стороны обладают общим знанием, принимают решения одновременно и независимо. Тогда мы имеем антагонистическую игру (выигрыш первой стороны есть проигрыш второй) и для поиска оптимальных решений следует найти равновесие Нэша.

С использованием известных методов теории игр [Гермейер, 1971; Васин, Морозов, 2005; Писарук, 2019] авторами разработана теоретико-игровая модель боевых действий, которая представлена ниже.

2.3. Оптимальное распределение сил и средств при прорыве пунктов обороны (критерий — прорыв слабейшего пункта)

Вероятность решения наступающими ближайшей задачи определим в виде ($m = 1$, тактический уровень)

$$f(x, y) = \max_{i=1,\dots,n} \frac{\beta_i x_i}{\beta_i x_i + y_i}, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = r_x, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i = r_y \tag{9}$$

(нанесение удара по слабейшему пункту обороны противника). В целевой функции (9) используется вероятностная функция победы в конфликте, соответствующая традиции военного моделирования и лишенная отмеченных выше недостатков.

Содержательно целевая функция (9) отражает стремление наступающих прорвать оборону на слабейшем пункте противника. Цель обороняющихся — не допустить прорыва на этом пункте, целевая функция — $1 - f(x, y)$. Мы имеем антагонистическую игру. Положим, что продолжительность циклов боевых действий сторон примерно одинакова, тогда есть основания считать, что стороны принимают решения независимо и одновременно и для нахождения решения использовать равновесие Нэша.

Доказано [Шумов, Корепанов, 2021], что оптимальная стратегия обороняющихся (распределение ресурса по пунктам обороны) равна

$$y^0 : y_i^0 = \frac{\beta_i}{\sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j} r_y = \frac{\beta_i}{B} r_y, \quad B = \sum_{j=1}^{n} \beta_j, \quad i = 1, \dots, n, \tag{10}$$

а наступающие используют смешанную стратегию, распределяя весь ресурс на один из пунктов с вероятностями

$$\pi_i^0 = \frac{\beta_i}{B}, \quad i = 1, \dots, n. \tag{11}$$

При этом значение игры при прорыве пунктов обороны равно

$$v = \frac{r_x B}{r_x B + r_y}. \tag{12}$$

Если объекты обороны однородны ($\beta = \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n$), то значение игры равно

$$v = \frac{n\beta r_x}{n\beta r_x + r_y}. \tag{13}$$

Вынужденность обороны непосредственно следует из последнего выражения — с ростом числа объектов обороны эффективность наступления существенно возрастает.

Важно отметить, что оптимальные решения сторон (10) и (11) при прорыве пунктов обороны не зависят от ожидаемой численности боевых единиц противника. Они целиком и полностью определяются характеристиками местности и структурой формирований сторон, участвующих в боевых действиях (то есть параметром β).

2.4. Оптимальное распределение сил и средств при прорыве пунктов обороны (критерий — прорыв хотя бы одного пункта)

В ряде случаев задача прорыва пунктов обороны на тактическом уровне ($m = 1$) может быть описана целевой функцией игрока Н вида

$$G(x, y) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - p_x(x_i, y_i)) = 1 - \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i}{\beta_i x_i + y_i}\right), \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = r_x, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i = r_y \tag{14}$$

(вероятность прорыва хотя бы одного пункта обороны противника).

Решение задачи не изменится, если записать целевую функцию в эквивалентной форме:

$$1 - \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i}{\beta_i x_i + y_i}\right) \Rightarrow -\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i}{\beta_i x_i + y_i}\right) \Rightarrow -\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{y_i}{\beta_i x_i + y_i}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(x, y) = \sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{\beta_i x_i + y_i}{y_i}\right). \tag{15}$$

Рассмотрим функцию

$$h(x, y) = \ln\left(a\frac{x}{y} + 1\right), \quad x, y, a > 0. \tag{16}$$

Ее производные по y равны

$$h_y' = -ax[axy + y^2]^{-1}, \quad h_y'' = ax(ax + 2y)[axy + y^2]^{-2} \geqslant 0.$$

Следовательно, $h(x, y)$ выпукла и функция (15) выпукла по y (сумма выпуклых функций выпукла). Аналогично легко показать, что функция (15) вогнута по x. Следовательно, существует решение игры в чистых стратегиях (см. [Васин, Морозов, 2005]), а значение игры равно верхней и нижней цене игры (которые совпадают):

$$v = \underline{v} \max_{x\in X}\min_{y\in Y} g(x, y) = \min_{y\in Y}\max_{x\in X} g(x, y) = \overline{v}. \tag{17}$$

Чтобы найти решение игры, составим две функции Лагранжа, найдем их производные и приравняем нулю:

$$L(x,\ \lambda) = -\sum_i \ln\left(\beta_i \frac{x_i}{y_i} + 1\right) + \lambda\left(\sum_i x_i - r_x\right), \quad L(y,\ \mu) = \sum_i \ln\left(\beta_i \frac{x_i}{y_i} + 1\right) + \mu\left(\sum_i y_i - r_y\right),$$

$$\frac{\partial L(x,\ \lambda)}{\partial x_i} = -\frac{\beta_i}{\beta_i x_i + y_i} + \lambda = 0, \quad i = 1,\ \ldots,\ n, \tag{18}$$

$$\frac{\partial L(y,\ \mu)}{\partial y_i} = -\frac{\beta_i x_i}{y_i(\beta_i x_i + y_i)} + \mu = 0, \quad i = 1,\ \ldots,\ n. \tag{19}$$

Разделим (19) на (18), предварительно перенеся λ и μ в правые части уравнений:

$$\frac{x_i}{y_i} = \frac{\mu}{\lambda}. \tag{20}$$

С учетом ограничений $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = r_x$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i = r_y$ из (20) имеем

$$\frac{r_x}{r_y} = \frac{\mu}{\lambda}. \tag{21}$$

Тогда из (18) и (21) находим

$$x_i^0 = \frac{\beta_i r_x}{S(\beta_i r_x + r_y)}, \quad i = 1,\ \ldots,\ n, \quad S = \sum_{k=1}^{n} \frac{\beta_k}{\beta_k r_x + r_y}, \tag{22}$$

$$y_i^0 = \frac{\beta_i r_y}{S(\beta_i r_x + r_y)}, \quad i = 1,\ \ldots,\ n. \tag{23}$$

Значение игры равно

$$v = 1 - \prod_{i=1}^{n} \frac{r_y}{\beta_i r_x + r_y}. \tag{24}$$

2.5. Оптимальное распределение сил и средств при прорыве пунктов обороны (критерий — средневзвешенная вероятность прорыва)

Пусть пункты обороны характеризуются ценностями $V_i > 0$, $i = 1,\ \ldots,\ n$, тогда функции сторон на тактическом уровне ($m = 1$) будут иметь вид (средневзвешенные значения вероятностей захвата пунктов)

$$f_x(x,\ y) = \sum_{i=1}^{n} V_i \frac{\beta_i x_i}{\beta_i x_i + y_i}, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = r_x, \tag{25}$$

$$f_y(x,\ y) = \sum_{i=1}^{n} V_i \frac{y_i}{\beta_i x_i + y_i}, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i = r_y \tag{26}$$

(игра с постоянной суммой).

В антагонистической игре (25)–(26) оптимальные стратегии сторон равны (см. вероятностную модель [Новиков, 2012, с. 33–36])

$$x_i^0 = \frac{V_i \beta_i r_x}{S(\beta_i r_x + r_y)^2} = \frac{V_i \beta_i r_x}{(\beta_i r_x + r_y)^2 \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{V_i \beta_i}{(\beta_i r_x + r_y)^2}}, \quad i = 1,\ \ldots,\ n, \tag{27}$$

$$y_i^0 = \frac{V_i \beta_i r_y}{S(\beta_i r_x + r_y)^2} = \frac{V_i \beta_i r_y}{(\beta_i r_x + r_y)^2 \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{V_i \beta_i}{(\beta_i r_x + r_y)^2}}, \quad i = 1,\ \ldots,\ n. \tag{28}$$

В ситуации равновесия значения целевых функций равны

$$f_x(x^0, y^0) = \sum_{i=1}^{n} V_i \frac{\beta_i r_x}{\beta_i r_x + r_y}, \quad f_y(x^0, y^0) = \sum_{i=1}^{n} V_i \frac{r_y}{\beta_i r_x + r_y}. \tag{29}$$

Пример 2.1. Пусть $r_x = 200$, $r_y = 100$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 0{,}5$, $\beta_3 = 0{,}5$, $V_1 = V_2 = V_3 = 1/3$, $n = 3$. Найти оптимальные решения сторон и значения игры по трем критериям прорыва пунктов обороны.

Результаты расчетов представим в виде таблицы 2.

Таблица 2. Оптимальные решения сторон и значения игры по трем критериям

Показатели	Прорыв слабейшего пункта обороны (9)	Прорыв хотя бы одного пункта обороны (14)	Средневзвешенная вероятность прорыва (25)–(26)
Оптимальная стратегия наступающих (игрок Н)	Вероятности выбора пункта для удара всеми силами: 0,5; 0,25; 0,25	Распределение единиц по пунктам: 80; 60; 60	Распределение единиц по пунктам: 61,5; 69,2; 69,2
Оптимальная стратегия обороняющихся (игрок О)	Распределение единиц по пунктам: 50; 25; 25	Распределение единиц по пунктам: 40; 30; 30	Распределение единиц по пунктам: 30,8; 34,6; 34,6
Значение игры	0,8	0,92	0,56; 0,44

В рассмотренном примере наступающим целесообразно на этапе подготовки к бою руководствоваться критерием прорыва хотя бы одного пункта обороны.

В предположении, что пункты обороны однородны ($\beta = \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_n$), сравним значения игры по критерию прорыва слабейшего пункта v_1 и критерию прорыва хотя бы одного пункта v_2:

$$v_1 = 1 - \frac{r_y}{n\beta r_x + r_y} = 1 - s_1, \quad v_2 = 1 - \left(\frac{r_y}{\beta r_x + r_y}\right)^n = 1 - s_2,$$

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{\left(\frac{\beta r_x}{r_y} + 1\right)^n}{\frac{n\beta r_x}{r_y} + 1}.$$

Из последнего выражения следует, что с увеличением количества пунктов обороны n преимущество использования наступающими критерия прорыва хотя бы одного пункта становится очевидным.

2.6. Оптимальное распределение сил и средств между ближайшей и последующей задачами

Критерий наступающих в модели «наступление – оборона» можно сформулировать так: максимизация вероятности прорыва пунктов обороны (ближайшая задача) и захвата объекта в глубине обороны (разгрома резервов противника — последующая задача).

Если обе стороны при решении ближайшей задачи руководствуются критерием прорыва слабейшего пункта обороны, то мы имеем на тактическом уровне ($m = 1$) следующую целевую функцию игрока Н:

$$F(u, w) = \frac{B(R_x - u)}{B(R_x - u) + (R_y - w)} \times \frac{\delta u}{\delta u + w}, \quad B = \sum_{j=1}^{n} \beta_j, \tag{30}$$

где δ — параметр боевого превосходства наступающих при решении ими последующей задачи. Первый сомножитель отражает решение ближайшей задачи, второй — последующей.

Доказано [Шумов, Корепанов, 2021], что сторонам целесообразно использовать чистые стратегии:

$$u^0 = R_x D, \quad w^0 = R_y D, \quad D = \frac{R_y + BR_x}{2R_y + (B+\delta)R_x} = \frac{1 + B\frac{R_x}{R_y}}{2 + (B+\delta)\frac{R_x}{R_y}}. \tag{31}$$

Содержательно значение параметра D есть доля войск, выделенных во второй эшелон (резерв). Эта доля существенно зависит от значения параметра δ и в меньшей степени — от значения параметра B и отношения ресурсов сторон.

Если все пункты обороны однородны ($\beta = \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_n$), то параметр D равен

$$D = \frac{R_y + n\beta R_x}{2R_y + (n\beta + \delta)R_x}.$$

Найденные зависимости распределения боевых единиц обороняющейся стороны по задачам (эшелонам) соответствуют взглядам военных специалистов США на подготовку и ведение оборонительных действий. В частности, когда обороняющиеся не уступают наступающим в мобильности и при поспешно занимаемой обороне организуется мобильная оборона, при которой значительная часть сил и средств (до двух третьих) выделяется во второй эшелон (резерв) с целью разгрома вклинившегося противника в ходе контратак. Позиционная оборона основывается на прочном удержании в течение определенного времени заранее подготовленных в инженерном отношении оборонительных позиций, максимальном использовании огневых средств, расположении главных сил и средств в основном районе обороны соединения.

Сторонами может использоваться не критерий максимизации (минимизации) вероятности решения первой и второй задач (30), а критерий достижения гарантированного результата:

$$F(u, w) = \min\left(\frac{B(R_x - u)}{B(R_x - u) + R_y - w}; \frac{\delta u}{\delta u + w}\right), \quad 0 \leqslant u \leqslant R_x, \quad 0 \leqslant w \leqslant R_y, \quad B > \delta \tag{32}$$

(наступающие оценивают вероятность прорыва слабейшего пункта обороны и вероятность выполнения последующей задачи и принимают в качестве критерия минимальное значение, подлежащее максимизации). Соответственно, цель обороняющихся может быть оценена критерием $1 - F(u, w)$.

Доказано [Шумов, Корепанов, 2021], что в антагонистической игре на тактическом уровне с целевой функцией (32) оптимальное количество сил и средств, выделяемое наступающими для решения последующей задачи, равно

$$u^0 = \frac{B}{B+\delta} R_x. \tag{33}$$

Доля сил и средств, выделяемых наступающими на решение последующей задачи, определяется значениями параметра B боевого превосходства наступающих при прорыве пунктов обороны и параметра δ боевого превосходства наступающих в глубине обороны противника (при отражении его контратаки). Соответственно, оптимальное количество сил и средств, выделяемых для решения ближайшей задачи, равно $R_x - u^0$.

Оптимальная смешанная стратегия обороняющихся заключается в следующем. Обороняющиеся с вероятностью $\frac{\delta}{B+\delta}$ распределяют все силы и средства на второй линии обороны, а с вероятностью $\frac{B}{B+\delta}$ — на первой. При этом оптимальное значение игры равно

$$v = \frac{\delta B R_x}{\delta B R_x + (B+\delta)R_y}. \tag{34}$$

При однородности пунктов обороны ($\beta = \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_n$) значение игры равно

$$v = \frac{\delta n \beta R_x}{\delta n \beta R_x + (n\beta + \delta) R_y}.$$

Рассмотрим содержательную интерпретацию задачи. Рассуждая об итогах Варшавско-Познаньской операции войск 1-го Белорусского фронта, Г. К. Жуков отмечал, что противник способен определить время и направление главного удара, и не было полной гарантии о достижении оперативно-тактической внезапности, поэтому он, как командующий, шел на худшее и расчет строил также на худшее. «Что противник мог сделать, когда бы он разгадал наш замысел? Он мог оставить в первом эшелоне обороны, то есть на своем переднем крае, усиленное прикрытие, станковые пулеметы, ручное автоматическое оружие, отдельные пушки и даже поставить танки. Любую разведку, которую бы мы вели, он отбрасывал бы и этим создавал впечатление, что он здесь сидит крепко. В глубине обороны противник мог расставить макеты, иметь дежурные средства, маневрируя которыми по траншеям мог создать впечатление, что непосредственные позиции, прилегающие к переднему краю на глубину 2–3 км, живут и не только живут, но и стреляют. Главные же силы он мог держать в 5–6 км от переднего края. Потеряв наконец от нашего первого удара 5–6 км территории и заставив нас расстрелять артзапасы, он достиг бы срыва нашей операции» [Речь, 1985].

Для достижения успеха операции Г. К. Жуков предложил и реализовал план ложной атаки: «Значит, сила артудара, сила атаки не должны вызвать какое-либо подозрение у противника, и если окажется, что противник будет захвачен врасплох, дрогнет и не выдержит этого удара, мы используем этот успех, немедленно перейдем в атаку всеми силами и будем осуществлять свой генеральный план, то есть будем вести генеральную атаку. Допустим, что противник пошел все же на обман и очистил бы территорию на 3–5 км, дал возможность нашему первому эшелону атаки приблизиться к истинному переднему краю, а там бы его остановил и атака бы захлебнулась. В этом случае максимум через 1–1,5 часа после передачи соответствующих команд и распоряжений мы могли перейти к плану осуществления артподготовки генеральной атаки. Артсредства с основных позиций, не делая никаких перемещений, потому что артиллерия настолько близко была поставлена к переднему краю (дивизионная артиллерия располагалась в 700–1000 метров от переднего края), могли выполнить задачи артподготовки» [Речь, 1985].

3. Рефлексия и информационное управление в модели «наступление – оборона»

Одним из фундаментальных свойств процесса принятия решений является то, что наряду с природной («объективной») реальностью существует ее отражение в сознании. При этом во многих случаях между природной реальностью и ее образом в сознании существует неизбежный зазор, несовпадение. Целенаправленное изучение этого феномена традиционно связано с термином «рефлексия».

Как известно, игра с полной информированностью в нормальной форме задается перечислением множества игроков, множеств их допустимых действий и набором их целевых функций. Однако существенным является вопрос: известно ли само это описание участникам игры? Долгое время в теории игр «по умолчанию» предполагалось, что игра известна всем ее участникам и, более того, она является *общим знанием* среди участников. Этот технический термин — «общее знание» (common knowledge) — был введен философом Дэвидом Льюисом [Lewis, 1969], а в теорию игр — Робертом Ауманном [Aumann, 1976] для обозначения факта, о котором известно всем игрокам, и всем игрокам известно, что о нем известно всем игрокам, и т. д.

Ясно, что далеко не всегда игра является общим знанием. Для моделирования таких ситуаций введено понятие *рефлексивной игры* (см. [Новиков, Чхартишвили, 2012]). В отличие от игры с общим знанием целевые функции игроков в рефлексивной игре зависят (кроме набора действий игроков) от *неопределенного параметра*, называемого также состоянием природы. У каждого из игроков, вообще говоря, может быть свое представление о том, какое состояние природы реализовалось. Далее, у каждого агента может быть свое представление о преставлениях оппонентов, о представлениях о представлениях и т. д. Совокупность всех этих представлений образует структуру информированности игры. Таким образом, описание рефлексивной игры отличается от описания «обычной» игры в нормальной форме наличием структуры информированности (см. [Новиков, Чхартишвили, 2012; Fedyanin, 2020]).

Если у одной из сторон имеется возможность сформировать ту или иную структуру информированности, мы имеем дело с задачей *информационного управления* (см. [Новиков, Чхартишвили, 2012]) — целенаправленного формирования представлений, выгодных управляющему субъекту. В данном разделе будут рассмотрены примеры рефлексивных игр и задач информационного управления в модели «наступление – оборона» на тактическом уровне ($m = 1$) при различных неопределенных параметрах.

3.1. Рефлексия и информационное управление в задаче прорыва пунктов обороны (критерий — прорыв хотя бы одного пункта)

Рассмотрим пример рефлексивной игры прорыва пунктов обороны на тактическом уровне с критерием прорыва хотя бы одного пункта (п. 2.4), в которой неопределенным параметром является суммарное количество средств нападающей стороны. Пусть сторона обороны — игрок О — считает, что этот параметр принимает значение ρ_x, в то время как истинным значением является r_x, и все это известно стороне нападения — игроку Н. Такая структура информированности может быть представлена в виде графа с тремя вершинами (см. рис. 5), на котором через ОН обозначен игрок Н с точки зрения игрока О, а стрелки обозначают адекватную информированность игроков друг о друге. Игрок ОН является *фантомным*, то есть он существует лишь в сознании игрока О и не совпадает с реальным игроком Н (игрок ОН считает значением неопределенного параметра ρ_x).

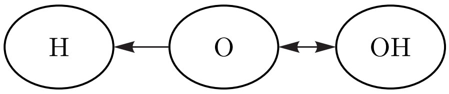

Рис. 5. Граф рефлексивной игры при информированной стороне нападения

Итак, субъективно игрок О играет в антагонистическую игру с целевой функцией

$$G(x, y) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{y_i}{\beta_i x_i + y_i} \right), \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = \rho_x, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i = r_y,$$

и собственной стратегией $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Как было показано в п. 2.4, оптимальная стратегия игрока О в этой игре имеет следующий вид:

$$y_i^0(\rho_x) = \frac{\beta_i r_y}{\widetilde{S}(\beta_i \rho_x + r_y)}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad \widetilde{S} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\beta_k}{\beta_k \rho_x + r_y}. \tag{35}$$

Игрок Н использует критерий, задаваемый целевой функцией

$$G(x, y) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{y_i}{\beta_i x_i + y_i} \right), \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = r_x, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i = r_y. \tag{36}$$

Найдем оптимальную стратегию игрока Н $x = (x_1, \ldots, x_n)$ при фиксированной стратегии (35) игрока О. Для этого воспользуемся уравнениями (18), которые запишем в следующем виде:

$$x_i = \frac{1}{\lambda} - \frac{y_i}{\beta_i}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{37}$$

Просуммировав уравнения (37) и воспользовавшись соотношением $\sum_{i=1}^{n} x_i = r_x$, получаем

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{n}\left(r_x + \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{\beta_i}\right),$$

откуда с учетом тех же соотношений (37) следует

$$x_i = \frac{1}{n}\left(r_x + \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{\beta_i}\right) - \frac{y_i}{\beta_i}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Подставляя в последнее соотношение вместо y_i значение $y_i^0(\rho_x)$ из (35), получаем в итоге оптимальную стратегию игрока Н:

$$x_i^0 = \frac{1}{n}\left(r_x + \sum_{i=1}^{n} \frac{r_y}{\widetilde{S}(\beta_i\rho_x + r_y)}\right) - \frac{r_y}{\widetilde{S}(\beta_i\rho_x + r_y)}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{38}$$

Предположим теперь, что игрок Н имеет возможность сформировать у игрока О любое представление о значении неопределенного параметра в пределах множества R. Тогда ответом на вопрос о том, какое именно представление ему выгодно сформировать, является решение следующей оптимизационной задачи:

$$G(x^0, y^0(\rho_x)) \xrightarrow[\rho_x \in R]{} \max.$$

С учетом (36), (35) и (38) эту задачу можно записать следующим образом:

$$\nu(\rho_x) = 1 - \frac{(nr_y)^n}{\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{r_x\beta_i + r_y}{\rho_x\beta_i + r_y}\right)^n \prod_{i=1}^{n}\left(\beta_i\rho_x + r_y\right)} \xrightarrow[\rho_x \in R]{} \max. \tag{39}$$

Решение задачи (39) описывает следующее утверждение.

Утверждение 3.1. Если параметры превосходства для каждого пункта одинаковы, то есть выполнено условие

$$\beta_1 = \ldots = \beta_n, \tag{40}$$

то функция $\nu(\rho_x)$ является константой. В случае невыполнения условия (40) функция $\nu(\rho_x)$ строго убывает на интервале $0 < \rho_x < r_x$ и строго возрастает при $\rho_x > r_x$.

Доказательство. При помощи прямой подстановки легко убедиться, что при выполнении условия (40) функция $\nu(\rho_x)$ является константой, поэтому далее будем считать, что это условие не выполняется.

Далее, легко видеть, что промежутки убывания и возрастания функции $\nu(\rho_x)$ совпадают с промежутками соответственно убывания и возрастания функции

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{r_x\beta_i + r_y}{\rho_x\beta_i + r_y}\right)^n \prod_{i=1}^{n}\left(\beta_i\rho_x + r_y\right). \tag{41}$$

Введем обозначения

$$\gamma_i = r_x + \frac{r_y}{\beta_i}, \quad \Delta = \rho_x - r_x,$$

при помощи которых запишем функцию (41) в следующем виде:

$$\varphi(\Delta) = \left(\prod_{i=1}^{n} \beta_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i}{\gamma_i + \Delta}\right)^n \prod_{i=1}^{n} \left(\gamma_i + \Delta\right), \quad \Delta > -r_x.$$

Функция $\varphi(\Delta)$ является на рассматриваемом множестве непрерывно-дифференцируемой, поэтому промежутки ее монотонности определяются знаком производной. Найдем производную:

$$\varphi'(\Delta) = \left(\prod_{i=1}^{n} \beta_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i}{\gamma_i + \Delta}\right)^{n-1} \prod_{i=1}^{n} \left(\gamma_i + \Delta\right)\left[-n\sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i}{(\gamma_i + \Delta)^2} + \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i}{\gamma_i + \Delta}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\gamma_i + \Delta}\right)\right].$$

Легко убедиться, что

$$\varphi'(\Delta) = 0 \text{ при } \Delta = 0.$$

Для завершения доказательства достаточно показать, что выражение

$$Z = -n\sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i}{(\gamma_i + \Delta)^2} + \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i}{\gamma_i + \Delta}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\gamma_i + \Delta}\right) \tag{42}$$

принимает отрицательные значения при $-r_x < \Delta < 0$ и положительные при $\Delta > 0$.

Воспользуемся известным алгебраическим неравенством (см., например, [Радзивиловский, 2006]): если наборы чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ упорядочены одинаково, то выполняется неравенство

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n) \geqslant (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n), \tag{43}$$

если же они обратно упорядочены, выполняется неравенство с противоположным знаком; при этом если не все числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равны между собой и одновременно не все числа $b_1, b_2, \ldots, b_n$ равны между собой, то неравенство является строгим.

Введем обозначения

$$a_i = \frac{\gamma_i}{\gamma_i + \Delta}, \quad b_i = \frac{1}{\gamma_i + \Delta}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Тогда выражение (42) можно записать следующим образом:

$$Z = -n(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n) + (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n).$$

Упорядочим величины γ_i, $i = 1, \ldots, n$. При $\Delta < 0$ a_i и b_i являются монотонно убывающими функциями от γ_i на интервале $\gamma_i > r_x$, поэтому не все a_i равны между собой, не все b_i равны между собой, a_i и b_i являются одинаково упорядоченными. Следовательно, при $\Delta < 0$ справедливо неравенство $Z < 0$.

Аналогично при $\Delta > 0$ a_i является монотонно возрастающей функцией от γ_i, а b_i является монотонно убывающей функцией от γ_i, поэтому не все a_i равны между собой, не все b_i равны между собой, a_i и b_i являются обратно упорядоченными. Следовательно, при $\Delta > 0$ справедливо неравенство $Z > 0$.

Следствие. Пусть множество R представляет собой отрезок. Тогда максимум функции (39) достигается на одной из границ отрезка.

Пример 3.1. Пусть $n = 3$, $r_x = 200$, $r_y = 100$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = \beta_3 = 0{,}05$, $R = [20, 2000]$. Подставляя r_x и граничные значения отрезка R в формулу (39), получаем

$$\nu(200) \approx 0{,}72, \quad \nu(20) \approx 0{,}78, \quad \nu(2000) \approx 0{,}83.$$

При $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 0{,}5$, $\beta_3 = 0{,}2$ получим

$$\nu(200) \approx 0{,}88, \quad \nu(20) \approx 0{,}89, \quad \nu(2000) \approx 0{,}89.$$

Таким образом, оптимальным информационным управлением со стороны игрока Н является $\rho_x = 2000$, и оно позволяет увеличить вероятность прорыва пунктов обороны на 0,11.

На рис. 6 показан график зависимости вероятности прорыва пунктов при значениях ρ_x от 20 до 2000 и для двух условий обороны (значений вектора $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$).

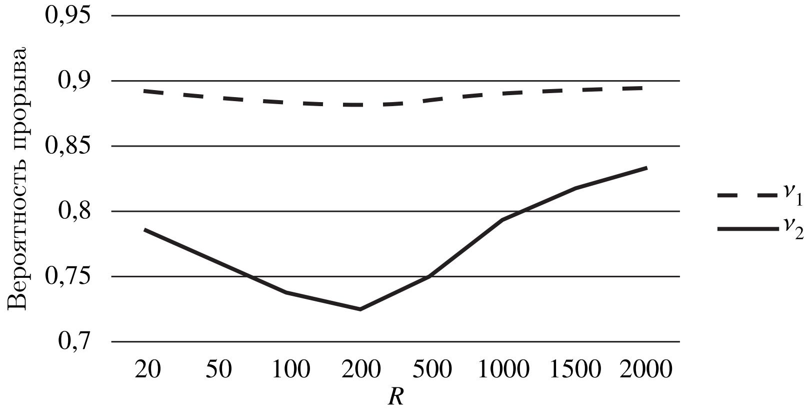

Рис. 6. График вероятности прорыва пунктов обороны в зависимости от представлений обороняющихся о численности наступающих: ν_1 при $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = \beta_3 = 0{,}05$; ν_2 при $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 0{,}5$, $\beta_3 = 0{,}2$

Из рисунка видно, что формировать у противника (обороняющихся) представления об иной численности боевых единиц своей стороны целесообразно, когда возможности по прорыву пунктов обороны (значения вектора β) существенно различны.

3.2. Рефлексия и информационное управление в задаче распределения сил и средств между ближайшей и последующей задачами

Рассмотрим пример рефлексивной игры прорыва пунктов обороны на тактическом уровне в задаче, в которой выбором игроков является распределение ресурсов между двумя направлениями их использования — прорыв обороны и захват объекта в глубине обороны (п. 2.5). Неопределенным параметром является суммарное количество средств обороняющейся стороны. Пусть сторона нападения — игрок Н — считает, что этот параметр принимает значение ρ_y, в то время как истинным значением является R_y, и все это известно стороне обороны — игроку О. Такая структура информированности может быть представлена в виде графа с тремя вершинами (см. рис. 7), на котором через НО обозначен игрок О с точки зрения игрока Н, а стрелки обозначают адекватную информированность игроков друг о друге.

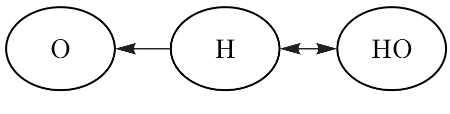

Рис. 7. Граф рефлексивной игры при информированной стороне обороны

Итак, субъективно игрок Н играет в антагонистическую игру с целевой функцией

$$F(u, w) = \frac{B(R_x - u)}{B(R_x - u) + (\rho_y - w)} \times \frac{\delta u}{\delta u + w}, \quad B = \sum_{j=1}^{n} \beta_j,$$

и собственной стратегией u. Известно (см. п. 2.5), что оптимальная стратегия игрока Н в этой игре имеет следующий вид:

$$u^0(\rho_y) = R_x \widetilde{D}, \quad \widetilde{D} = \frac{\rho_y + BR_x}{2\rho_y + (B + \delta)R_x}. \tag{44}$$

Игрок О, информированный об этом, решает задачу минимизации целевой функции

$$F(u^0, w) = \frac{B(R_x - u^0)}{B(R_x - u^0) + (\rho_y - w)} \times \frac{\delta u^0}{\delta u^0 + w}, \quad B = \sum_{j=1}^{n} \beta_j, \tag{45}$$

путем выбора своей стратегии w. Нетрудно убедиться, что оптимальная стратегия игрока О, минимизирующая функцию (45), имеет следующий вид:

$$w^0 = \frac{BR_x + R_y - (B + \delta)R_x \widetilde{D}}{2}. \tag{46}$$

Предположим теперь, что игрок О имеет возможность сформировать у игрока Н любое представление о значении неопределенного параметра в пределах множества R. Тогда ответом на вопрос о том, какое именно представление ему выгодно сформировать, является решение следующей оптимизационной задачи:

$$F(u^0(\rho_y), w^0) \xrightarrow[\rho_y \in R]{} \min.$$

Исходя из соотношений (44)–(46), эту задачу можно записать, после простых преобразований, следующим образом:

$$\psi(\rho_y) = \frac{4B\delta(1 - \widetilde{D}(\rho_y))\widetilde{D}(\rho_y)}{\left[B + \frac{R_y}{R_x} + (\delta - B)\widetilde{D}(\rho_y)\right]^2} \xrightarrow[\rho_y \in R]{} \min. \tag{47}$$

Минимизируемая в (47) функция является дробно-рациональной и допускает исследование промежутков возрастания и убывания обычным образом (при помощи сравнения с нулем знака производной). Нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Утверждение 3.2. Если сумма параметров превосходства совпадает с параметром боевого превосходства наступающих при решении ими последующей задачи, то есть выполнено условие

$$B = \delta, \tag{48}$$

то функция (47) является константой. В случае невыполнения условия (48) функция (47) строго возрастает на интервале $0 < \rho_y < R_y$ и строго убывает при $\rho_y > R_y$.

Следствие. Пусть множество R представляет собой отрезок. Тогда минимум функции (47) достигается на одной из границ отрезка.

Пример 3.2. Пусть $n = 3$, $R_x = 400$, $R_y = 300$, $B = 10$, $\delta = 1$, $R = [30, 3000]$. Подставляя R_y и граничные значения отрезка R в формулу (47), получаем

$$\psi(300) \approx 0{,}53, \quad \psi(30) \approx 0{,}51, \quad \psi(3000) \approx 0{,}40.$$

Таким образом, оптимальным информационным управлением со стороны игрока О является $\rho_y = 3000$, и оно позволяет уменьшить вероятность захвата объекта в глубине обороны (вероятность решения ближайшей и последующей задач) на 0,13.

4. Заключение и перспективы

Таким образом, исследованы теоретико-игровые модели «наступление – оборона», в которых стороны решают ближайшую и последующую задачи, имея построение войск в один или несколько эшелонов.

Используемая в модели функция победы на объекте (пункте, районе, в полосе) обладает свойством самоподобия и позволяет моделировать действия войск на тактическом, оперативном и стратегическом уровнях.

На первом этапе моделирования находится решение ближайшей задачи — прорыв (удержание) пунктов обороны, на втором — решение последующей задачи — разгром противника в глубине обороны (контратака и восстановление обороны).

Полагается, что продолжительности циклов действий сторон примерно одинаковы, что дает основания использовать равновесие Нэша (стороны принимают решения одномоментно и независимо). Каждому способу прорыва (удержания) пунктов обороны поставлена в соответствие целевая функция и для тактического уровня найдены решения соответствующих антагонистических игр (табл. 3).

Таблица 3. Решения антагонистических игр (прорыв пунктов обороны, тактический уровень)

Наступающие (Н)	Обороняющиеся (О)		
	Прорыв слабейшего пункта	Прорыв хотя бы одного пункта	Средневзвешенная вероятность
Прорыв слабейшего пункта	**(11) Н — смеш., О — чист.**	(12)	(13)
Прорыв хотя бы одного пункта	(21)	**(22) Н и О — чист.**	(23)
Средневзвешенная вероятность	(31)	(32)	**(33) Н и О — чист.**

Сокращения: смеш. — смешанные стратегии, чист. — чистые стратегии.

Показано, что наступающей стороне целесообразно использовать критерий «прорыв хотя бы одного пункта», при котором, при прочих равных условиях, обеспечивается максимальная вероятность прорыва пунктов обороны.

Перспективным направлением исследований является решение неантагонистических игр (задачи 12, 13, 21, 23, 31 и 32), в которых стороны используют несовпадающие способы прорыва (удержания) пунктов обороны, а также нахождение сторонами оптимальных способов действий и соответствующих им решений игры.

Принятое допущение об одинаковой продолжительности циклов действий сторон (и применении равновесия Нэша), во-первых, позволяет использовать найденные решения для моделирования встречного боя, возникающего в ходе марша, в наступлении и обороне, во-вторых, исключает из анализа, например, заблаговременно подготавливаемую оборону, когда для ее формализации целесообразно использовать иерархическую игру (обороняющиеся делают первый ход).

На втором этапе моделирования для частного случая (стороны при прорыве и удержании пунктов обороны руководствуются критерием прорыва слабейшего пункта, тактический уровень) решена задача распределения сил и средств между тактическими задачами (эшелонами):

– первый критерий — произведение вероятности прорыва пункта обороны и вероятности разгрома противника в глубине обороны; антагонистическая игра, стороны используют чистые стратегии; доля войск, выделяемых для решения последующей задачи, во-первых, мало зависит от начальных численностей сторон и значения параметров превосходства на пунктах обороны, во-вторых, уменьшается с увеличением значения параметра превосходства наступающих в глубине обороны;

– второй критерий (гарантированного результата) — минимальное значение из вероятности прорыва пункта обороны и вероятности разгрома противника в глубине обороны; антагонистическая игра, наступающие используют чистую стратегию, обороняющиеся — смешанную, распределяя все свои средства на первой позиции или второй (в глубине обороны).

Перспективным направлением исследований является решение теоретико-игровых задач распределения ресурса между ближайшей и последующей задачами при различных способах прорыва пунктов и разгрома в глубине обороны и на всех уровнях (тактическом, оперативном и стратегическом).

Важным аспектом боевых действий является информированность, в том числе взаимная информированность. Поэтому сторона, которая имеет возможность повлиять на представления оппонента, может получить преимущество. В данной работе были рассмотрены два примера рефлексивных игр (игр, характеризующихся сложной взаимной информированностью) и осуществления информационного управления. Показано, при каких условиях информационное управление увеличивает выигрыш игрока, и найдено оптимальное информационное управление. Перспективным направлением дальнейших исследований является рассмотрение более сложных структур информированности игроков и соответствующих задач информационного управления.

Выражаем искреннюю признательность д. ф.-м. н., профессору Александру Алексеевичу Васину за содержательные беседы, советы и рекомендации.

Список литературы (References)

Буравлев А. И., Цырендоржиев С. Р., Брезгин В. С. Основы методологического подхода к оценке боевых потенциалов образцов ВВТ и воинских формирований // Вооружение и экономика. — 2009. — № 3 (7). — С. 4–12.

Buravlev A. I., Cyrendorzhiev S. R., Brezgin V. S. Osnovy metodologicheskogo podhoda k ocenke boevyh potencialov obrazcov VVT i voinskih formirovanij [Fundamentals of a methodological approach to assessing the combat potentials of weapons and military equipment and military formations] // Vooruzhenie i ekonomika. — 2009. — № 3 (7). — P. 4–12 (in Russian).

Вагнер Г. Основы исследования операций. — М.: Мир, 1972. — Т. 1. — 335 с.; Т. 2. — 488 с.; Т. 3. — 501 с.

Vagner G. Osnovy issledovaniya operacij [Operations Research Fundamentals]. — M.: Mir, 1972. — T. 1. — 335 p.; T. 2. — 488 p.; T. 3. — 501 p. (in Russian).

Васин А. А. Некооперативные игры в природе и обществе: монография. — М.: Макс-пресс, 2005. — 412 с.

Vasin A. A. Nekooperativnye igry v prirode i obshchestve: monografiya [Non-cooperative games in nature and society]. — M.: Maks-press, 2005. — 412 p. (in Russian).

Васин А. А., Краснощеков П. С., Морозов В. В. Исследование операций: учебное пособие. — М.: Академия, 2008. — 464 с.

Vasin A. A., Krasnoshchekov P. S., Morozov V. V. Issledovanie operacij [Operations research]: uchebnoe posobie. — M.: Akademiya, 2008. — 464 p. (in Russian).

Васин А. А., Морозов В. В. Введение в теорию игр с приложениями к экономике: учебное пособие. — М., 2003. — 278 с.

Vasin A. A., Morozov V. V. Vvedenie v teoriyu igr s prilozheniyami k ekonomike [An Introduction to Game Theory with Applications to Economics]: uchebnoe posobie. — M., 2003. — 278 p. (in Russian).

Васин А. А., Морозов В. В. Теория игр и модели математической экономики: учебное пособие. — М.: Макс-Пресс, 2005. — 272 с.

Vasin A. A., Morozov V. V. Teoriya igr i modeli matematicheskoj ehkonomiki: uchebnoe posobie [Game Theory and Models of Mathematical Economics: A Study Guide]. — M.: Maks-Press, 2005. — 272 p. (in Russian).

Васин А. А., Цыганов Н. И. Задача расчета вероятности победы в модели двустороннего боя // Научная конференция Ломоносовские чтения: тезисы докладов, Москва, 20–29 апреля 2021. — С. 43–44.

Vasin A. A., Cyganov N. I. Zadacha rascheta veroyatnosti pobedy v modeli dvustoronnego boya [The problem of calculating the probability of victory in a two-sided combat model] // Nauchnaya konferenciya Lomonosovskie chteniya: tezisy dokladov, Moskva, 20–29 aprelya 2021. — P. 43–44 (in Russian).

Васин А. А., Цыганов Н. И. Динамическая вероятностная модель двустороннего боя // Прикладная математика и информатика. Труды факультета ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова. — 2021a. — С. 66–88.

Vasin A. A., Cyganov N. I. Dinamicheskaya veroyatnostnaya model' dvustoronnego boya [Dynamic probabilistic model of two-sided combat] // Prikladnaya matematika i informatika. Trudy fakul'teta VMK MGU im. M. V. Lomonosova. — 2021. — P. 66–88 (in Russian).

Великая Отечественная война 1941–1945 гг. Кампании и стратегические операции в цифрах. В 2 томах. — М.: Объединенная редакция МВД России, 2010. Том I. — 608 с.; Том II. — 784 с.

Velikaya Otechestvennaya vojna 1941–1945 gg. Kampanii i strategicheskie operacii v cifrah [Great Patriotic War 1941–1945 yr. Campaigns and strategic operations in numbers]. V 2 tomah. — M.: Obedinennaya redakciya MVD Rossii, 2010. Tom I. — 608 p.; Tom II. — 784 p. (in Russian).

Вентцель Е. С. Введение в исследование операций. — М.: Советское радио, 1964. — 388 с.

Ventcel' E. S. Vvedenie v issledovanie operacij [Introduction to Operations Research]. — M.: Sovetskoe radio, 1964. — 388 p.

Гермейер Ю. Б. Введение в теорию исследования операций. — М.: Гл. ред. физ.-мат. лит. изд-ва «Наука», 1971. — 384 с.

Germeier Yu. B. Vvedenie v teoriyu issledovaniya operatsii [Introduction to Operations Research Theory]. — M.: Gl. red. fiz.-mat. lit. izd-va «Nauka», 1971. — 384 p. (in Russian).

Дорохов В. Н., Ищук В. А. Боевые потенциалы подразделений как интегральный критерий оценки боевых возможностей воинских формирований и боевой эффективности вооружения, военной и специальной техники // Известия российской академии ракетных и артиллерийских наук. — 2017. — № 4 (99). — С. 27–36.

Dorohov V. N., Ishchuk V. A. Boevye potencialy podrazdelenij kak integral'nyj kriterij ocenki boevyh vozmozhnostej voinskih formirovanij i boevoj effektivnosti vooruzheniya, voennoj i special'noj tekhniki [Combat potentials of subunits as an integral criterion for assessing the combat capabilities of military formations and the combat effectiveness of weapons, military and special equipment] // Izvestiya rossijskoj akademii raketnyh i artillerijskih nauk. — 2017. — No. 4 (99). — P. 27–36 (in Russian).

Ионин Г. Теория общевойскового боя требует переосмысления, развития и совершенствования // Военно-промышленный курьер. — 2005. — № 21 (88), 15–21 июня. — С. 4.

Ionin G. Teoriya obshchevojskovogo boya trebuet pereosmysleniya, razvitiya i sovershenstvovaniya [The theory of combined arms combat requires rethinking, development and improvement] // Voenno-promyshlennyj kur'er. — 2005. — No. 21 (88), 15–21 iyunya. — P. 4 (in Russian).

Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. — М.: Мир, 1964. — 835 с.

Karlin S. Matematicheskie metody v teorii igr, programmirovanii i ekonomike [Mathematical methods in game theory, programming and economics]. — M.: Mir, 1964. — 835 p. (in Russian).

Контртеррористическая операция на Северном Кавказе основные уроки и выводы (3) // Военная мысль. — 2000. — № 4. — С. 2–17.

Kontrterroristicheskaya operaciya na Severnom Kavkaze osnovnye uroki i vyvody (3) [Counter-terrorist operation in the North Caucasus main lessons and conclusions (3)] // Voennaya mysl'. — 2000. — No. 4. — P. 2–17 (in Russian).

Корепанов В. О., Новиков Д. А. Задача о диффузной бомбе // Проблемы управления. — 2011. — № 5. — С. 66–73.

Korepanov V. O., Novikov D. A. Zadacha o diffuznoi bombe [The diffuse bomb problem] // Control Sciences. — 2011. — No. 5. — P. 66–73 (in Russian).

Краснощеков П. С., Петров А. А. Принципы построения моделей. — М.: МГУ, 1983. — 264 с.

Krasnoshchekov P. S., Petrov A. A. Printsipy postroeniya modelei [Principles of model building]. — M.: MGU, 1983. — 264 p. (in Russian).

Лефевр В. А. Конфликтующие структуры. — М.: Советское радио, 1973. — 159 с.

Lefevr V. A. Konfliktuyushchie struktury [Conflicting structures]. — M.: Sovetskoe radio, 1973. — 159 p. (in Russian).

Новиков Д. А. Иерархические модели военных действий // Управление большими системами. — 2012. — Вып. 37. — С. 25–62.

Novikov D. A. Ierarkhicheskie modeli voennykh deistvii [Hierarchical models of warfare] // Large-Scale Systems Control. — 2012. — Vyp. 37. — P. 25–62 (in Russian).

Новиков Д. А., Чхартишвили А. Г. Рефлексия и управление: математические модели. — М.: Издательство физико-математической литературы, 2012. — 412 с.

Novikov D. A., Chkhartishvili A. G. Reflexion and Control: Mathematical Models. — Leiden: CRC Press, 2014. — 298 p. (Russ. ed.: *Novikov D. A., Chkhartishvili A. G.* Refleksiya i upravleniye: matematicheskiye modeli. — M.: Izdatel'stvo fiziko-matematicheskoy literatury, 2012. — 412 p.)

Осипов М. П. Влияние численности сражающихся сторон на их потери // Военный сборник. — 1915. — № 6. — С. 59–74; № 7. — С. 25–36; № 8. — С. 31–40; № 9. — С. 25–37.

Osipov M. P. Vliyanie chislennosti srazhayushchikhsya storon na ikh poteri [The influence of the number of parties fighting on their losses] // Voennyi sbornik. — 1915. — No. 6. — P. 59–74; No. 7. — P. 25–36; No. 8. — P. 31–40; No. 9. — P. 25–37 (in Russian).

Писарук Н. Н. Введение в теорию игр. — Минск: БГУ, 2019. — 283 с.

Pisaruk N. N. Vvedenie v teoriyu igr [Introduction to game theory]. — Minsk: BGU, 2019. — 283 p. (in Russian).

Применение теории игр в военном деле / Сборник переводов. — М.: Советское радио, 1961. — 360 с.

Primenenie teorii igr v voennom dele [Application of game theory to military affairs] / Sbornik perevodov. — M.: Sovetskoe radio, 1961. – 360 p. (in Russian).

Радзивиловский Л. В. Обобщение перестановочного неравенства и монгольское неравенство / Математическое просвещение. Третья серия, вып. 10. — М.: МЦНМО, 2006. — С. 210–224.

Radzivilivskij L. V. Obobschenie perestanovochnogo neravenstva i mongolskoe neravenstvo [Generalization of rearrangement inequality and mongolian inequality] / Matematicheskoe prosveschenie. Tretja serija, vyp. 10. — M.: MCNMO, 2006. — P. 210–224 (in Russian).

Речь Г. К. Жукова на военно-научной конференции, декабрь 1945 г. // Военная мысль. — 1985. — Специальный выпуск (февраль). — С. 3, 17–33.

Rech' G. K. Zhukova na voenno-nauchnoi konferentsii, dekabr' 1945 g. [Speech by G. K. Zhukov at a military scientific conference, December 1945] // Voennaya mysl'. — 1985. — Spetsial'nyi vypusk (fevral'). — P. 3, 17–33 (in Russian).

Тактика / под ред. В. Г. Резниченко. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Воениздат, 1987. — 496 с.

Taktika [Tactics] / pod red. V. G. Reznichenko. — 2-e izd., pererab. i dop. — M.: Voenizdat. 1987. — 496 p. (in Russian).

Цыгичко В. И., Стоили Ф. Метод боевых потенциалов: история и настоящее // Военная мысль. — 1997. — № 4. — С. 23–28.

Tsygichko V. I., Stoili F. Metod boevykh potentsialov: istoriya i nastoyashchee [The method of combat potentials: history and present] // Voennaya mysl'. — 1997. — No. 4. — P. 23–28 (in Russian).

Шумов В. В. Теоретико-игровая модель обороны стационарных объектов // Системы управления и информационные технологии. — 2019. — № 2 (76). — С. 18–21.

Shumov V. V. Teoretiko-igrovaya model' oborony statsionarnykh ob"ektov [Game-theoretic model of defense of stationary objects] // Sistemy upravleniya i informatsionnye tekhnologii. — 2019. — No. 2 (76). — P. 18–21 (in Russian).

Шумов В. В. Исследование функции победы в бою (сражении, операции) // Проблемы управления / Control Sciences. — 2020. — № 6. — С. 19–30.

Shumov V. V. Issledovanie funkcii pobedy v boyu (srazhenii, operacii) [Investigation of the function of victory in battle (battle, operation)] // Problemy upravleniya / Control Sciences. — 2020. — No. 6. — P. 19–30 (in Russian).

Шумов В. В., Корепанов В. О. Математические модели боевых и военных действий // Компьютерные исследования и моделирование. — 2020. — Т. 12, № 1. — С. 217–242.

Shumov V. V., Korepanov V. O. Matematicheskie modeli boevyh i voennyh dejstvij [Mathematical models of combat and military operations] // Computer Research and Modeling. — 2020. — T. 12, No. 1. — P. 217–242 (in Russian).

Шумов В. В., Корепанов В. О. Исследование теоретико-игровых моделей боевых действий // Математическая теория игр и ее приложения. — 2021. — Т. 13, вып. 2. — С. 80–117.

Shumov V. V., Korepanov V. O. Issledovanie teoretiko-igrovyh modelej boevyh dejstvij [Mathematical Investigation of game-theoretic models of combat operations] // Matematicheskaya teoriya igr i ee prilozheniya. — 2021. — T. 13, vyp 2. — P. 80–117 (in Russian).

Шумов В. В., Сидоренко А. А., Цезарь Д. А. Анализ пиратских актов на море и мер по борьбе с ними // Военная мысль. — 2021. — № 9. — С. 113–124.

Shumov V. V., Sidorenko A. A., Cezar' D. A. Analiz piratskih aktov na more i mer po bor'be s nimi [Analysis of pirate acts at sea and measures to combat them] // Voennaya mysl'. — 2021. — No. 9. — P. 113–124 (in Russian).

Aggregated combat models. — Operations Research Department Naval Postgraduate School. — Monterey, California, 2000. — 112 p.

Aumann R. J. Agreeing to disagree // The Annals of Statistics. — 1976. — Vol. 4, No. 6. — P. 1236–1239.

Borel E. La théorie du jeu les équations intégrales á noyau symétrique // Comptes Rendus de l'Académie. — 1921. — Vol. 173. — P. 1304—1308.

Fedyanin D. Logic for Chkhartishvili – Novikov Structures of Beliefs // International Journal of Unconventional Computing. — 2020. — Vol. 15, Iss. 4. — P. 259–273.

Hirshleifer J. The Macrotechnology of Conflict // Journal of Conflict Resolution. — 2000. — Vol. 44 (6). – P. 773–792.

Jia H., Skaperdas S., Vaidya S. Contest functions: Theoretical foundations and issues in estimation // International Journal of Industrial Organization. — 2013. — No. 31. — P. 211–222.

Lanchester F. Aircraft in Warfare: the Dawn of the Fourth Arm. — London: Constable and Co, 1916. — 243 p.

Lewis D. Convention: a philosophical study. — Cambridge: Harvard University Press, 1969. — 213 p.

Morse P. M., Kimball G. E. Methods of Operations Research. — Cambridge, MA: Technology Press of MIT; New York: John Wiley & Sons, 1951. — 158 p.

Tullock G. Effcient rent seeking // In: J. Buchanan, R. Tollison and G. Tullock, (eds.) Towards a Theory of the Rent-Seeking Society. — College Station, Texas A&M University Press, 1980. — P. 97–112.