

УДК: 517.958

Моделирование гидроупругих колебаний стенки канала, имеющей нелинейно-упругую опору

В. С. Попов^{1,2,a}, А. А. Попова¹

¹Саратовский государственный технический университет имени Ю. А. Гагарина,
Россия, 410054, г. Саратов, ул. Политехническая, д. 77

²Институт проблем точной механики и управления РАН,
Россия, 410028, г. Саратов, ул. Рабочая, д. 24

E-mail: ^a vic_p@bk.ru

*Получено 11.01.2022, после доработки — 03.02.2022.
Принято к публикации 14.02.2022.*

В работе сформулирована математическая модель для исследования нелинейного гидроупругого отклика стенки узкого канала, заполненного пульсирующей вязкой жидкостью, опирающейся на пружину с нелинейной жесткостью. В отличие от известных подходов в рамках предложенной модели осуществлен одновременный учет инерционных и диссипативных свойств вязкой несжимаемой жидкости и нелинейности восстанавливающей силы поддерживающей пружины. Математическая модель представляет собой систему уравнений плоской задачи гидроупругости, включающей уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости, с соответствующими краевыми условиями, и уравнение движения стенки канала как одномассовой модели с восстанавливающей силой, имеющей кубическую нелинейность. Динамика вязкой жидкости первоначально исследована в рамках гидродинамической теории смазки, т. е. без учета инерции ее движения. На следующем этапе для учета инерции движения вязкой жидкости использован метод итерации. Найдены законы распределения гидродинамических параметров вязкой жидкости в канале, что позволило определить ее реакцию, действующую на стенку канала. В результате показано, что исходная задача гидроупругости сводится к одному нелинейному уравнению, совпадающему с уравнением Дуффинга. В данном уравнении коэффициент демпфирования определяется физическими свойствами жидкости и геометрическими размерами канала, а учет инерции движения жидкости приводит к появлению дополнительной присоединенной массы, зависящей от тех же параметров. Исследование нелинейного уравнения гидроупругих колебаний проведено методом гармонического баланса для основной частоты пульсаций вязкой жидкости. В результате найден основной гидроупругий отклик стенки канала, опирающейся на пружину с мягкой или жесткой кубической нелинейностью. Численное моделирование гидроупругого отклика стенки канала показало возможность скачкообразного изменения амплитуд ее колебаний, а также дало возможность оценить влияние инерции движения жидкости на частотный диапазон, в котором наблюдаются данные изменения.

Ключевые слова: нелинейные колебания, вязкая жидкость, стенка канала на нелинейно-упругой опоре, пульсация давления, кубическая нелинейность, гидроупругий отклик

UDC: 517.958

Modeling of hydroelastic oscillations for a channel wall possessing a nonlinear elastic support

V. S. Popov^{1,2,a}, A. A. Popova¹

¹Yuri Gagarin State Technical University of Saratov,
77, Politechnicheskaya st., Saratov, 410054, Russia

²Institute of Precision Mechanics and Control of the Russian Academy of Sciences,
24, Rabochaya st., Saratov, 410028, Russia

E-mail: ^a vic_p@bk.ru

Received 11.01.2022, after completion — 03.02.2022.

Accepted for publication 14.02.2022.

The paper deals with the mathematical model formulation for studying the nonlinear hydro-elastic response of the narrow channel wall supported by a spring with cubic nonlinearity and interacting with a pulsating viscous liquid filling the channel. In contrast to the known approaches, within the framework of the proposed mathematical model, the inertial and dissipative properties of the viscous incompressible liquid and the restoring force nonlinearity of the supporting spring were simultaneously taken into account. The mathematical model was an equations system for the coupled plane hydroelasticity problem, including the motion equations of a viscous incompressible liquid, with the corresponding boundary conditions, and the channel wall motion equation as a single-degree-of-freedom model with a cubic nonlinear restoring force. Initially, the viscous liquid dynamics was investigated within the framework of the hydrodynamic lubrication theory, i. e. without taking into account the liquid motion inertia. At the next stage, the iteration method was used to take into account the motion inertia of the viscous liquid. The distribution laws of the hydrodynamic parameters for the viscous liquid in the channel were found which made it possible to determine its reaction acting on the channel wall. As a result, it was shown that the original hydroelasticity problem is reduced to a single nonlinear equation that coincides with the Duffing equation. In this equation, the damping coefficient is determined by the liquid physical properties and the channel geometric dimensions, and taking into account the liquid motion inertia lead to the appearance of an added mass. The nonlinear equation study for hydroelastic oscillations was carried out by the harmonic balance method for the main frequency of viscous liquid pulsations. As a result, the primary steady-state hydroelastic response for the channel wall supported by a spring with softening or hardening cubic nonlinearity was found. Numerical modeling of the channel wall hydroelastic response showed the possibility of a jumping change in the amplitudes of channel wall oscillations, and also made it possible to assess the effect of the liquid motion inertia on the frequency range in which these amplitude jumps are observed.

Keywords: nonlinear oscillations, viscous fluid, channel wall with nonlinear elastic support, pulsating pressure, cubic nonlinearity, hydroelastic response

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2022, vol. 14, no. 1, pp. 79–92 (Russian).

1. Введение

Моделирование колебаний упругих элементов конструкций, взаимодействующих с жидкостью, является одним из направлений развития современной математической физики и компьютерного моделирования, а с другой стороны, представляет собой актуальную проблему современного приборо- и машиностроения. Это связано с тем, что указанные элементы входят в состав разнообразных датчиков первичной информации, гидростатических и гидродинамических опор, систем гашения колебаний, жидкостного охлаждения, гидропривода и подачи топлива. При разработке математических моделей упругие элементы представляются как абсолютно жесткие тела с упругими связями, балки, пластины или оболочки [Païdoussis, 2004; Païdoussis et al., 2011; Amabili, 2008]. Например, в [Lamb, 1921], одной из первых работ по данному направлению, проведено исследование свободных колебаний упругой круглой пластины, являющейся частью абсолютно жесткой плоскости — границы полупространства, заполненного идеальной жидкостью. Для определения собственных частот пластины используется энергетический метод Рэля, а влияние жидкости оценивается введением в рассмотрение присоединенной массы. В результате показано, что контакт пластины с жидкостью ведет к трансформации части энергии на волнообразование в жидкости, т. е. к демпфированию колебаний, и увеличению инерционных свойств колебательной системы, что обуславливает снижение собственных частот колебаний по сравнению со случаем колебаний в вакууме. В [Amabili, 1996] выполнено обобщение исследования Н. Lamb на основе исследования связанной задачи гидроупругости, т. е. совместного рассмотрения уравнений динамики пластины и жидкости. В [Amabili, 2001; Askari et al., 2013] указанные выше исследования обобщены учетом наличия свободной поверхности жидкости и ограничивающих ее объем твердых стенок, а в [Morozov et al., 2019] исследованы колебания пластин различной формы и различных вариантов их закрепления и определены соответствующие данным случаям присоединенные массы жидкости. Математическая модель взаимодействия упругозакрепленного вибрирующего штампа с идеальной жидкостью, имеющей свободную поверхность и находящейся в плоском бесконечно длинном канале малой глубины, предложена в [Indeitsev et al., 2000]. На основе постановки и решения задачи гидроупругости для мелкой воды показано, что в жидкости наряду с бегущими возникают стоячие волны, локализованные в области штампа, а амплитуда бегущих волн может сводиться к нулю изменением частоты колебаний штампа. Численное моделирование устойчивости прямоугольной пластины, образующей стенку канала прямоугольного сечения и взаимодействующей с потоком идеальной жидкости, находящимся в нем, проведено в [Bochkarev et al., 2016]. В [Bochkarev et al., 2020] проведены натурные эксперименты по определению собственных частот колебаний прямоугольных пластин при различных вариантах их торцевого закрепления на свободной поверхности воды и в воздухе. В ходе исследований были также определены декременты затухания для рассмотренных случаев.

Необходимо отметить работы по исследованию проблем гидроупругости, в которых особое внимание уделяется учету влияния вязкости жидкости. Например, изучение демпфирующих свойств слоя вязкой жидкости, взаимодействующего с лежащей на нем вибрирующей пластиной-полоской, проведено в [Önsay, 1993], а исследование [Lamb, 1921] было обобщено [Kozlovsky, 2009] путем учета вязкости жидкости, и показано, что вязкость приводит к дополнительному вкладу в присоединенную массу. Исследования изгибных колебаний консольно закрепленной балки-полоски Эйлера–Бернулли, погруженной в неограниченный объем вязкой жидкости, выполнены в [Faria, Inman, 2014]. Моделирование колебаний пьезоэлемента в виде балки, возбуждаемых набегающим потоком вязкой жидкости, проведено в [Akcaşay, Young, 2015]. В [Velmisov, Ankilov, 2017] выполнено моделирование динамики взаимодействия двух вязких жидкостей с пластиной, являющейся частью границы, разделяющей их. Модели вынужденных гидроупругих колебаний прямоугольных или круглых пластин, между которыми находится слой вязкой несжимаемой жидкости, под действием пульсации давления или за счет инерционного

возбуждения были разработаны и исследованы в работах [Mogilevich et al., 2010, 2011, 2017]. Моделирование возникновения продольных колебаний пластины, торец которой закреплен на пружине, возбуждаемых набегающим потоком вязкой жидкости в канале с параллельными стенками, в условиях, когда сама пластина совершает вынужденные поперечные колебания, выполнено в [Kurzin, 2011]. Исследование колебаний абсолютно жесткой стенки узкого клиновидного канала, имеющей упругий подвес, за счет ее взаимодействия с ползущей вязкой жидкостью, находящейся в данном канале, проведено в [Mogilevich et al., 2018; Mogilevich et al., 2016]. Моделирование колебаний упруго закрепленного торцевого уплотнения узкого канала, взаимодействующего с вибрирующей стенкой данного канала через вязкую жидкость, его заполняющую, выполнено в [Попов, Попова, 2020; Kondratov et al., 2018].

Отметим также исследования по моделированию взаимодействия упругих элементов реальных конструкций с жидкостью, а также работы, в которых учтено упругое закрепление элементов конструкций. В [Индейцев и др., 1994; Mogilevich et al., 2008] предложены модели для исследования колебаний гильзы цилиндра двигателя внутреннего сгорания с водяным охлаждением. В первой работе модель строится на базе постановки и решения задачи гидроупругих колебаний балки-полоски, взаимодействующей со слоем идеальной сжимаемой жидкости, а во второй — на базе рассмотрения вынужденных гидроупругих колебаний цилиндрической оболочки, окруженной слоем вязкой несжимаемой жидкости, возбуждаемых ударными воздействиями. В [Antsiferov et al., 2009] проведено моделирование динамики взаимодействия поплавкового узла гироскопа и поддерживающего слоя вязкой несжимаемой жидкости с учетом наличия торцевого уплотнения, а также упругой податливости устройств, центрирующих поплавков, и корпуса прибора. В [Вельмисов и др., 2011] предложены математические модели для исследования гидроупругих колебаний чувствительного упругого элемента датчика давления, устанавливаемого на трубопровод конечной длины. На основе данных моделей проведены вычислительные эксперименты по исследованию динамики упругого элемента датчика. Исследование динамики и устойчивости трубопровода, перекачивающего жидкость с учетом влияния упругой податливости закрепления его торцов, проведено в [Kheiri et al., 2014]. Моделирование срабатывания предохранительного клапана на базе численного исследования взаимодействия подпружиненного жесткого диска с вязким сжимаемым газом выполнено в [Королева и др., 2018]. Работы [Добрянский и др., 2018; Lomakin et al., 2018] посвящены разработке модели для определения размеров зоны контакта между деформируемым тонкостенным каналом охлаждения плоскоовального сечения и твердыми стенками, между которыми он находится, применительно к системе охлаждения модуля активной фазированной антенной решетки. Модель разработана на базе постановки и решения задачи о гидроупругом деформировании оболочки плоскоовального сечения под давлением охлаждающей жидкости внутри нее. Проблема разработки модели гидроопоры с магнитореологической жидкостью, когда опора представляется жестким телом, имеющим упругую связь, связь с вязким трением и связь с гистерезисной характеристикой, изучена в [Гордеев и др., 2020]. Адекватность предложенной модели подтверждена проведенными натурными статическими и вибрационными испытаниями опоры.

Вместе с тем в указанных выше работах не рассмотрен одновременный учет конечности размеров канала, в котором находится жидкость, ее вязкости и инерции движения, нелинейности характеристики упругого подвеса элемента конструкции, образующего стенку канала, что предлагается в настоящем исследовании.

2. Постановка задачи

Схематично рассматриваемая колебательная система изображена на рис. 1 и представляет собой узкий канал с параллельными стенками, нижняя стенка которого опирается на пружину с нелинейной жесткостью и может совершать колебания в вертикальном направлении. Верхняя

стенка канала абсолютно жесткая и неподвижная. Введем в рассмотрение декартову систему координат x, y, z , центр которой совпадает с центром внутренней поверхности нижней стенки канала в невозмущенном состоянии. Считаем, что к торцам канала, параллельным оси y , примыкают полости, заполненные той же жидкостью, и при колебаниях нижней стенки жидкость из канала свободно перетекает в них. Давление жидкости в данных полостях пульсирует по заданному гармоническому закону. Таким образом, наблюдаются вынужденные колебания нижней стенки, обусловленные пульсациями давления жидкости в торцевых полостях. Геометрические размеры стенок канала в плане $2\ell \times b$. Принимаем наличие уплотнителей на торцах канала параллельных оси x , которые препятствуют течению жидкости в направлении оси y , но не препятствуют перемещению нижней стенки. Это позволяет пренебречь изменением гидродинамических параметров жидкости по y , что математически эквивалентно условию $2\ell \ll b$ и переходу к рассмотрению плоской задачи (см. рис. 1, б). Далее считаем, что в невозмущенном состоянии размер щели между стенками равен δ_0 . В силу узости канала выполняется соотношение $2\ell \gg \delta_0$, а амплитуда колебаний стенки канала равна $z_m \ll \delta_0$. При постановке задачи учитываются диссипативные свойства жидкости, обусловленные ее вязкостью, что позволяет ограничиться исследованием установившихся вынужденных нелинейных колебаний нижней стенки канала [Nayfeh et al., 1987].

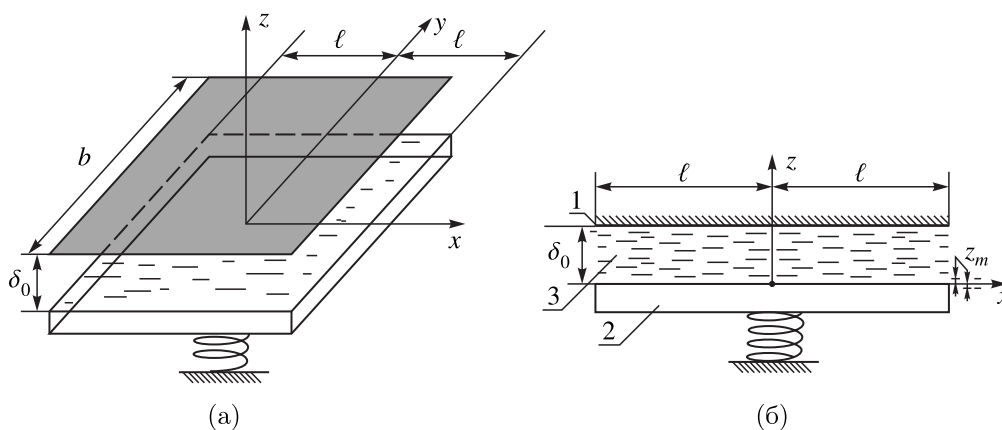


Рис. 1. Вид узкого канала, нижняя стенка которого имеет нелинейно-упругую опору: а) условный вид канала; б) условный вид канала при рассмотрении плоской задачи: 1 — верхняя неподвижная абсолютно жесткая стенка, 2 — нижняя стенка, опирающаяся на нелинейно-упругую пружину (основание), 3 — пульсирующая вязкая жидкость, полностью заполняющая канал

Движение нижней стенки канала будем изучать в рамках одномассовой модели с одной степенью свободы. В этом случае уравнение движения стенки имеет вид

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + F_s = N_l, \quad (1)$$

где m — масса нижней стенки, t — время, F_s — восстанавливающая сила пружины с нелинейной жесткостью, N_l — реакция, действующая со стороны вязкой жидкости на стенку канала.

Далее будем полагать, что закон движения стенки z в (1) в общем виде может быть представлен как $z = z_m f(\eta t)$. Здесь η — характерная частота колебаний нижней стенки.

Гидродинамику жидкости в канале рассмотрим в рамках модели вязкой несжимаемой жидкости. Следовательно, в рассматриваемой постановке уравнения ее движения представляют со-

бой уравнения Навье – Стокса, дополненные уравнением неразрывности [Lamb, 1945]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} &= 0,\end{aligned}\quad (2)$$

где u_x, u_z – проекции вектора скорости единицы объема жидкости на оси координат, p – давление, ρ, ν – плотность и коэффициент кинематической вязкости жидкости.

Для вязкой жидкости краевые условия уравнений (2) состоят из условий совпадения скоростей движения жидкости и ограничивающих ее стенок канала, т. е. условий прилипания:

$$\begin{aligned}u_x = 0, \quad u_z = 0 &\quad \text{при } z = \delta_0, \\ u_x = 0, \quad u_z = \frac{dz}{dt} &\quad \text{при } z = z_m f(\eta t).\end{aligned}\quad (3)$$

Кроме краевых условий для скоростей (3) необходимы условия для давления на торцах канала. Сформулируем их, принимая во внимание, что при свободном торцевом истечении давление в поперечном сечении струи совпадает с давлением в окружающей среде; другими словами, давление на торцах канала совпадает с заданным законом изменения давления в торцевых полостях:

$$p = p^*(\omega t) \quad \text{при } x = \pm \ell. \quad (4)$$

Здесь $p^*(\omega t)$ – заданный закон изменения давления в торцевых полостях. Далее будем полагать данный закон гармоническим, т. е. представлять его в виде

$$p^* = p_m^* f_p(\omega t), \quad f_p(\omega t) = \cos \omega t, \quad (5)$$

где p_m^* – амплитуда пульсации давления, ω – частота пульсации.

В уравнение (1) входят восстанавливающая сила пружины и реакция вязкой жидкости; запишем выражения для них. Будем полагать далее, что жесткость пружины имеет линейную составляющую и кубическую нелинейность; тогда [Пановко, 1991]

$$F_s = n_1 z + n_3 z^3. \quad (6)$$

Здесь n_1 – коэффициент жесткости пружины при линейном члене, n_3 – коэффициент жесткости пружины при нелинейном кубическом члене. Отметим, что если $n_3 > 0$, имеем пружину с жесткой нелинейностью, а при $n_3 < 0$ имеем пружину с мягкой нелинейностью.

Реакцию вязкой жидкости, действующую на нижнюю стенку канала, определяет нормальное напряжение на внутренней поверхности стенки, которое имеет вид [Lamb, 1945]

$$q_{zz} = -p + 2\rho\nu \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (7)$$

Тогда искомая реакция может быть записана как

$$N_l = b \int_{-\ell}^{\ell} q_{zz} dx = -b \int_{-\ell}^{\ell} \left(p - 2\rho\nu \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) dx \quad \text{при } z = z_m f(\eta t). \quad (8)$$

3. Определение нелинейной реакции нижней стенки канала

Для исследования динамики вязкой жидкости в канале перейдем к следующим безразмерным переменным и выделим характерные малые параметры:

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{\delta_0}{\ell} \ll 1, \quad \lambda = \frac{z_m}{\delta_0} \ll 1, \quad \xi = \frac{x}{\ell}, \quad \zeta = \frac{z}{\delta_0}, \quad \tau = \eta t, \\ u_x &= \frac{z_m \eta}{\psi} U_\xi, \quad u_z = z_m \eta U_\zeta, \quad p = p^*(\omega t) + \frac{\rho \nu z_m \eta}{\delta_0 \psi^2} P. \end{aligned} \quad (9)$$

Будем проводить решение уравнений (2) методом итерации [Могилевич и др., 2017], т. е. на первом шаге исключим из рассмотрения инерционные члены, как принято в гидродинамической теории смазки, а на втором шаге учтем их. Согласно указанному, на первой итерации, подставляя переменные (9) в уравнения (2), будем иметь следующие уравнения динамики вязкой жидкости:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \xi} &= \psi^2 \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \zeta^2}, \\ \frac{\partial P}{\partial \zeta} &= \psi^2 \left[\psi^2 \frac{\partial^2 U_\zeta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U_\zeta}{\partial \zeta^2} \right], \\ \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

На второй итерации, учитывая в (2) безразмерные переменные (9), будем иметь уравнения, записанные как

$$\begin{aligned} \frac{\eta \delta_0^2}{\nu} \left[\frac{\partial U_\xi}{\partial \tau} + \lambda \left(U_\xi \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + U_\zeta \frac{\partial U_\xi}{\partial \zeta} \right) \right] &= -\frac{\partial P}{\partial \xi} + \psi^2 \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \zeta^2}, \\ \psi^2 \frac{\eta \delta_0^2}{\nu} \left[\frac{\partial U_\zeta}{\partial \tau} + \lambda \left(U_\xi \frac{\partial U_\zeta}{\partial \xi} + U_\zeta \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} \right) \right] &= -\frac{\partial P}{\partial \zeta} + \psi^2 \left[\psi^2 \frac{\partial^2 U_\zeta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U_\zeta}{\partial \zeta^2} \right], \\ \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Граничные условия (3), (4) в безразмерных переменных (9) запишутся как

$$\begin{aligned} U_\xi = U_\zeta = 0 \text{ при } \zeta = 1, \quad U_\xi = 0, \quad U_\zeta = \frac{df(\tau)}{d\tau} \text{ при } \zeta = \lambda f(\tau), \\ P = 0 \text{ при } \xi = \pm 1. \end{aligned} \quad (12)$$

Подставляя (9) в выражение для реакции жидкости (8), получим

$$N_l = -2b\ell p^*(\omega t) - b\ell \frac{\rho \nu z_m \eta}{\delta_0 \psi^2} \int_{-1}^1 \left(P - \psi^2 \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} \right) d\xi \quad \text{при } \zeta = \lambda f(\tau). \quad (13)$$

В уравнениях (10)–(13) перед частью членов присутствуют малые параметры. Тогда, как принято в методе возмущений [Van Dyke, 1975], если рассматривать асимптотические разложения по малому параметру и ограничиваться только одним членом разложения, уравнения и граничные условия упростятся, так как члены при ψ , ψ^2 и λ можно опустить.

Принимая во внимание сделанное замечание, на первой итерации будем рассматривать следующие уравнения динамики тонкого слоя вязкой жидкости для так называемого ползущего течения:

$$-\frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \zeta^2} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} = 0, \quad (14)$$

а на второй итерации, при учете сил инерции жидкости, будем использовать линейаризованные уравнения динамики тонкого слоя вязкой жидкости, учитывающие локальный член инерции:

$$\frac{\eta \delta_0^2}{\nu} \frac{\partial U_\xi}{\partial \tau} = -\frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \zeta^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} = 0. \quad (15)$$

Граничные условия (12) при этом запишутся как снесенные на невозмущенную поверхность:

$$U_\xi = U_\zeta = 0 \text{ при } \zeta = 1, \quad U_\xi = 0, \quad U_\zeta = \frac{df(\tau)}{d\tau} \text{ при } \zeta = 0, \quad (16)$$

$$P = 0 \text{ при } \xi = \pm 1.$$

Выражение для реакции слоя жидкости (13) примет вид

$$N_l = -2blp^*(\omega t) - bl \frac{\rho \nu z_m \eta}{\delta_0 \psi^2} \int_{-1}^1 P d\xi \quad \text{при } \zeta = 0. \quad (17)$$

Решая (14) с граничными условиями (16), на первой итерации находим, что

$$U_\xi = \frac{\zeta^2 - \zeta}{2} \frac{\partial P}{\partial \xi}, \quad U_\zeta = \frac{1}{12} \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} (3\zeta^2 - 2\zeta^3 - 1), \quad (18)$$

$$P = 6 \frac{df(\tau)}{d\tau} (1 - \xi^2).$$

В этом случае, учитывая выражение для давления (18) в (17), получаем реакцию тонкого слоя вязкой жидкости при ее ползущем движении, т. е. без учета инерции движения последней:

$$N_l = -2blp^*(\omega t) - 8bl \frac{\rho \nu}{\delta_0 \psi^2} z_m \eta \frac{df(\tau)}{d\tau} = -2blp_m^* \cos \omega t - \frac{8bl^3 \rho \nu}{\delta_0^3} \frac{dz}{dt}. \quad (19)$$

Тогда, принимая во внимание (6), (19), уравнение (1) для случая ползущего движения жидкости в канале примет вид

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + K \frac{dz}{dt} + n_1 z + n_3 z^3 = F_m \cos \omega t, \quad (20)$$

где $K = 8l^3 b \rho \nu (\delta_0)^{-3}$ — коэффициент демпфирования, учитывающий диссипативные свойства вязкой жидкости, $F_m = -2blp_m^*$ — амплитуда вынуждающей силы, обусловленной пульсацией давления жидкости на торцах канала.

На второй итерации определяем локальный член инерции $\partial U_\xi / \partial \tau$, используя решение (18), полученное на первой итерации, и подставляем определенный таким образом локальный член инерции в уравнения (15). Решая полученные уравнения совместно с краевыми условиями (16), находим закон распределения давления вязкой жидкости в канале в следующем виде:

$$P = \frac{1 - \xi^2}{2} \left(\frac{6 \eta \delta_0^2}{5 \nu} \frac{d^2 f(\tau)}{d\tau^2} + 12 \frac{df(\tau)}{d\tau} \right). \quad (21)$$

Подставляя давление (21) в (17), получаем реакцию слоя вязкой жидкости при учете инерции ее движения:

$$N_l = -2blp^*(\omega t) - \left(\frac{12}{15} \frac{bl^3\rho}{\delta_0} z_m \eta^2 \frac{d^2 f(\tau)}{d\tau^2} + \frac{8bl^3\rho\nu}{\delta_0^3} z_m \eta \frac{df(\tau)}{d\tau} \right) =$$

$$= -2blp_m^* \cos \omega t - \left(\frac{12}{15} \frac{bl^3\rho}{\delta_0} \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{8bl^3\rho\nu}{\delta_0^3} \frac{dz}{dt} \right). \quad (22)$$

Таким образом, принимая во внимание (6), (22), уравнение (1) для случая учета инерции движения жидкости в канале примет вид

$$(m + M) \frac{d^2 z}{dt^2} + K \frac{dz}{dt} + n_1 z + n_3 z^3 = F_m \cos \omega t. \quad (23)$$

Здесь $M = (12/15)bl^3\delta_0^{-1}\rho$ — присоединенная масса жидкости, учитывающая инерционные свойства вязкой жидкости в канале.

Заметим, что полученные в результате рассмотрения задачи гидроупругости уравнения (20), (23) фактически совпадают с уравнением Дуффинга. Данные уравнения отличаются тем, что в (20) коэффициент демпфирования вязкой жидкости определяется ее физическими свойствами и геометрическими размерами канала, а в (23) дополнительно входит присоединенная масса жидкости, также зависящая от указанных параметров. Таким образом, показано, что задача нелинейных гидроупругих колебаний стенки канала может быть сведена к исследованию уравнения (20) для случая ползущего течения жидкости или уравнения (23) при учете инерции движения вязкой жидкости.

Известно (см. [Korsch et al., 2008; Krack et al., 2019]), что при малых амплитудах колебаний и коэффициентах затухания уравнение Дуффинга описывает нелинейные колебания. Решение (20), (23) будем искать методом гармонического баланса, ограничиваясь далее исследованием основного нелинейного гидроупругого отклика нижней стенки канала на частоте, близкой к частоте пульсаций давления в торцевых полостях. С учетом сказанного искомое решение представляем гармоническим, считая $\eta \approx \omega$ и $z = z_m \cos(\omega t - \varphi)$. Выполняя процедуру линеаризации (20), (23) методом гармонического баланса [Krack et al., 2019], получаем алгебраическую систему

$$(n_1 - (m + M)\omega^2)z_m + \frac{3}{4}n_3 z_m^3 = F_m \cos \varphi, \quad (24)$$

$$K\omega z_m = F_m \sin \varphi.$$

Данная система соответствует уравнению (23), а для случая $M = 0$ она, как и ниже приведенные выкладки, будет соответствовать уравнению (20). Складывая уравнения системы, предварительно возводя их в квадрат, получим уравнение для определения основного нелинейного гидроупругого отклика нижней стенки, опирающейся на пружины с кубически нелинейной жесткостью:

$$\left(n - (m + M)\omega^2 + \frac{3}{4}n_3 z_m^2 \right)^2 z_m^2 + (K\omega z_m)^2 = F_m^2. \quad (25)$$

Выражая из (25) амплитуду колебаний стенки z_m , получим нелинейную амплитудную частотную характеристику — основной гидроупругий отклик нижней стенки канала:

$$z_m = \frac{\frac{F_m}{m+M}}{\sqrt{(\omega_*^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{K\omega}{m+M}\right)^2}}, \quad (26)$$

где

$$\omega_*^2(z_m) = \frac{n_1}{m+M} + \frac{3}{4} \frac{z_m^2 n_3}{m+M}$$

— так называемая скелетная кривая, оценивающая изменение собственной частоты нелинейной консервативной системы по сравнению с аналогичной линейной системой, т. е. при $n_3 = 0$.

Для численного построения характеристики (26) удобнее разрешить ее относительно ω , т. е. записать ее как

$$\omega^2 = \omega_*^2 - \frac{1}{2} \frac{K^2}{(m+M)^2} \pm \sqrt{\left(\frac{F_m}{z_m(m+M)}\right)^2 - \omega_*^2 \left(\frac{K}{m+M}\right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{K}{m+M}\right)^4}. \quad (27)$$

4. Результаты расчетов

Заметим, что, полагая $n_3 = 0$ в (26), (27), осуществим переход к амплитудной частотной характеристике стенки канала, опирающейся на пружину с линейной жесткостью. Таким образом, сформулированная в работе модель позволяет проводить численное моделирование амплитудных частотных характеристик (основного гидроупругого отклика) стенки канала, имеющей линейную опору ($n_3 = 0$), а также опору с мягкой ($n_3 < 0$) или жесткой ($n_3 > 0$) кубической нелинейностью при учете ($M \neq 0$) или без учета ($M = 0$) инерции движения вязкой жидкости в канале. Проиллюстрируем сказанное на примере расчетов для канала со следующими параметрами: $\ell = 0,1$ м, $\delta_0 = 0,05$ м, $b = 0,5$ м, $m_2 = 2$ кг, $n_1 = 10^7$ кг/с², $n_3 = 4 \cdot 10^{10}$ кг/(м²с²), $\rho = 1,84 \cdot 10^3$ кг/м³, $\nu = 2,53 \cdot 10^{-4}$ м²/с. В случае ползущего течения вязкой жидкости в канале результаты расчетов отклика стенки, имеющей опору с мягкой кубической нелинейностью, и стенки, опирающейся на пружину с линейно жесткостью, представлены на рис. 2, а. Аналогичные расчеты для случая жесткой нелинейности опорной пружины приведены на рис. 2, б. В случае учета инерции движения вязкой жидкости в канале результаты расчетов отклика стенки, имеющей опору с жесткой кубической нелинейностью, и стенки, опирающейся на пружину с линейной жесткостью, представлены на рис. 3, а. Аналогичные расчеты для случая мягкой нелинейности опорной пружины приведены на рис. 3, б. Все результаты расчетов приведены для амплитуды вынуждающей силы, соответствующей амплитуде пульсаций давления жидкости в торцевых полостях 1 кПа.

5. Заключение

Проведенное моделирование показало существенное влияние динамики слоя вязкой жидкости на нелинейные колебания нижней стенки. В частности, для случая, когда рассматривается ползущее движение тонкого слоя вязкой жидкости в канале, фактически осуществлен учет его демпфирующих свойств, что учитывается в слагаемом вязкого трения в уравнении (20), коэффициент демпфирования при котором определяется параметрами слоя жидкости в канале. Расчеты показывают, что демпфирование проявляется в виде ограниченности амплитуд колебаний стенки на кривых гидроупругого отклика. При этом можно заметить, что наблюдается незначительное искривление нелинейных характеристик по сравнению с линейным случаем. С другой стороны, расчеты показали важность учета инерции движения вязкой жидкости в узком канале, так как кроме демпфирования проявляется эффект существенного увеличения инерционных свойств рассматриваемой колебательной системы, что учитывается полученным выражением для дополнительной, так называемой присоединенной, массы, т. е. дополнительной массы, учтенной в уравнении (23). В результате, как показало моделирование, наблюдается сдвиг кривых гидроупругого отклика стенки канала к более низким частотам по сравнению с частотами системы без учета инерции движения жидкости в узком канале. Данный сдвиг сопровождается существенным возрастанием амплитуд колебаний и искривлением нелинейных амплитудных характеристик.

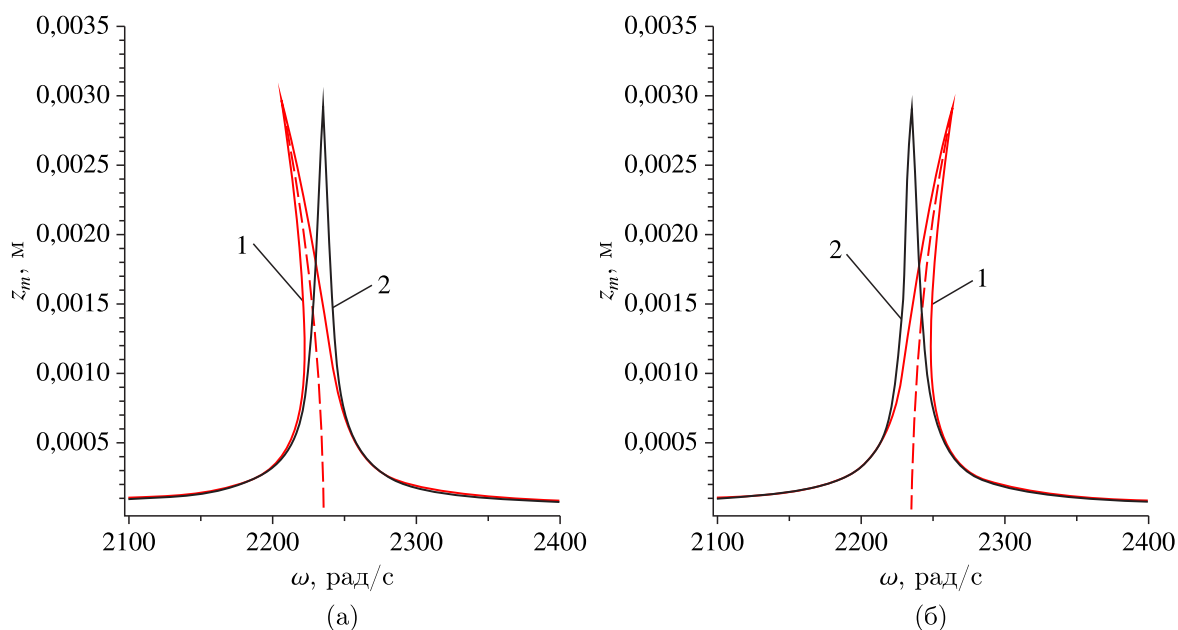


Рис. 2. Гидроупругий отклик стенки канала, имеющей упругую опору, при ползущем движении жидкости: а) опора с мягкой кубической нелинейностью (1) и линейно-упругая опора (2); б) опора с жесткой кубической нелинейностью (1) и линейно-упругая опора (2); пунктирной линией обозначена скелетная кривая

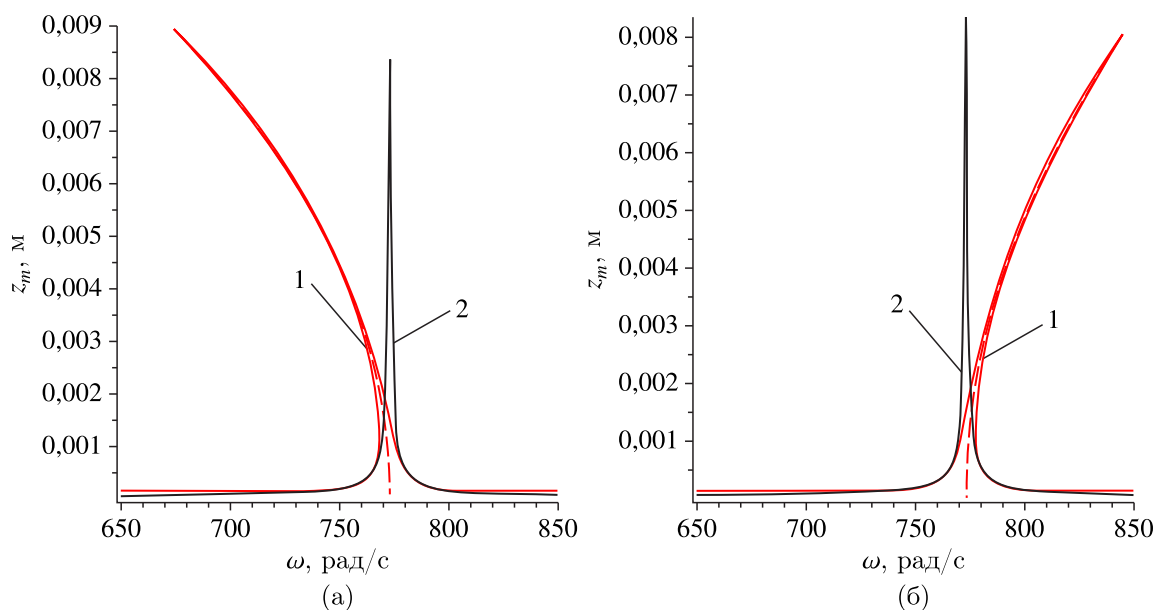


Рис. 3. Гидроупругий отклик стенки канала, имеющей упругую опору, при учете инерции движения жидкости: а) опора с мягкой кубической нелинейностью (1) и линейно-упругая опора (2); б) опора с жесткой кубической нелинейностью (1) и линейно-упругая опора (2); пунктирной линией обозначена скелетная кривая

Искривление характеристик нелинейного гидроупругого отклика обуславливает возникновение зон неустойчивых колебаний, где наблюдается скачкообразное изменение амплитуд колебаний. Таким образом, предложенные в работе модели позволяют определить частотный диа-

пазон, в котором наблюдаются данные эффекты. Полученные в работе результаты могут быть использованы на практике для исследования нелинейных эффектов при колебаниях упругих элементов различных датчиков, например датчиков давления, чувствительные элементы которых опираются на нелинейно-упругоподатливые подложки, а также для исследования динамики гидроопор, в состав которых входят нелинейные упругие элементы, кроме того, для исследования динамики элементов, имеющих нелинейно-упругие подвесы, систем смазки, гидропривода и охлаждения.

Список литературы (References)

- Вельмисов П. А., Покладова Ю. В. О некоторых математических моделях механической системы «трубопровод – датчик давления» // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Технические науки. – 2011. – № 1 (29). – С. 137–144.
Vel'misov P. A., Pokladova Yu. V. O nekotorykh matematicheskikh modelyakh mekhanicheskoi sistemy «truboprovod – datchik davleniya» [On some mathematical models of mechanical system «pipeline – pressure sensor»] // Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Ser. Tekhnicheskie nauki. – 2011. – No. 1 (29). – S. 137–144 (in Russian).
- Гордеев Б. А., Ермолаев А. И., Ерофеев В. И., Плехов А. С. Модельно-ориентированное проектирование магнито-реологических гидравлических опор // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. – 2020. – № 10. – С. 13–25.
Gordeev B. A., Ermolaev A. I., Erofeev V. I., Plehov A. S. Model'no-orientirovannoe proektirovanie magnitореологических гидравлических опор [Model-based design of magnetorheological hydromounts] // Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij. Mashinostroenie. – 2020. – No. 10. – S. 13–25 (in Russian).
- Добрянский В. Н., Рабинский Л. Н., Радченко В. П., Соляев Ю. О. Оценка ширины зоны контакта между плоскоовальными каналами охлаждения и корпусом приемопередающего модуля активной фазированной антенной решетки // Труды МАИ. – 2018. – № 101. – <http://trudymai.ru/published.php?ID=98252>
Dobryanskij V. N., Rabinskij L. N., Radchenko V. P., Soljaev Ju. O. Ocenka shiriny zony kontakta mezhdru ploskooval'nymi kanalami ohlazhdenija i korpusom prijomoperedajushhego modulja aktivnoj fazirovannoj antennoj reshjotki [Width evaluation of contact zone between flat-oval cooling channels and transmitting module case of active phased-array antenna] // Trudy MAI. – 2018. – No. 101 (in Russian).
- Индейцев Д. А., Полипанов И. С., Соколов С. К. Расчет кавитационного ресурса втулки судовых двигателей // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 1994. – № 4. – С. 59–64.
Indejcev D. A., Polipanov I. S., Sokolov S. K. Raschet kavitacionnogo resursa vtulki sudovyh dvigatelej [Calculation of Cavitation Life-Time of Ship Engine Liner] // Problemy mashinostroenija i nadezhnosti mashin. – 1994. – No. 4. – S. 59–64 (in Russian).
- Королева М. Р., Мищенко О. В., Редер Т., Тенев В. А., Чернова А. А. Численное моделирование процесса срабатывания предохранительного клапана // Компьютерные исследования и моделирование. – 2018. – Т. 10, № 4. – С. 495–509.
Koroleva M. R., Mishenkova O. V., Reder T., Tenenev V. A., Chernova A. A. Chislennoe modelirovanie processa srabatyvaniya predohranitel'nogo klapana [Numerical simulation of the process of activation of the safety valve] // Computer Research and Modeling. – 2018. – Vol. 10, No. 4. – P. 495–509 (in Russian).
- Могилевич Л. И., Попов В. С., Скородумов Е. С. Динамика сжимаемого слоя вязкой несжимаемой жидкости, взаимодействующего с упругой пластиной // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. – 2017. – № 1. – С. 53–63.
Mogilevich L. I., Popov V. S., Skorodumov E. S. Dinamika sdavlivajemogo sloja vjazkoj neszhimaemoj zhidkosti, vzaimodejstvujushhego s uprugoj plastinoj [Dynamics of viscous incompressible liquid constricted layer, interacting with elastic walls] // Matematicheskoe modelirovanie, komp'juternyj i naturnyj jeksperiment v estestvennyh naukah. – 2017. – No. 1. – S. 53–63 (in Russian).
- Пановко Я. Г. Введение в теорию механических колебаний. – М.: Наука, 1991.
Panovko Ya. G. Vvedenie v teoriyu mekhanicheskikh kolebanij [Introduction to the theory of mechanical vibrations]. – Moscow: Nauka, 1991 (in Russian).
- Попов В. С., Попова А. А. Моделирование взаимодействия стенки канала с упруго закрепленным торцевым уплотнением // Компьютерные исследования и моделирование. – 2020. – Т. 12, № 2. – С. 387–400.
Popov V. S., Popova A. A. Modelirovanie vzaimodejstvija stenki kanala s uprugozakreplennym torcevyim uplotnieniem [Modeling of a channel wall interaction with an end seal flexibly restrained at the edge] // Computer Research and Modeling. – 2020. – Vol. 12, No. 2. – P. 387–400 (in Russian).

- Akcahay D. T., Young Y. L.* Hydroelastic response and energy harvesting potential of flexible piezoelectric beams in viscous flow // *Physics of Fluids*. — 2015. — Vol. 24, No. 5.
- Amabili M.* *Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates*. — New York: Cambridge University Press, 2008.
- Amabili M., Kwak M. K.* Free vibrations of circular plates coupled with liquids: revising the Lamb problem // *Journal of Fluids and Structures*. — 1996. — Vol. 10, No. 7. — P. 743–761.
- Amabili M.* Vibrations of circular plates resting on sloshing liquid: solution of the fully coupled problem // *Journal of Sound and Vibration*. — 2001. — Vol. 245, No. 2. — P. 261–283.
- Antsiferov S. A., Kondratov D. V., Mogilevich L. I.* Perturbing moments in a floating gyroscope with elastic device housing on a vibrating base in the case of a nonsymmetric end outflow // *Mechanics of Solids*. — 2009. — Vol. 44, No. 3. — P. 352–360.
- Askari E., Jeong K.-H., Amabili M.* Hydroelastic vibration of circular plates immersed in a liquid-filled container with free surface // *Journal of Sound and Vibration*. — 2013. — Vol. 332, No. 12. — P. 3064–3085.
- Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V., Matveenko V. P.* Hydroelastic stability of a rectangular plate interacting with a layer of ideal flowing fluid // *Fluid Dynamics*. — 2016. — Vol. 51, No. 6. — P. 821–833.
- Bochkarev S. A., Kamenskikh A. O., Lekomtsev S. V.* Experimental investigation of natural and harmonic vibrations of plates interacting with air and fluid // *Ocean Engineering*. — 2020. — Vol. 206. — P. 10734.
- Faria C. T., Inman D. J.* Modeling energy transport in a cantilevered Euler–Bernoulli beam actively vibrating in Newtonian fluid // *Mechanical Systems and Signal Processing*. — 2014. — Vol. 45, No. 2. — P. 317–329.
- Indeitsev D. A., Osipova E. V.* Nonlinear effects in trapped modes of standing waves on the surface of shallow water // *Technical Physics*. — 2000. — Vol. 45, No. 12. — P. 1513–1517.
- Kheiri M., Païdoussis M. P., Costa Del Pozo G., Amabili M.* Dynamics of a pipe conveying fluid flexibly restrained at the ends // *Journal of Fluids and Structures*. — 2014. — Vol. 49. — P. 360–385.
- Kondratov D. V., Popov V. S., Popova A. A.* Modeling the end seal oscillations of the channel filled with pulsating viscous fluid // *Lecture notes in mechanical engineering*. — 2021. — P. 665–672.
- Korsch H. J., Jodl H.-J., Hartmann T.* *Chaos: A Program Collection for the PC: Third Revised and Enlarged Edition*. — Berlin, Heidelberg: Springer, 2008.
- Kozlovsky Y.* Vibration of plates in contact with viscous fluid: Extension of Lamb’s model // *Journal of Sound and Vibration*. — 2009. — Vol. 326. — P. 332–339.
- Krack M., Gross J.* *Harmonic Balance for Nonlinear Vibration Problems*. — New York: Springer, 2019.
- Kurzin V. B.* Streamwise vibrations of a plate in a viscous fluid flow in a channel, induced by forced transverse vibrations of the plate // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. — 2011. — Vol. 52, No. 3. — P. 459–463.
- Lamb H.* On the vibrations of an elastic plate in contact with water // *Proc. Roy. Soc. A*. — 1921. — Vol. 98. — P. 205–216.
- Lamb H.* *Hydrodynamics*, 6th edition. — New York: Dover Publications Inc, 1945.
- Lomakin E. V., Rabinsky L. N., Radchenko V. P., Solyaev Yu. O., Zhavoronok S. I., Babaitsev A. V.* Analytical estimates of the contact zone area for a pressurized flat-oval cylindrical shell placed between two parallel rigid plates // *Meccanica*. — 2018. — Vol. 53, No. 15. — P. 3831–3838.
- Nayfeh A. H., Mook D. T.* *Nonlinear oscillations*. — New York: Wiley, 1979.
- Mogilevich L. I., Popov V. S., Popova A. A.* Longitudinal and transverse oscillations of an elastically fixed wall of a wedge-shaped channel installed on a vibrating foundation // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. — 2018. — Vol. 47, No. 3. — P. 227–234.

- Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A.* Interaction dynamics of pulsating viscous liquid with the walls of the conduit on an elastic foundation // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. — 2017. — Vol. 46, No. 1. — P. 12–19.
- Mogilevich L.I., Popov V.S., Rabinsky L.N.* Mathematical modeling of elastically fixed wall longitudinal oscillations of wedge-shaped channel under foundation vibration // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. — 2016. — Vol. 12, No. 4. — P. 9–17.
- Mogilevich L.I., Popov V.S.* Investigation of the interaction between a viscous incompressible fluid layer and walls of a channel formed by coaxial vibrating discs // *Fluid Dynamics*. — 2011. — Vol. 46, No. 3. — P. 375–388.
- Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A.* Dynamics of interaction of elastic elements of a vibrating machine with the compressed liquid layer lying between them // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. — 2010. — Vol. 39, No. 4. — P. 322–331.
- Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A.* Oscillations of a cylinder liner of an internal combustion engine with a water cooling system caused by piston group impacts // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. — 2008. — Vol. 37, No. 3. — P. 293–299.
- Morozov D., Indeitsev D., Michailov A.* Added mass study of plane structures at their various motions // *Materials Physics and Mechanics*. — 2019. — Vol. 41, No. 1. — P. 116–124.
- Önsay T.* Effects of layer thickness on the vibration response of a plate-fluid layer system // *Journal of Sound and Vibration*. — 1993. — Vol. 163, No. 2. — P. 231–259.
- Païdoussis M.P.* *Fluid-Structure Interactions: Slender Structures and Axial Flow*. — London: Elsevier Academic Press, 2004. — Vol. 2.
- Païdoussis M.P., Price S.J., De Langre E.* *Fluid-structure Interactions: Cross-Flow-Induced Instabilities*. — New York: Cambridge University Press, 2011.
- Van Dyke M.* *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*. — Stanford: The Parabolic Press, 1975.
- Velmisov P.A., Ankilov A.V.* Dynamic stability of plate interacting with viscous fluid // *Cybernetics and Physics*. — 2017. — Vol. 6, No. 4. — P. 262–270.