

УДК: 519.6; 539.3

Деформирование жесткопластических тел с памятью формы при переменных нагрузках и температуре

В. А. Грачев^а, Ю. С. Найштут^б

Архитектурно-строительная академия Самарского государственного технического университета,
Россия, 443001, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 194

E-mail: ^а grach_va@rambler.ru, ^б neustadt99@mail.ru

Получено 10.11.2021, после доработки — 17.12.2021.

Принято к публикации 23.12.2021.

Деформирование сплошных сред из материалов с памятью формы под влиянием возрастающей нагрузки и при постоянной температуре протекает обычным для металлов идеальным упругопластическим образом. При этом величина максимальных упругих деформаций много меньше предельных пластических. Восстановление формы происходит при повышенной температуре и невысоком уровне напряжений. Феноменологически «обратное» деформирование аналогично с точностью до знака изменению формы при активном нагружении силами. Так как в неупругом процессе решающую роль играет пластическая деформация, то анализ механического поведения целесообразно провести в рамках идеальной жесткопластической модели с двумя поверхностями нагружения. В этой модели поверхностям нагружения отвечают два физических состояния материала: пластическое течение при высоких напряжениях и плавление при сравнительно невысокой температуре. Во втором параграфе формулируется задача деформирования жесткопластических сред при постоянной температуре в двух формах: в виде принципа виртуальных скоростей с условием текучести Мизеса и как требование минимальности диссипативного функционала. Доказываются равносильность принятых формулировок и существование обобщенных решений в обоих принципах. В третьем параграфе изучается жесткопластическая модель сплошной среды при изменяющейся температуре с двумя поверхностями нагружения. Для принятой модели формулируются два оптимальных принципа, связывающих внешние нагрузки и скорости перемещений точек среды как при активном нагружении, так и в процессе восстановления формы при нагревании. Доказано существование обобщенных скоростей для широкого класса трехмерных областей. Связь вариационных принципов и изменяющейся температуры обеспечивается включением в расчетную схему первого и второго начал термодинамики. Существенно, что в процессе доказательств используется только феноменологическое описание явления. Аустенитно-мартенситные превращения сплавов, которые часто являются основными при объяснении механического поведения материалов с памятью формы, не используются. В четвертом параграфе дано определение материалов с памятью формы как сплошных сред с двумя поверхностями нагружения, доказано существование решений в принятых ограничениях. Показана адекватность модели и опытов по деформированию материалов с памятью формы. В заключении формулируются математические задачи, которые представляются интересными в будущих исследованиях.

Ключевые слова: жесткопластические среды, внешние нагрузки, материалы с памятью формы, вариационные принципы, пластичность при различных температурах, законы термодинамики, обобщенные решения

UDC: 519.6; 539.3

Deformation of shape memory rigid-plastic bodies under variable external loads and temperatures

V. A. Grachev^a, Yu. S. Nayshtut^b

Academy of Building and Architecture Samara State Technical University,
194, Molodogvardeiskaya st., Samara, 443001, Russia

E-mail: ^a grach_va@rambler.ru, ^b neustadt99@mail.ru

Received 10.11.2021, after completion – 17.12.2021.

Accepted for publication 23.12.2021.

Under increasing loading and at a constant temperature shape memory solids become deformed in an ideal elastic plastic way as other metals, and the maximum elastic strains are much less than the ultimate plastic ones. The shape is restored at the elevated temperature and low stress level. Phenomenologically, the «reverse» deformation is equivalent to the change in shape under active loading up to sign. Plastic deformation plays a leading role in a non-elastic process; thus, the mechanical behavior should be analyzed within the ideal rigid-plastic model with two loading surfaces. In this model two physical states of the material correspond to the loading surfaces: plastic flow under high stresses and melting at a relatively low temperature. The second section poses a problem of deformation of rigid-plastic bodies at the constant temperature in two forms: as a principle of virtual velocities with the von Mises yield condition and as a requirement of the minimum dissipative functional. The equivalence of the accepted definitions and the existence of the generalized solutions is proved for both principles. The third section studies the rigid-plastic model of the solid at the variable temperature with two loading surfaces. For the assumed model two optimal principles are defined that link the external loads and the displacement velocities of the solid points both under active loading and in the process of shape restoration under heating. The existence of generalized velocities is proved for the wide variety of 3D domains. The connection between the variational principles and the variable temperature is ensured by inclusion of the first and second principles of thermodynamics in the calculation model. It is essential that only the phenomenological description of the phenomenon is used in the proving process. The austenite-to-martensite transformations of alloys, which are often the key elements in explanations of the mechanical behavior of shape memory materials, are not used here. The fourth section includes the definition of the shape memory materials as solids with two loading surfaces and proves the existence of solutions within the accepted restrictions. The adequacy of the model and the experiments on deformation of shape memory materials is demonstrated. In the conclusion mathematical problems that could be interesting for future research are defined.

Keywords: rigid-plastic bodies, external loads, shape memory materials, variational principles, plasticity at different temperatures, laws of thermodynamics, generalized solutions

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2022, vol. 14, no. 1, pp. 63–77 (Russian).

1. Введение

При различных температурах θ кривые относительных удлинений ε центрально растянутых стержней, изготовленных из идеальных упругопластических материалов, обладающих памятью формы, в зависимости от прилагаемых напряжений σ обозначены как $\varepsilon = \Psi(\sigma)$ и показаны на рис. 1 в виде ломаных линий со стрелками. Постоянные θ_- и θ_+ выделяют интервал температур, в котором возможно восстановление первоначальной формы образца.

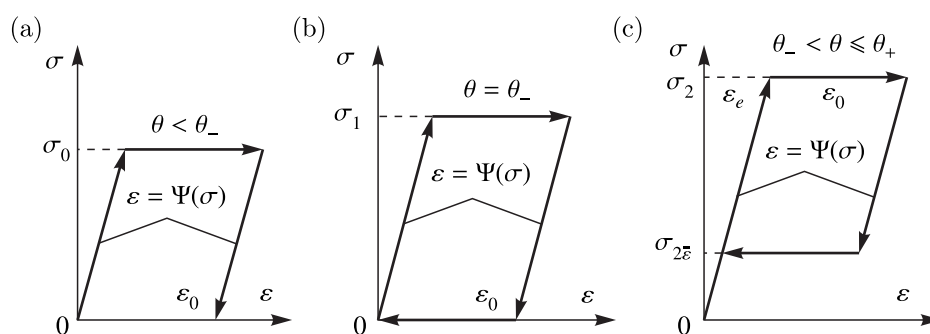


Рис. 1. Кривые $\varepsilon = \Psi(\sigma)$ (ломаные линии со стрелками, σ — напряжение, ε — относительное удлинение) одноосно растягиваемого стержня из упругопластического материала с памятью формы при различных температурах θ . Напряжения изменяются на графиках $\varepsilon = \Psi(\sigma)$ по направлению стрелок: а) при низких температурах $\theta < \theta_-$, ε_0 — остаточная деформация после снятия нагрузки ($\sigma = 0$); б) при температуре восстановления формы θ_- : активное нагружение при напряжении σ_1 и восстановление формы, когда $\sigma = 0$; в) зависимость между напряжениями и относительными деформациями при температурах из интервала $\theta_- < \theta \leq \theta_+$: активное нагружение при σ_2 , восстановление формы при $\sigma_{2\varepsilon}$

Если $\theta < \theta_-$, сплошные среды с памятью формы не отличаются от идеальных упругопластических тел, после снятия нагрузки наблюдается остаточная деформация ε_0 . Когда $\theta_- \leq \theta \leq \theta_+$, фиксируются «обратная деформация» ε_0 и незначительная упругая деформация ε_e , отвечающая напряжению σ_2 [Лихачев, 1997; Lagoudas, 2008].

Опыты показывают, что $\varepsilon_e \ll \varepsilon_0$, поэтому в первом приближении можно принять $\varepsilon_e = 0$ и рассмотреть жесткопластический элемент, подвергнутый растяжению (рис. 2).

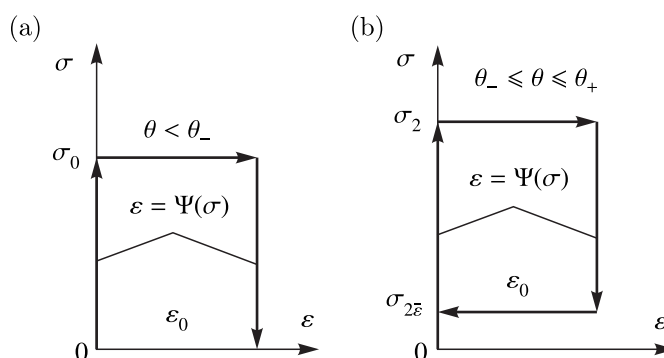


Рис. 2. Кривые $\varepsilon = \Psi(\sigma)$ (ломаные линии со стрелками, σ — напряжение, ε — относительное удлинение) одноосно растягиваемого стержня из жесткопластического материала с памятью формы при различных температурах θ . Напряжения изменяются на графиках $\varepsilon = \Psi(\sigma)$ по направлению стрелок: а) при низких температурах $\theta < \theta_-$, ε_0 — остаточная деформация после снятия нагрузки ($\sigma = 0$); б) при «температурах из интервала восстановления формы $\theta_- \leq \theta \leq \theta_+$ »: активное нагружение при σ_2 , восстановление формы при $\sigma_{2\varepsilon}$

Поведение жесткопластических сред при постоянной температуре $\theta < \theta_-$ изучено подробно, и оно применимо для сред с памятью формы (рис. 1, *a*) при любом нагружении. Цель настоящей работы — изучить для идеальных материалов с памятью формы характер деформирования в случае $\theta_- \leq \theta \leq \theta_+$, когда имеет место «обратная деформация»: приток тепла ликвидирует остаточную деформацию ε_0 при низких напряжениях $\sigma_{2\varepsilon}$. Задача объяснения поведения сплошной среды (рис. 2, *a*) на основе предельного анализа упругопластической модели является достаточно сложной. Проблема в том, что во всех известных работах существование решений для упругопластических сред с памятью формы найдено в пространствах типа BD (ограниченных деформаций) [Панагиотопулос, 1989; Bonetti et al., 2016; Грачев, Найштут, 2021], а рабочим аппаратом являются вариационные неравенства либо вариационный принцип типа Рейсснера. Фактически доказываются существование и единственность решений при ограниченных деформациях. В то же время наибольший интерес представляют большие (предельные) деформации, при которых наблюдаются существенные изменения формы тел. Кроме того, при предельных деформациях единственность скоростей нарушается, и это требует теоретического обоснования.

В работе предлагается прямой анализ предельного случая на основе некоторого расширения модели жесткопластических сред. Процесс деформирования изучается феноменологически, без привлечения теории аустенитно-мартенситных превращений [Abeyaratne, Knowles, 2006; Auricchio et al., 2007, Frémond, 2012; Cisse et al., 2016], и ставит целью объяснить основные факты поведения сред с памятью формы, наблюдаемые в опытах. Порядок изложения таков. Вначале формулируются положения по деформированию жесткопластических сред при постоянной температуре. Затем вводится расширенная жесткопластическая модель с двумя поверхностями нагружения. Приводятся доказательства существования решений в принятой модели при соблюдении основных законов термодинамики. В итоге удастся объяснить деформирование сплошных сред с памятью формы в рамках теории идеальной пластичности.

2. Свойства жесткопластических сред при постоянной температуре

Жесткопластическое тело D определяется как трехмерная область континуума в декартовых координатах x_i ($i = 1, 2, 3$) с границей $\partial D = \partial D_u + \partial D_p$. Часть границы ∂D_u закреплена, а на ∂D_p известны внешние напряжения F_i . В каждой точке D заданы вектор скоростей u_i и симметричный тензор напряжений σ_{ij} . По вектору скоростей вычисляются линейные тензоры скоростей деформаций

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1)$$

и соответствующие им девиаторы $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon$, $3\varepsilon = \varepsilon_{ii}$. По повторяющемуся индексу производится суммирование. Жесткопластическая среда несжимаема, поэтому постулируется $\varepsilon = 0$. Тензор σ_{ij} связан с девиатором напряжений s_{ij} формулой

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma, \quad 3\sigma = \sigma_{ii}. \quad (2)$$

Вектор u_i называют допустимым, если он является функцией из L_1 с нормой

$$\|u_i\|_{L_i} = \sum_k \int_D |u_k| dx + \sum_{k,m}^{1,2,3} \int_D \left| \frac{\partial u_k}{\partial x_m} \right| dx \quad (3)$$

и равен нулю на границе ∂D_u . Здесь dx — дифференциал объема.

В дальнейшем рассматривается идеальная жесткопластическая модель Сен-Венана – Леви – Мизеса [Качанов, 1969], которая характеризуется следующими свойствами.

1. Тензор σ_{ij} существует только тогда, когда девиатор s_{ij} в девятимерном пространстве не выходит за границы поверхности нагружения

$$\Phi(s_{ij}) = s_{ij}^2 - 2\tau^2 = 0. \quad (4)$$

Здесь τ — предел текучести материала на сдвиг.

2. Если $s_{ij}^2 < 2\tau^2$, то $e_{ij} = 0$.

3. Если $s_{ij}^2 - 2\tau^2 = 0$, то $e_{ij} = \lambda s_{ij}$.

Получается

$$\lambda = \frac{s_{ij}e_{ij}}{2\tau^2}, \quad s_{ij} = \frac{\sqrt{2}\tau e_{ij}}{\sqrt{e_{ij}^2}}. \quad (5)$$

Вследствие последнего равенства девиатор s_{ij} определяется по e_{ij} единственным образом, обратное утверждение неверно.

Кроме того, из (5) следует

$$s_{ij} = \frac{\partial\varphi}{\partial e_{ij}}, \quad \varphi(e_{ij}) = 2\tau(e_{ij}^2)^{1/2}. \quad (6)$$

Функция φ называется диссипативным потенциалом (функцией), отвечающим функции нагружения $\Phi(s_{ij})$.

Геометрическая интерпретация связи e_{ij} и s_{ij} показана на рис. 3, где в главных осях девиатора s_{ij} представлено сечение поверхности $\Phi(s_{ij}) = 0$ девиаторной плоскостью $s_{33} = 0$.

На поверхности нагружения направление тензора e_{ij} совпадает с внешней нормалью, а его второй инвариант пропорционален мощности пластической деформации.

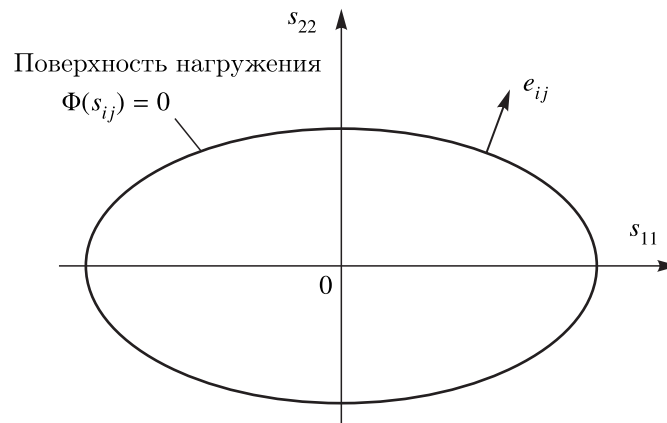


Рис. 3. Сечение поверхности нагружения $\Phi(s_{ij}) = 0$ девиаторной плоскостью $s_{33} = 0$. Девиатор скоростей перемещений e_{ij} нормален к поверхности нагружения

Если $\Phi(s_{ij}) < 0$, то $e_{ij} = 0$. Медленные движения жесткопластической среды происходят в соответствии с принципом виртуальных мощностей, то есть равенство

$$\int_D s_{ij}e_{ij} dx = \int_D f_i u_i dx + \int_{\partial D_p} F_i u_i dS \quad (7)$$

имеет место для всех геометрически допустимых u_i , связанных с s_{ij} соотношением (5).

Множество допустимых скоростей u_i обозначим буквой P . В формуле (7) dS — дифференциал площади поверхности ∂D_p , f_i — интенсивность нагрузки в единице объема, а F_i — интенсивность внешних сил на поверхности ∂D_p .

Установлено [Мосолов, Мясников, 1981], что поиск решений в (7) равносильно задаче о минимуме функционала

$$J(e_{ij}) = \int_D \varphi(e_{ij}) dx - \int_D f_i u_i dx - \int_{\partial D_p} F_i u_i dS \quad (8)$$

на множестве допустимых скоростей $u_i \in P$.

Вводится множество чисел m_s (статических коэффициентов) на основе равенства

$$\int_D s_{ij}^0 e_{ij} dx = m_s \left(\int_D f_i u_i dx + \int_{\partial D_p} F_i u_i dS \right), \quad (9)$$

которое выполняется при фактически действующих внешних нагрузках f_i, F_i для всех $u_i \in P$.

При этом в каждой точке области D существует статически допустимый безопасный девиатор s_{ij}^0 (находящийся внутри поверхности нагружения $\Phi(s_{ij}) = 0$).

Другое множество чисел m_k (кинематических коэффициентов) определяется из равенства

$$\int_D \varphi(e_{ij}) dx = m_k \left(\int_D f_i u_i dx + \int_{\partial D_p} F_i u_i dS \right) \quad (10)$$

для допустимых $u_i \in P$ и при заданных нагрузках f_i, F_i .

Доказано [Мосолов, Мясников, 1981; Каменярж, 1997] существование пределов

$$\sup_{\Phi(s_{ij}^0) < 0} m_s = \inf_{u_i \in P} m_k = m_* \quad (11)$$

и справедливость следующих утверждений.

1. При $m < m_*$ задача о минимуме функционала

$$\inf_{u_i \in P} \left[\int_D \varphi(e_{ij}) dx - m \left(\int_D f_i u_i dx + \int_{\partial D_p} F_i u_i dS \right) \right] = \inf_{u_i \in P} \left[\int_D \varphi(e_{ij}) dx - m \int_D s_{ij}^0 e_{ij} dx \right] \quad (12)$$

при любых геометрически допустимых $u_i \in P$ имеет только нулевое решение, так как во всех точках тела D существует безопасный девиатор напряжений.

2. При $m > m_*$ система (7) не имеет решений, так как девиатор s_{ij} не должен находиться вне поверхности нагружения.

3. При $m = m_*$ задача имеет ненулевое решение в более широком классе функций, чем определено в формуле (3). Число m_* называют коэффициентом предельной нагрузки, имеет место формула

$$m_* = \inf_{u_i \in P} \left[\frac{\int_D \varphi(e_{ij}) dx}{\int_D f_i u_i dx + \int_{\partial D_p} F_i u_i dS} \right]. \quad (13)$$

Итак, изменение формы жесткопластического тела возможно, только когда $m = m_*$, при этом множество u_i следует выбирать из более широкого пространства, чем L_1 . Последний факт

является следствием того, что пространство с нормой (3) не является рефлексивным: из равенства $m \rightarrow m_*$ не следует существование слабо сходящейся последовательности u_{in} , $n \rightarrow \infty$, к элементу u_i^0 из L_1 . Говоря иначе, нет такой последовательности $\|u_{in} - u_i^0\|_{L_1} \rightarrow 0$, чтобы для любого функционала L_1^* из сопряженного к L_1 пространства имело место равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} L_1^*(u_{in}) = L_1^*(u_i^0)$.

Общая схема пополнения пространства $u_i \in L_1$ такова. Обозначим множество векторов с нормой (3) буквой K и рассмотрим сопряженное с ним пространство линейных функционалов K^* . Установим взаимно однозначное соответствие между u_i и некоторым функционалом из K^* (назовем его $K^*(u_i)$) по формуле

$$|K^*(u_i)| = \langle K^*, u_i \rangle. \quad (14)$$

Слева в (14) стоит норма функционала K^* на множестве K , а справа — значение функционала K^* на функции u_i . Выберем в K^* тотальное сепарабельное множество B^0 . Свойство тотальности означает, что если $\langle L, e_{ij} \rangle = 0$ для всех $L \in B^0$, то $e_{ij} = 0$. В этом случае второе сопряженное пространство $B^{0*} = M$ является искомым расширением. Сходимость по норме (3) следует заменить на слабую* секвенциальную сходимость

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle u_{in}, K^* \rangle = \langle u_i^0, K^* \rangle. \quad (15)$$

Функционал $J(e_{ij})$ является возрастающим на M :

$$J(e_{ij}) \rightarrow \infty, \quad e_{ij} \in M. \quad (16)$$

Кроме того, $J(e_{ij})$ слабо* полунепрерывен на M , то есть для любой последовательности $e_{ij}^n \in M$, слабо сходящейся к e_{ij} , выполняется неравенство

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} J(e_{ij}^n) \geq J(e_{ij}). \quad (17)$$

Поэтому существует элемент $e_{ij} \in M$, на котором $J(e_{ij})$ достигает нижней грани m_* . Выбор B^0 не является однозначным. Можно принять в качестве B^0 подмножество непрерывных функций, тогда B^{0*} — множество мер, в котором впервые было доказано существование решений в жесткопластической задаче [Nayroles, 1970]. Приняв B^0 в виде множества функций ограниченной вариации, получим другой класс решений, часто встречающийся на практике, — векторные поля, имеющие конечные скачки $[u_i]$ вдоль внутренних поверхностей S_τ . Основное уравнение (7) переписывается в виде

$$\int_D s_{ij} e_{ij} dx + \int_{S_\tau} \tau[u_i] dS_\tau = \int_D f_i u_i dx + \int_{\partial D_p} F_i u_i dS = A(u_i). \quad (18)$$

Статический и кинематический коэффициенты определяют формулы

$$\int_D s_{ij}^0 e_{ij} dx + \int_{S_\tau} \tau^0[u_i] dS_\tau = m_s \left(\int_D f_i u_i dx + \int_{\partial D_p} F_i u_i dS \right), \quad (19)$$

$$\int_D \varphi(e_{ij}) dx + \int_{S_\tau} \tau[u_i] dS_\tau = m_k \left(\int_D f_i u_i dx + \int_{\partial D_p} F_i u_i dS \right). \quad (20)$$

Существует предельная нагрузка, и формулы (11)–(13) не меняются. В таком виде они будут использованы в последующем изложении. Отметим также, что равенство (18) на действительном поле скоростей u_i и при постоянной температуре является законом сохранения энергии (первым началом термодинамики), если считать

$$\int_D s_{ij} e_{ij} dx + \int_{S_\tau} \tau[u_i] dS_\tau = \dot{E}(u_i)$$

скоростью изменения внутренней энергии. Действительно, при отсутствии притока тепла \dot{Q} первый закон термодинамик

$$\dot{E} = \dot{Q} + \dot{A} \quad (21)$$

превращается в равенство $\dot{E} = \dot{A}$.

Второе начало термодинамики в форме Клаузиуса при постоянной температуре

$$\dot{E} = \theta \dot{H} \geq \dot{Q}, \quad (22)$$

где H — энтропия (калория по [Трусделл, 1975]), также выполняется в силу неотрицательности $\dot{E}(u_i)$. Следовательно, вариационный принцип (18) описывает поведение жесткопластической среды при постоянной температуре без дополнительного привлечения законов термодинамики.

Предыдущие рассуждения показывают, что задача о минимуме функционала

$$\inf_{u_i \in P} \left[\int_D \varphi(e_{ij}) dx + \int_{S_\tau} \tau[u_i] dS_\tau - m \left(\int_D f_i u_i dx + \int_{\partial D_p} F_i u_i dS \right) \right] \quad (23)$$

всегда имеет решения вида $u_i = C u_i^0$, где C — постоянная, так как φ — однородная функция первой степени $\varphi(C u_i) = C \varphi(u_i)$. Для постоянной C обычно выбирают нормировку $\|u_i\| = 1$. Физически более обоснованным представляется аналог второго начала термодинамики: при рассеянии внутренней энергии в окружающую среду (когда неизменна температура) существует постоянная C_0 , для которой справедливо неравенство

$$\int_D \varphi(e_{ij}) dx + \int_{S_\tau} \tau[u_i] dS_\tau \leq C_0 \int_D dx. \quad (24)$$

После определения скоростей u_i перемещения точек тела w_i вычисляются путем интегрирования уравнений

$$\frac{dw_i}{dt} = u_i(x). \quad (25)$$

Эти уравнения разрешимы на интервале времени $0 \leq t \leq T$ в тех же обобщенных расширениях $B^{0*} = M$ исходного пространства, если функции u_i измеримы. На практике обычно реализуется конечное число интервалов с постоянным значением на каждом из них величин u_i , так что интегрирование по (25) осуществимо. Тем самым завершается решение задачи о деформировании жесткопластических сред с памятью формы при $\theta < \theta_-$.

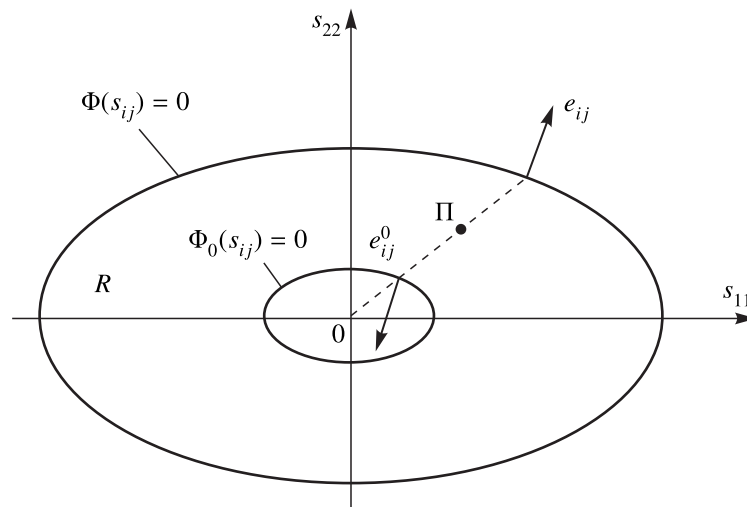


Рис. 4. Сечение девиаторной плоскостью двух поверхностей нагружения $\Phi(s_{ij}) = 0$ и $\Phi_0(s_{ij}) = 0$. Тензоры e_{ij} , e_{ij}^0 нормальны к поверхностям нагружения, R — область возможных девиаторов напряжений, Π — произвольная точка области R

3. Жесткопластические среды с двумя поверхностями нагружения

Рассмотрим среду, которая может деформироваться при постоянной температуре только тогда, когда напряжения в любой точке располагаются в девятимерном пространстве девиаторов внутри объема R , ограниченного подобными поверхностями нагружения $\Phi(s_{ij}) = 0$ и $\Phi_0(s_{ij}) = 0$ (рис. 4).

Уравнения поверхностей нагружения таковы:

$$\Phi(s_{ij}) = s_{ij}^2 - 2\tau^2 = 0, \quad \Phi_0(s_{ij}) = s_{ij}^2 - 2\tau_*^2 = 0, \quad \tau_* = \beta\tau, \quad 0 < \beta < 1. \quad (26)$$

Если Π — внутренняя точка области R , то $e_{ij} = 0$. Если Π располагается на внешней границе, то $e_{ij} = s_{ij} \sqrt{e_{ij}^2} / (\tau \sqrt{2})$, а на внутренней границе будет $e_{ij}^0 = s_{ij} \sqrt{e_{ij}^2} / (\tau_* \sqrt{2})$. Девиаторы e_{ij} , e_{ij}^0 направлены по внешним нормальям к поверхностям нагружения.

Формулы (26) и выражения для e_{ij} , e_{ij}^0 отвечают требованию об ортогональности термодинамических сил и потоков [Ziegler, 1981].

С каждой поверхностью нагружения свяжем диссипативные функции

$$\varphi(e_{ij}) = 2\tau \sqrt{e_{ij}^2}, \quad \varphi_0(e_{ij}) = 2\tau_* \sqrt{e_{ij}^2}. \quad (27)$$

Отметим характерную особенность рис. 4. Если точка Π движется по прямой, проходящей через начало координат (пропорциональное нагружение), то направления тензоров e_{ij} , e_{ij}^0 отличаются на 180° . Этот факт может быть истолкован как память формы на поверхности $\Phi_0(s_{ij}) = 0$ после деформирования тела силами в соответствии с конфигурацией $\Phi(s_{ij}) = 0$.

Пусть жесткопластическое тело нагружено силами (аналогично формуле (7)). Нагрузки считаем допустимыми, если существует девиатор $\bar{s}_{ij} \in R$ и для всех геометрически допустимых u_i выполнено равенство

$$\int_D \bar{s}_{ij} e_{ij}(u_i) dx = \int_D f_i u_i dx + \int_{\partial D_p} F_i u_i dS. \quad (28)$$

Рассмотрим пропорциональное нагружение, реализуемое девиатором $m\bar{s}_{ij}$. Определим два предельных параметра $m = \{m_*^+, m_*^-\}$. При $m = m_*^+$ существует ненулевой допустимый вектор u_i^+ , для которого выполняются соотношения

$$\int_D s_{ij}e_{ij}(u_i^+) dx + \int_{S_\tau} \tau[u_i^+] dS_\tau = m_*^+ \left(\int_D f_i u_i^+ dx + \int_{\partial D_p} F_i u_i^+ dS \right) = m_*^+ \int_D \bar{s}_{ij}e_{ij}(u_i^+) dx \quad (29)$$

и условия $s_{ij} = \tau \sqrt{2}e_{ij} / \sqrt{e_{ij}^2}$ при $e_{ij} \neq 0$, $s_{ij} \in R$ при $e_{ij} = 0$.

В случае $m = m_*^-$ существует ненулевой вектор u_i^- , при этом равенство

$$\int_D s_{ij}e_{ij}(u_i^-) dx + \int_{S_\tau} \tau[u_i^-] dS_\tau = m_*^- \left(\int_D f_i u_i^- dx + \int_{\partial D_p} F_i u_i^- dS \right) = m_*^- \int_D \bar{s}_{ij}e_{ij}(u_i^-) dx \quad (30)$$

выполнено вместе с условиями $s_{ij} = \tau_* \sqrt{2}e_{ij} / \sqrt{e_{ij}^2}$ при $e_{ij} \neq 0$, $s_{ij} \in R$ при $e_{ij} = 0$.

Оценку m_*^+ , m_*^- можно получить через соответствующие статические и кинематические коэффициенты. Статический коэффициент определяется для m_*^+ равенством

$$\int_D s_{ij}^0 e_{ij} dx + \int_{S_\tau} \tau^0[u_i] dS_\tau = m_s^+ \int_D \bar{s}_{ij}e_{ij}(u_i) dx \quad \text{при } u_i \in P, \{s_{ij}^0, \tau^0 \in \Phi(s_{ij}^0) < 0\}. \quad (31)$$

Для m_*^- аналогичное равенство записывается в виде

$$\int_D s_{ij}^0 e_{ij} dx + \int_{S_\tau} \tau^0[u_i] dS_\tau = m_s^- \int_D \bar{s}_{ij}e_{ij}(u_i) dx \quad \text{при } u_i \in P, \{s_{ij}^0, \tau^0 \in \Phi_0(s_{ij}^0) > 0\}.$$

Формулы для кинематических коэффициентов таковы:

$$\begin{aligned} \int_D \varphi(e_{ij}) dx + \int_{S_\tau} \tau[u_i] dS_\tau &= m_k^+ \int_D \bar{s}_{ij}e_{ij}(u_i) dx, \quad u_i \in P; \\ \int_D \varphi_0(e_{ij}) dx + \int_{S_\tau} \tau_*[u_i] dS_\tau &= m_k^- \int_D \bar{s}_{ij}e_{ij}(u_i) dx, \quad u_i \in P. \end{aligned} \quad (32)$$

По аналогии с (11) имеют место предельные соотношения

$$\sup_{\Phi(s_{ij}^0) < 0} m_s^+ = \inf_{u_i \in P} m_k^+ = m_*^+, \quad \inf_{\Phi_0(s_{ij}^0) > 0} m_s^- = \sup_{u_i \in P} m_k^- = m_*^- \quad (33)$$

и обеспечено существование в расширенных классах B^{0*} ненулевых векторов u_i^+ , u_i^- , определяемых из вариационных принципов

$$\inf_{u_i \in P} J^+(e_{ij}) = \inf_{u_i \in P} \left[\int_D \varphi(e_{ij}) dx + \int_{S_\tau} \tau[u_i] dS_\tau - m_*^+ \int_D \bar{s}_{ij}e_{ij}(u_i) dx \right], \quad (34)$$

$$\sup_{u_i \in P} J^-(e_{ij}) = \sup_{u_i \in P} \left[\int_D \varphi_0(e_{ij}) dx + \int_{S_\tau} \tau_*[u_i] dS_\tau - m_*^- \int_D \bar{s}_{ij}e_{ij}(u_i) dx \right]. \quad (35)$$

Экстремальные принципы (34), (35) равносильны исходной постановке задачи о существовании решений для жесткопластических сред с двумя поверхностями нагружения (если принять ее в форме принципа виртуальных мощностей с ограничением возможных напряжений условием $s_{ij} \in R$). Другими словами, доказано, что в жесткопластической среде с двумя поверхностями нагружения силы f_i, F_i вызывают ненулевые перемещения только при выполнении условий (34), (35) и равенств

$$m_*^+ = m_*^- = 1. \quad (36)$$

Далее будем считать, что время деформирования $0 \leq t \leq T$ разбито на конечное число интервалов, внутри каждого из которых выполнено одно из условий: $m_*^+ = 1$ или $m_*^- = 1$. Случай $m_*^+ = 1$ рассматривается аналогично построениям § 2, при этом дополнительное условие нормировки перемещений удобно взять в виде (24) и учесть, что законы термодинамики (21), (22) выполняются автоматически. При $m_*^- = 1$ (обратная деформация) ситуация осложняется тем, что при умеренных температурах на поверхности $\Phi_0(s_{ij}) = 0$ автоматически не выполняются законы термодинамики.

Действительно, при отсутствии потока тепла должно быть $\dot{E} = \dot{A}$, но $d\dot{A}/dx = 2\tau_* \sqrt{e_{ij}^2}$, а опыты дают для мощности внутренней энергии величину порядка $d\dot{A}/dx = 2\gamma\tau \sqrt{e_{ij}^2}$, $\beta < \gamma \leq 1$.

Другими словами, чтобы реализовать обратную деформацию, следует выполнить работу, сравнимую с затратами на активную деформацию. Пользуясь аналогией между пластическим течением и плавлением [Born, 1939; Furth, 1940], можно утверждать, что работа превращения жесткой среды в пластическую (течение при напряжениях τ) сопоставима с работой при обратном «течении-плавлении». Процесс деформирования среды с двумя поверхностями нагружения очень похож на поведение стали при высоких температурах, близких к точке плавления.

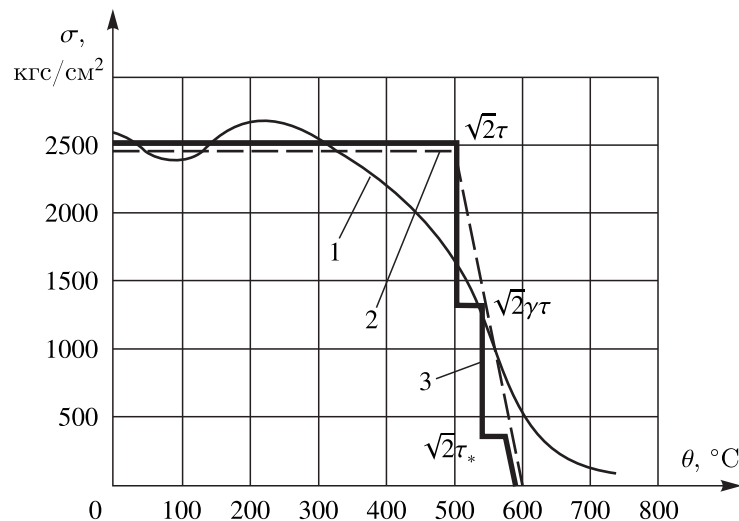


Рис. 5. Зависимость предела текучести мягкой стали на сдвиг τ от температуры θ при испытании центрально растянутых образцов (кривые 1, 2) под напряжением σ и возможность интерпретации участка между 500 и 600 °C двумя поверхностями нагружения: 1 — экспериментальная кривая (сплошная волнистая линия); 2 — упрощенная кривая, применяемая в технических расчетах (штриховая линия) [Luescke et al., 2011]; 3 — ломаная линия, отвечающая двум поверхностям нагружения τ и τ_* (сплошная толстая основная линия), число γ — параметр скрытой теплоты обратного превращения

На рис. 5 сплошной волнистой линией (обозначение 1) показана экспериментальная кривая изменения предела текучести на сдвиг мягкой стали в зависимости от температуры, а обозначением 2 выделена штриховая ломаная линия, используемая в технических расчетах плавления.

ния [Luecke et al., 2011]. Если кривую 2 заменить близкой сплошной толстой основной линией 3 и предположить, что энергия обратного превращения для сплавов с памятью формы принимает промежуточное значение $2\gamma\tau\sqrt{e_{ij}^2}$, $\beta < \gamma < 1$, когда процесс протекает при напряжениях τ_* , то температура, соответствующая $\sqrt{2}\tau_*$, может быть названа температурой восстановления формы. Последнее допущение равносильно существованию скрытой теплоты плавления. Число γ естественно называть параметром скрытой теплоты обратного превращения.

По существу, материалы с памятью формы — это модернизированные сплавы, для которых точка обратного плавления перемещена в зону умеренных температур. Для этих материалов первый закон термодинамики

$$\dot{E} = \dot{Q} + \dot{A}, \quad \dot{E} = 2\gamma\tau\sqrt{e_{ij}^2}, \quad \dot{A} = 2\tau_*\sqrt{e_{ij}^2}, \quad (37)$$

объясняет необходимость дополнительного притока тепла $\dot{Q} = \dot{E} - \dot{A} > 0$ для обратного течения — восстановления формы. Чтобы обосновать возможность осуществления работы за счет притока тепла, нужно принять во внимание также второй закон термодинамики, записав его в форме Клаузиуса:

$$\theta\dot{H} \geq \dot{Q}. \quad (38)$$

Так как отсутствует свободная энергия $F = E - \theta H$, то $\dot{E} = \dot{\theta}H + \theta\dot{H} = \dot{Q} + \dot{A}$, и из (38) следует, что $\dot{\theta}H \leq \dot{A}$. Значение H определяется с точностью до постоянной, поэтому можно подобрать $\dot{\theta}$, чтобы было $\dot{A} \leq 0$, то есть выполняется работа внешних сил за счет притока тепла.

4. Феноменологический анализ жесткопластических сред с памятью формы

Условимся считать, что материал тела D обладает памятью формы, если выполнены следующие условия.

M1. Трехмерное многообразие D является жесткопластической средой с двумя поверхностями нагружения. Выполняются соотношения (26)–(34), связывающие напряжения и скорости деформаций. Внешние нагрузки таковы, что они могут быть уравновешены девиатором s_{ij}^- , и выполняется соотношение $\Phi_0^0(s_{ij}^-) = s_{ij}^-s_{ij}^- - 2(\tau_* + \delta)^2 = 0$, $\delta > 0$, $\tau_* + \delta < \tau$.

M2. В области D определены функция θ (абсолютная температура), а также постоянные τ и τ_* , которые являются экспериментальными функциями от θ .

M3. В случае $m_*^- = 1$ (восстановление формы) справедлив вариационный принцип (35). Кроме того, переменные θ и u_i связываются в любой момент времени $0 \leq t \leq T$ первым началом термодинамики и законом теплопроводности Фурье:

$$\int_D \left[2\gamma\tau\sqrt{e_{ij}^2(u_i)} + c_1\rho\dot{\theta} - c_2\nabla^2\theta + \dot{q}(x) - s_{ij}^-e_{ij}(u_i) \right] dx = 0. \quad (39)$$

Здесь c_1 — коэффициент теплоемкости, ρ — плотность материала, c_2 — коэффициент теплопроводности, ∇^2 — оператор Лапласа, \dot{q} — плотность подводимого тепла за единицу времени.

В случае $m_*^+ = 1$ (активное нагружение) выполняется вариационный принцип (34) с условием (24), а первый закон термодинамики превращается в уравнение теплопроводности: подводимое тепло изменяет температуру тела по формуле (40), не вызывая дополнительных деформаций:

$$c_1\rho\dot{\theta} - c_2\nabla^2\theta + \dot{q}(x) = 0. \quad (40)$$

M4. Материал запоминает в каждый момент времени отклонение от первоначального положения и распределяет подводимое тепло по формуле (39) только тогда, когда деформированное

состояние отлично от исходного. Происходит восстановление формы: направление девиатора e_{ij} из (39) противоположно запомненному.

Результаты предыдущего пункта позволяют утверждать существование решений для сплошных сред со свойствами М1–М4. Действительно, если внешние силы уравниваются девиатором напряжений, расположенным в области R (рис. 4), то геометрия тела не меняется $e_{ij} = 0$, а температура определяется из равенства (40). Если же происходит деформирование в соответствии с М3, то (как установлено ранее) скорости u_i в расширенном пространстве $B^{0*} = M$ могут быть определены в любой момент времени по вариационным принципам (34), (35). Если принять плотность \dot{q} из того же пространства, а s_{ij}^- считать непрерывной функцией координат, то температура может быть выбрана из множества $\theta \in M$. Это заключение следует из возможности явно разрешить относительно времени уравнения (39), (40) [Иосида, 1967] с использованием спектрального разложения оператора Лапласа Z :

$$Z = \frac{c_2}{c_1 \rho} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3^2} \right), \quad (41)$$

$$\theta(t, x) = \exp(tZ)\Theta(x) + \int_0^t \exp((t-s)Z) \times \left[\dot{q}(s) - 2\gamma\tau \sqrt{e_{ij}^2(u_i(s))} - s_{ij}^- e_{ij}(u_i) \right] ds,$$

$$\exp((t-x)Z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((t-x)Z)^k}{k!}, \quad Z^k = \int_0^{\infty} \nu^k dE_{\nu}.$$

Θ — первоначальная температура тела. Часто совместное использование (35) и (39) можно упростить, так как восстановление формы обычно протекает при постоянной температуре всего тела: $\dot{\theta} = \nabla^2 \theta = 0$. Поэтому равенство

$$2\gamma\tau \sqrt{e_{ij}^2(u_i)} + \dot{q}(x) - s_{ij}^- e_{ij}(u_i) = 0 \quad (42)$$

и однородность функций нагружения позволяют вычислить обратную деформацию e_{ij} и мощность работы внешних сил $\int_D s_{ij}^- e_{ij}(u_i) dx = \int_D f_i u_i dx + \int_{\partial D_p} F_i u_i dS = \dot{A}(u_i)$. После определения скоростей u_i перемещения точек тела w_i вычисляются по формулам (25): эта операция выполняется в пространстве $B^{0*} = M$, если предельные состояния (36) реализуются конечное число раз во время деформирования на интервале $0 \leq t \leq T$.

5. Заключение

В предлагаемой работе показано, что процесс деформирования сред с памятью формы описывается в рамках теории пластичности с двумя поверхностями нагружения. Приняв во внимание связь между пластическим течением и плавлением, можно отождествить восстановление формы с плавлением при умеренной температуре, а текучесть при высоких напряжениях — с плавлением под предельной нагрузкой. Различные типы плавления происходят в рамках одной модели, но каждому из них отвечает свой вариационный принцип, аргументами которого являются внешние нагрузки и скорости деформирования. Связь нагрузок и температуры осуществляют первый и второй законы термодинамики. Перечисленные условия обеспечивают существование обобщенных решений и позволяют проследить историю изменения конфигурации сплошной среды. В ходе доказательств установлено, что деформированная форма не является единственной. Кроме того, функции, определяющие решения оптимальных задач, часто оказываются разрывными.

Особенности, связанные с предельным анализом задач для тел с памятью формы, позволяют сформулировать несколько вопросов, требующих дальнейшего изучения. Прежде всего это классификация неединственных решений оптимальных задач (34), (35) при введении дополнительных ограничений на поведение среды, а также выяснение условий, при которых появляются разрывные решения. Заслуживают развития прямые методы численного анализа, так как часто возникает потеря точности при использовании метода конечных элементов для анализа нелинейных экстремальных проблем. Широкое использование материалов с памятью формы во многих технических и научных разработках вселяет надежду на успешное продвижение в указанных направлениях.

Список литературы (References)

- Грачев В. А., Найштут Ю. С. Вариационный принцип для сплошных сред, обладающих памятью формы, при изменяющихся внешних силах и температуре // Компьютерные исследования и моделирование. — 2021. — Т. 13, № 3. — С. 541–556.
- Grachev V. A., Nayshut Yu. S. Variazionnyi prinzip dlya sploshnyh sred, obladayuschih pamyatiu formy, pri izmeniyusichsya vneshnih silah i temperature [Variational principle for shape memory solids under variable external forces and temperatures] // Computer Research and Modeling. — 2021. — № 3. — P. 541–556 (in Russian).
- Иосида К. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967.
- Josida K. Functional Analysis. — Berlin etc.: Springer, 1965. (Russ. ed.: Iosida K. Funkcionalnyi analiz. — М.: Mir, 1967.)
- Каменярж Я. А. Предельный анализ пластических тел и конструкций. — М.: Наука, 1997.
- Kameniarzh Ya. A. Predelnyi analiz plasticheskikh tel i konstrukzii [Limit Analysis of Solids and Structures]. — М.: Nauka, 1997 (in Russian).
- Качанов Л. М. Основы теории пластичности. — М.: Наука, 1969.
- Kachanov L. M. Osnovy teorii plastichnosti [Foundations of the theory of plasticity]. — М.: Nauka, 1969 (in Russian).
- Лихачев В. А. Эффект памяти формы // Соросовский образовательный журнал. — 1997. — № 3. — С. 107–114.
- Lihachev V. A. Effekt pamyati formy [Shape memory effect] // Sorosovskii obrazovatelnyi zhurnal. — 1997. — № 3. — P. 107–114 (in Russian).
- Мосолов П. П., Мясников В. П. Механика жесткопластических сред. — М.: Наука, 1981.
- Mosolov P. P., Miasnikov V. P. Mehanika zhestkoplasticheskikh sred [Mechanics of rigid plastic solids]. — М.: Nauka, 1981 (in Russian).
- Панагиотопулос П. Неравенства в механике и их приложения. — М.: Мир, 1989.
- Panagiotopoulos P. Inequality Problems in Mechanics and Applications. — Boston etc.: Birkhauser, 1985. (Russ. ed.: Panagiotopoulos P. Neravenstva v mehanike i ih prilozheniya. — М.: Mir., 1989.)
- Трусделл К. Первоначальный курс механики сплошных сред. — М.: Мир, 1975.
- Truesdell C. A first course in rational continuum mechanics. — Baltimore, Maryland: Johns Hopkins Univ., 1972. (Russ. ed.: Truesdell C. Pervonachalnyi kurs mehaniki sploshnyh sred. — М.: Mir, 1975.)
- Abeyaratne R., Knowles J. K. Evolution of phase transitions. A Continuum Theory. — Cambridge, New York: Cambridge university press, 2006.
- Auricchio A., Reali U., Stefanelli U. A three-dimensional model describing stress-induced solid phase transformation with permanent inelasticity // International Journal of Plasticity. — 2007. — Vol. 23. — P. 207–226.
- Bonetti E., Colli P., Fabrizio V., Gilardi G. Existence of Solutions for a Mathematical Model Related to Solid–Solid Phase Transitions in Shape Memory Alloys // Archive for Rational Mechanics and Analysis. — 2016. — Vol. 219 (1). — P. 203–254.
- Born M. Thermodynamics of Crystals and Melting // Journal of Chemical Physics. — 1939. — Vol. 7. — P. 591–603.
- Cisse Ch., Zaki W., Zineb T. A review of constitutive models and modeling techniques for shape memory alloys // International Journal of Plasticity. — 2016. — Vol. 76. — P. 244–284.
- Frémond M. Phase change in mechanics. — Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana, xiii + 303. — Berlin: Springer, 2012.

-
- Furth R.* Relation between breaking and melting // *Nature*. — 1940. — No. 3680. — P. 741–761.
- Lagoudas D. C.* (ed.) *Shape Memory Alloys. Modeling and Engineering Applications*. — New York: Springer, Science+Business Media, 2008.
- Luecke W. E., Banovic S. W., McColskey J. D.* High-temperature tensile constitutive data and models for structural steels in fire // National Institute of Standards and Technology. — 2011. — Technical Note 1714. — URL: http://www.nist.gov/manuscript-publication-search.cfm?pub_id=908536
- Nayroles B.* Essai de theorie fonctionnelle des structures rigides plastiques parfaites // *Journal de mecanique*. — 1970. — Vol. 9, No. 3. — P. 491–506.
- Ziegler H.* Discussion on some Objections to Thermomechanical Orthogonality // *Ingeniuer – Archiv (Archive of Applied Mechanics)*. — 1981. — Vol. 50. — P. 149–164.