

УДК: 314.7: 51-77

Моделирование процессов миграции населения: методы и инструменты (обзор)

Е. Б. Олейник^а, Н. В. Ивашина^б, Ю. Д. Шмидт

Дальневосточный федеральный университет,
Россия, 690091, г. Владивосток, ул. Суханова, 8

E-mail: ^а oleynik.eb@dvfu.ru, ^б ivashina.nv@dvfu.ru

Получено 22.09.2021, после доработки — 14.10.2021.
Принято к публикации 18.10.2021.

Миграция оказывает существенное влияние на формирование демографической структуры населения территорий, состояние региональных и локальных рынков труда. Быстрое изменение численности трудоспособного населения той или иной территории из-за миграционных процессов приводит к дисбалансу спроса и предложения на рынках труда, изменению демографической структуры населения. Миграция во многом является отражением социально-экономических процессов, происходящих в обществе. Поэтому становятся актуальными вопросы, связанные с изучением факторов миграции, направления, интенсивности и структуры миграционных потоков, прогнозированием их величины.

Для анализа, прогнозирования миграционных процессов и оценки их последствий часто используется математический инструментарий, позволяющий с нужной точностью моделировать миграционные процессы для различных территорий на основе имеющихся статистических данных. В последние годы как в России, так и в зарубежных странах появилось много научных работ, посвященных моделированию внутренних и внешних миграционных потоков с использованием математических методов. Следовательно, для формирования целостной картины основных тенденций и направлений исследований в этой области возникла необходимость в систематизации наиболее часто используемых методов и инструментов моделирования.

В представленном обзоре на основе анализа современных отечественных и зарубежных публикаций представлены основные подходы к моделированию миграции, основные составляющие методологии моделирования миграционных процессов — этапы, методы, модели и классификация моделей. Обзор содержит два раздела: методы моделирования миграционных процессов и модели миграции. В первом разделе приведено описание основных методов, используемых в процессе разработки моделей — эконометрических, клеточных автоматов, системно-динамических, вероятностных, балансовых, оптимизации и кластерного анализа. Во втором — выделены и описаны наиболее часто встречающиеся классы моделей — регрессионные, агент-ориентированные, имитационные, оптимизационные, вероятностные, балансовые, динамические и комбинированные. Рассмотрены особенности, преимущества и недостатки различных типов моделей миграционных процессов, проведен их сравнительный анализ и разработаны общие рекомендации по выбору математического инструментария для моделирования.

Ключевые слова: миграция, миграционные процессы, модели миграции, методы, регрессионные модели, клеточные автоматы, агент-ориентированные модели, балансовые модели, динамические модели

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-110-50093).

UDC: 314.7: 51-77

Migration processes modelling: methods and tools (overview)

E. B. Oleynik^a, N. V. Ivashina^b, Yu. D. Shmidt

Far Eastern Federal University,
8, Sukhanova st., Vladivostok, 690091, Russia

E-mail: ^a oleynik.eb@dvfu.ru, ^b ivashina.nv@dvfu.ru

*Received 22.09.2021, after completion – 14.10.2021.
Accepted for publication 18.10.2021.*

Migration has a significant impact on the shaping of the demographic structure of the territories population, the state of regional and local labour markets. As a rule, rapid change in the working-age population of any territory due to migration processes results in an imbalance in supply and demand on labour markets and a change in the demographic structure of the population. Migration is also to a large extent a reflection of socio-economic processes taking place in the society. Hence, the issues related to the study of migration factors, the direction, intensity and structure of migration flows, and the prediction of their magnitude are becoming topical issues these days.

Mathematical tools are often used to analyze, predict migration processes and assess their consequences, allowing for essentially accurate modelling of migration processes for different territories on the basis of the available statistical data. In recent years, quite a number of scientific papers on modelling internal and external migration flows using mathematical methods have appeared both in Russia and in foreign countries in recent years. Consequently, there has been a need to systematize the currently most commonly used methods and tools applied in migration modelling to form a coherent picture of the main trends and research directions in this field.

The presented review considers the main approaches to migration modelling and the main components of migration modelling methodology, i. e. stages, methods, models and model classification. Their comparative analysis was also conducted and general recommendations on the choice of mathematical tools for modelling were developed. The review contains two sections: migration modelling methods and migration models. The first section describes the main methods used in the model development process – econometric, cellular automata, system-dynamic, probabilistic, balance, optimization and cluster analysis. Based on the analysis of modern domestic and foreign publications on migration, the most common classes of models – regression, agent-based, simulation, optimization, probabilistic, balance, dynamic and combined – were identified and described. The features, advantages and disadvantages of different types of migration process models were considered.

Keywords: migration, migration processes, migration models, methods, regression models, cellular automata, agent-based models, balance models, dynamic models

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2021, vol. 13, no. 6, pp. 1205–1232 (Russian).

The work was supported by Foundation for basic research (project no. 20-110-50093).

1. Введение

Для детального анализа и прогнозирования миграционных процессов необходимы не только статистические данные о внутренней и внешней миграции, но и соответствующие конкретной задаче инструменты. Многие авторы в последнее время при работе с данными активно используют различные методы и подходы математического моделирования.

В современной научной литературе широко представлены обзоры и сравнительный анализ подходов к моделированию миграции в различных аспектах. Так, в работе [Корепина, 2017] выделены традиционные и современные методы и подходы к моделированию процессов миграции, а также основные показатели. В статье [Дмитриев, Юдина, 2017] рассмотрены исторический экскурс, эволюция моделей и российский опыт прогнозирования миграционных процессов. Обзоры методов прогнозирования миграции также включают исследования [Howe, Jackson, 2005], и в более широком контексте демографических проблем и прогнозов [Wilson, Rees, 2005; Shaw, 2007]. В работах [Keilman, 2007; Keilman, 2008] отмечено, что миграция исторически недооценивалась и ошибки различных миграционных прогнозов, сделанных в разных европейских странах, увеличиваются с горизонтом прогнозирования, очень изменчивы и варьируются между разными странами. Подробный анализ вероятностных подходов на базе моделирования временных рядов, байесовского подхода, вероятностных экспертных прогнозов представлен в [Disney et al., 2015]. В этой работе также рассмотрено сопоставление методов прогнозирования с типами данных. Классификация моделей в зависимости от того, как трактуется вопрос неопределенности, приведена в [Bijak, 2006; Bijak, 2011]. Представленные модели и методы оцениваются с точки зрения их полезности для целей текущих и возможных будущих исследований миграции, отдельно выделены макроуровневые математические модели. Авторами [Bijak et al., 2019] рассмотрены модификации моделей временных рядов для миграционных потоков, а в [Sohst et al., 2020; Sohst, Tjaden, 2020] — сравнение возможностей прогнозного и сценарного подходов. В обзоре [Stillwell, 2005] отражена разница между математическим и статистическим подходами, рассматриваются многоуровневые модели, разработанные в политическом контексте в Великобритании, и эти подходы противопоставляются моделям, разработанным в контексте демографии нескольких государств, для прогнозирования миграции в Европейском союзе.

Целью нашей работы, в отличие от других обзоров, является составление комплексной картины результатов и достижений в области моделирования миграционных процессов, осуществление сравнительного анализа основных подходов к моделированию миграции, выделенных на основе анализа отечественных и зарубежных литературных источников, систематизация существующих моделей, выявление их достоинств, недостатков и ограничений в использовании. Под инструментами в нашей работе мы будем понимать разработанные и апробированные модели, учитывающие конкретные аспекты миграции и некоторые модификации моделей.

На рис. 1 представлены основные составляющие методологии моделирования миграционных процессов — этапы, методы, модели и классификация моделей.

Во многих моделях используется различная комбинация методов, а сами авторы не всегда четко разграничивают понятия «метод» и «модель». Мы не претендуем на абсолютную полноту классификации, так как на современном этапе развития аппарата моделирования и информационных технологий существует множество модифицированных и комбинированных моделей, поэтому во многих случаях невозможно установить взаимно однозначное соответствие между методом и моделью. Поэтому в обзоре рассмотрены основные методы и инструменты, наиболее часто используемые при моделировании миграционных процессов, и представлено их описание.



Рис. 1. Методологический подход к построению моделей миграции

2. Методы моделирования миграционных процессов

Выбор подхода и метода определяется постановкой задачи и целью моделирования, это — важный этап, предшествующий разработке модели. Рассмотрим основные методы, используемые для моделирования миграционных процессов в соответствии со схемой, представленной на рис. 1.

В достаточно большом количестве работ отечественных и зарубежных авторов для моделирования миграции используются *эконометрические методы*, которые позволяют количественно оценить влияние различных факторов на зависимые показатели, характеризующие результативность миграционных процессов, исследовать причинно-следственные связи, прогнозировать величину миграционных потоков. В качестве основных методов, используемых для оценки регрессионных моделей в области миграции, можно выделить метод наименьших квадратов (OLS), обобщенный метод наименьших квадратов (GLS), метод максимального правдоподобия (ML), метод инструментальных переменных (IV). Достаточное полное описание данных методов и условий их применений для разных видов эконометрических моделей описано в [Wooldridge, 2010; Gourieroux, 2000].

Клеточные автоматы активно используются при моделировании миграции по районам мегаполиса, межрегиональной миграции и т. д. Они представляют собой регулярно упорядо-

ченный набор простых однотипных объектов, называемых клетками. Классические клеточные автоматы обладают свойствами дискретности (пространства, времени и состояний), локальности (связей), однородности (клеток) и синхронности работы [Матюшкин, Заплетина, 2019]. Каждая клетка обладает внутренним состоянием, которое является дискретным и конечным множеством. Для каждой клетки i определенным образом определяются клетки окружения $O(i)$, которых конечное число. Клетки обновляют свои состояния одновременно в дискретные моменты времени. Для детерминированных автоматов определяется закон перехода для каждой клетки i автомата в новое состояние $a(i, t + 1)$ по формуле

$$a(i, t + 1) = F(a(i, t), a(j_1, t), a(j_2, t), \dots, a(j_n, t)), \quad (1)$$

где j_1, j_2, \dots, j_n — клетки окружения $O(i)$ клетки i , n — количество клеток в окружении клетки i , $F(x, y, \dots, z)$ — некоторая функциональная зависимость от нескольких переменных.

Новое состояние клетки однозначно определяется значениями предыдущего состояния клетки и ее окружения. Если состояние клеток в новый период времени определяется с определенной вероятностью, то задается функция вероятности перехода элемента следующим образом:

$$W = W(a(i, t + 1) | a(i, t), a(j_1, t), a(j_2, t), \dots, a(j_n, t)), \quad (2)$$

где W — вероятность перехода i -й клетки из состояния $a(i, t)$ в момент времени t в состояние $a(i, t + 1)$ в момент времени $t + 1$, где j_1, j_2, \dots, j_n — клетки окружения $O(i)$ клетки i , n — количество клеток в окружении клетки i [Шмидт, Ивашина, Озерова, 2020].

Изменение состояний клеток происходит для всех клеток одновременно на основе общего правила клеточного автомата и по результатам взаимодействия клеток. Это свойство позволяет при моделировании связывать процессы, происходящие на микроуровне, на уровне отдельных клеток, с процессами на мезо- или макроуровне, с поведением всех клеток клеточного автомата [Шмидт и др., 2017] и хорошо согласуется с массовым поведением людей в больших группах в стандартных ситуациях. В этом случае работает закон больших чисел и поведение людей описывается вероятностным образом: даже если в единичных случаях поведение будет неожиданным по каким-то причинам, это не повлияет на движение группы в целом. Основные положения теории клеточных автоматов и ее этапы развития изложены в работах [Тоффоли, Марголус, 1991; Лобанов, 2010; Матюшкин, Заплетина, 2019].

В некоторых работах для моделирования миграции используется *метод системной динамики*, при котором исследуемые процессы описываются системой взаимосвязанных дифференциальных уравнений [Aral, 2020; Васильева, 2017]. Системная динамика предполагает построение параметрического функционального графа $\Phi_n = (G, X, F, \theta)$, в котором $G = (V, E)$ — ориентированный граф, в котором $V = \{v_i\}$, $i = \overline{1, k}$, — множество вершин; $E = \{e_{ij}\}$ — множество дуг, соединяющих вершины v_i и v_j ; $X = \{x_i\}$ — множество параметров вершин; $F = f(v_i, v_j, e_{ij})$ — функция (функционал или коэффициент) связи между вершинами; θ — пространство параметров вершин. Системы уравнений системной динамики — это дифференциальные уравнения вида $X' = f(x, u, t)$, где $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ — вектор состояний; x_1, x_2, \dots, x_m — переменные состояния; $U = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ — вектор входов; t — время. Эти уравнения называются уравнениями состояния. Кроме них в модели включают уравнения вида $y = H(x, u)$, где $y = (y_1, y_2, \dots, y_p)$ — вектор выходов моделируемых процессов [Путилов, Горохов, 2002; Путилов, Горохов, Быстров, 2008]. Неотъемлемым преимуществом системной динамики в прогнозировании потребности в трудовых ресурсах считается возможность создания аналитической платформы, описывающей рынок труда как сложную систему с обратными связями, прогнозирующую спрос и предложение, легко расширяемую для решения дополнительных возникающих задач и интегрируемую со сложными наборами данных, необходимыми для получения устойчивых решений [Ильинский, Горошников, 2016].

Определение миграции населения как территориального перемещения отдельных индивидов в границах одного экономического региона или за его пределы, отвлеченное от причинно-следственной связи между перемещениями, дает возможность рассматривать миграцию как случайный процесс. Это обуславливает возможность применения вероятностных подходов к моделированию миграции. Во многих современных моделях миграции используют метод, основанный на использовании *марковских процессов* [Meun, Tweedie, 1993; Чжун, 1964; Rogers, 1966; Brown, 1970; Joseph, 1975]. При использовании этого метода предполагается, что известны вероятности перехода каждого жителя из региона в регион за определенный промежуток времени. Если вероятности перехода не зависят от предыстории пребывания мигрантов в других регионах, тогда миграционный процесс представляется конечной цепью Маркова. Для марковских цепей характерно свойство: условное распределение последующего состояния цепи зависит только от текущего состояния и не зависит от всех предыдущих состояний. Вероятность перехода из состояния E_i в состояние E_j обозначается как p_{ij} и часто записывается в виде матрицы $P = \{p_{ij}\}$, где $0 \leq p_{ij} \leq 1$, $\sum p_{ij} = 1 \forall i, j \in I$, или в виде графа с вершинами — состояниями системы и ребрами — вероятностями перехода в данное состояние. Основываясь на возможных вероятностях осуществления того или иного сценария развития миграционного процесса, можно прогнозировать будущее состояние экономической системы, ее структуру на протяжении заданного горизонта прогнозирования.

Балансовый метод заключается в построении системы уравнений, которые удовлетворяют требованию соответствия двух элементов: наличия ресурса и его использования. Соответствие понимается либо как равенство, либо как достаточность ресурсов для покрытия потребности и, следовательно, наличие некоторого резерва. Баланс движения населения представляет собой статистическую матрицу, характеризующую формирование численности и структуры населения в результате его участия в различных формах движения. Этот подход подробно описан в [Ивантер, Буданова, Коровкин, 2007; Лукин, 2017]. Элементы матрицы должны удовлетворять основному балансовому равенству:

$$n_i(t) = n_i(t-1) + \sum_{j=1}^N b_{ji}(t) + \sum_{j=N+1}^{N+R} r_{ji}(t) - \sum_{j=1}^N b_{ij}(t) - \sum_{j=N+1}^{N+L} l_{ij}(t), \quad (3)$$

где $n_i(t)$ — численность людей, находящихся в состоянии i на конец периода t ; $n_i(t-1)$ — численность людей, находящихся в состоянии i на конец периода $t-1$; $b_{ji}(t)$ — численность людей, перешедших за период t из внутрисистемного состояния j во внутрисистемное состояние i ; $r_{ji}(t)$ — численность людей, пришедших за период t во внутрисистемное состояние i из внешнего источника поступления j ; $b_{ij}(t)$ — численность людей, перешедших за период t из внутрисистемного состояния i во внутрисистемное состояние j ; $l_{ij}(t)$ — численность людей, вышедших за период t из внутрисистемного состояния i по направлению выбытия j .

Методы оптимизации — это методы построения алгоритмов нахождения оптимального (минимального или максимального) значения некоторой функции. Задача оптимизации состоит в минимизации (максимизации) вещественной функции $f(x)$ n -мерного аргумента x , компоненты которого удовлетворяют системе ограничений в виде уравнений или неравенств

$$f(x) \rightarrow \min_Q(\max_Q), \quad (4)$$

$$Q: \begin{cases} H_k(x) = 0, & k = 1, \dots, m, \\ g_j(x) \geq 0, & j = m+1, \dots, s. \end{cases}$$

Основные методы оптимизации подробно описаны в [Кочегурова, 2012; Моисеев, 1978; Лесин, Лисовец, 1998].

В некоторых работах по моделированию миграции используются *методы кластеризации*. Постановка задачи в кластерном анализе выглядит следующим образом: пусть X — множество объектов, Y — множество признаков кластеров. Также задана функция расстояния между объектами $p(x, x')$. Требуется разбить конечную выборку объектов $X_m = \{x_1, \dots, x_m\}$ из множества X на непересекающиеся подмножества (кластеры) таким образом, чтобы каждый кластер состоял из объектов, близких по метрике p , а объекты разных кластеров — сильно отличались друг от друга. Часто ставится задача определения оптимального числа кластеров с точки зрения определенного критерия качества. Решение задачи кластеризации неоднозначно, так как не существует однозначно наилучшего критерия качества кластеризации, разные критерии могут давать разные результаты. К тому же результат кластеризации сильно зависит от выбранной метрики. Основные этапы кластерного анализа и области его применения представлены в [Гитис, 2001; Hennig et al., 2015]. В качестве примеров использования методов кластерного анализа при моделировании миграции можно привести работы [Алешковский, Ионцев, 2006; Шворина, Фалейчик, 2018]. В [Алешковский, Ионцев, 2006] авторами все российские регионы были поделены на 6 кластеров на основе следующих показателей: миграционный прирост, коэффициент нетто миграции, миграционный оборот, коэффициент брутто миграции, результативность миграции. Кластеры получились следующие: «центр миграционного притяжения», «преуспевающие регионы», «среднячки», «переходные регионы», «полюс миграционного оттока» и «регионы этнического оттока». В статье [Шворина, Фалейчик, 2018] авторами проводится кластеризация российских регионов с точки зрения их миграционной привлекательности для жителей Сибирского и Дальневосточного федеральных округов на основании агрегированных блоковых индексов: занятость населения, жилой фонд, благосостояние населения, малый и средний бизнес. В результате было выделено 4 кластера. Кластер А характеризуется высокой занятостью населения, хорошим уровнем благоустройства жилого фонда, высокими показателями доходов населения и уровнем экономического развития. Кластер Б имеет более низкие значения показателей, но достаточно значимые для формирования миграционной привлекательности. Регионы кластера В характеризуются значительным миграционным оттоком местных жителей, связанным с социально-экономическим неблагополучием и географической удаленностью. Кластер Г состоит из регионов с самыми низкими значениями обобщенных индексов занятости и имеют самую низкую миграционную привлекательность.

Таблица 1. Сравнение некоторых современных методов миграционного моделирования

Критерии сравнения	Эконометрические методы	Метод клеточных автоматов	Метод системной динамики
Базовый элемент	Факторы влияния	Агент	Петля обратной связи
Аспект моделирования	Функции связи факторов	Правила поведения агентов	Структура системы
Уровень области применения	Любой	Микроуровень	Макроуровень
Параметр времени	Дискретное	Дискретное	Непрерывное
Учет сетевых эффектов	Не учитываются	Учитываются	Учитываются
Базовый аппарат моделирования	Теория вероятности и математическая статистика	Теория вероятности	Дифференциально-интегральные уравнения

В научной литературе также выделяют современные и традиционные методы моделирования миграции. Современные методы моделирования требуют наличия мощных компьютеров и специального программного обеспечения. Сравнение современных методов представлено в таблице 1.

3. Модели миграции

Теперь рассмотрим основные модели миграции в соответствии со схемой, представленной на рис. 1.

Во многих современных работах, посвященных моделированию миграции, используются *регрессионные модели*. Большое распространение получили так называемые модифицированные гравитационные модели (модели факторов миграции). Гравитационные модели относятся к традиционным моделям миграции и межтерриториальных взаимодействий городов, которые позволяют выявить закономерности их социально-экономических взаимосвязей. В различных модификациях гравитационные модели «используются при исследовании процессов урбанизации, размещения промышленности, экспортно-импортных взаимосвязей, миграции населения, а их общая черта заключается в том, что сила взаимодействия (интенсивность потоков) зависит от значимости (величины) объектов и расстояния между ними» [Власов, Шимко, 2005]. В классической гравитационной модели миграции предполагается, что величина миграционного потока прямо пропорциональна численности населения в регионах выбытия и прибытия и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними [Zipf, 1949].

Гравитационная модель имеет ряд серьезных недостатков: в ней не учтены социально-экономические факторы, культурно-этнические особенности городов и территорий. В работе [Lee, 1966] представлена гравитационная модель, включающая объяснения факторов миграции, которая получила название Pull – Push factors (притягивающие и выталкивающие факторы миграции). В ней предполагалось, что миграционный поток характеризуется различными факторами регионов прибытия и выбытия. К выталкивающим факторам относятся политическое или религиозное преследование, экономические кризисы, военные конфликты, природные катастрофы; к притягивающим — политическая стабильность, свобода вероисповедания, экономическое благополучие, лучшие условия работы и т. п.

Большинство факторных переменных в модифицированных гравитационных моделях являются «двусторонними», так как характеризуют две страны (региона) i и j . Однако в модель Льюэра и Ван ден Берга [Lewer, Van den Berg, 2008] включена переменная $stock_i$, которая относится только к одной стране из пары. Вектор основных характеристик из модели Гринвуда [Greenwood, 1997] определяет весь набор переменных, которые относятся к одной или другой стране из пары. В работах [Redding, Venables, 2004; Andrew, Wincoop, 2001] отмечается, что такие односторонние переменные приводят к ошибке вследствие пропуска наблюдений с нулевыми значениями. Однако зависимая переменная — миграция, между двумя странами может быть нулевой в значительной части наблюдений, что также является важным результатом наблюдений. И если удалить пропущенные значения, то оценки коэффициентов уравнения регрессии смещаются.

В работе Хейнса и Фотерингема [Haynes, Fotheringham, 1984] отмечается, что в гравитационную модель целесообразно включить «индекс посещаемости поселения», позволяющий моделировать агломерационные эффекты взаимодействия территорий. В модель факторов миграции США, представленной в работе [Lowry, 1966], включены такие факторы, как число мигрантов, численность рабочей силы без учета сельскохозяйственного сектора в регионе-доноре и регионе-реципиенте, уровень безработицы, средняя почасовая заработная плата, а также кратчайшее расстояние по воздушному сообщению между центрами обоих регионов. В работе [Mkrtchyan, Vakulenko, 2019] объясняющие переменные разделены на следующие группы: 1) переменные

базовой гравитационной модели, 2) характеристики рынка труда и экономического развития регионов, 3) характеристики рынка жилья, 4) географические характеристики регионов.

В большинстве современных работ, посвященных моделированию миграционных процессов, модифицированные гравитационные модели оцениваются на панельных данных, которые позволяют учесть изменение показателей не только в пространстве, но и во времени. Так, в работе [Chen, Coulson, 2002] на панельных данных 1995–1999 гг. проводилось исследование миграции на уровне городов для Китая и оценивалась модель с фиксированными эффектами. Результаты показали, что более привлекательными для мигрантов являются города с более высокими долями занятых в промышленности и сфере услуг и с более высокой долей частного бизнеса. В статье [Ortega, Peri, 2013] авторы оценивали модель на панельных данных 1980–2006 гг. для международных миграционных потоков из 120 стран мира в 15 стран ОЭСР. Согласно полученным результатам, среднедушевой доход влияет на величину миграционных потоков положительно, а ужесточение миграционной политики относительно иммигрантов — отрицательно. Регрессионные модели для внутренних миграционных потоков на российских региональных данных за 1993–1997 гг. впервые были оценены в работе [Gerber, 2005] американским ученым Т. Гербером. Им была использована спецификация модели со случайными индивидуальными эффектами и было показано, что основными факторами, влияющими на величину чистых миграционных потоков, являются характеристики региональных рынков труда — заработная плата, безработица и доля убыточных предприятий. В продолжение данного исследования в статье [Gerber, 2006] на данных 1993–2002 гг. изучались динамические эффекты рынков труда и было показано, что прирост реальной заработной платы положительно влияет на миграционные потоки, а прирост безработицы оказался незначимым фактором. В работе [Andrienko, Guriev, 2004] авторы оценили модифицированную гравитационную модель для России на панельных данных с индивидуальными фиксированными эффектами. Основным результатом данной работы стало выявление «ловушек бедности» в России: авторами было показано, что и приток и отток населения в регионе положительно зависят от уровня региональных среднедушевых доходов, т. е. существуют определенные финансовые ограничения, которые не дают возможности переехать жителям «бедных регионов». Остальные результаты данного исследования согласовывались с положениями гравитационной модели: величина миграционного потока имеет обратную связь с расстоянием между регионами и положительную — с численностью населения. Также была обнаружена отрицательная связь между миграцией и уровнем безработицы в регионах. Исследование миграции в России было продолжено авторами в [Андрienko, Гуриев, 2006]: в модифицированную гравитационную модель были добавлены лаговые переменные и пространственные компоненты, характеризующие «альтернативный» регион. Данная модель оценивалась на данных 1992–2003 гг.

В качестве примера спецификации модифицированной гравитационной модели можно рассмотреть работы [Guriev, Vakulenko, 2015; Вакуленко, 2015], в которых для анализа миграционных потоков была предложена следующая спецификация для оценивания модели на панельных данных с индивидуальным детерминированным эффектом:

$$\ln M_{i,j,t} = \alpha_{i,j} + \sum_{k \in K} \gamma_k \ln X_{k,i,t} + \sum_{k \in K} \delta_k \ln X_{k,j,t} + \sum_{t \in T} \theta_t year_t + \varepsilon_{i,j,t}, \quad (5)$$

где $\ln M_{i,j,t}$ — логарифм миграционного потока из региона i в регион j в году t ; $\ln X_{k,i,t}$ — логарифм показателя региона i (региона выбытия) в момент времени t ; $\ln X_{k,j,t}$ — логарифм показателя региона j (региона прибытия) в момент времени t ; $\alpha_{i,j}$ — свободный член уравнения регрессии, отличающийся для разных пар регионов i, j (т. е. включающий в себя индивидуальный эффект пар регионов); $year_t$ — дамми-переменная на год t (равна 1, если это год t , 0 — иначе); θ_t — коэффициенты при дамми-переменных; γ_k, δ_k — векторы коэффициентов при объясняющих переменных — характеристиках регионов прибытия и выбытия.

Данная модель оценивалась методом наименьших квадратов с предварительным преобразованием within. С помощью данной модели были выявлены «притягивающие» и «выталкивающие» факторы миграции для российских регионов. На официальных данных Росстата за период с 1999 по 2010 г. оценивалась регрессионная модель зависимости величин межрегиональных миграционных потоков от демографических факторов, показателей рынка труда, жилья, качества жизни, предоставления общественных благ, инфраструктуры и расходов консолидированных бюджетов на различные нужды. Результаты показали, что чувствительность миграции выше к демографическим и экономическим факторам (обеспеченность жильем и среднедушевые доходы), чем к социальным. Также было выявлено существование точки насыщения, до которой миграционный поток из региона рос с ростом дохода в нем, после этой точки миграционный поток снижался с ростом среднедушевого дохода.

Многие исследователи при моделировании миграции в регрессиях учитывают также пространственный фактор, что позволяет уменьшить смещение коэффициентов и увеличить объясняющую силу модели. Так, в работах [Sardavar, Vakulenko, 2016; Sardavar, Vakulenko, 2020] методами пространственной эконометрики было показано, что мигрантов в России интересуют социально-экономические показатели не только тех регионов, куда совершается переезд, но и соседних. Поэтому при разработке мер по привлечению мигрантов в регион важно также учитывать меры, используемые соседними регионами, так как между регионами могут возникать эффекты конкуренции между регионами за внутренних мигрантов. В [Антосик, Ивашина, 2019] при моделировании миграционных потоков выпускников российских вузов с использованием модифицированной гравитационной модели в спецификацию модели, помимо различных социально-экономических показателей регионов прибытия и выбытия, был добавлен пространственный лаг для учета пространственных эффектов соседних регионов. Регрессионная модель оценивалась методом максимального правдоподобия в двух спецификациях: SAR (spatial autoregressive model) и SEM (spatial error model). В оцененных моделях коэффициенты пространственной автокорреляции оказались значимыми и положительными, что свидетельствует о наличии положительной пространственной автокорреляции по оттоку и притоку выпускников вузов между соседними регионами. В статье [Олейник, Шмидт, Карп, 2019] исследована динамика потоков миграции с учетом поправки на суровость климатических условий территории. В статье [Sarra, Signore, 2010] исследовались внутренние миграционные потоки в Польше и рассматривалась динамическая модель миграции с пространственным лагом. Результаты показали, что миграционные потоки направлены в экономически более развитые провинции с меньшим уровнем безработицы. Также значимым оказался фактор жилищной обеспеченности.

Некоторые авторы при построении регрессионных моделей миграции используют инструментальные переменные. В работе [Nguen-Hoang, McPeak, 2010] проводился анализ внутренних миграционных потоков во Вьетнаме. С использованием модифицированной гравитационной модели оценивалась эластичность миграции по среднедушевым доходам. Так как показатели доходов и безработицы являлись эндогенными по отношению к величинам миграционных потоков, авторами использовались инструменты для этих переменных. В качестве инструмента для средних заработных плат в частном секторе использовалась средняя заработная плата в государственном секторе, а для безработицы — государственные трансферты в провинцию из бюджета и индекс уровня усилий правительства провинции по обучению работников.

Следует также отметить, что большинство авторов при построении эконометрических моделей миграции используют предположение о нормальном или логнормальном распределении численности мигрантов. Но в ряде работ используются методы, разработанные специально для данных счетного типа, такие как пуассоновская или отрицательная биномиальная регрессии.

Для пуассоновской регрессии условное математическое ожидание величины миграционных потоков определяется по формуле

$$E(y_{i,j,t} | \alpha_{i,j}, X_{i,j,t}) = \alpha_{i,j} \exp(X_{i,j,t}^T \beta) = \text{var}(y_{i,j,t} | \alpha_{i,j}, X_{i,j,t}) = \lambda_{i,j,t}, \quad (6)$$

при этом делается предположение о равенстве математического ожидания и дисперсии случайной величины y .

В работе [Flowerden, Aitkin, 1982] было показано, что распределение Пуассона лучше подходит для моделирования миграционных потоков, чем логнормальное, по ряду причин. Во-первых, если регрессия оценивается для логарифмов миграционных потоков, то при прогнозировании величины самих миграционных потоков необходимо выполнить потенцирование, что приводит к смещению оценок. Во-вторых, при оценивании регрессии в логарифмах предполагается, что отклонения имеют логнормальное распределение, но поскольку величина миграционного потока определяется количеством мигрантов, то логарифм миграционного потока может принимать только положительные значения. В-третьих, логарифмическая регрессия оценивается в предположении, что дисперсия отклонений постоянна для каждого наблюдения и остатки регрессии одинаковы для каждой пары наблюдений. Однако для простых и логарифмированных миграционных потоков разница между предсказанными и наблюдаемыми величинами отличается. В-четвертых, в случае равенства миграционного потока нулю он обычно заменяется на небольшое число, чтобы была возможность прологарифмировать наблюдения. Но если таких наблюдений много, это приводит к смещению коэффициентов и снижает объясняющую силу модели. В работе [Silva, Tenreiro, 2006] было рассмотрено несколько регрессионных моделей и показано, что в случае гетероскедастичности использование пуассоновской регрессии предпочтительнее линейной. В статьях [Golgher, Rosa, de Araujo, 2008; Москвина, 2019] также оценивается модифицированная гравитационная модель миграции в предположении, что число мигрантов имеет пуассоновское распределение. Так, в [Москвина, 2019] на примере данных о миграции выпускников российских вузов показано, что применение пуассоновской регрессии, согласно рассчитанным критериям качества предсказаний (MAE и MSE), приводит к более точным оценкам, чем МНК. В [Golgher, Rosa, de Araujo, 2008] исследуется внутренняя миграция в Бразилии и делается вывод о наличии ловушек бедности для мигрантов в северных районах Бразилии. Авторы статьи [Mkrtchyan, Vakulenko, 2019] отмечают, что для пуассоновской регрессии используется сильное предположение о равенстве математического ожидания и дисперсии случайной величины y и предлагают для моделирования межрегиональных миграционных потоков РФ в разрезе разных возрастных групп использовать отрицательную биномиальную регрессию.

Довольно часто для моделирования миграции используются *агент-ориентированные модели* (АОМ): это специальный класс моделей, создаваемых для компьютерных симуляций и основанных на индивидуальном поведении агентов [Bakhtizin, 2008]. Агент-ориентированная модель позволяет определить правила поведения экономических агентов на индивидуальном уровне (например, агентов-стран, агентов-мигрантов и т. д.), в том числе в зависимости от особенностей поведения каждого агента в популяции, и способна имитировать поведение большой системы на основе реконструкции ее внутренней структуры, а также структуры и поведения включенных в нее более мелких экономических и социальных субъектов. Гибкость такого инструмента достигается за счет возможности варьирования большого числа управляемых параметров модели, что позволяет проводить с использованием АОМ самые разнообразные эксперименты, воспроизводя возможные сценарии развития социально-экономической системы и оценивая ее реакцию на те или иные управленческие воздействия [Макаров, Бахтизин, Сушко, 2020].

При использовании АОМ предполагается, что поведение агентов направлено на максимизацию собственной функции полезности. Так, агенты-люди максимизируют свой доход, для чего

могут выбирать регион – место жительства, регион – место работы и конкретный вид деятельности. Агенты-власти разного уровня в пределах своих полномочий могут управлять такими переменными, как ставки различных налогов, развитие транспортной инфраструктуры системы регионов, что в свою очередь влияет на решения агентов-людей, касающиеся выбора места работы и миграции. Эти параметры модели являются управляемыми, т. е., меняя в ходе компьютерных экспериментов значения таких параметров, можно апробировать различные варианты миграции [Billari, Prskawetz, 2003]. Многие АОМ предназначены для исследования различных миграционных процессов: миграция из села в город, межстрановая, трудовая миграция. Основными факторами при построении таких АОМ являются: побудительные мотивы агентов модели к миграции; критерии выбора каждым агентом конкретной территории, куда он стремится переместиться; ограничения среды, которые препятствуют реализации миграционных намерений агентов [Макаров и др., 2017].

Кроме того, большинство моделей создавалось не только для анализа особенностей населения конкретных территорий и прогнозирования их изменения при возможных сценариях развития социально-экономической среды, но и для отработки мер, направленных на корректировку этой среды. Эти модели создавались как инструмент, позволяющий в компьютерных экспериментах апробировать различные меры, направленные на ограничения или стимулирование миграционной активности населения и оценить их последствия.

Примером АОМ является модель расширения городской территории китайского города Чанша [Zhang et al., 2010], которая включает три типа агентов: это жители города, крестьяне и органы власти. Агенты-жители, выбирающие новое место жительства, считаются в модели одной из главных движущих сил расширения города. При этом рассматриваются два вида агентов-жителей: новые жители города, приезжающие извне, и уже существующие жители, переезжающие на новое место жительства. Предполагается, что при поиске нового места жительства агент стремится максимизировать функцию полезности

$$U_{x,y} = \alpha \cdot C_{x,y} + \beta \cdot L_{x,y} + \gamma \cdot E_{x,y} + \mu_{x,y}, \quad (7)$$

где C , L и E – стандартизованные транспортная доступность, стоимость земли и природная ценность места (x, y) соответственно; α , β , γ – веса каждого фактора для конкретного агента, $\alpha + \beta + \gamma = 1$; $\mu_{x,y}$ – случайный остаток. Модель построена на статистических данных о социально-экономическом развитии города Чанша, начиная с 90-х годов прошлого века, использует ГИС-карту города и реализована в виде клеточного автомата.

АОМ миграции на основе модели Харриса – Тодаро описаны в работах [Espindola et al., 2006; Laing, Park, Wang, 2005]. В модели, представленной в [Xie, Batty, Zhao, 2007], введены параметры среды, направленные на ужесточение исполнения закона о прописке в связи со стремительной урбанизацией сельских территорий Китая и оценку влияния этих законов на миграционный поток из села в город на примере Китая. В модели, описанной в работе [Groen, 2016] наряду с использованием демографических и экономических данных, в процедурах принятия и реализации агентами миграционных решений учитываются также их социальные связи. Примером модели этого направления может служить работа [Sokolowski, Banks, Hayes, 2014], имитирующая движения населения в сирийском городе Алеппо. В ней, кроме прочего, учитываются такие свойства агентов-людей, как наличие миграционного опыта и социальных связей за пределами страны.

Еще одним классом АОМ являются такие, в которых причинами миграции агентов-людей из села в город выступают природные экологические или климатические условия. В качестве примера можно привести два исследования, которые касались изучения специфики организации миграции сельского населения двух стран Юго-Восточной Азии – Таиланда [Naivinit et al.,

2010] и Непала [Janmaat et al., 2015], миграция в этом случае зависела от региональных климатических условий и слабой развитости инженерной инфраструктуры. В этих моделях агенты покидают село вынужденно, так как деградация аграрной экосистемы не обеспечивает им дохода даже на минимальном уровне. Целью компьютерных экспериментов была апробация различных стратегий развития инфраструктуры водоснабжения этих регионов.

АОМ внутренней миграции в европейских странах представлены в работах [Heiland, 2003; Pablo-Marti, Santos, Kaszowska, 2013]. В обеих моделях агенты принимают решение о переезде в зависимости от степени удовлетворенности своим трудовым статусом и уровнем доходов. Выбор целевого региона агенты при этом осуществляют с учетом разницы между экономическими показателями регионов и уровнем безработицы в них, а также расстояния между регионами. В работе [Макаров и др., 2017] учтены родственные связи, выделены группы работников разной квалификации, агенты популяции делятся на группы, придерживающиеся разных репродуктивных стратегий, определяющих число детей, что характерно для Китая. Особенностью данной модели является последовательность присвоения значений характеристик. Например, желаемое число детей в семье зависит от социальной группы, к которой относится агент: и в нашей стране, и в Китае репродуктивное поведение сельского населения и городского различаются. Поэтому значение желаемого числа детей присваивается агенту после его поселения в городе или на селе конкретного региона.

Другой тип мотивации агентов представляют модели, в которых миграция вызвана опасными событиями. Речь здесь, как правило, идет о межстрановой миграции, и механизм выбора цели перемещения агентов связан не с экономическими, а, скорее, с институциональными условиями разных стран, их способностью принимать беженцев. Примером может служить работа [Groen, 2016], в которой модель предназначена для прогнозирования потоков беженцев в зависимости от того, в какие сроки открывают соседние страны свои границы для беженцев. Агентами в агент-ориентированных моделях могут быть любые наблюдаемые в реальной жизни объекты, однако основной задачей их учета в рамках модели является их корректная спецификация. В частности, в моделях социально-экономических систем обычно присутствуют агрегированные агенты, представляющие собой либо отрасль, либо регион, либо совокупное домохозяйство [Макаров, Бахтизин, 2013].

В [Низамутдинов, Атнабаева, Ахметзянова, 2020] реализован механизм поведения агента «Человек» при принятии им решения о миграции по причине поиска работы. При этом агент характеризуется следующими параметрами: пол, возраст, место жительства, уровень знаний, вид экономической деятельности, желаемый уровень заработной платы, фактический уровень заработной платы, желаемое количество детей, реальное количество детей, желаемый уровень жизни. У агента имеются следующие функции: рождение, местожительство, обучение, трудоустройство, смерть, трудовая миграция, образовательная миграция, внутрирегиональная миграция. Алгоритм симуляции миграционных процессов на региональном уровне в АОМ начинается с наполнения модели агентами путем считывания сведений из базы данных и формирования начального состояния модели. Далее осуществляется оценка уровня трудовой привлекательности территории для агента по формуле (8), которая была получена на основе компонентного анализа:

$$K1_i = 0,651 \cdot X1_i + 0,658 \cdot X2_i - 0,595 \cdot X3_i + 0,845 \cdot X4_i + 0,823 \cdot X5_i, \quad (8)$$

где i — номер муниципального образования; $K1_i$ — коэффициент привлекательности i -го муниципального образования; $X1_i$ — среднесписочная численность работников организаций на 1000 чел. населения (без субъектов малого предпринимательства); $X2_i$ — среднемесячная заработная плата работников организаций; $X3_i$ — объем выбросов в атмосферу загрязняющих веществ, отходящих от стационарных источников, на 1000 чел. населения; $X4_i$ — отгружено товаров собственного

производства, выполнено работ и услуг собственными силами на 1000 чел. населения (без субъектов малого предпринимательства); $X5_i$ — объем инвестиций в основной капитал, осуществляемых организациями, находящимися на территории муниципального образования предпринимательства, на 1000 чел. населения (среднее за 3 года).

Оценка уровня привлекательности в АОМ проводится ежегодно на основе социально-экономических показателей территории за предыдущий период. Далее осуществляется поиск агентов с высоким уровнем миграционной активности, желаемый уровень жизни которых больше коэффициента привлекательности территории проживания. Оценка желаемого уровня жизни осуществляется на основе как количественных, так и качественных показателей. Следующим этапом является расчет коэффициента выбытия для всех агентов «Человек» по социально-экономическим показателям:

$$K2_t = -48,63 + 3,85 \cdot Xd1 - 187,38 \cdot Xd2 + 3,54 \cdot Xd3 - 1,17 \cdot Xd4, \quad (9)$$

где $K2_t$ — коэффициент выбытия в период времени t ; $Xd1$ — объем выбросов загрязняющих атмосферный воздух веществ, отходящих от стационарных источников, на 1 млн рублей валового регионального продукта; $Xd2$ — отношение величины валового регионального продукта к величине валового внутреннего продукта; $Xd3$ — общая площадь жилых помещений, приходящаяся в среднем на одного жителя; $Xd4$ — коэффициент напряженности на рынке труда.

Затем на основе полученного коэффициента выбытия определяется миграционная подвижность населения с использованием дискретного распределения вероятности Бернулли, генерирующего 1 (активен) с вероятностью успеха, а 0 (неактивен) — с вероятностью отказа $q = 1000 - p$. В случае если желаемый уровень жизни не соответствует (больше) коэффициенту привлекательности территории и миграционная подвижность агента равна 1, то для него реализуется механизм поиска новой территории для проживания.

В статье [Дорошенко, 2019] представлена модель миграции населения в связи с учебой с учетом миграционных установок отдельных агентов-людей, поведения образовательных организаций и политики региональных органов властей. В модели выделены три типа агентов: агент «Человек», агент «Образовательная организация», агент «Власть».

Таким образом, с точки зрения практического применения агент-ориентированное моделирование помогает исследовать поведение децентрализованных агентов и то, как это поведение определяет поведение всей системы в целом. Большинство моделей разработано в среде AnyLogic — инструменте имитационного моделирования, который поддерживает различные подходы к созданию имитационных моделей, в том числе и агентный.

Можно выделить еще один класс моделей, активно используемый при моделировании миграционных процессов — *имитационные модели*. Имитационную модель можно рассматривать как множество правил (дифференциальных уравнений, карт состояний, автоматов, сетей и т. п.), которые определяют, в какое состояние система перейдет в будущем из заданного текущего состояния. Имитация — это процесс «выполнения» модели, проводящий ее через дискретные или непрерывные изменения состояния во времени. В работе [Павловский, Белотелов, Бродский, 2008] дается определение «имитационного моделирования» как «вычисление численных значений характеристик развивающегося во времени процесса путем воспроизведения течения этого процесса на компьютере с помощью его математической модели». Под этим определением обычно подразумевают и понятие численного моделирования, то есть поведение динамической системы описывается через систему уравнений, после чего при помощи численных методов находится ее решение.

В работе [Белотелов, 2019] представлена имитационная модель миграции населения между странами, каждой из которых соответствует своя «культура». При миграции в другую страну люди могут либо сохранить свой культурный статус, либо ассимилироваться, то есть принять

«культуру» страны пребывания. Особенностью этой модели является то, что в качестве параметров в ней используются законы образовательной динамики. Считается, что все страны имеют некоторый образовательный ресурс. Каждая страна тратит свой образовательный ресурс на техническое и на культурное образование, деля этот ресурс между этими двумя направлениями в некоторой пропорции. Люди, получившие технологическое образование, целью которого является передача естественно-научных представлений, получают возможность использовать приобретенные знания в процессе производства, что в конечном итоге приводит к развитию экономики в данной стране. И есть образование культурное; такого рода образование, во-первых, приводит к понижению миграционной активности населения, а во-вторых, повышает терпимость к людям другой культуры.

Тогда уравнение демографического процесса с учетом миграции можно записать в виде

$$x_{iefk}^{l,t+1} = (B_i^m)^{l,t} x_{iefk}^{l,t} + \sum_m (In_{iefk}^{l,m,t} - Out_{iefk}^{l,m,t}), \quad (10)$$

где $In_{iefk}^{l,m,t}$ — число людей, которые придут в страну l из страны m , вычисляемое по формуле $In_{iefk}^{l,m,t} = a^{tml} x_{iefk}^{l,t}$; $Out_{iefk}^{l,m,t}$ — число людей, которые придут в страну m из страны l (обратный поток), вычисляемое по формуле $Out_{iefk}^{l,m,t} = a^{tml} x_{iefk}^{m,t}$; B — матрица Лесли, которая описывает демографический процесс в стране.

Имитационное моделирование с использованием метода Монте-Карло позволяет построить математическую модель с неопределенными значениями параметров и, при предположении о вероятностном распределении параметров, а также связи между изменениями параметров (корреляции), получить распределение демографических результатов. Пример применения такого метода представлен в работе [Manakov, Suvorkov, Stanaitis, 2017], в которой проведена оценка риска внешних миграций из стран Балтии. Для имитационного моделирования были использованы средние значения коэффициента чистых миграций, усредненные по возрастам и разнесенные по гендерному признаку. На основании усредненного значения результатов имитационного моделирования по рождаемости, смертности и миграциям в странах Балтии появилась возможность расчета цепного среднегодового темпа прироста населения. В модели учтены все вариации по признакам гражданства и конкретного территориального субъекта (надгосударственное объединение, страна, территория).

Модель миграционных потоков между федеральными округами РФ построена авторами в [Васильева, Мызникова, Русаков, 2011], где приведены алгоритмы имитационного моделирования развития городов на основе теории клеточных автоматов. В работе [Шмидт, Ивашина, Озерова, 2020] разработана модель клеточного автомата для моделирования межрегиональных миграционных потоков, реализующая интеграцию модели миграционного поведения домашних хозяйств в условиях ограниченной рациональности в общую модель миграционного потока территории. Модель позволяет получать прогнозы и количественные характеристики миграционных потоков территорий на основе реального миграционного поведения домашних хозяйств на локальном уровне с учетом условий их проживания и поведенческих мотивов. Для реализации данной модели был разработан интегральный индекс привлекательности регионов с экономической, социальной и экологической составляющими.

В предположении, что рождаемость низкая, а продолжительность жизни возрастает (что характерно для развитых стран), возникает задача организации управляемого миграционного потока, который будет восполнять трудовые ресурсы и создавать необходимые условия для экономического развития, в частности определение величины необходимой миграции для поддержания заданной фиксированной численности населения. Такая задача решена в работе [Simon, Skritek, Veliov, 2013]. Авторами реализована модель, которая представляет собой задачу оптимального управления возрастной плотностью населения с ограничениями. Поведение объекта

управления описывается дифференциальным уравнением Kendrick – von Forester первого порядка в частных производных на бесконечном промежутке времени. Задача заключается в нахождении некоторого рационального выбора двух типов управления (интенсивности и возрастного профиля иммиграционного потока), обеспечивающих удержание заданной численности населения, что позволяет определять конкретные оптимальные иммиграционные стратегии и квоты на длительную перспективу.

Оптимизационные модели помогают в определении оптимальных параметров при принятии решений по управлению миграционными процессами. Если задана целевая функция, то выходом модели является описание оптимальной (для заданных перспективных показателей социально-экономического развития) структуры миграции и указание необходимых для ее достижения значений управляемых параметров миграционной системы [Golz, Procaccia, 2019]. Универсальная модель, в которой реализуется миграционный цикл, – изменение позиций индивидов в пространстве, поиска относительно индивида-лидера с наилучшим значением целевой функции – рассмотрена в статье [Пантелеев, Ракитянский, 2020]. Возможно и решение обратной задачи – как должна развиваться экономика региона для достижения определенной мощности и интенсивности миграции. Если критерий оптимальности отражает некоторый закон поведения населения данной территории, возможно получение нормативного прогноза миграционных потоков.

В работе [Некрасова, 2012] разработана математическая модель задачи оптимизации миграционных потоков между территориями муниципального уровня для маятниковой миграции, которая сформулирована следующим образом: найти наименьшее значение функции (11) совокупного пути перемещения работников между муниципальными образованиями:

$$L(\bar{x}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n r_{ij} x_{ji} \rightarrow \min, \quad (11)$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = b_i, & i \in \overline{1, m}, \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = a_j, & j \in \overline{1, n}, \\ x_{ij} \geq 0, & i \in \overline{1, m}, \quad j \in \overline{1, n}, \end{cases} \quad (12)$$

где r_{ij} – расстояние от муниципального образования i до муниципального образования j , км; x_{ij} – численность работников, которую нужно трудоустроить из i -й территории на j -ю территорию, чел.; a_j – число предоставляемых рабочих мест на j -й территории, чел.; b_i – численность работников, трудоустраиваемых из i -й территории, чел.

Оптимизационные модели позволяют разрабатывать оптимальные траектории миграции, а не только прогнозировать движение населения, обусловленное социально-экономической дифференциацией территорий.

Модели миграционных процессов на основе *марковских цепей* представлены в работах [Lindsay, Brenton, 1972; Pan, Nagurney, 1994]. К марковским моделям миграции можно прийти и с помощью таблиц миграции, основными данными таких таблиц являются вероятности миграции людей определенной группы в другой регион, и составляются эти таблицы на основе данных о половозрастной структуре в прогнозируемом периоде. В работе [Семенчин, Бабченко, 2006] вероятность того, что в момент времени $t = n$ в населенном пункте j будет наблюдаться приток мигрантов, если в предыдущий момент времени $t - 1 = n - 1$ приток мигрантов наблюдался в населенном пункте i , определяется соотношением $P_{ij} = M_{ij}/n_i$, где n_i – численность

населения в пункте с номером i ; M_{ij} — миграционный поток из пункта i в пункт j в момент времени t . Далее, зная плотности переходных вероятностей P_{ij} , можно найти численность населения в момент времени t : $N_t = (N_1, N_2, \dots, N_m)$ по N_{t-1} из соотношения $N_t = N_{t-1} \cdot P$, где P — матрица переходных состояний.

Еще один тип моделей — *балансовые модели*, которые позволяют выявить и провести анализ балансовых соотношений в миграционных потоках. Скорректированная классическая балансовая модель движения населения и трудовых ресурсов позволяет учитывать неоднократные переходы людей.

В этом случае течение миграционного процесса описывается числом людей, побывавших за год t в состоянии i — $a_i(t)$. В модели эта характеристика определяется так:

$$a_i(t) = \begin{cases} n_i(t-1) + \sum_{j=1}^N b_{ji}(t) + \sum_{j=N+1}^{N+K} r_{ji}(t), & i = 1, 2, \dots, N, \\ r_i(t), & i = N+1, N+2, \dots, n+k, \\ 0, & i = N+k+1, N+k+2, \dots, N+2k, \end{cases} \quad (13)$$

где $r_{ij}(t)$ — число поступлений в течение периода t из внешнего источника пополнения i в состояние j , причем $r_i(t) = \sum_{j=1}^N r_{ij}(t)$, $i = N+1, \dots, N+K$.

В работах [Единак, Коровкин, 2014; Коровкин, Единак, Королев, 2017] предложен принцип построения и оценки элементов балансов: для каждой последующей группы населения начальным приближением структуры ее межрегионального движения может служить соответствующая матрица миграционных потоков укрупненной группы населения. Так, известная структура территориального движения населения в целом может являться начальным приближением для оценки элементов матрицы межрегиональных потоков населения в трудоспособном возрасте. После проведения балансировки элементов структура вновь оцененной матрицы, в свою очередь, может быть основой оценки матрицы межрегиональных потоков экономически активного населения. В дальнейшем на базе этой информации может быть проведена оценка элементов баланса территориального движения занятого (безработного) населения. В [Огородников, Макарова, 2013] авторами рассматривается баланс динамики численности населения, который позволяет определить слагаемые абсолютного прироста населения, выявить пропорции источников роста населения и оценить роль каждого периода в динамике роста численности населения.

Некоторые авторы для моделирования миграции строят динамические модели. В [Васильева, Тарасьев, 2012] представлена динамическая межрегиональная модель трудовой миграции, которая позволяет одновременно прогнозировать миграцию и ее экономические эффекты. Данная модель построена в непрерывном времени в рамках неоклассической экономической теории. Автором рассматривается n регионов притяжения и m стран отправления мигрантов, в которых устранены все препятствия для мобильности рабочей силы. Численность мигрантов из страны происхождения i в регионе притяжения j в момент времени t обозначена как $x_{ij}(t)$. Рациональный индивид принимает решение о миграции из страны отправления i в регион притяжения j на основе сравнения характеризующих их уровней заработной платы (w_i и w_j соответственно). Данное решение будет положительным, если ожидаемый доход от разрыва в заработках в стране происхождения и регионе назначения мигранта будет положительным, т. е. $w_i - w_j > 0$. С учетом того, что отток населения из страны отправления i ограничен численностью ее потенциальных мигрантов M_i , поток трудовых мигрантов из страны отправления i в регион притяжения j опи-

сывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dx_{ij}(t)}{dt} = \alpha \frac{1}{r_{ij}} x_{ij}(t) \left(M_i - \sum_{j=1}^n x_{ij}(t) \right) \times (w_j(x_j(t)) - w_i(x_i(t))), \quad (14)$$

где α — калибровочный коэффициент, отражающий влияние неучтенных в модели факторов, главным образом неэкономических, влияющих на склонность к миграции. Авторы отмечают, что предложенная модель потоков трудовых мигрантов может быть использована при формировании квот на выдачу иностранным гражданам разрешений на работу.

В последнее время исследователи достаточно активно используют различные *комбинации подходов и методов моделирования* миграционных потоков: методы агент-ориентированного моделирования, системной динамики, имитационного моделирования, различные эконометрические и вероятностные модели. Преимуществом комбинирования является возможность уточнять прогнозы, динамически менять факторы влияния, оценивать риски прогнозирования результатов. Это, в частности, позволяет моделировать потоки взаимодействующих агентов, принимающих решения в соответствии с собственными предпочтениями и правилами поведения.

Примером такого комбинирования служит работа [Хавинсон, 2016]. В основу была положена идея простой динамической модели для описания изменения занятости и безработицы в аспекте согласования спроса на рабочую силу и ее предложения (реализована в [Коровкин, 2011]) и использования социальных сетей (см. [Bramoullé, 2004]). В развитие этого подхода в статье приводится система с тремя фазовыми переменными и более сложными социальными связями, позволяющими описать некоторые нелинейные особенности динамики численности экономически активного населения. Реализуемые подходы моделирования динамики численности занятых, безработных и экономически неактивного населения в регионе базируются на принципе парных взаимодействий, который впервые был применен в естественных науках, а в современных исследованиях успешно используется в изучении общества. В общем виде модель можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_1(x) + \eta_{12}xy + \eta_{13}xz, \\ \frac{dy}{dt} = f_2(y) + \eta_{21}xy + \eta_{23}yz, \\ \frac{dz}{dt} = f_3(z) + \eta_{31}xz + \eta_{32}yz, \end{cases} \quad (15)$$

где x — численность занятых; y — численность безработных; z — численность экономически неактивного населения; $f_1(x)$, $f_2(y)$, $f_3(z)$ — функциональные зависимости, обобщенно описывающие динамику групп населения; η_{ij} — коэффициенты взаимовлияния групп населения, которые определяют долю всевозможных парных взаимодействий, оказавших влияние на изменение занятости и безработицы за счет пополнения из экономически неактивного населения; i, j — индексы, принимающие целочисленные значения от 1 до 3, $i \neq j$.

В работе [Хавинсон, Кулаков, 2016] для построения динамической гравитационной модели используется эконофизический подход, обобщенный в [Чернавский, 2016]. Модель имеет следующий вид:

$$\dot{x}_i = f(x_i) + \sum_{j=1, j \neq i}^N s_{ij} x_i x_j; \quad s_{ij} = \frac{\alpha_{ij} - \alpha_{ji}}{r_{ij}^2}, \quad (16)$$

где $f(x_i)$ — функция локального воспроизводства, которая определяет прирост населения на i -й территории в отсутствие внешней миграции, $r_{ij} = r_{ji}$ — расстояние между i -й и j -й территориями, α_{ij} — коэффициент, выражающий привлекательность j -й территории для населения i -й территории.

Примером более сложного гибридного подхода может служить модель, подробно представленная в работе [Макаров и др., 2019]. Это укрупненная агент-ориентированная имитационная модель миграционных потоков стран Европейского союза, созданная в виде расширенной гравитационной модели. В данном случае принятие индивидуальных решений со стороны агентов-мигрантов основывается на комплексной оценке социально-экономической, географической и прочей дифференциации соответствующих стран. При этом одни факторы притягивают мигрантов, а другие — отталкивают. Отличительной особенностью модели является дифференциация миграционных потоков по категориям мигрантов с выделением различных влияющих факторов, отражающих индивидуальные предпочтения агентов-мигрантов по отношению к агентам-странам. Из популяции мигрантов выделены следующие группы: группа А — потенциально работающие неквалифицированные мигранты — граждане ЕС, интересующиеся возможностями трудоустройства на минимальную (среднюю) заработную плату; группа В — потенциально работающие высококвалифицированные мигранты — граждане ЕС, интересующиеся трудоустройством на максимальную (среднюю) заработную плату и обучением; группа С — потенциально работающие (в основном) квалифицированные (экономические) мигранты, не граждане ЕС, не являющиеся гражданами стран — членов ЕС; группа D — потенциально неработающие (в основном) неквалифицированные мигранты (беженцы, безработные), не являющиеся гражданами стран — членов ЕС. Поясним логику модели. Основными факторами притяжения мигрантов — граждан ЕС, не обладающих высокой квалификацией, являются прежде всего ключевые социально-экономические показатели принимающей страны. Чем выше значение ВВП и минимальная заработная плата, чем меньше уровень безработицы по сравнению с соответствующими значениями в стране-источнике, тем более привлекательной будет данная страна для потенциального мигранта. Также имеют значение численность и плотность населения. Чем больше численность населения, тем больше рынок труда и, соответственно, больше возможностей трудоустройства для мигранта. Однако чем выше плотность населения (отношение численности населения к площади страны), тем дороже стоимость покупки и аренды недвижимости, что снижает привлекательность данной страны для иммиграции. Также имеют значения географические расстояния между странами и климатическая разница между ними. Чем меньше расстояние между странами и более схожий климат, тем страна предпочтительнее для миграции. Дополнительными положительными факторами служит наличие общих границ, а также свободное знание официального языка принимающей страны. Другой пример — мигранты категории D из стран, не являющихся членами ЕС. Для данной группы мигрантов основное значение имеют размер пособия по безработице и уровень выплат за статус беженца, а возможности трудоустройства их практически не интересуют. Общий вид модели подробно представлен в публикации.

4. Заключение

Обычно считается, что основной целью математического моделирования является прогнозирование. Но, помимо этого, математическое моделирование является основным инструментом междисциплинарного исследования проблем. В данном обзоре была проведена классификация математических моделей, базирующихся на разных подходах, особенности которых представлены в таблице 2.

Рассмотренные выше модели предназначены для решения определенных задач анализа и прогнозирования миграции. На наш взгляд, выбор инструмента для анализа и прогнозирования миграционных потоков зависит от целей исследования. Использование только одной модели может снижать информационную значимость результатов и ограничивать их интерпретацию. Поэтому в последнее время получили широкое распространение комбинированные подходы к построению моделей миграции с использованием элементов нечеткой логики и геоинформаци-

онных систем. Такой синтез дает возможность использовать преимущества сразу нескольких инструментов.

Таблица 2. Особенности моделирования миграционных потоков

Характеристика миграционных моделей	
Преимущества	Недостатки
Регрессионные модели	
используются для исследования влияния социально-экономических факторов на процесс миграции; являются развитием гравитационных моделей и более точно описывают процессы миграции; большинство факторных переменных являются «двусторонними», так как характеризуют две страны (региона); для прогноза интенсивности миграции чаще всего используются мультипликативные модели, а для прогноза величины миграционных потоков — аддитивные	
<ul style="list-style-type: none"> – присутствует возможность количественного измерения тесноты связи между различными показателями, что позволяет разрабатывать управленческие стратегии; – учет влияния множественных факторов на динамику миграции, а также ориентацию на экономическое выравнивание соответствующих стран 	<ul style="list-style-type: none"> – наличие пропущенных переменных, влияние которых невозможно учесть, приводит к смещению оценок некоторых коэффициентов регрессии; – имеются определенные упрощения, связанные с игнорированием проблемы вторичного перераспределения миграционных потоков, а также с их естественной рециркуляцией
Балансовые модели	
используются для выявления и анализа балансовых соотношений в миграционных потоках; скорректированная балансовая модель движения населения и трудовых ресурсов позволяет учитывать неоднократные переходы людей	
<ul style="list-style-type: none"> – полная структуризация миграционного процесса, позволяющая избежать «избыточности» анализа; непротиворечивость исходной информации; возможность построить систему показателей, количественно описывающих все стадии миграционного в их взаимосвязи; – балансовая схема применима к информации любой степени агрегирования 	<ul style="list-style-type: none"> – статичность метода: даже при наличии необходимой информации построение баланса не позволяет исследовать процесс формирования этой картины в динамике; – жесткие требования к точности исходной информации; – отсутствие представления о движущих силах и причинах миграции в отношении данной территории сводит возможности прогнозирования получения балансовой матрицы будущих периодов исключительно к экстраполяционному варианту
Имитационные модели	
используются для воспроизведения миграционных процессов при условии воздействия на них различных факторов для обнаружения ранее неизвестных свойств: структуры, динамики развития, устойчивости	
<ul style="list-style-type: none"> – позволяют описать процессы миграции наиболее подробно; сложность имитационной модели зависит от ее размерности, количества учитываемых процессов, детальности и способа их учета, но все это повышает ее качество 	<ul style="list-style-type: none"> – требуют наибольшего числа исходных параметров, из-за чего являются достаточно сложными в разработке; – требуют наличия мощных вычислительных систем и специального программного обеспечения
Агент-ориентированные модели	
используются для апробации различных мер, направленных на ограничение или стимулирование миграционной активности населения, и оценки их последствий в предположении, что агенты максимизируют свои функции полезности	
<ul style="list-style-type: none"> – включение основных и дополнительных факторов в ходе моделирования; – высокое качество прогнозирования, прозрачность модели; – возможность изучить индивидуальное поведение мигрантов в зависимости от изменения входных параметров 	<ul style="list-style-type: none"> – сложность разработки, обусловленная высокой размерностью подобных задач; – необходимость использования мощных вычислительных систем и специального программного обеспечения
Модели на основе марковских цепей	
используются для моделирования миграционных процессов как множества последовательных событий, влекущих за собой смену места жительства, предполагают вероятностный характер динамики процесса	

Таблица 2 (окончание)

Характеристика миграционных моделей	
Преимущества	Недостатки
<ul style="list-style-type: none"> – содержательность показателей, хорошо проработанный математический аппарат; – допущение взаимной зависимости объясняемых переменных 	<ul style="list-style-type: none"> – необходимость полной информации о матрице вероятностей перехода в каждый момент времени; – выбор данного подхода означает использование экстраполяции при прогнозировании; – достаточно сложный математический аппарат
Оптимизационные модели	
используются для определения оптимальной величины или характеристик миграционных потоков при четко сформулированных ограничениях	
<ul style="list-style-type: none"> – можно получить нормативный прогноз миграционных потоков в зависимости от критерия оптимальности; – позволяют учесть параметры, необходимые для достижения целевых показателей миграции; – возможность решения обратной задачи: как должна развиваться экономика региона для достижения определенных целей и каковы должны быть при этом масштабы миграции 	<ul style="list-style-type: none"> – оптимальное решение может оказаться неустойчивым, т.е. незначительные изменения в условиях задачи, исходных данных или ограничениях могут привести к выбору существенно отличающихся альтернатив; – оптимизационные модели разработаны лишь для узких классов простых задач, которые не всегда адекватно отражают реальные объекты; – точность прогноза зависит от адекватности критерия

Список литературы (References)

- Алешковский И. А., Ионцев В. А.* Детерминанты внутренней миграции в современной России // Вестник Московского университета. Сер. 6. Экономика. — 2006. — № 2. — С. 24–41.
- Aleshkovskij I. A., Iontsev V. A.* Determinanty vnutrennej migratsii v sovremennoj Rossi [Determinants of internal migration in modern Russia] // Moscow University Bulletin. Ser. 6. Economics. — 2006. — No. 2. — P. 24–41 (in Russian).
- Андрюченко Ю., Гуриев С.* Разработка прикладной модели внутренних и внешних миграционных потоков населения для регионов Российской Федерации. Отчет по проекту в рамках Программы поддержки независимых экономических аналитических центров МОНФ. — М.: ЦЭФИР, 2006.
- Andrienko Yu., Guriev S.* Razrabotka prikladnoj modeli vnutrennikh i vneshnikh migratsionnykh potokov naseleniya dlya regionov Rossijskoj Federatsii. Otchet po proektu v ramkakh Programmy podderzhki nezavisimyykh ehkonomicheskikh analiticheskikh tsentrov MONF [Development of an applied model of internal and external migration flows of the population for the regions of the Russian Federation. Report on the project within the framework of the Program for Support of Independent Economic Analytical Centers of the MNF]. — M.: TSEHFIR, 2006 (in Russian).
- Антосик Л. В., Ивашина Н. В.* Моделирование пространственной зависимости миграционных потоков выпускников вузов РФ // Прикладная эконометрика. — 2019. — № 2 (54). — С. 70–89. — DOI: 10.24411/1993-7601-2019-10004
- Antosik L. V., Ivashina N. V.* Modelirovanie prostranstvennoj zavisimosti migracionnykh potokov vypusnikov vuzov RF [Modeling the spatial dependence of migration flows of PlaceNameRussian PlaceTypeUniversity graduates] // Applied econometrics. — 2019. — No. 2 (54). — P. 70–89. — DOI: 10.24411/1993-7601-2019-10004 (in Russian).
- Белотелов Н. В.* Имитационная модель процессов миграции в странах с учетом уровня образования // Математическое моделирование и численные методы. — 2019. — № 4 (24). — С. 91–98. — DOI: 10.18698/2309-3684-2019-4-9199
- Belotelov N. V.* Imitatsionnaya model' protsessov migratsii v stranakh s uchetom urovnya obrazovaniya [Simulation model of migration processes in countries, taking into account the level of education] // Mathematical Modeling and Computational Methods. — 2019. — No. 4 (24). — P. 91–98. — DOI: 10.18698/2309-3684-2019-4-9199 (in Russian).
- Вакуленко Е. С.* Эконометрический анализ факторов внутренней миграции в России // Региональные исследования. — 2015. — Т. 50, № 4. — С. 89–83.
- Vakulenko E. S.* Ekonometricheskij analiz faktorov vnutrennej migratsii v Rossii [Econometric analysis of factors of internal migration in Russia] // Regional'nye issledovaniya. — 2015. — T. 50, no. 4. — P. 89–83 (in Russian).
- Васильева А. В.* Прогноз трудовой миграции, воспроизводства населения и экономического развития России // Экономика региона. — 2017. — Т. 13, вып. 3. — С. 812–826. — DOI: 10.17059/2017-3-14

- Vasil'eva A. V.* Prognoz trudovoj migracii, vosпроизводства naseleniya i ekonomicheskogo razvitiya Rossii [Forecast of labor migration, population reproduction and economic development of Russia] // *Economy of region*. — 2017. — Vol. 13, no. 3. — P. 812–826. — DOI: 10.17059/2017-3-14 (in Russian).
- Васильева А. В., Тарасьев А. А.* Динамическая модель трудовой миграции: построение и реализация // *Экономика региона*. — 2012. — № 4. — С. 140–148.
- Vasil'eva A. V., Taras'ev A. A.* Dinamicheskaya model' trudovoj migracii: postroenie i realizaciya // *Economy of region*. — 2012. — No. 4. — P. 140–148 (in Russian).
- Васильева Т. П., Мызникова Б. И., Русаков С. В.* О возможности моделирования процесса градообразования с помощью клеточных автоматов // *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Сер.: Информатика. Телекоммуникации. Управление*. — 2011. — № 6 (138), ч. 2. — С. 128–134.
- Vasil'eva T. P., Myznikova B. I., Rusakov S. V.* O vozmozhnosti modelirovaniya protsesssa gradoobrazovaniya s pomoshh'yu kletochnykh avtomatov [On the possibility of modeling the process of hail formation using cellular automata] // *St. Petersburg Polytechnical University Journal. Computer Science. Telecommunication and Control Systems*. — 2011. — No. 6 (138), Part 2. — P. 128–134 (in Russian).
- Власов М. П., Шимко П. Д.* Моделирование экономических процессов. — Ростов н/Д: Феникс, 2005.
- Vlasov M. P., Shimko P. D.* Modelirovanie ehkonomicheskikh protsessov [Modeling economic processes]. — Rostov n/D: Feniks, 2005 (in Russian).
- Гитис Л. Х.* Кластерный анализ в задачах классификации, оптимизации и прогнозирования. — М.: Издательство Московского государственного горного университета, 2001.
- Gitis L. Kh.* Klasternyj analiz v zadachakh klassifikatsii, optimizatsii i prognozirovaniya [Cluster analysis in problems of classification, optimization and forecasting]. — Moscow: Izdatel'stvo Moskovskogo gosudarstvennogo gornogo universiteta, 2001 (in Russian).
- Дмитриев М. Г., Юдина Т. Н.* Миграционные процессы: модели анализа и прогнозирования: обзор // *Труды Института системного анализа Российской академии наук*. — 2017. — Т. 67, № 2. — С. 3–14.
- Dmitriev M. G., Yudina T. N.* Migratsionnye protsessy: modeli analiza i prognozirovaniya (obzor) [Migration processes: analysis and forecasting models (review)] // *Trudy Instituta sistemnogo analiza rossiyskoy akademii*. — 2017. — Vol. 67, no. 2. — P. 3–14 (in Russian).
- Дорошенко Т. А.* Разработка агент-ориентированной модели образовательной миграции населения региона // *Вестник евразийской науки*. — 2019. — Т. 11, № 5. — [Электронный ресурс]. — URL: <https://esj.today/PDF/17ECVN519.pdf> (дата обращения: 25.08.2021).
- Doroshenko T. A.* Razrabotka agent-orientirovannoj modeli obrazovatel'noj migratsii naseleniya regiona [Development of an agent-based model of educational migration in the region] // *The Eurasian Scientific Journal*. — 2020. — Vol. 11, no. 5. — [Electronic resource]. — Available at: <https://esj.today/PDF/17ECVN519.pdf> (accessed: 23.08.2021) (in Russian).
- Единак Е. А., Коровкин А. Г.* Вопросы построения баланса территориального движения занятого населения (на примере федеральных округов РФ) // *Проблемы прогнозирования*. — 2014. — № 3. — С. 72–86.
- Edinak E. A., Korovkin A. G.* Voprosy postroeniya balansa territorial'nogo dvizheniya zanyatogo naseleniya (na primere federal'nykh okrugov RF) [Questions of building the balance of the territorial movement of the employed population (on the example of federal districts of the Russian Federation)] // *Studies on Russian Economic Development*. — 2014. — No. 3. — P. 72–86 (in Russian).
- Ивантер В. В., Буданова А. Г., Коровкин В. С.* Прикладное прогнозирование национальной экономики. — М.: Экономистъ, 2007.
- Ivanter V. V., Budanova A. G., Korovkin V. S.* Prikladnoe prognozirovaniye natsional'noj ehkonomiki [Applied forecasting of the national economy]. — Moscow: Ekonomist, 2007 (in Russian).
- Ильинский А. И., Горошникова Т. А.* Системная динамика, агентное моделирование и сценарный анализ как инструменты прогнозирования потребности в квалифицированных кадрах // *Гуманитарные науки. Вестник Финансового университета*. — 2016. — № 6 (4). — С. 36–39. — <https://doi.org/10.12737/22954>
- Il'inskiy A. I., Goroshnikova T. A.* Sistemnaya dinamika, agentnoe modelirovanie i stsenarnyj analiz kak instrumenty prognozirovaniya potrebnosti v kvalifitsirovannykh kadrakh [System dynamics, agent-based modeling and scenario analysis as tools for forecasting the need for qualified personnel] // *Humanities and Social Sciences. Bulletin of the Financial University*. — 2016. — No. 6 (4). — P. 36–39. — <https://doi.org/10.12737/22954> (in Russian).
- Корепина Т. А.* Сравнительный анализ подходов к моделированию миграции // *Вопросы территориального развития*. — 2017. — № 1 (36). — С. 1–12.
- Korepina T. A.* Sravnitel'nyj analiz podkhodov k modelirovaniyu migratsii [Comparative analysis of approaches to modeling migration] // *Territorial development issues*. — 2017. — No. 1 (36). — P. 1–12 (in Russian).

- Коровкин А. Г.* Проблемы согласования спроса на рабочую силу и ее предложения на российском рынке труда // Проблемы прогнозирования. — 2011. — № 2. — С. 103–123.
Korovkin A. G. Problemy soglasovaniya sprosa na rabochuyu silu i ee predlozheniya na rossijskom rynke truda [Problems of matching labor demand and supply in the Russian labor market] // Studies on Russian Economic Development. — 2011. — No. 2. — P. 103–123 (in Russian).
- Коровкин А. Г., Единак Е. А., Королев И. Б.* Прогнозирование численности и структуры населения на базе балансового подхода // Демографический потенциал стран ЕАЭС: VIII Уральский демографический форум. Т. II. — Екатеринбург, 2017. — С. 297–303.
Korovkin A. G., Edinak E. A., Korolev I. B. Prognozirovanie chislennosti i struktury naseleniya na baze balansovogo podhoda [Forecasting the size and structure of the population based on the balance approach] // Demograficheskij potentsial stran EAENS: VIII Ural'skij demograficheskij forum. T. II. [Demographic Potential of the EAEU Countries: VIII Ural Demographic Forum. Vol. II]. — Ekaterinburg, 2017. — P. 297–303 (in Russian).
- Кочегурова Е. А.* Теория и методы оптимизации. — Томск: Издательство Томского политехнического университета, 2012.
Kochegurova E. A. Teoriya i metody optimizatsii [Optimization theory and methods]. — Tomsk: Izdatel'stvo Tomskogo politekhnicheskogo universiteta, 2012 (in Russian).
- Лесин В. В., Лисовец Ю. П.* Основы методов оптимизации. — М.: МАИ, 1998.
Lesin V. V., Lisovets Yu. P. Osnovy metodov optimizatsii [Basics of optimization techniques]. — Moscow: MAI, 1998 (in Russian).
- Лобанов А. И.* Модели клеточных автоматов // Компьютерные исследования и моделирование. — 2010. — Т. 2, № 3. — С. 273–293.
Lobanov A. I. Modeli kletochnyh avtomatov [Models of cellular automata] // Computer Research and Modeling. — 2010. — Vol. 2, no. 3. — P. 273–293 (in Russian).
- Лукин Е. В.* Направления использования межотраслевого баланса в анализе и моделировании // Вопросы территориального развития. — 2017. — № 1 (36). — [Электронный ресурс]. — URL: <http://vtr.isert-ran.ru/article/2125> (дата обращения: 20.07.2021).
Lukin E. V. Napravlениya ispol'zovaniya mezhotraslevogo balansa v analize i modelirovanii [Directions of using the input-output balance in analysis and modeling] // Territorial development issues. — 2017. — № 1 (36). — [Electronic resource]. — Available at: <http://vtr.isert-ran.ru/article/2125> (accessed: 20.07.2021) (in Russian).
- Макаров В. Л., Бахтизин А. Р.* Социальное моделирование — новый компьютерный прорыв. Агент-ориентированные модели. — М.: Экономика, 2013.
Makarov V. L., Baktizin A. R. Social'noe modelirovanie — novyj komp'yuternyj proryv. Agent-orientirovannye modeli [Social modeling — a new computer breakthrough. Agent-oriented models]. — Moscow: Ekonomika, 2013 (in Russian).
- Макаров В. Л., Бахтизин А. Р., Сушко Е. Д.* Агент-ориентированная модель как инструмент регулирования экологии региона // Журнал Новой экономической ассоциации. — 2020. — № 1 (45). — С. 151–171.
Makarov V. L., Baktizin A. R., Sushko E. D. Agent-orientirovannaya model' kak instrument regulirovaniya ehkologii regiona [Agent-based model as a tool for regulating the ecology of the region] // Journal of the New Economic Association. — 2020. — № 1 (45). — P. 151–171 (in Russian).
- Макаров В. Л., Бахтизин А. Р., Сушко Е. Д., Агеева А. Ф.* Агент-ориентированный подход при моделировании трудовой миграции из Китая в Россию // Экономика региона. — 2017. — Т. 13, вып. 2. — С. 331–341. — DOI: 10.17059/2017-2-1
Makarov V. L., Baktizin A. R., Sushko E. D., Ageeva A. F. Agent-orientirovannyj podhod pri modelirovanii trudovoj migracii iz Kitaya v Rossiyu [Agent-oriented approach to modeling labor migration from China to Russia] // Economy of region. — 2017. — Vol. 13, no. 2. — P. 331–341. — DOI: 10.17059/2017-2-1 (in Russian).
- Макаров В. Л. и др.* Укрупненная агент-ориентированная имитационная модель миграционных потоков стран Европейского союза // Экономика и математические методы. — 2019. — Т. 55, № 1. — С. 3–15. — DOI: 10.31857/S042473880004044-7
Makarov V. L. et al. Ukrupnennaya agent-orientirovannaya imitacionnaya model' migracionnyh potokov stran Evropejskogo soyuza [Enlarged agent-oriented simulation model of migration flows of the European Union countries] // Economics and Mathematical Methods. — 2019. — Vol. 55, no. 1. — P. 3–15. — DOI: 10.31857/S042473880004044-7 (in Russian).
- Матюшкин И. В., Заплетина М. А.* Обзор по тематике клеточных автоматов на базе современных отечественных публикаций // Компьютерные исследования и моделирование. — 2019. — Т. 11, № 1. — С. 9–57. — DOI: 10.20537/2076-7633-2019-11-1-9-57
Matyushkin I. V., Zapletina M. A. Obzor po tematike kletochnyh avtomatov na baze sovremennyh otechestvennyh publikacij [Review on the subject of cellular automata based on modern domestic publications] // Computer Research and Modeling. — 2019. — Vol. 11, no. 1. — P. 9–57. — DOI: 10.20537/2076-7633-2019-11-1-9-57 (in Russian).
- Моисеев Н. Н.* Методы оптимизации. — М.: Наука, 1978.
Moiseev N. N. Metody optimizatsii [Optimization methods]. — Moscow: «Nauka», 1978 (in Russian).

- Москвина В. А.* Моделирование межрегиональной мобильности выпускников вузов в России // Прикладная эконометрика. — 2019. — № 56. — С. 99–122.
Moskvina V. A. Modelirovanie mezhr regional'noj mobil'nosti vypusknikov vuzov v Rossii [Modeling interregional mobility of university graduates in Russia] // Applied econometrics. — 2019. — No. 56. — P. 99–122 (in Russian).
- Некрасова Е. В.* Оптимизация внутренней миграции как механизм решения проблем моногородов Свердловской области // Экономика региона. — 2012. — № 2. — С. 315–320.
Nekrasova E. V. Optimizatsiya vnutrennej migratsii kak mekhanizm resheniya problem monogorodov Sverdlovskoj oblasti [Optimization of internal migration as a mechanism for solving the problems of single-industry towns in the Sverdlovsk region] // Economy of region. — 2012. — No. 2. — P. 315–320 (in Russian).
- Низамутдинов М. М., Атнабаева А. Р., Ахметзянова М. И.* Исследование миграционного поведения населения и оценка уровня привлекательности территорий на основе методов агент-ориентированного моделирования // Вестник евразийской науки. — 2020. — Т. 12, № 6. — [Электронный ресурс]. — URL: <https://esj.today/PDF/29ECVN620.pdf> (дата обращения: 23.08.2021). — DOI: 10.15862/29ECVN620
Nizamutdinov M. M., Atnabaeva A. R., Akhmetzyanova M. I. Issledovanie migratsionnogo povedeniya naseleniya i otsenka urovnya privlekatel'nosti territorij na osnove metodov agent-orientirovannogo modelirovaniya [Research of migration behavior of the population and assessment of the level of attractiveness of territories based on the methods of agent-based modeling] // The Eurasian Scientific Journal. — 2020. — Vol. 12, no. 6. — [Electronic resource]. — Available at: <https://esj.today/PDF/29ECVN620.pdf> (accessed: 23.08.2021). — DOI: 10.15862/29ECVN620 (in Russian).
- Огородников П. И., Макарова Н. А.* Моделирование миграционных потоков в регионе // Экономика региона. — 2013. — № 2 (34). — С. 168–176.
Ogorodnikov P. I., Makarova N. A. Modelirovanie migratsionnykh potokov v regione [Modeling migration flows in the region] // Economy of region. — 2013. — No. 2 (34). — P. 168–176 (in Russian).
- Олейник Е. Б., Шмидт Ю. Д., Карп Д. Б.* Отток населения из регионов Дальнего Востока России: тенденции и причины // Экономические науки. — 2019. — № 12 (181). — С. 300–305.
Olejnik E. B., Shmidt Yu. D., Karp D. B. Ottok naseleniya iz regionov Dal'nego Vostoka Rossii: tendentsii i prichiny [Outflow of population from the regions of the Russian Far East: trends and reasons] // Economic Sciences. — 2019. — No. 12 (181). — P. 300–305 (in Russian).
- Павловский Ю. Н., Белотелов Н. В., Бродский Ю. И.* Имитационное моделирование. — М.: Издательский центр «Академия», 2008.
Pavlovskij Yu. N., Belotelov N. V., Brodskij Yu. I. Imitatsionnoe modelirovanie [Simulation modeling]. — Moskva: Izdatel'skij tsentr «Akademija», 2008 (in Russian).
- Пантелеев А. В., Ракитянский В. М.* Разработка модифицированного самоорганизующегося миграционного алгоритма оптимизации (MSOMA) // Моделирование и анализ данных. — 2020. — Т. 10, № 2. — С. 62–73. — DOI: 10.17759/mda.2020100205
Panteleev A. V., Rakityanskij V. M. Razrabotka modifitsirovannogo samoorganizuyushhegosya migratsionnogo algoritma optimizatsii (MSOMA) [Development of a Modified Self-Organizing Migration Optimization Algorithm (MSOMA)] // Modelling and Data Analysis. — 2020. — Vol. 10, no. 2. — P. 62–73. — DOI: 10.17759/mda.2020100205 (in Russian).
- Путилов В. А., Горохов А. В.* Системная динамика регионального развития. — Мурманск: НИЦ «Пазори», 2002.
Putilov V. A., Gorokhov A. V. Sistemnaya dinamika regional'nogo razvitiya [System dynamics of regional development]. — Murmansk: NITS «Pazori», 2002 (in Russian).
- Путилов В. А., Горохов А. В., Быстров В. В.* Синтез имитационных моделей сложных систем на основе экспертных знаний // Информационные технологии и вычислительные системы. — 2008. — № 2. — С. 27–34.
Putilov V. A., Gorokhov A. V., Bystrov V. V. Sintez imitatsionnykh modelej slozhnykh sistem na osnove ehkspertnykh znaniy [Synthesis of simulation models of complex systems based on expert knowledge] // Journal of Information Technologies and Computing Systems. — 2008. — No. 2. — P. 27–34 (in Russian).
- Семенчин Е. А., Бабченко О. В.* Применение цепей Маркова для прогнозирования миграционных процессов // Современные проблемы науки и образования. — 2006. — № 2. — С. 57–58.
Semenchin E. A., Babchenko O. V. Primenenie cepej Markova dlya prognozirovaniya migratsionnykh processov [Application of Markov chains for predicting migration processes] // Modern Problems of Science and Education. Surgery. — 2006. — No. 2. — P. 57–58 (in Russian).
- Тоффоли Т., Марголюс Н.* Машины клеточных автоматов / пер. с англ. П. А. Власова и Н. В. Барбанова; под ред. Б. В. Баталова. — М.: Мир, 1991.
Toffoli T., Margolus N. Mashiny kletochnykh avtomatov [Cellular automata machines] / trans. from English by P. A. Vlasov and N. V. Barabanov; B. V. Batalov (ed.). — Moscow: Mir, 1991 (in Russian).
- Хавинсон М. Ю.* Моделирование динамики численности занятых, безработных и экономически неактивного населения в регионе с учетом социальных связей // Вестник Воронежского государственного университета. Сер. Экономика и управление. — 2016. — № 4. — С. 178–188.

- Khavinson M. Yu.* Modelirovanie dinamiki chislenosti zanyatykh, bezrobotnykh i ehkonomicheski neaktivnogo naseleniya v regione s uchetoм sotsial'nykh svyazey [Modeling the dynamics of the number of employed, unemployed and economically inactive population in the region, taking into account social ties] // Proceedings of Voronezh State University. Series: Economics and Management. — 2016. — No. 4. — P. 178–188 (in Russian).
- Хавинсон М. Ю., Кулаков М. П.* Концепция динамической гравитационной модели миграции населения // Региональные проблемы. — 2016. — Т. 19, № 4. — С. 12–19.
- Khavinson M. Yu., Kulakov M. P.* Kontsepsiya dinamicheskoy gravitatsionnoy modeli migratsii naseleniya [The concept of a dynamic gravity model of population migration] // Regional problems. — 2016. — Vol. 19, № 4. — P. 12–19 (in Russian).
- Шворина К. В., Фалейчик Л. М.* Основные тренды миграционной мобильности населения регионов Сибирского и Дальневосточного федеральных округов // Экономика региона. — 2018. — Т. 14, вып. 2. — С. 485–501. — DOI: 10.17059/2018-2-12
- Shvorina K. V., Falejchik L. M.* Osnovnye trendy migratsionnoj mobil'nosti naseleniya regionov Sibirskogo i Dal'nevostochnogo Federal'nykh okrugov [The main trends in the migration mobility of the population of the regions of the Siberian and Far Eastern Federal Districts] // Economy of region. — 2018. — Vol. 14, no. 2. — P. 485–501. — DOI: 10.17059/2018-2-12 (in Russian).
- Шмидт Ю. Д., Ивашина Н. В., Кухлевский А. Л., Лободин П. Н.* Прогнозирование межрегиональных миграционных потоков // Экономика региона. — 2017. — Т. 13, вып. 1. — С. 126–136. — DOI: 10.17059/2017-1-12
- Shmidt Yu. D., Ivashina N. V., Kuhlevskij A. L., Lobodin P. N.* Prognozirovanie mezhregional'nykh migratsionnykh potokov [Forecasting interregional migration flows] // Economy of region. — 2017. — Vol. 13, no. 1. — P. 126–136. — DOI: 10.17059/2017-1-12 (in Russian).
- Шмидт Ю. Д., Ивашина Н. В., Озерова Г. П.* Моделирование межрегиональных миграционных потоков клеточными автоматами // Компьютерные исследования и моделирование. — 2020. — Т. 12, № 6. — С. 1476–1483.
- Shmidt Yu. D., Ivashina N. V., Ozerova G. P.* Modelirovanie mezhregional'nykh migratsionnykh potokov kletochnymi avtomatami [Modeling interregional migration flows by cellular automata] // Computer Research and Modeling. — 2020. — Vol. 12, no. 6. — P. 1476–1483 (in Russian).
- Чернавский Д. С.* Синергетика и информация: динамическая теория информации. — М.: URSS, 2016.
- Chernavskij D. S.* Sinergetika i informatsiya: dinamicheskaya teoriya informatsii [Synergetics and Information: Dynamic Information Theory]. — Moscow: URSS, 2016 (in Russian).
- Чжун К.-Л.* Однородные цепи Маркова. — М.: Мир, 1964.
- Chzhun K.-L.* Odnorodnye tsepi Markova [Homogeneous Markov Chains]. — Moscow: Mir, 1964 (in Russian).
- Andrew K., Wincoop E.* National Money as a Barrier to International Trade: The Real Case for Currency Union // American Economic Review. — 2001. — Vol. 91, no. 2. — P. 386–390. — DOI: 10.1257/aer.91.2.386
- Andrienko Y., Guriev S.* Determinants of interregional mobility in Russia. Evidence from panel data // Economics of Transition. — 2004. — Vol. 12, no. 1. — P. 1–27.
- Aral M. M.* Knowledge based analysis of continental population and migration dynamics // Technological Forecasting and Social Change. — 2020. — Vol. 151. — P. 30. — DOI: 10.1016/j.techfore.2019.119848
- Bakhtizin A. R.* Agent-based models of economy. — Moscow: Ekonomika, 2008.
- Bijak J.* Forecasting international migration: selected theories, models, and methods // CEFMR Working Paper. — 2006. — No. 4.
- Bijak J.* Forecasting migration: selected models and methods // Forecasting International Migration in Europe: A Bayesian View. The Springer Series on Demographic Methods and Population Analysis. — 2011. — Vol. 24. — DOI: 10.1007/978-90-481-8897-0_4
- Bijak J., Disney G., Findlay A. M., Forster J. J., Smith P. W. F., Wiśniowski A.* Assessing time series models for forecasting international migration: Lessons from the United Kingdom // Journal of Forecasting. — 2019. — Vol. 38, no. 5. — P. 470–487.
- Billari F. C., Prskawetz A.* Agent-based computational demography: using simulation to improve our understanding of demographic behaviour. — Heidelberg: Springer-Verlag, 2003.

- Bramoullé Y.* Social networks and labor market transitions // IZA Discussion Paper. — 2004. — № 1215. — P. 38–47.
- Brown L. A.* On the use of Markov chains in movement research // Economic Geography. — 1970. — No. 46. — P. 393–403.
- Chen A., Coulson N.* Determinants of urban migration: evidence from Chinese cities // Urban Studies Journal Limited. — 2002. — Vol. 39, no. 12. — P. 2189–2197.
- Disney G., Wiśniowski A., Forster J. J., Smith P. W. F., Bijak J.* Evaluation of existing migration forecasting methods and models. — Report for the Migration Advisory Centre for Population Change. — University of Southampton, 2015.
- Espindola A. L., Silveira J. J., Penna T. J., Harris A.* Based model to rural-urban migration // Brazilian Journal of Physics. — 2006. — Vol. 36, no. 3A. — P. 603–609.
- Flowerden R., Aitkin M.* A method of fitting the gravity model based on the Poisson distribution // Journal of Regional Science. — 1982. — Vol. 22, no. 2. — P. 191–202. — DOI: 10.1111/j.1467-9787.1982.tb00744.x
- Gerber T.* Individual and contextual determinants of internal migration in Russia, 1985–2001. — USA, University of Wisconsin, 2005.
- Gerber T.* Regional economic performance and net migration rates in Russia, 1993–2002 // International Migration Review. — 2006. — Vol. 4, no. 3. — P. 661–697.
- Golgher A. B., Rosa C. H., de Araujo Junior A. F.* Determinants of migration in Brazil: regional polarization and poverty traps // Papeles de Poblacion. — 2008. — Vol. 56. — P. 135–171.
- Golz P., Procaccia A. D.* Migration as submodular optimization // Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence. — 2019. — P. 549–556. — DOI: 10.1609/aaai.v33i01.3301549
- Gourieroux C.* Econometrics of qualitative dependable variables. — Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
- Greenwood M.* Internal migration in developed countries // Handbook of population and family economics. — 1997. — Vol. 1. — P. 647–720. — DOI: 10.1016/S1574-003X(97)80004-9
- Groen D.* Simulating refugee movements: Where would you go? // Procedia Computer Science. — 2016. — No. 80. — P. 2251–2255.
- Guriev S., Vakulenko E.* Breaking out of poverty traps: internal migration and interregional convergence in Russia // Journal of Comparative Economics. — 2015. — No. 43. — P. 633–649.
- Haynes K. E., Fotheringham K. E.* Gravity and spatial-interaction model // Scientific geography. Series 2. — 1984. — Vol. 5, no. 2. — P. 9–13.
- Heiland F.* The Collapse of the Berlin wall: simulating state-level East to West German migration patterns // Agent-Based Computational Demography. — 2003. — P. 73–96. — DOI: 10.1007/978-3-7908-2715-6_5
- Hennig Ch., Meila M., Murtagh F., Rocci R.* Handbook of cluster analysis. — New York, USA: Chapman and Hall/CRC, 2015.
- Howe N., Jackson R.* Projecting immigration: a survey of the current state of practice and theory. A report of the CSIS global aging initiative. — Washington D.C., USA: Center for Strategic and International Studies, 2005.
- Janmaat J., Lapp S., Wannop T., Bharati L., Sugden F.* Demonstrating complexity with a role-playing simulation: investing in water in the Indrawati Subbasin, Nepal. — Sri Lanka: International Water Management Institute, 2015.
- Joseph G.* A Markov analysis of age/sex differences in inter — regional migration in Britain // Regional Studies. — 1975. — Vol. 9, no. 2. — P. 69–78.
- Keilman N.* European demographic forecasts have not become more accurate over the past 25 years // Population and Development Review. — 2008. — Vol. 34, no. 1. — P. 137–153.

- Keilman N.* UK national population projections in perspective: How successful compared to those in other European countries? // *Population Trends*. — 2007. — No. 129. — P. 20–30.
- Laing D., Park C., Wang P.* A modified Harris–Todaro model of rural-urban migration for China. — [Electronic resource]. — Available at: http://pages.wustl.edu/files/pages/imce/pingwang/harris-todaro-china_2005.pdf (accessed: 06.08.2021).
- Lee E. S.* A Theory of Migration // *Demography*. — 1966. — Vol. 3, no. 1. — P. 47–57.
- Lewer J., Van den Berg H.* A gravity model of immigration // *Economics Letters*. — 2008. — Vol. 99, no. 1. — P. 164–167.
- Lindsay I., Brenton B.* Two stochastic approaches to migration: comparison of Monte-Carlo simulation and Markov chain model // *Geografiska Annaler. Series B, Human Geography*. — 1972. — Vol. 54, no. 1. — P. 56–67.
- Lowry I. S.* Migration and metropolitan growth: two analytical models. — San Francisco, USA: Chandler Publishing Company, 1966.
- Manakov A., Suvorkov P., Stanaitis S.* Simulation of Migration and Forecast of Population in the Baltic Countries by the Year 2096 // *Geography and Education: Science Almanac*. — 2017. — No. 5. — P. 19–39. — DOI: 10.15823/ge.2017.2
- Meyn S. P., Tweedie R. L.* Markov chains and stochastic stability. — London: Springer-Verlag, 1993.
- Mkrtchyan N. V., Vakulenko E.* Interregional migration in Russia at different stages of the life cycle // *Geo Journal*. — 2019. — Vol. 84, no. 6. — P. 1549–1565.
- Naivinit W., Le Page C., Trébuil G., Gajasesi N.* Participatory agent-based modeling and simulation of rice production and labor migrations in Northeast Thailand // *Environmental Modelling & Software*. — 2010. — Vol. 25, no. 11. — P. 1345–1358. — DOI: 10.1016/j.envsoft.2010.01.012
- Nguen-Hoang P., McPeak J.* Leaving or staying: inter-provincial migration in Vietnam // *Asian and Pacific Migration Journal*. — 2010. — Vol. 19, no. 4. — P. 473–500.
- Ortega F., Peri G.* The Effect of Income and Immigration Policies on International Migration // *Migration Studies*. — 2013. — Vol. 1. — P. 1–28. — DOI: 10.1093/migration/mns004
- Pablo-Martí F., Santos J. S., Kaszowska J.* An agent-based model of population dynamics for the European regions // *ERSA conference papers*. — European Regional Science Association, 2013. — P. 708.
- Pan J., Nagurney A.* Using Markov Chains to Model Human Migration in a Network Equilibrium Framework // *Mathematical and Computer Modelling*. — 1994. — Vol. 19, no. 11. — P. 31–39.
- Redding S., Venables A. J.* Economic geography and international inequality // *Journal of International Economics*. — 2004. — Vol. 62. — P. 53–82. — DOI: 10.1016/j.jinteco.2003.07.001
- Rogers A.* A Markovian policy model of interregional migration // *Papers of the Regional Science Association*. — 1966. — No. 17. — P. 205–224.
- Sardavar S., Vakulenko E.* Estimating and interpreting internal migration flows in Russia by accounting for network effects // *Socio-Economic Planning Sciences*. — 2020. — No. 69. — P. 1–14.
- Sardavar S., Vakulenko E.* Interregional migration within Russia and east-west divide: evidence from spatial panel regressions // *Review of Urban and Regional Development Studies*. — 2016. — № 28 (2). — P. 123–141.
- Sarra A. L., Signore M. A.* Dynamic Origin – constrained Spatial Interaction Model Applied to Poland’s Inter-provincial Migration // *Spatial Economic Analysis*. — 2010. — Vol. 5, no. 1. — P. 29–41.
- Shaw C.* Fifty years of United Kingdom national population projections: How accurate have they been? // *Population Trends*. — 2007. — No. 128. — P. 8–23.
- Silva S., Tenreiro S.* The log of gravity // *The Review of Economics and Statistics*. — 2006. — Vol. 88, no. 4. — P. 641–658.
- Simon C., Skritek B., Veliov V. M.* Optimal immigration age-patterns in populations of Fixed size // *J. Math. Anal. Appl.* — 2013. — Vol. 405. — P. 71–89. — DOI: 10.1016/j.jmaa.2013.03.061

- Sohst R., Tjaden J.* Forecasting migration: A policy guide to common approaches and models // Special Issue on Forecasting Global Migration Published jointly by the International Organization for Migration (IOM) and Eurasyllum Ltd. — 2020. — Vol. 10, no. 4.
- Sohst R., Tjaden J., de Valk H., Melde S.* The Future of Migration to Europe: A Systematic Review of the Literature on Migration Scenarios and Forecasts. — International Organization for Migration, Geneva, and the Netherlands Interdisciplinary Demographic Institute, the Hague, 2020.
- Sokolowski J. A., Banks C. M., Hayes R. L.* Modeling population displacement in the Syrian city of Aleppo. — Proceedings of the 2014 Winter Simulation Conference. — IEEE, 2014. — P. 252–263.
- Stillwell J.* Inter-regional migration modelling: A Review and Assessment // ERSA conference papers. — European Regional Science Association, 2005.
- Vakulenko E., Mkrtychyan N. V.* Factors of Interregional Migration in Russia Disaggregated by Age // Applied Spatial Analysis and Policy. — 2020. — No. 13. — P. 609–630.
- Wilson T., Rees P.* Recent developments in population projection methodology: a review // Population, Space and Place. — 2005. — Vol. 11, no. 5. — P. 337–360.
- Wooldridge J. M.* Econometric analysis of cross section and panel data. — London, UK: The MIT Press Cambridge, 2010.
- Xie Y., Batty M., Zhao K.* Simulating emergent urban form using agent-based modeling: desakota in the Suzhou–Wuxian region in China // Annals of the Association of American Geographers. — 2007. — Vol. 97, no. 3. — P. 477–495.
- Zhang H., Zeng Y., Bian L., Yu X.* Modelling urban expansion using a multi agent-based model in the City of Changsha // Journal of Geographical Sciences. — 2010. — Vol. 20, no. 4. — P. 540–556.
- Zipf G. K.* Human behavior and the principle of least effort. — Massachusetts, USA: Addison-Wesley Press, 1949.