

УДК: 519.8

О допустимой интенсивности лазерного излучения в оптической системе и о технологии измерения коэффициента поглощения его мощности

А. С. Демидов^{1,a}, И. В. Демидова^{2,b}

¹Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
Россия, 119234, г. Москва, ул. Колмогорова, 1

²Научно-производственная корпорация «Системы прецизионного приборостроения»,
Россия, 111024, г. Москва, ул. Авиамоторная, 53

E-mail: ^a demidov.alexandre@gmail.com, ^b demidova304@gmail.com

Получено 26.03.2021, после доработки — 06.07.2021.

Принято к публикации 12.07.2021.

Лазерное повреждение прозрачных твердых тел является основным фактором, ограничивающим выходную мощность лазерных систем. Для лазерных дальномеров наиболее вероятной причиной разрушения элементов оптической системы (линз, зеркал), реально, как правило, несколько запыленных, является не оптический пробой в результате лавинной ионизации, а такое тепловое воздействие на пылинку, осевшую на элементе оптической системы (ЭОС), которое приводит к ее возгоранию. Именно возгорание пылинки инициирует процесс повреждения ЭОС.

Рассматриваемая модель этого процесса учитывает нелинейный закон теплового излучения Стефана–Больцмана и бесконечное тепловое воздействие периодического излучения на ЭОС и пылинку. Эта модель описывается нелинейной системой дифференциальных уравнений для двух функций: температуры ЭОС и температуры пылинки. Доказывается, что в силу накапливающего воздействия периодического теплового воздействия процесс достижения температуры возгорания пылинки происходит практически при любых априори возможных изменениях в этом процессе теплофизических параметров ЭОС и пылинки, а также коэффициентов теплообмена между ними и окружающим их воздухом. Усреднение этих параметров по переменным, относящимся как к объему, так и к поверхностям пылинки и ЭОС, корректно при указанных в работе естественных ограничениях. А благодаря рассмотрению задачи (включая численные результаты) в безразмерных единицах измерения, охвачен весь реально значимый спектр теплофизических параметров.

Проведенное тщательное математическое исследование соответствующей нелинейной системы дифференциальных уравнений впервые позволило для общего случая теплофизических параметров и характеристик теплового воздействия периодического лазерного излучения найти формулу для значения той допустимой интенсивности излучения, которая не приводит к разрушению ЭОС в результате возгорания пылинки, осевшей на ЭОС. Найденное в работе для общего случая теоретическое значение допустимой интенсивности в частном случае данных лазерного комплекса обсерватории в г. Грассе (на юге Франции) практически соответствует полученному там экспериментальному значению.

Наряду с решением основной задачи получена в качестве побочного результата формула для коэффициента поглощения мощности лазерного излучения элементом оптической системы, выраженная в терминах четырех безразмерных параметров: относительной интенсивности лазерного излучения, относительной освещенности ЭОС, относительного коэффициента теплоотдачи от ЭОС к окружающему его воздуху и относительной установившейся температуры ЭОС.

Ключевые слова: элемент оптической системы, тепловое разрушение, интенсивность лазерного излучения, коэффициент поглощения мощности лазерного излучения

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 20-01-00469).

UDC: 519.8

On the permissible intensity of laser radiation in the optical system and on the technology for measuring the absorption coefficient of its power

A. S. Demidov^{1,a}, I. V. Demidova^{2,b}

¹Lomonosov Moscow State University,
1 Kolmogorov st., Moscow, 119234, Russia

²Scientific and Production Corporation «Precision Instrumentation Systems»,
53 Aviamotornaya st., Moscow, 111024, Russia

E-mail: ^a demidov.alexandre@gmail.com, ^b demidova304@gmail.com

Received 26.03.2021, after completion — 06.07.2021.

Accepted for publication 12.07.2021.

Laser damage to transparent solids is a major limiting factor output power of laser systems.

For laser rangefinders, the most likely destruction cause of elements of the optical system (lenses, mirrors) actually, as a rule, somewhat dusty, is not an optical breakdown as a result of avalanche, but such a thermal effect on the dust speck deposited on an element of the optical system (EOS), which leads to its ignition. It is the ignition of a speck of dust that initiates the process of EOS damage.

The corresponding model of this process leading to the ignition of a speck of dust takes into account the nonlinear Stefan–Boltzmann law of thermal radiation and the infinite thermal effect of periodic radiation on the EOS and the speck of dust. This model is described by a nonlinear system of differential equations for two functions: the EOS temperature and the dust particle temperature. It is proved that due to the accumulating effect of periodic thermal action, the process of reaching the dust speck ignition temperature occurs almost at any a priori possible changes in this process of the thermophysical parameters of the EOS and the dust speck, as well as the heat exchange coefficients between them and the surrounding air. Averaging these parameters over the variables related to both the volume and the surfaces of the dust speck and the EOS is correct under the natural constraints specified in the paper. The entire really significant spectrum of thermophysical parameters is covered thanks to the use of dimensionless units in the problem (including numerical results).

A thorough mathematical study of the corresponding nonlinear system of differential equations made it possible for the first time for the general case of thermophysical parameters and characteristics of the thermal effect of periodic laser radiation to find a formula for the value of the permissible radiation intensity that does not lead to the destruction of the EOS as a result of the ignition of a speck of dust deposited on the EOS. The theoretical value of the permissible intensity found in the general case in the special case of the data from the Grasse laser ranging station (south of France) almost matches that experimentally observed in the observatory.

In parallel with the solution of the main problem, we derive a formula for the power absorption coefficient of laser radiation by an EOS expressed in terms of four dimensionless parameters: the relative intensity of laser radiation, the relative illumination of the EOS, the relative heat transfer coefficient from the EOS to the surrounding air, and the relative steady-state temperature of the EOS.

Keywords: optical system element, thermal breakdown, laser intensity radiation, power absorption coefficient of laser radiation

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2021, vol. 13, no. 5, pp. 1025–1044 (Russian).

This work was supported RFBR (grant 20-01-00469).

Введение

Навигационные системы, такие как GPS, ГЛОНАСС, Galileo, используют весьма точное значение расстояния между некоторой заданной точкой на Земле (ею может быть центр линзы телескопа лазерного дальномера) и отражателем на Луне или искусственном спутнике. Это расстояние вычисляется с помощью мощных лазерных дальномеров. Настоящая работа инициирована потребностью предохранить от разрушения лазерным излучением этих дальномеров их элементы оптической системы (ЭОС), то есть линзы, зеркала и пр. Однако в статье этот вопрос рассмотрен с более общих позиций, не связанных обязательно с лазерным излучением, его спецификой (когерентностью и пр.) и/или с конкретными оптическими системами. Это позволило не только получить новые результаты для какого-то конкретного лазера и конкретного ЭОС, но и выявить в ряде случаев возможность новой, существенно более простой технологии измерения коэффициента поглощения мощности лазерного излучения элементом оптической системы. Упомянутая общность рассмотрения ограничена требованием *накапливающего* воздействия большой, практически бесконечной периодической серии импульсного теплового излучения на элементы оптических систем. При этом длительность каждого импульса достаточно велика, например, как у лунных лазерных дальномеров. Ввиду этого для лазерного дальномера наиболее вероятной причиной разрушения ЭОС (реально, как правило, несколько запыленной) является не оптический пробой в результате лавинной ионизации, а такое тепловое воздействие на пылинку, осевшую на элементе оптической системы, которое приводит к ее возгоранию. Именно возгорание пылинки инициирует процесс повреждения ЭОС.

Отметим, что в 2018 году под эгидой Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) в университете штата Колорадо в Боулдере (где когда-то преподавал великий Георгий Гамов) состоялась юбилейная конференция [Carr et al., 2018], посвященная 50-летию первого симпозиума по лазерному разрушению в оптических материалах. Этой проблематике и ее различным аспектам посвящены не только конференции SPIE (ближайшая состоится в октябре 2021 года), но и постоянный, всесторонний анализ в многочисленных исследованиях, диссертациях, обзорах и текущих публикациях. Ниже мы отметим лишь некоторые из них, так или иначе относящиеся к рассматриваемым в данной статье вопросам. Существенный общий элемент заключается в том, что лазерное повреждение прозрачных твердых тел является основным фактором, ограничивающим выходную мощность лазерных систем [Soileau, 2015]. При этом, как отмечается в [Рарепнов, 2015], локализованные поглощающие дефекты в оптических компонентах являются основным источником лазерно-индуцированных повреждений. Механизмы сосредоточения энергии излучения в дефектах нано-/микромасштаба и их связь с последующим ростом повреждений были исследованы в недавней экспериментальной работе [Gallais et al., 2019], в которой была использована, в частности, зондовая микроскопия. Согласно [Soileau, 2015] даже поглощатели размером в несколько нанометров могут инициировать процесс повреждения через их взаимодействие с окружающей матрицей, что в конечном итоге приводит к тепловому взрыву и повреждению матрицы. В частности, возгорание пыли на поверхности оптического элемента может привести к повреждению при сравнительно низких мощностях излучения. Это отмечает американская частная компания Thorlabs по производству оптического оборудования [Thorlabs, 2021].

В настоящей статье рассматривается вопрос о предохранении элементов оптической системы от прожигания в результате возгорания какой-то пылинки, осевшей на элементе оптической системы (реально, как правило, несколько запыленный). А именно, дается весьма точное значение той максимальной интенсивности q лазерного излучения, которая приводит к возгоранию пылинки. При этом предполагается, что интенсивность излучения является (как и у лунных лазерных дальномеров) периодической функцией времени t с периодом τ и задается формулой $q\delta_{S,\tau}(t)$, где параметр $S > 1$ (так называемая скважность, обратная величина которой $1/S$

соответствует длительности импульса на периоде) обычно существенно больше 1, где

$$\delta_{S,\tau}(\mathbf{t} + k\tau) = \delta_{S,\tau}(\mathbf{t}) \text{ для целых } k \text{ и } \delta_{S,\tau}(\mathbf{t}) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq \mathbf{t} \leq \tau/S, \\ 0 & \text{при } \tau/S < \mathbf{t} < \tau, \end{cases} \quad (1)$$

а q — амплитуда интенсивности лазерного излучения типа flat top¹.

Конечно, при очень больших значениях S тепловой нагрев происходит лишь в чрезвычайно малые промежутки времени, и потому его влияние на возгорание пылинки незначительно. Однако если длительность импульса τ/S ограничена снизу величиной порядка 10^{-13} с, то согласно [Wood, 2003, с. 62] лазерное воздействие на ЭОС преимущественно связано с тепловым нагревом, а не с оптическим пробоем в результате мультифотонной и лавинной ионизацией в ЭОС. Такое тепловое воздействие на ЭОС было рассмотрено в [Wood, 2015] для пяти характерных типов импульсов, включая периодическую серию. Правда, там был дан лишь очень прикидочный, качественного характера анализ, использующий функцию Грина задачи Коши для уравнения теплопроводности.

В данной работе мы рассматриваем вопрос о повреждении ЭОС в результате возгорания пылинки, осевшей на ЭОС, что может возникнуть, конечно, при интенсивности излучения существенно меньшей, которая необходима для непосредственного прожига ЭОС. Поэтому при указанном в [Wood, 2003, с. 62] условии²

$$\tau/S \gtrsim 10^{-13} \text{ с}, \quad (2)$$

интенсивность излучения, при которой может произойти возгорание пылинки, заведомо меньше той, которая может привести к оптическому пробоем. Иными словами, условие (2) означает, что повреждение ЭОС может произойти лишь в результате термического воздействия на пылинку и ее возгорания. При условии (2) нагрев элемента оптической системы и осевшей на него пылинки происходит за счет поглощения ими энергии лазерного излучения, остывание — в результате излучения по закону Планка и теплообмена ЭОС с окружающим воздухом, а также пылинки с поверхностью ЭОС. Конечно, как было особо отмечено в известном обзоре [Маненков, Прохоров, 1986, с. 189], при анализе этого процесса необходимо учитывать температурную зависимость теплофизических параметров. В данном случае это достигается в рамках указанных в § 1 двух весьма общих и естественных предположений о зависимости этих параметров от температуры. Эти предположения обеспечивают стабилизацию температуры ЭОС и температуры пылинки при воздействии бесконечной периодической серии импульсного теплового излучения. Поэтому в конечном итоге нужно знать значения этих теплофизических параметров лишь при температуре возгорания пылинки (которая заведомо известна для каждого конкретного типа органической или неорганической пылинки).

Тщательное математическое исследование соответствующей нелинейной системы дифференциальных уравнений для температуры ЭОС и температуры пылинки впервые позволило для

¹ Влияние временной формы импульса в тех или иных случаях изучалось в ряде публикаций. Например, авторы работы [Carr et al., 2007] предсказывают по данным простой однопараметрической модели и вспомогательного эксперимента, что импульс с равномерным распределением во времени вызовет повреждение примерно при 80%-ной плотности энергии гауссова импульса той же длительности. Однако это утверждение не в полной мере совпадает с мнением компании [Thorlabs, 2021], согласно которому гауссов пучок имеет максимальную плотность мощности, которая обычно в два раза больше, чем у пучка с равномерным распределением интенсивности. Впрочем, в рассматриваемом нами случае очень длительной периодической серии импульсов основное значение имеет интегральный вклад, а тип импульса flat top выбран лишь в качестве примера, определяющего общую ситуацию.

² Условие (2) выполняется, например, для лунных лазерных дальнометров, где $\tau/S \gtrsim 10^{-10}$ с.

общего случая теплофизических параметров и характеристик теплового воздействия периодического лазерного излучения найти формулу для значения той допустимой интенсивности излучения, которая не приводит к возгоранию ЭОС в результате возгорания пылинки, осевшей на ЭОС.

Наряду с решением основной задачи нахождения максимально допустимого лазерного излучения \widehat{q} , не приводящего к возгоранию пылинки, осевшей на ЭОС, в статье получена формула для коэффициента поглощения мощности лазерного излучения элементом оптической системы, в которую входят четыре параметра: интенсивность излучения, освещенность ЭОС, коэффициент теплоотдачи от ЭОС к окружающему его воздуху и установившаяся температура ЭОС. Первые три параметра можно считать известными в каждом конкретном случае. Что касается установившейся температуры ЭОС, то в недавней работе [Maeji et al., 2017] представлены две технологии бесконтактного измерения температуры.

Отметим, что полученная в статье формула для коэффициента поглощения не содержит длину волны когерентного лазерного излучения. Это существенное отличие от имеющихся методов поиска этого коэффициента, которые относятся к конкретным лазерам с заданной длиной волны излучения и опираются на сложные экспериментальные исследования с конкретными объектами лазерного воздействия на них. В частности, это относится к работе [Maeji et al., 2017] о коэффициенте поглощения энергии поверхностью вольфрама для лазера Nd: YAG 1064 нм, к работе [Zaitsev et al., 2018], где предложены методы аналитического и численного расчета коэффициента поглощения по результатам упрощенной экспериментальной установки, а также к интересной работе [Балмашнов и др., 2017], в которой исследовалась лучевая стойкость двух образцов зеркал с металлическим отражающим слоем под воздействием пикосекундного излучения с длинами волн 1064 и 532 нм в связи с разработкой лазера (с высокой выходной энергией около 0,5 Дж на длине волны 1064 нм и 0,25 Дж на длине волны 532 нм) для измерения точного расстояния до естественных и искусственных спутников Земли.

Конечно, когда дело касается конкретного лазера, то, естественно, в исследовании какого-либо вопроса возникает важный параметр, характеризующий лазер, а именно: длина волны когерентного излучения. Что же касается рассмотренного в статье вопроса о предохранении ЭОС от возгорания осевшей на него пылинки под действием какого-то периодического теплового излучения, то не возникает необходимость знания длины волны когерентного излучения. Указанное отличие — суть предлагаемой в данной статье технологии, которая учитывает отсутствие прямой (следующей из физики) зависимости между интенсивностью и длиной волны, хотя обе эти характеристики для каждого конкретного лазера известны.

1. Математическая модель и основные результаты

Пусть P_l — площадь поперечного сечения лазерного пучка лучей, P_d — площадь поверхности пылинки (одна половина ее освещена лазером, другая обращена к ЭОС), V_d — объем пылинки. Далее, ρ_d — плотность пылинки, c_d — ее коэффициент теплоемкости, $\alpha_{d\mu}$ и $\alpha_{\mu 0}$ — коэффициенты теплоотдачи от пылинки к ЭОС и от ЭОС к окружающему ее воздуху соответственно, c_μ — коэффициент теплоемкости материала ЭОС, ρ_μ — его плотность, P_μ — площадь рабочей поверхности ЭОС, V_μ — объем поглощающего слоя ЭОС, $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$ — постоянная Стефана–Больцмана, $T_0 = 300 \text{ К}$ — температура окружающей среды, которую считаем неизменной. Через ε и a обозначены коэффициенты поглощения мощности лазерного излучения пылинкой и элементом оптической системы соответственно. Эти положительные коэффициенты, не превосходящие 1, корректируют величину теплового излучения Стефана–Больцмана. Разница в обозначении вызвана тем, что в случае микроскопической пылинки этот коэффициент приближенно связан лишь с ее поверхностью и может считаться известной величиной, равной так

называемой ее серости¹ (или, как говорят, степенью черноты), а параметр a априори неизвестен, ибо зависит от распределения температуры в сравнительно большом объеме массивного ЭОС при облучении его лазером.

Тогда в момент времени \mathbf{t} усредненные по пространственным переменным² температура $\mathbf{T}_d(\mathbf{t})$ пылинки и температура $\mathbf{T}_\mu(\mathbf{t})$ ЭОС удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \mathbf{c}_d \mathbf{V}_d \rho_d \frac{d\mathbf{T}_d}{dt} = \varepsilon \mathbf{q} \delta_{S,\tau}(\mathbf{t}) \mathbf{P}_d / 2 - \varepsilon \sigma (\mathbf{T}_d^4 - \mathbf{T}_\mu^4) \mathbf{P}_d - \alpha_{d\mu} (\mathbf{T}_d - \mathbf{T}_\mu) \mathbf{P}_d / 2, \\ \mathbf{c}_\mu \mathbf{V}_\mu \rho_\mu \frac{d\mathbf{T}_\mu}{dt} = a \mathbf{q} \delta_{S,\tau}(\mathbf{t}) \mathbf{P}_l - a \sigma (\mathbf{T}_\mu^4 - \mathbf{T}_0^4) \mathbf{P}_\mu - \alpha_{\mu 0} (\mathbf{T}_\mu - \mathbf{T}_0) \mathbf{P}_\mu. \end{cases} \quad (3)$$

Левая часть этих уравнений отражает динамику изменения тепловой энергии пылинки и ЭОС соответственно. Правая же часть есть алгебраическая сумма приходящей энергии излучения, подчиненной условию (1), а также уходящей энергии, которая имеет две части. Одна соответствует закону Стефана – Больцмана, а вторая выражает теплообмен с соприкасающейся средой. Для ЭОС — это окружающий воздух, а для пылинки — ЭОС, на котором лежит пылинка. Отметим, что другая сторона пылинки обращена к падающему тепловому потоку.

Задача заключается в том, чтобы при выполнении условия (2) определить те значения $\mathbf{q} < \widehat{\mathbf{q}}$, при которых не происходит возгорание пылинки при тех или иных варьируемых параметрах. Другими словами, в условиях, оговоренных в (2), требуется ответить на вопрос: какова та максимальная величина \mathbf{q} , при которой $\sup_{\mathbf{t}} \mathbf{T}_d(\mathbf{t}) \leq \mathbf{Y}$, где \mathbf{Y} — температура возгорания пылинки?

При этом предполагается, что теплофизические параметры, входящие в систему уравнений (3), в процессе изменения \mathbf{t} , будучи, вообще говоря, сложными функциями, то есть композициями некоторых функций аргумента \mathbf{t} , включая их зависимость от температур \mathbf{T}_d и \mathbf{T}_μ , таковы, что справедливы следующие два предположения.

Предположение 1. Отношения $\frac{\alpha_{d\mu}}{\mathbf{c}_d}$ и $\frac{\alpha_{\mu 0}}{\mathbf{c}_\mu}$, как функции аргумента \mathbf{t} , ограничены при $\mathbf{t} \rightarrow \infty$ и имеют конечное число интервалов монотонности.

Предположение 2.

$$\beta \stackrel{def}{=} \frac{\alpha_{\mu 0} \mathbf{c}_d \mathbf{V}_d \mathbf{P}_\mu \rho_d}{\alpha_{d\mu} \mathbf{c}_\mu \mathbf{V}_\mu \mathbf{P}_d / 2 \rho_\mu} \leq \beta_0 < 1, \quad \text{где (для определенности)} \beta_0 = \frac{1}{2}. \quad (4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Предположение 2 оправдано в силу чрезвычайно малого отношения массы пылинки (как правило, весьма не плотной) к массе ЭОС и малости отношения $\frac{h_d}{h_\mu}$ их толщин $\mathbf{h}_d = \frac{\mathbf{V}_d}{\mathbf{P}_d}$ и $\mathbf{h}_\mu = \frac{\mathbf{V}_\mu}{\mathbf{P}_\mu}$. Что же касается предположения 1, то оно позволяет (в силу теоремы о непрерывной зависимости решения системы дифференциальных уравнений от входящих в нее коэффициентов) с достаточной точностью считать, что указанные отношения кусочно-постоянны и потому постоянны при \mathbf{t} , превосходящем некоторое значение \mathbf{t}_N . В § 5 доказывается, что при $\mathbf{t}_N = 0$ происходит стабилизация температур \mathbf{T}_d и \mathbf{T}_μ , когда $\mathbf{t} \rightarrow \infty$ (если выполнены предположения 1 и 2). Понятно, что стабилизация не зависит от конкретного значения $\mathbf{t}_N < \infty$, ибо процесс может рассматриваться начиная с любого момента. Иными словами, предположения 1 и 2 обеспечивают стабилизацию решений системы (3).

¹ В приведенных ниже расчетах в качестве ε взято значение 0,76, соответствующее серости песчаной песчинки.

² В § 2 показано, что усреднение может считаться корректным при $\mathbf{P}_\mu / \mathbf{P}_l \lesssim 2,25$.

1а. Основной математический результат

В § 5 доказано, что при выполнении предположений 1 и 2 справедливы следующие четыре утверждения:

- 1) $\sup_{\mathbf{t}} \mathbf{T}_d(\mathbf{t})$ достигается при $\mathbf{t} = \infty$, и $d\mathbf{T}_d/d\mathbf{t} = 0$ при $\mathbf{t} = \infty$;
- 2) температура \mathbf{T}_μ также стабилизируется при $\mathbf{t} \rightarrow \infty$, и

$$\mathbf{q} = \frac{S \mathbf{P}_\mu}{a \mathbf{P}_l} (a\sigma(\mathbf{X}^4 - \mathbf{T}_0^4) + \alpha_{\mu 0}(\mathbf{X} - \mathbf{T}_0)), \quad (5)$$

где $\mathbf{X} \stackrel{def}{=} \mathbf{T}_\mu(\infty)$ есть установившаяся температура ЭОС;

- 3) при заданной температуре \mathbf{Y} возгорания пылинки параметр \mathbf{X} определяется из уравнения

$$[\mathbf{Y}^4 - \mathbf{X}^4] + \frac{\alpha_{d\mu}}{2\varepsilon\sigma}[\mathbf{Y} - \mathbf{X}] = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{P}_\mu}{\mathbf{P}_l} \left((\mathbf{X}^4 - \mathbf{T}_0^4) + \frac{\alpha_{\mu 0}}{a\sigma}(\mathbf{X} - \mathbf{T}_0) \right); \quad (6)$$

- 4) ответ на основной вопрос дает искомое $\widehat{\mathbf{q}} \approx \mathbf{Q}$, где \mathbf{Q} есть величина \mathbf{q} , заданная формулой (5), в которой \mathbf{X} определяется из уравнения (6).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Теплофизические параметры, входящие в уравнения (5) и (6), соответствуют установившимся температурам $\mathbf{T}_d(\infty)$ и $\mathbf{T}_\mu(\infty)$.

Формулы (5)–(6) при переходе к безразмерным параметрам $\alpha_{d\mu} = \frac{\alpha_{d\mu}}{\sigma\mathbf{T}_0^3}$, $\alpha_{\mu 0} = \frac{\alpha_{\mu 0}}{\sigma\mathbf{T}_0^3}$, $q = \frac{\mathbf{Q}}{\sigma\mathbf{T}_0^4}$, $P_\mu = \frac{\mathbf{P}_\mu}{\mathbf{P}_l}$, $x = \frac{\mathbf{X}}{\mathbf{T}_0}$, $y = \frac{\mathbf{Y}}{\mathbf{T}_0}$ принимают следующий вид:

$$q = SP_\mu \left[(x^4 - 1) + \frac{\alpha_{\mu 0}}{a}(x - 1) \right], \quad (7)$$

$$f(x) = 0, \quad \text{где } f(x) \stackrel{def}{=} (P_\mu + 2)x^4 + \left(P_\mu \frac{\alpha_{\mu 0}}{a} + \frac{\alpha_{d\mu}}{\varepsilon} \right) x - 2y^4 - \frac{\alpha_{d\mu}}{\varepsilon} y - \left(1 + \frac{\alpha_{\mu 0}}{a} \right) P_\mu. \quad (8)$$

1б. Технология измерения коэффициента поглощения мощности

Формула (7) дает равенство

$$a = \frac{\alpha_{\mu 0}(x - 1)}{\frac{q}{SP_\mu} - (x^4 - 1)}, \quad (9)$$

которое позволяет достаточно просто решить технологическую проблему экспериментального измерения коэффициента a поглощения мощности лазерного излучения элементом оптической системы. Действительно, можно считать известным знание трех величин: относительной интенсивности $q = \frac{\mathbf{Q}}{\sigma\mathbf{T}_0^4}$ лазерного излучения, относительной освещенности $P_\mu = \frac{\mathbf{P}_\mu}{\mathbf{P}_l}$ ЭОС и относительного коэффициента теплоотдачи $\alpha_{\mu 0} = \frac{\alpha_{\mu 0}}{\sigma\mathbf{T}_0^3}$ от ЭОС к окружающему его воздуху. Остается лишь экспериментально измерить установившуюся температуру \mathbf{X} элемента оптической системы, что даст ее относительную величину $x = \frac{\mathbf{X}}{\mathbf{T}_0}$, входящую в формулу (9).

Поскольку экспериментальные измерения температуры \mathbf{X} пока не проводились, представленные на приведенных ниже графиках результаты численных расчетов были сделаны для серии значений параметра a от 0,01 до 0,3. Ориентиром послужило значение $a = 0,1$, которое авторам при личном контакте рекомендовал Жан-Мари Торр (J.-M. Torre), ведущий специалист лазерного комплекса обсерватории в г. Грассе (Франция)¹.

¹ В этом комплексе слежение за спутниками осуществляется телескопом MeO (Métrologie Optique) с помощью неодимового лазера YAG (иттрий, алюминий, гранат), который излучает импульсы инфракрасного света (1064 нм),

2. Численные результаты и физические выводы

Результаты данного параграфа основаны на численном анализе формул (7) и (8), являющихся записью формул (5)–(6) в безразмерных единицах измерения. В качестве числа $x = \frac{X}{T_0}$ (с очевидностью принимающего значение несколько большее единицы) брался положительный корень полинома (8), имеющего еще один отрицательный и два комплексно-сопряженных корня. На представленных ниже рисунках заданы найденные по формулам (7) и (8) безразмерные величины $q(\alpha_{d\mu}, \alpha_{\mu 0})$ и $x(\alpha_{d\mu}, \alpha_{\mu 0})$ в виде графиков функции q (с масштабирующим множителем 10^{-9}) и функции x , зависящих от переменных $\alpha_{d\mu} = \frac{\alpha_{d\mu}}{\sigma T_0^3} \in [0,01, 0,1]$ и $\alpha_{\mu 0} = \frac{\alpha_{\mu 0}}{\sigma T_0^3} \in [10, 100]$, заданных с шагом 0,0025 по $\alpha_{d\mu}$ и шагом 1 по $\alpha_{\mu 0}$. Графики идентифицированы указанными на рисунках значениями следующих безразмерных параметров:

- скважность S (ее обратная величина $1/S$ соответствует длительности импульса на периоде),
- относительная освещенность $P_\mu = \mathbf{P}_\mu / \mathbf{P}_l$ элемента оптической системы,
- коэффициент a поглощения мощности лазерного излучения элементом оптической системы,
- относительная температура $y = Y/T_0$ воспламенения пылинки, где $T_0 = 300$ К.

Численные расчеты (например, представленные на рис. 1 и 2) показали, что при очень малых значениях a , таких как $a = 0,01$ (в отличие от значений $a \in [0,1, 0,3]$), пороговая величина q в большей степени зависит от физических характеристик пылинки, а не ЭОС, что, конечно, вполне ожидаемо. Поэтому в отсутствие экспериментальных измерений температуры X , которые могли бы дать, согласно формуле (9), точное значение параметра a (при тех или иных условиях), большая часть численных расчетов проводилась для значений параметра $a \in [0,05, 0,2]$. Но чтобы не перегружать статью большим числом результатов численных расчетов, зависимости q и x от параметров S , P_μ и y представлены ниже на рис. 5–10 лишь для значения $a = 0,1$, которое (как было указано выше) рекомендовал Жан-Мари Торр.

1. Влияние параметра a . При росте a увеличивается приток тепла от лазерного излучения, но увеличивается также и отток тепла за счет теплового излучения Стефана–Больцмана. Априори неясно, какой из этих факторов имеет большую силу. Ответ на этот вопрос представлен графиками величин q и x в точке $(\alpha_{d\mu}, \alpha_{\mu 0}) = (0,5, 50)$ при $S = 8,3 \cdot 10^8$, $P_\mu = 1,1$, при $y = 3$ и $y = 4$, приведенными на рис. 3 и 4. Эти графики типичны и для других точек $(\alpha_{d\mu}, \alpha_{\mu 0}) \in (0,01, 0,1) \times (10, 100)$.

2. Влияние скважности S излучения. Из (7) и (8) следует, что q линейно зависит от S , а x не зависит от S . Поэтому достаточно взять, например, $S = 10^8$ (см. рис. 5). При $P_\mu = 2$, $a = 0,1$, $y = 3,5$ и $\alpha_{\mu 0}: 10 \uparrow 100$ имеем

$$S = 10^8 \Rightarrow q: 26,7 \uparrow 27,9, x: 1,67 \downarrow 1,13.$$

а система дублирования обеспечивает также зеленый свет (532 нм). Согласно имеющимся там экспериментальным данным, лучевая нагрузка на ЭОС (зеркало из церодура) задается величиной $\mathbf{q} = 6,5 \cdot 10^{11} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$, $S = 8,3 \cdot 10^8$, а $\mathbf{P}_\mu / \mathbf{P}_l = 1,1$. В силу формулы (5) при интенсивности $\mathbf{q} = 6,5 \cdot 10^{11} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$ воспламениться могут только мифические «пылинки», которые воспламеняются при температуре около 350 градусов (по Цельсию). Истинные пылинки воспламеняются при температуре свыше 600 градусов. Однако, как отметил Жан-Мари Торр в переписке с авторами, не следует увеличивать величину лазерного излучения, ибо есть вероятность возникновения каустики при отражениях в линзах, что привело бы к серьезным повреждениям ЭОС.

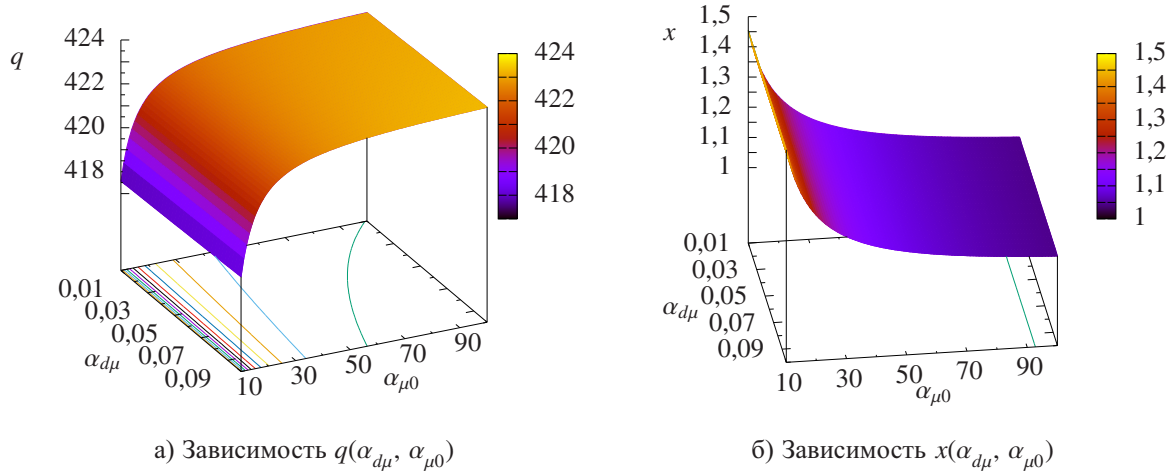


Рис. 1. Результаты численного моделирования для $S = 8,3 \cdot 10^8$, $P_\mu = 1,1$, $a = 0,01$, $y = 4$

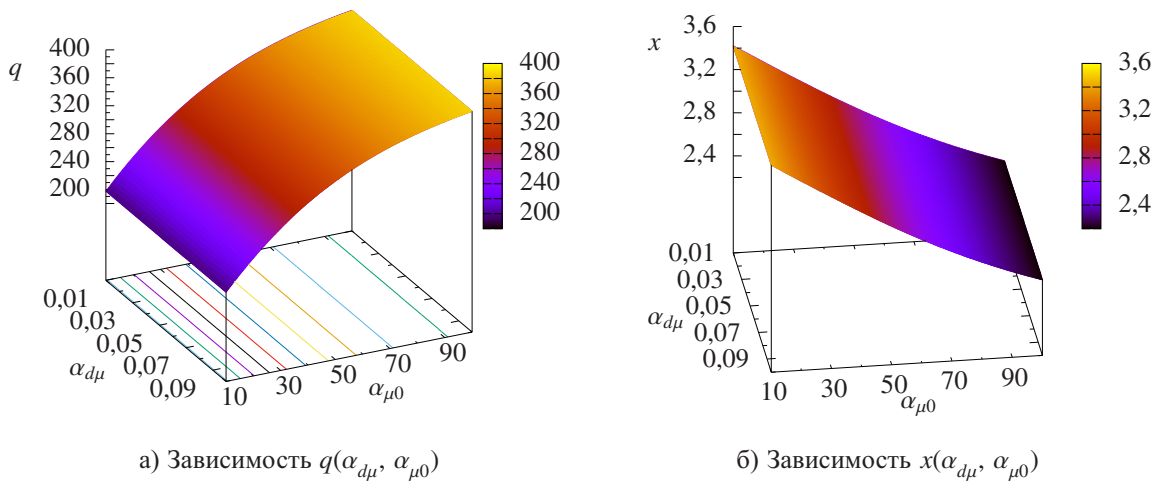


Рис. 2. Результаты численного моделирования для $S = 8,3 \cdot 10^8$, $P_\mu = 1,1$, $a = 0,3$, $y = 4$

3. Влияние температуры $y = Y/T_0$ возгорания пылинки (см. рис. 6–8). При $S = 10^8$, $P_\mu = 2$, $a = 0,1$ и $\alpha_{\mu 0}$: $10 \uparrow 100$ имеем

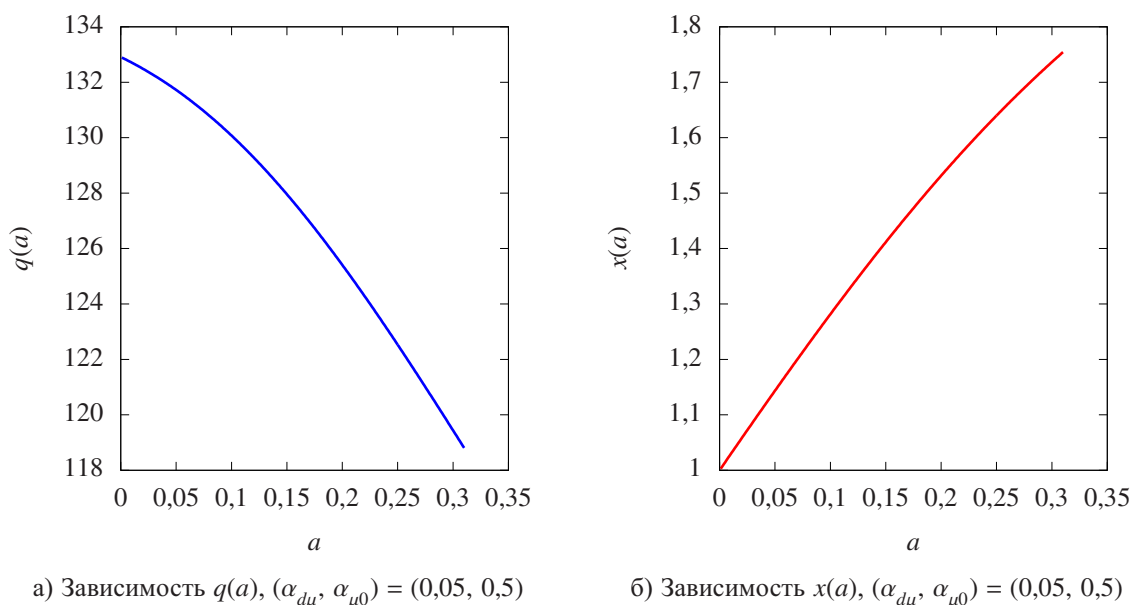
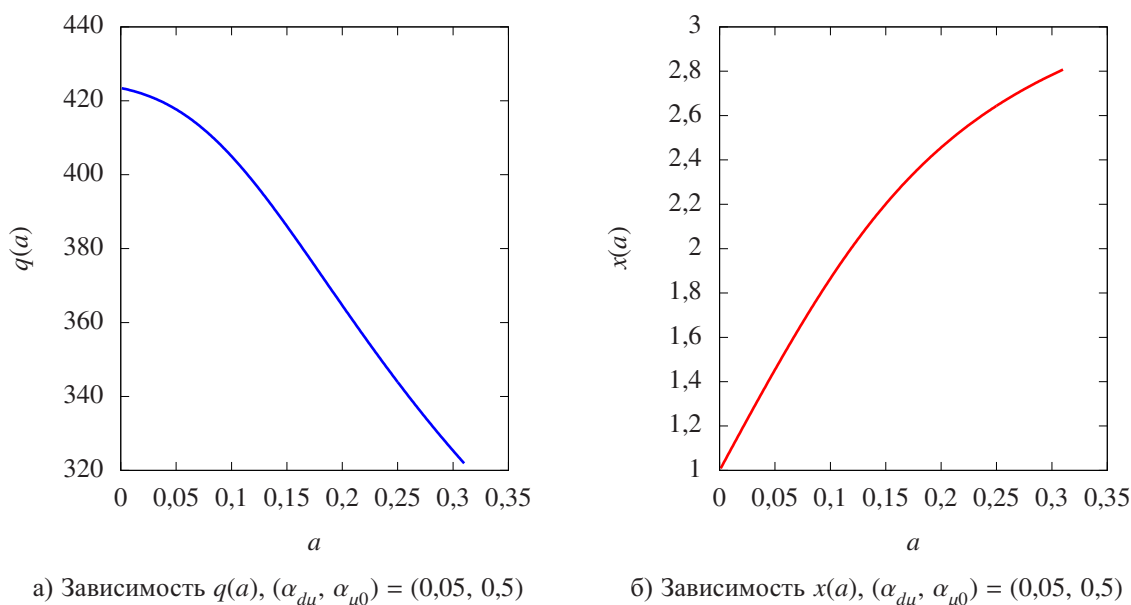
$$\underline{y = 4} \Rightarrow q: 46,5 \uparrow 49, \quad x: 1,96 \downarrow 1,23,$$

$$\underline{y = 3} \Rightarrow q: 13,6 \uparrow 14,2, \quad x: 1,4 \downarrow 1,07,$$

$$\underline{y = 2} \Rightarrow q: 1,17 \uparrow 1,21, \quad x: 1,04 \downarrow 1,01.$$

Вывод. Увеличение относительной температуры y возгорания пылинки позволяет увеличить допустимое значение q . Хотя такая тенденция вполне ожидаема, но количественные характеристики априори не были предсказуемы.

4. Доля освещенности ЭОС должна превышать $1/3$ (то есть $P_\mu < 3$). При постановке задачи говорилось об усредненной по пространственным переменным температуре $T_\mu(t)$ ЭОС.

Рис. 3. Результаты численного моделирования для $S = 10^8$, $P_\mu = 2$, $y = 3$ Рис. 4. Результаты численного моделирования для $S = 10^8$, $P_\mu = 2$, $y = 4$

Однако реальное распределение температуры в ЭОС становится актуальным при неравномерном воздействии тепла на ЭОС, что возникает в случае малой доли $1/P_\mu = \mathbf{P}_l/\mathbf{P}_\mu$ освещенности ЭОС лазерным пучком. В предельном случае, когда $P_\mu \rightarrow \infty$, безразмерный аналог

$$q = SP_\mu \left[(x^4 - 1) + \frac{\alpha_{\mu 0}}{a}(x - 1) \right],$$

$$(2\varepsilon P_\mu + 1)x^4 + (2\varepsilon P_\mu \alpha_{\mu 0} + a\alpha_{d\mu})x = (y^4 + \alpha_{d\mu}y)a + 2\varepsilon(1 + \alpha_{\mu 0})P_\mu,$$

системы уравнений (5)–(6) влечет $x(x^3 + \alpha_{\mu 0}) = 1 + \alpha_{\mu 0} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow q = 0$. Тем самым нарушается физически достоверная эквивалентность между неравенствами $P_{\mu_1} < P_{\mu_2}$ и $q_{\mu_1} < q_{\mu_2}$. Она чуть

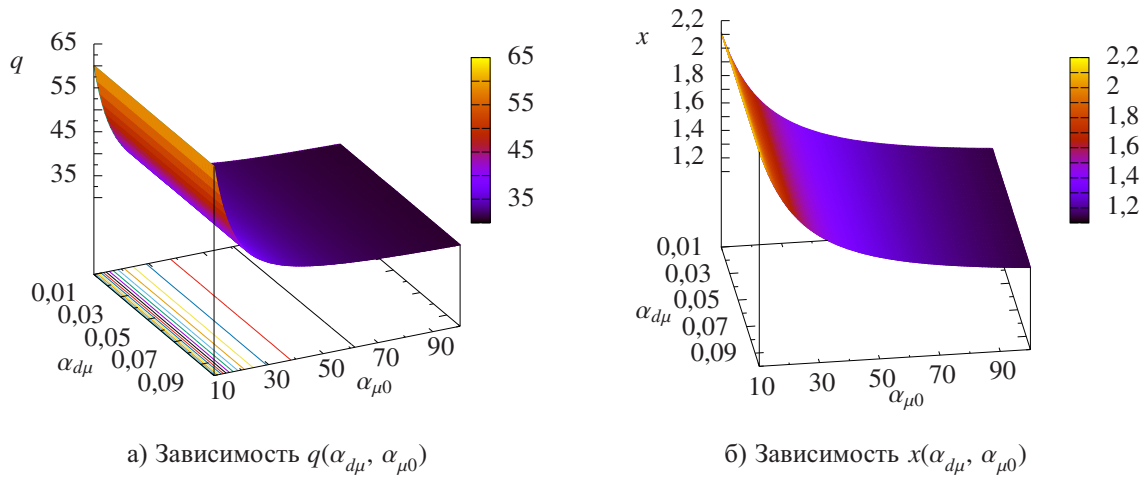


Рис. 5. Результаты численного моделирования для $S = 10^8$, $P_\mu = 2$, $a = 0,1$, $y = 3,5$

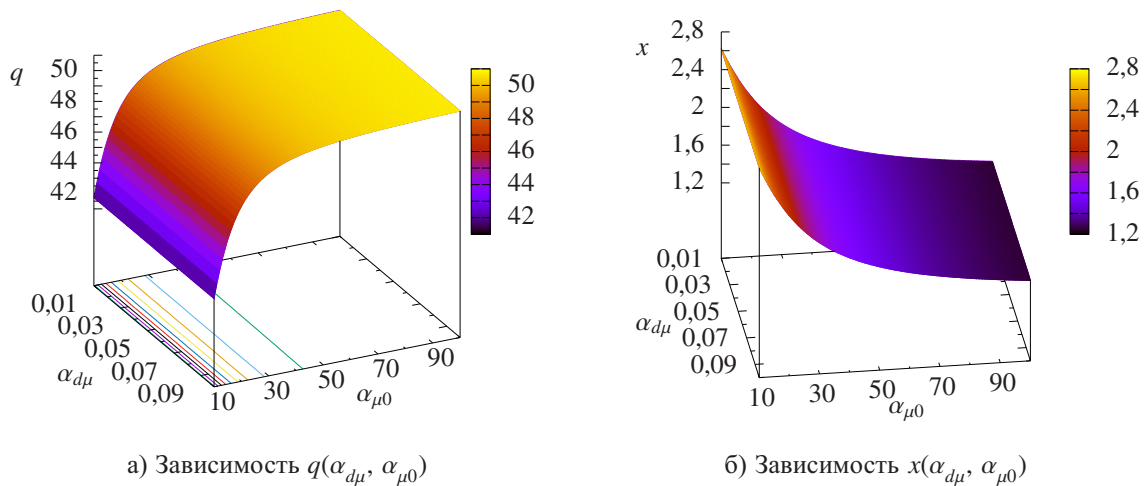


Рис. 6. Результаты численного моделирования для $S = 10^8$, $P_\mu = 2$, $a = 0,1$, $y = 4$

нарушается уже при $P_{\mu_2} = 3$, ибо при $S = 10^8$, $a = 0,1$, $y = 3,5$ и $\alpha_{\mu 0}: 10 \uparrow 100$ имеем (см. рис. 9–10)

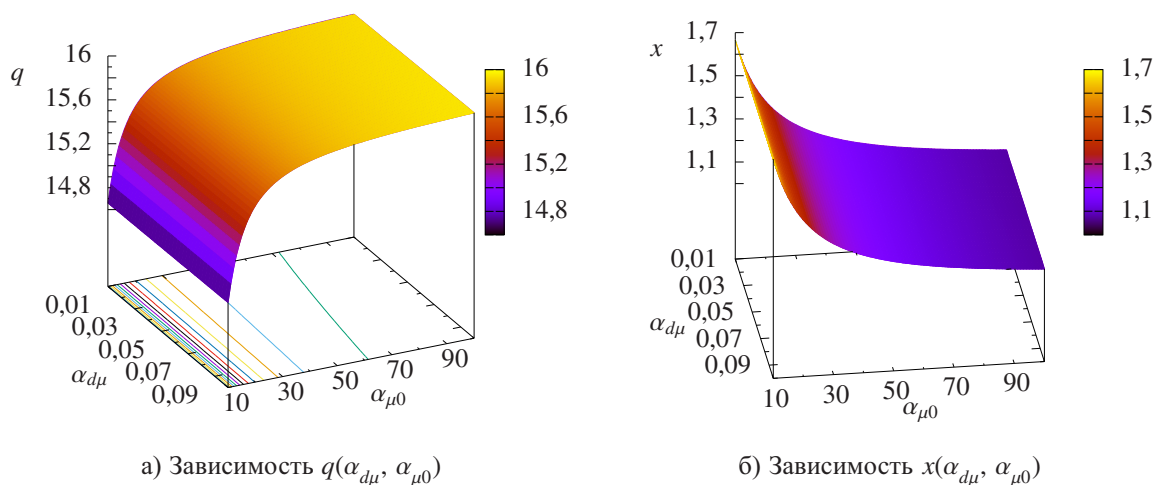
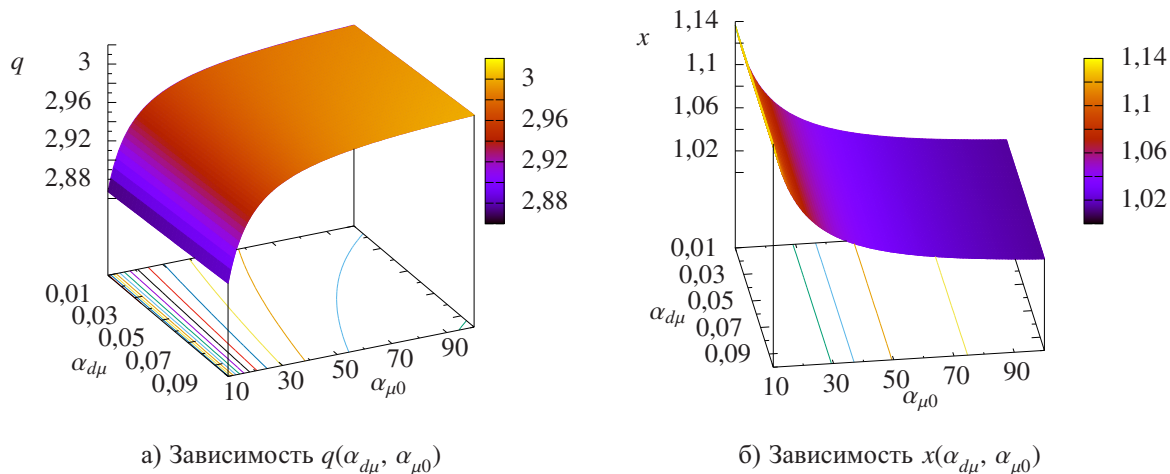
$$\underline{P_\mu = 1,1} \Rightarrow q: 26 \uparrow 28,6, x: 1,97 \downarrow 1,25,$$

$$\underline{P_\mu = 3} \Rightarrow q: 26,3 \uparrow 27,1, x: 1,49 \downarrow 1,09.$$

Вывод. В данной модели следует брать $P_\mu < 2,25 \Leftrightarrow r > 2/3R$, где r – радиус пучка, а R – радиус ЭОС.

3. Анализ формул (5)–(6)

В численных расчетах параметры $\alpha_{d\mu}$ и $\alpha_{\mu 0}$, входящие в систему соотношений (5)–(6), варьировались в характерных для них пределах, соответствующих экспериментальным и справочным данным. А именно, $\alpha_{d\mu} \in [0,01, 0,1]$, $\alpha_{\mu 0} \in [10, 100]$.

Рис. 7. Результаты численного моделирования для $S = 10^8$, $P_\mu = 2$, $a = 0,1$, $y = 3$ Рис. 8. Результаты численного моделирования для $S = 10^8$, $P_\mu = 2$, $a = 0,1$, $y = 2$

Что касается диапазонов изменения других параметров, входящих в систему соотношений (5)–(6), то в численных расчетах предполагалось, что:

- скважность $S \in [10^7, 2 \cdot 10^9]$,
- относительная площадь рабочей поверхности ЭОС $P_\mu = \mathbf{P}_\mu / \mathbf{P}_l \in [1,1, 3]$,
- коэффициент поглощения ЭОС мощности лазерного излучения $a \in [0,01, 0,3]$.

Такие диапазоны были выбраны с учетом имеющихся на данный момент и на ближайшую перспективу данных излучения мощных лазеров, а также технологических особенностей изготовления как конкретного ЭОС, так и всего тракта.

В системе (5)–(6) имеется большое количество параметров: три безразмерных (a , ε , S) и 9 размерных (σ , $X = \mathbf{T}_\mu(\infty)$, \mathbf{Y} , \mathbf{T}_0 , \mathbf{P}_μ , \mathbf{P}_l , \mathbf{q} , $\alpha_{d\mu}$, $\alpha_{\mu 0}$), которые, исключая лишь постоянную

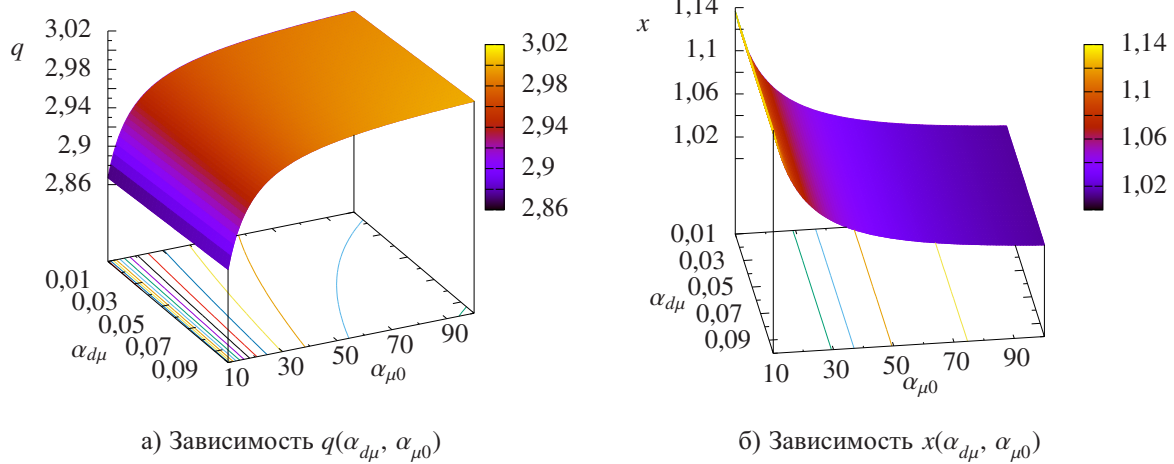


Рис. 9. Результаты численного моделирования для $S = 10^8$, $P_\mu = 1,1$, $a = 0,1$, $y = 3,5$

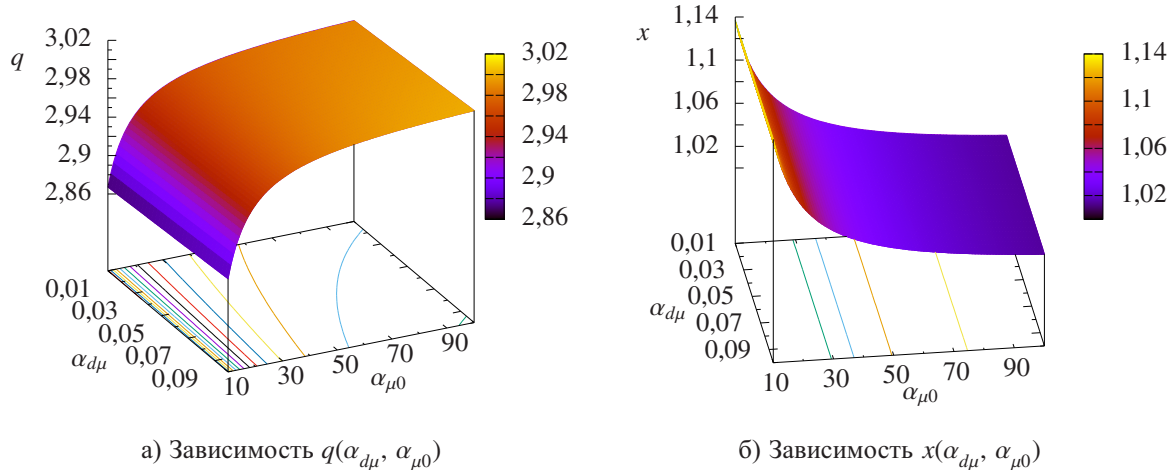


Рис. 10. Результаты численного моделирования для $S = 10^8$, $P_\mu = 3$, $a = 0,1$, $y = 3,5$

Стефана – Больцмана $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$, варьируемы. Имеющиеся в связи с этим трудности численного анализа системы (5)–(6) преодолеваются стандартной процедурой¹ перехода к безразмерным параметрам.

Для перехода к безразмерным параметрам заметим, что среди размерных величин можно выбрать три «базовых», через размерности которых выражаются размерности остальных величин. Например, в качестве таких трех «базовых» параметров можно взять σ , \mathbf{T}_0 и \mathbf{P}_l , имеющие соответственно такие размерности: $\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$, К и м^2 . При этом

$$[\mathbf{T}_\mu] = [\mathbf{Y}] = [\mathbf{T}_0] = \text{К}, \quad [\mathbf{P}_\mu] = [\mathbf{P}_l] = \text{м}^2 \quad (10)$$

¹ Соответствующие разъяснения приведены здесь для полноты изложения и для удобства тех, кому эта процедура не достаточно знакома.

и

$$[\mathbf{q}] = [\sigma][\mathbf{T}_0]^4 = \frac{\text{Вт}}{\text{М}^2}, \quad [\alpha_{d\mu}] = [\alpha_{\mu 0}] = [\sigma][\mathbf{T}_0]^3 = \frac{\text{Вт}}{\text{М}^2 \cdot \text{К}}. \quad (11)$$

Любая размерная величина \mathbf{p} представима в виде $\{\mathbf{p}\}[\mathbf{p}] = \{p\}[p]$, где через $\{\mathbf{p}\}$ и, соответственно, через $\{p\}$ обозначено ее численное значение в исходной и, соответственно, новой системе единиц измерения, а $[\mathbf{p}]$ и, соответственно, $[p]$ — размерность этой величины в соответствующих им системах единиц измерения. Например, если $[\tau] = \text{ч}$, $[\tau] = \text{мин}$, то $\frac{[\tau]}{[\tau]} = 60$. Таким образом,

$$\{\mathbf{p}\} = \{\mathbf{p}\} \frac{[\mathbf{p}]}{[p]} \Rightarrow \{p\} = \{\mathbf{p}\}[p], \text{ если } [p] = 1. \quad (12)$$

Если в качестве новой системы единиц измерения взять ту, в которой «базовые» параметры σ , \mathbf{T}_0 , \mathbf{P}_l приняты за единицу измерения, то в этой новой системе единиц измерения они становятся безразмерными ($[\sigma] = 1$, $[\mathbf{T}_0] = 1$, $[\mathbf{P}_l] = 1$) и их численные значения равны единице ($\{\sigma\} = 1$, $\{\mathbf{T}_0\} = 1$, $\{\mathbf{P}_l\} = 1$). Тем самым в рамках этой системы единиц измерения

$$[\sigma] = \frac{1}{\{\sigma\}}, \quad [\mathbf{T}_0] = \frac{1}{\{\mathbf{T}_0\}}, \quad [\mathbf{P}_l] = \frac{1}{\{\mathbf{P}_l\}}. \quad (13)$$

В этой новой системе единиц измерения остальные параметры в силу (10) и (11) тоже становятся безразмерными, то есть равны своим численным значениям. Поэтому оправдана запись $p = \{p\}$ для безразмерного параметра p , иначе говоря, для которого $[p] = 1$. Имеем

$$\begin{aligned} T_\mu &= \{T_\mu\} \stackrel{(12)}{=} \{\mathbf{T}_\mu\}[\mathbf{T}_\mu] \stackrel{(10)}{=} \{\mathbf{T}_\mu\}[\mathbf{T}_0] \stackrel{(13)}{=} \frac{\{\mathbf{T}_\mu\}}{\{\mathbf{T}_0\}} \stackrel{(10)}{=} \frac{\{\mathbf{T}_\mu\}[\mathbf{T}_\mu]}{\{\mathbf{T}_0\}[\mathbf{T}_0]} = \frac{\mathbf{T}_\mu}{\mathbf{T}_0}, \\ q &= \{q\} \stackrel{(12)}{=} \{\mathbf{q}\}[\mathbf{q}] \stackrel{(11)}{=} \{\mathbf{q}\}[\sigma][\mathbf{T}_0]^4 \stackrel{(13)}{=} \frac{\{\mathbf{q}\}}{\{\sigma\}\{\mathbf{T}_0\}^4} \stackrel{(11)}{=} \frac{\{\mathbf{q}\}}{\{\sigma\}\{\mathbf{T}_0\}^4} \frac{[\mathbf{q}]}{[\sigma][\mathbf{T}_0]^4} = \frac{\mathbf{q}}{\sigma\mathbf{T}_0^4}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом

$$T_\mu = \frac{\mathbf{T}_\mu}{\mathbf{T}_0}, \quad T_d = \frac{\mathbf{T}_d}{\mathbf{T}_0}, \quad P_\mu = \frac{\mathbf{P}_\mu}{\mathbf{P}_l}, \quad \alpha_{d\mu} = \frac{\alpha_{d\mu}}{\sigma\mathbf{T}_0^3}, \quad \alpha_{\mu 0} = \frac{\alpha_{\mu 0}}{\sigma\mathbf{T}_0^3}.$$

Отсюда получаем

$$\mathbf{T}_\mu = T_\mu \mathbf{T}_0, \quad \mathbf{T}_d = T_d \mathbf{T}_0, \quad \mathbf{P}_\mu = P_\mu \mathbf{P}_l, \quad \widehat{\mathbf{q}} = \widehat{q} \sigma \mathbf{T}_0^4, \quad \alpha_{d\mu} = \alpha_{d\mu} \sigma \mathbf{T}_0^3, \quad \alpha_{\mu 0} = \alpha_{\mu 0} \sigma \mathbf{T}_0^3. \quad (14)$$

4. Анализ расчетных формул для q и x

Априори ясно, что число $x = T_\mu^{(\infty)} \stackrel{(14)}{=} \frac{\mathbf{T}_\mu^{(\infty)}}{\mathbf{T}_0}$ несколько больше 1. Согласно (8) это число есть один из корней полинома 4-й степени

$$f(x) = (P_\mu + 2)x^4 + \left(P_\mu \frac{\alpha_{\mu 0}}{a} + \frac{\alpha_{d\mu}}{\varepsilon}\right)x - 2y^4 - \frac{\alpha_{d\mu}}{\varepsilon}y - \left(1 + \frac{\alpha_{\mu 0}}{a}\right)P_\mu. \quad (15)$$

Очевидно, что $f(0) < 0$, а $f'(x) = 4(P_\mu + 2)x^3 + \left(P_\mu \frac{\alpha_{\mu 0}}{a} + \frac{\alpha_{d\mu}}{\varepsilon}\right) > 0$ при $x \geq 1$.

Характерный вид графика полинома f приведен на рис. 11.

Для нахождения корня $x \geq 1$ уравнения $f(x) = 0$ был применен метод Ньютона с модификацией, предложенной в [Исаев, Сонин, 1963], то есть итерациями по формуле

$$x_{n+1} = x_n - \gamma \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

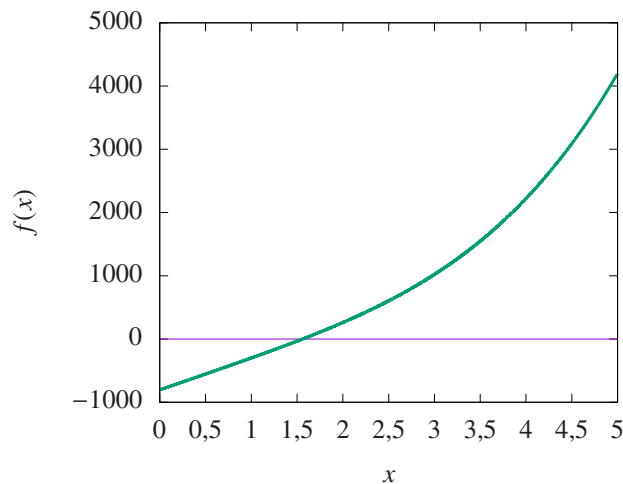


Рис. 11. График $f: x \mapsto f(x)$ при $S = 10^8$, $P_\mu = 2$, $a = 0,2$, $y = 3,5$, $\varepsilon = 0,76$

где модифицирующий множитель γ , изначально равный 1, затем выбирается так, чтобы выполнялось неравенство $|f(x_{n+1})| < |f(x_n)|$, улучшающее сходимость. Подходящим начальным приближением для старта итерационного процесса оказалось значение $x_0 = 1,5$. При этом метод Ньютона сходился за 2–4 итерации с точностью 10^{-8} . А именно, для каждой пары параметров $(\alpha_{d\mu}, \alpha_{\mu 0})$ методом Ньютона вычислялся корень $x \geq 1$ полинома (15), а затем находилось q из (7).

Предъявленные в § 2 графики построены в GNUPLOT (<http://www.gnuplot.info/>). Все числа для q на графиках приведены с множителем 10^{-9} , а $\varepsilon = 0,76$.

5. Доказательство основного математического результата

Основной математический результат работы сформулирован в подпараграфе 1а. Приведенное ниже доказательство базируется на формулах для решения системы (3). Вывод этих формул существенно использует периодичность теплового излучения, задаваемого формулой (1).

Перепишем систему (3) в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{T}}_d \\ \dot{\mathbf{T}}_\mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T}_d \\ \mathbf{T}_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_d \\ \mathbf{F}_\mu \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Здесь

$$\mathbf{F}_d = \mathbf{f}_d + \eta_d, \quad \mathbf{F}_\mu = \mathbf{f}_\mu + \eta_\mu, \tag{17}$$

а

$$\begin{cases} \lambda_1 = \alpha_{d\mu} \chi_d, & \mathbf{f}_d(\mathbf{t}) = \varepsilon q \chi_d \delta_{S,\tau}(\mathbf{t}), & \eta_d(\mathbf{t}) = -2\varepsilon \sigma (\mathbf{T}_d^4 - \mathbf{T}_\mu^4) \chi_d < 0, \\ \lambda_2 = \alpha_{\mu 0} \chi_\mu, & \mathbf{f}_\mu(\mathbf{t}) = \alpha_{\mu 0} \chi_\mu \mathbf{T}_0 + a q \chi_\mu \frac{\mathbf{P}_l}{\mathbf{P}_\mu} \delta_{S,\tau}(\mathbf{t}), & \eta_\mu(\mathbf{t}) = -a \sigma (\mathbf{T}_\mu^4 - \mathbf{T}_0^4) \chi_\mu < 0, \end{cases} \tag{18}$$

где

$$\chi_d = \frac{\mathbf{P}_d/2}{\mathbf{c}_d \mathbf{V}_d \rho_d}, \quad \chi_\mu = \frac{\mathbf{P}_\mu}{\mathbf{c}_\mu \mathbf{V}_\mu \rho_\mu}.$$

Учитывая замечание 1 (на с. 1030), можно считать, что λ_1 и λ_2 есть константы, причем в силу (4)

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \beta \quad \text{и} \quad \frac{1}{1 - \beta} \leq 2. \tag{19}$$

Легко проверяется, что

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad g_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \beta \end{pmatrix}$$

есть собственные векторы оператора

$$A: g_k \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} g_k = \lambda_k g_k,$$

отвечающие собственным значениям

$$\lambda_1 \stackrel{(18)}{=} \alpha_{d\mu} \chi_d = \frac{\alpha_{d\mu} \mathbf{P}_d/2}{\mathbf{c}_d \mathbf{V}_d \rho_d} > 0 \quad \text{и} \quad \lambda_2 \stackrel{(18)}{=} \alpha_{\mu 0} \chi_\mu = \frac{\alpha_{\mu 0} \mathbf{P}_\mu}{\mathbf{c}_\mu \mathbf{V}_\mu \rho_\mu} > 0. \quad (20)$$

Поэтому решение системы (16) представимо в виде

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T}_d(\mathbf{t}) \\ \mathbf{T}_\mu(\mathbf{t}) \end{pmatrix} = \mathbf{C}_1(\mathbf{t}) g_1 e^{-\lambda_1 \mathbf{t}} + \mathbf{C}_2(\mathbf{t}) g_2 e^{-\lambda_2 \mathbf{t}},$$

где функции \mathbf{C}_1 и \mathbf{C}_2 удовлетворяют условию $\dot{\mathbf{C}}_1(\mathbf{t}) g_1 e^{-\lambda_1 \mathbf{t}} + \dot{\mathbf{C}}_2(\mathbf{t}) g_2 e^{-\lambda_2 \mathbf{t}} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_d(\mathbf{t}) \\ \mathbf{F}_\mu(\mathbf{t}) \end{pmatrix}$, то есть такой системе уравнений:

$$\dot{\mathbf{C}}_1(\mathbf{t}) e^{-\lambda_1 \mathbf{t}} + \dot{\mathbf{C}}_2(\mathbf{t}) e^{-\lambda_2 \mathbf{t}} = \mathbf{F}_d(\mathbf{t}), \quad (1 - \beta) \dot{\mathbf{C}}_2(\mathbf{t}) e^{-\lambda_2 \mathbf{t}} = \mathbf{F}_\mu(\mathbf{t}). \quad (21)$$

Из (21) следует

$$\dot{\mathbf{C}}_k(\mathbf{t}) = e^{\lambda_k \mathbf{t}} \mathbf{M}_k^{\mathbf{F}}(\mathbf{t}),$$

где

$$\mathbf{M}_1^{\mathbf{F}}(\mathbf{t}) = \mathbf{F}_d(\mathbf{t}) - \frac{1}{1 - \beta} \mathbf{F}_\mu(\mathbf{t}), \quad \mathbf{M}_2^{\mathbf{F}}(\mathbf{t}) = \frac{1}{1 - \beta} \mathbf{F}_\mu(\mathbf{t}).$$

Поскольку $\mathbf{T}_d(\mathbf{t}) = \mathbf{C}_1(\mathbf{t}) e^{-\lambda_1 \mathbf{t}} + \mathbf{C}_2(\mathbf{t}) e^{-\lambda_2 \mathbf{t}}$, $\mathbf{T}_\mu(\mathbf{t}) = (1 - \beta) \mathbf{C}_2(\mathbf{t}) e^{-\lambda_2 \mathbf{t}}$, $\mathbf{T}_d(0) = \mathbf{T}_\mu(0) = \mathbf{T}_0$, то

$$\mathbf{T}_d(\mathbf{t}) = \left(\int_0^{\mathbf{t}} e^{\lambda_1 \theta} \mathbf{M}_1^{\mathbf{F}}(\theta) d\theta \right) e^{-\lambda_1 \mathbf{t}} + \left(\mathbf{T}_0 + \int_0^{\mathbf{t}} e^{\lambda_2 \theta} \mathbf{M}_2^{\mathbf{F}}(\theta) d\theta \right) e^{-\lambda_2 \mathbf{t}}$$

и

$$\mathbf{T}_\mu(\mathbf{t}) = \left(\mathbf{T}_0 + \int_0^{\mathbf{t}} e^{\lambda_2 \theta} \mathbf{F}_\mu(\theta) d\theta \right) e^{-\lambda_2 \mathbf{t}}.$$

А так как $\mathbf{F}_d(\mathbf{t}) \stackrel{(17)}{=} \mathbf{f}_d(\mathbf{t}) + \eta_d(\mathbf{t})$, $\mathbf{F}_\mu(\mathbf{t}) \stackrel{(17)}{=} \mathbf{f}_\mu(\mathbf{t}) + \eta_\mu(\mathbf{t})$, то $\mathbf{M}_k^{\mathbf{F}}(\mathbf{t}) = \mathbf{M}_k^{\mathbf{f}}(\mathbf{t}) + \mathbf{M}_k^{\eta}(\mathbf{t})$, где

$$\mathbf{M}_1^{\mathbf{f}}(\mathbf{t}) = \mathbf{f}_d(\mathbf{t}) - \frac{1}{1 - \beta} \mathbf{f}_\mu(\mathbf{t}), \quad \mathbf{M}_2^{\mathbf{f}}(\mathbf{t}) = \frac{1}{1 - \beta} \mathbf{f}_\mu(\mathbf{t}) \quad (22)$$

и

$$\mathbf{M}_1^{\eta}(\mathbf{t}) = \eta_d(\mathbf{t}) - \frac{1}{1 - \beta} \eta_\mu(\mathbf{t}), \quad \mathbf{M}_2^{\eta}(\mathbf{t}) = \frac{1}{1 - \beta} \eta_\mu(\mathbf{t}) \stackrel{(18)}{<} 0. \quad (23)$$

Поэтому $\mathbf{T}_d(\mathbf{t}) = \mathbf{T}_d^{\mathbf{f}}(\mathbf{t}) + \mathbf{T}_d^{\eta}(\mathbf{t})$, $\mathbf{T}_\mu(\mathbf{t}) = \mathbf{T}_\mu^{\mathbf{f}}(\mathbf{t}) + \mathbf{T}_\mu^{\eta}(\mathbf{t})$, где

$$\begin{cases} \mathbf{T}_d^{\eta}(\mathbf{t}) = \left(\int_0^{\mathbf{t}} e^{\lambda_1 \theta} \mathbf{M}_1^{\eta}(\theta) d\theta \right) e^{-\lambda_1 \mathbf{t}} + \left(\int_0^{\mathbf{t}} e^{\lambda_2 \theta} \mathbf{M}_2^{\eta}(\theta) d\theta \right) e^{-\lambda_2 \mathbf{t}}, \\ \mathbf{T}_\mu^{\eta}(\mathbf{t}) = \left(\int_0^{\mathbf{t}} e^{\lambda_2 \theta} \eta_\mu(\theta) d\theta \right) e^{-\lambda_2 \mathbf{t}} \end{cases} \quad (24)$$

есть (с учетом равенств $\mathbf{T}_d^\eta(0) = \mathbf{T}_\mu^\eta(0) = 0$) решение системы

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{T}_d^\eta}{dt} + \lambda_1 \mathbf{T}_d^\eta - \lambda_1 \mathbf{T}_\mu^\eta = \boldsymbol{\eta}_d(\mathbf{t}), \\ \frac{d\mathbf{T}_\mu^\eta}{dt} + \lambda_2 \mathbf{T}_\mu^\eta = \boldsymbol{\eta}_\mu(\mathbf{t}), \end{cases}$$

а

$$\begin{cases} \mathbf{T}_d^f(\mathbf{t}) = \left(\int_0^{\mathbf{t}} e^{\lambda_1 \theta} \mathbf{M}_1^f(\theta) d\theta \right) e^{-\lambda_1 \mathbf{t}} + \left(\mathbf{T}_0 + \int_0^{\mathbf{t}} e^{\lambda_2 \theta} \mathbf{M}_2^f(\theta) d\theta \right) e^{-\lambda_2 \mathbf{t}}, \\ \mathbf{T}_\mu^f(\mathbf{t}) = \left(\mathbf{T}_0 + \int_0^{\mathbf{t}} e^{\lambda_2 \theta} \mathbf{f}_\mu(\theta) d\theta \right) e^{-\lambda_2 \mathbf{t}} \end{cases} \quad (25)$$

есть (соответствующее условию $\mathbf{T}_d(0) = \mathbf{T}_\mu(0) = \mathbf{T}_0$) решение системы

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{T}_d^f}{dt} + \lambda_1 \mathbf{T}_d^f - \lambda_1 \mathbf{T}_\mu^f = \mathbf{f}_d(\mathbf{t}), \\ \frac{d\mathbf{T}_\mu^f}{dt} + \lambda_2 \mathbf{T}_\mu^f = \mathbf{f}_\mu(\mathbf{t}). \end{cases}$$

Нам надо оценить $\mathbf{T}_d(\infty) = \lim_{N \ni N \rightarrow \infty} \mathbf{T}_d(N\tau)$. С этой целью заметим, что

$$\int_0^{N\tau} \lambda e^{\lambda \theta} \delta_{S,\tau}(\theta) d\theta \stackrel{(1)}{=} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\tau}^{(k+\frac{1}{S})\tau} \lambda e^{\lambda \theta} d\theta = \sum_{k=0}^{N-1} e^{\lambda k\tau} [e^{\lambda \frac{\tau}{S}} - 1] = \frac{e^{\lambda N\tau} - 1}{e^{\lambda \tau} - 1} [e^{\lambda \frac{\tau}{S}} - 1].$$

Тем самым

$$\int_0^{N\tau} e^{\lambda \theta} \mathbf{f}_d(\theta) d\theta \stackrel{(18)}{=} \chi_d \frac{\varepsilon \mathbf{q}}{\lambda} \int_0^{N\tau} \lambda e^{\lambda \theta} \delta_{S,\tau}(\theta) d\theta = \varepsilon \mathbf{q} \chi_d \frac{e^{\lambda \frac{\tau}{S}} - 1}{e^{\lambda \tau} - 1} \cdot \frac{e^{\lambda N\tau} - 1}{\lambda}$$

и

$$\int_0^{N\tau} e^{\lambda \theta} \mathbf{f}_\mu(\theta) d\theta \stackrel{(18)}{=} \frac{\chi_\mu}{\lambda} \int_0^{N\tau} \lambda e^{\lambda \theta} \left(\alpha_{\mu 0} \mathbf{T}_0 + a \mathbf{q} \frac{\mathbf{P}_l}{\mathbf{P}_\mu} \delta_{S,\tau}(\theta) \right) d\theta = \left(\alpha_{\mu 0} \mathbf{T}_0 + a \mathbf{q} \frac{\mathbf{P}_l}{\mathbf{P}_\mu} \frac{e^{\lambda \frac{\tau}{S}} - 1}{e^{\lambda \tau} - 1} \right) \frac{e^{\lambda N\tau} - 1}{\lambda} \chi_\mu.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_d^f(N\tau) &\stackrel{(22),(25)}{=} \left\{ \int_0^{N\tau} e^{\lambda_1 \theta} \left[\mathbf{f}_d(\theta) - \frac{1}{1-\beta} \mathbf{f}_\mu(\theta) \right] d\theta \right\} e^{-\lambda_1 N\tau} + \\ &+ \left\{ \mathbf{T}_0 + \int_0^{N\tau} e^{\lambda_2 \theta} \left[\frac{1}{1-\beta} \mathbf{f}_\mu(\theta) \right] d\theta \right\} e^{-\lambda_2 N\tau} = \mathbf{T}_0 e^{-\lambda_2 N\tau} + \\ &+ \left\{ \varepsilon \mathbf{q} \chi_d \frac{e^{\lambda_1 \frac{\tau}{S}} - 1}{e^{\lambda_1 \tau} - 1} \cdot \frac{1 - e^{-\lambda_1 N\tau}}{\lambda_1} - \frac{1}{1-\beta} \left(\alpha_{\mu 0} \mathbf{T}_0 + a \mathbf{q} \frac{\mathbf{P}_l}{\mathbf{P}_\mu} \frac{e^{\lambda_1 \frac{\tau}{S}} - 1}{e^{\lambda_1 \tau} - 1} \right) \frac{1 - e^{-\lambda_1 N\tau}}{\lambda_1} \chi_\mu \right\} + \\ &+ \left\{ \frac{\chi_\mu}{1-\beta} \left(\alpha_{\mu 0} \mathbf{T}_0 + a \mathbf{q} \frac{\mathbf{P}_l}{\mathbf{P}_\mu} \frac{e^{\lambda_2 \frac{\tau}{S}} - 1}{e^{\lambda_2 \tau} - 1} \right) \frac{1 - e^{-\lambda_2 N\tau}}{\lambda_2} \right\} = \end{aligned}$$

$$= \mathbf{T}_0 \left\{ e^{-\lambda_2 N \tau} - \frac{\alpha_{\mu 0} \chi_{\mu}}{1 - \beta} \left(\frac{1 - e^{-\lambda_1 N \tau}}{\lambda_1} - \frac{1 - e^{-\lambda_2 N \tau}}{\lambda_2} \right) \right\} + \mathbf{q} \left\{ \frac{e^{\lambda_1 \frac{\tau}{\beta}} - 1}{e^{\lambda_1 \tau} - 1} \frac{\varepsilon \chi_d}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 N \tau}) + \right. \\ \left. + \frac{a}{1 - \beta} \chi_{\mu} \frac{\mathbf{P}_l}{\mathbf{P}_{\mu}} \left[\frac{1}{\lambda_2} \frac{e^{\lambda_2 \frac{\tau}{\beta}} - 1}{e^{\lambda_2 \tau} - 1} (1 - e^{-\lambda_2 N \tau}) - \frac{1}{\lambda_1} \frac{e^{\lambda_1 \frac{\tau}{\beta}} - 1}{e^{\lambda_1 \tau} - 1} (1 - e^{-\lambda_1 N \tau}) \right] \right\}.$$

Отсюда, учитывая, что $\alpha_{d\mu} \chi_d \stackrel{(18),(20)}{=} \lambda_1$, $\alpha_{\mu 0} \chi_{\mu} \stackrel{(18),(20)}{=} \lambda_2$ и $\frac{1}{1 - \beta} \stackrel{(4)}{=} \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}$, получаем

$$\mathbf{T}_d^f(N\tau) = \mathbf{T}_0 \left\{ e^{-\lambda_2 N \tau} + 1 - \left(\frac{\lambda_1 e^{-\lambda_2 N \tau} - \lambda_2 e^{-\lambda_1 N \tau}}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) \right\} + \mathbf{q} \left\{ \frac{e^{\lambda_1 \frac{\tau}{\beta}} - 1}{e^{\lambda_1 \tau} - 1} \frac{\varepsilon}{\alpha_{d\mu}} (1 - e^{-\lambda_1 N \tau}) + \right. \\ \left. + \frac{a \mathbf{P}_l}{\alpha_{\mu 0} \mathbf{P}_{\mu}} \left[\frac{1}{\lambda_2} \frac{e^{\lambda_2 \frac{\tau}{\beta}} - 1}{e^{\lambda_2 \tau} - 1} (1 - e^{-\lambda_2 N \tau}) - \frac{1}{\lambda_1} \frac{e^{\lambda_1 \frac{\tau}{\beta}} - 1}{e^{\lambda_1 \tau} - 1} (1 - e^{-\lambda_1 N \tau}) \right] \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \right\}. \quad (26)$$

Аналогичные (более простые) выкладки приводят к формуле

$$\mathbf{T}_{\mu}^f(N\tau) \stackrel{(22),(25)}{=} (1 - \beta) \mathbf{T}_0 e^{-\lambda_2 N \tau} + \left(\alpha_{\mu 0} \mathbf{T}_0 + a \mathbf{q} \frac{\mathbf{P}_l}{\mathbf{P}_{\mu}} \frac{e^{\lambda_2 \frac{\tau}{\beta}} - 1}{e^{\lambda_2 \tau} - 1} \right) \frac{1 - e^{-\lambda_2 N \tau}}{\lambda_2} \chi_{\mu}. \quad (27)$$

А поскольку $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 > 0$, то формулы (26)–(27) влекут

$$\mathbf{T}_d^f(N\tau) \uparrow \mathbf{T}_d^f(\infty) = \mathbf{T}_0 + \frac{\mathbf{q}}{\alpha_{d\mu}} \mathbf{A} \quad \text{и} \quad \mathbf{T}_{\mu}^f(N\tau) \uparrow \mathbf{T}_{\mu}^f(\infty) = \mathbf{T}_0 + \frac{\mathbf{q}}{\alpha_{\mu 0}} \mathbf{B}, \quad (28)$$

где

$$\mathbf{A} = \frac{e^{\lambda_1 \frac{\tau}{\beta}} - 1}{e^{\lambda_1 \tau} - 1} \varepsilon + a \frac{\alpha_{d\mu} \mathbf{P}_l}{\alpha_{\mu 0} \mathbf{P}_{\mu}} \left(\lambda_1 \frac{e^{\lambda_2 \frac{\tau}{\beta}} - 1}{e^{\lambda_2 \tau} - 1} - \lambda_2 \frac{e^{\lambda_1 \frac{\tau}{\beta}} - 1}{e^{\lambda_1 \tau} - 1} \right) \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad \mathbf{B} = a \frac{\mathbf{P}_l}{\mathbf{P}_{\mu}} \frac{e^{\lambda_2 \frac{\tau}{\beta}} - 1}{e^{\lambda_2 \tau} - 1}. \quad (29)$$

Наша цель — найти $\widehat{\mathbf{q}} = \sup \mathbf{q}$, то есть то максимальное значение \mathbf{q} , при котором $\sup (\mathbf{T}_d^f(\mathbf{t}) + \mathbf{T}_d^{\eta}(\mathbf{t}))$ не превышает температуры \mathbf{Y} возгорания пылинки.

Заметим в связи с этим, что

$$\mathbf{T}_d^{\eta}(\mathbf{t}) \stackrel{(24)}{=} \left(\int_0^{\mathbf{t}} e^{\lambda_1 \theta} \mathbf{M}_1^{\eta}(\theta) d\theta \right) e^{-\lambda_1 \mathbf{t}} + \left(\int_0^{\mathbf{t}} e^{\lambda_2 \theta} \mathbf{M}_2^{\eta}(\theta) d\theta \right) e^{-\lambda_2 \mathbf{t}}, \quad (30)$$

а $\mathbf{M}_2^{\eta}(\mathbf{t}) \stackrel{(23)}{=} \frac{1}{1 - \beta} \eta_{\mu}(\mathbf{t}) < 0$. Поэтому условие

$$\mathbf{Y} \geq \sup_{\mathbf{t}} (\mathbf{T}_d^f(\mathbf{t}) + \mathbf{T}_d^{\eta}(\mathbf{t})) \quad (31)$$

будет заведомо выполнено, если

$$\int_0^{\mathbf{t}} e^{\lambda_1 \theta} \mathbf{M}_1^{\eta}(\theta) d\theta \leq 0 \quad (32)$$

и

$$\mathbf{Y} \geq \mathbf{T}_d^f(\infty) \stackrel{(28)}{\iff} \mathbf{q} \leq \alpha_{d\mu} \frac{\mathbf{Y} - \mathbf{T}_0}{\mathbf{A}}.$$

Так как $\mathbf{M}_1^{\eta}(\mathbf{t}) \stackrel{(23)}{=} \eta_d(\mathbf{t}) - \frac{1}{1 - \beta} \eta_{\mu}(\mathbf{t})$, а $\eta_d(\mathbf{t}) \stackrel{(18)}{<} 0$ и $\eta_{\mu}(\mathbf{t}) \stackrel{(18)}{<} 0$, то условие (32) будет выполнено, если $|\eta_d(\theta)| \geq \frac{1}{1 - \beta} |\eta_{\mu}(\theta)|$ при $\theta > \theta_0 \gg 1$. Проверим справедливость последнего. Согласно (4) и (18)

$$\frac{1}{1 - \beta} \frac{|\eta_{\mu}(\theta)|}{|\eta_d(\theta)|} = \frac{1}{2(1 - \beta)} \frac{a \chi_{\mu} \mathbf{T}_{\mu}^4(\theta) - \mathbf{T}_0^4(\theta)}{\varepsilon \chi_d \mathbf{T}_d^4(\theta) - \mathbf{T}_{\mu}^4(\theta)} \leq \frac{a \alpha_{d\mu} \beta}{\varepsilon \alpha_{\mu 0}} \frac{\mathbf{T}_{\mu}^4(\theta) - \mathbf{T}_0^4(\theta)}{\mathbf{T}_d^4(\theta) - \mathbf{T}_{\mu}^4(\theta)} < 1,$$

поскольку $\frac{\mathbf{T}_{\mu}^4(\theta) - \mathbf{T}_0^4(\theta)}{\mathbf{T}_d^4(\theta) - \mathbf{T}_{\mu}^4(\theta)} \ll 1$ при $\theta > \theta_0 \gg 1$.

Итак, температура пылинки не превысит критической Y , если

$$q \leq \alpha_{d\mu} \frac{Y - T_0}{A},$$

где q — величина, входящая в правую часть системы (3) для $t = \infty$ (стабилизирующейся в процессе $t \rightarrow \infty$), иными словами, определяемая условиями (5)–(6).

Впрочем, можно утверждать большее, если учесть следующие два обстоятельства.

1. В силу (30), (32) и (23), (24) величины $T_d^f(t)$ и $T_\mu^\eta(t)$ убывают при $t \gg 1$ вплоть до предельных отрицательных значений

$$T_d^\eta(\infty) < 0, \quad T_\mu^\eta(\infty) < 0.$$

2. Усредненная температура пылинки, то есть функция $T_d = T_d^f + T_d^\eta$, растет. Поэтому

$$Y \stackrel{(31)}{\geq} \sup_t (T_d^f(t) + T_d^\eta(t)) = T_d^f(\infty) - |T_d^\eta(\infty)| \stackrel{(28)}{=} T_0 + \frac{q}{\alpha_{d\mu}} A - |T_d^\eta(\infty)|. \quad (33)$$

Тем самым

$$q \leq \alpha_{d\mu} \frac{Y - T_0 + |T_d^\eta(\infty)|}{A},$$

и потому можно считать, что

$$\widehat{q} \approx Q \stackrel{def}{=} \alpha_{d\mu} \frac{Y - T_0 + |T_d^\eta(\infty)|}{A}.$$

Но

$$|T_d^\eta(\infty)| = |T_d(\infty) - T_d^f(\infty)| \stackrel{(28)}{=} \left| Y - \left(T_0 + \frac{q}{\alpha_{d\mu}} A \right) \right| = \left| (Y - T_0) - \frac{q}{\alpha_{d\mu}} A \right| = \frac{q}{\alpha_{d\mu}} A - (Y - T_0).$$

Поэтому Q есть то самое q , которое фигурирует в системе (3) при $t = \infty$. Иными словами, Q есть q , заданное формулой (5), в которой X определяется из уравнения (6). Этим завершается доказательство основного математического результата.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Хотя само значение параметра A не фигурирует в основном математическом результате, однако этот параметр вошел в ключевую формулу (28), полученную в результате тщательного анализа, использующего исходную периодичность теплового излучения. Формула (29) задает также параметр B . Это позволяет найти величину $T_\mu^\eta(\infty) = X - T_\mu^f(\infty)$, ибо $T_\mu^f(\infty) \stackrel{(28)}{=} T_0 + \frac{q}{\alpha_{\mu 0}} B$.

Заключение

Для общего случая теплофизических параметров и характеристик теплового воздействия периодического лазерного излучения на элемент оптической системы (ЭОС) найдена формула для значения той допустимой интенсивности излучения, которая не приводит к разрушению ЭОС в результате возгорания пылинки, осевшей на ЭОС.

Получена также формула для коэффициента поглощения мощности лазерного излучения элементом оптической системы, выраженная в терминах четырех безразмерных параметров: относительной интенсивности лазерного излучения, относительной освещенности ЭОС, относительного коэффициента теплоотдачи от ЭОС к окружающему его воздуху и относительной установившейся температуры ЭОС. Первые три параметра можно считать известными в каждом конкретном случае. Остается лишь экспериментально измерить установившуюся температуру ЭОС, что позволит, подставив ее относительную величину в упомянутую формулу, получить искомый коэффициент поглощения мощности лазерного излучения элементом оптической системы.

Авторы благодарны О. А. Ивлеву, обратившему наше внимание на важность рассмотренной здесь проблематики, а также Жан-Мари Торру, любезно предоставившему нам указанные выше данные комплекса MeO. Особая благодарность А. С. Самохину, осуществившему вычисление функций q и x по формулам (7) и (8), построение серии их графиков, а также оказавшего помощь в оформлении статьи по шаблону редакции.

Список литературы (References)

- Балмашинов Р. В., Кацев Ю. В., Корнев А. Ф., Кучма И. Г., Оборотов Д. О.* Исследование лучевой стойкости зеркал с металлическим отражающим слоем под действием пикосекундных импульсов // Альманах научных работ молодых ученых Университета ИТМО. — Т. 2. — СПб.: Университет ИТМО, 2017. — С. 293.
- Balmashnov R. V., Katsev Yu. V., Kornev A. F., Kuchma I. G., Oborotov D. O.* Issledovaniye luchevoy stoykosti zerkal s metallicheskim otrazhayushchim sloyem pod deystviyem pikosekundnykh impul'sov [Study of the radiation resistance of mirrors with a metallic reflective layer under the action of picosecond pulses] // Almanac of scientific works of young scientists ITMO University. — Vol. 2. — St. Petersburg: ITMO University, 2017. — P. 293 (in Russian).
- Исаев В. К., Сонин В. В.* Об одной модификации метода Ньютона численного решения краевых задач // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1963. — Т. 3, № 6. — С. 1114–1116.
- Isaev V. K., Sonin V. V.* Ob odnoy modifikatsii metoda N'yutona chislennogo resheniya krayevykh zadach [On a modification of Newton's methods for the numerical solution of boundary problems] // Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. [Comput. Math. Math. Phys.]. — 1963. — Vol. 3, no. 6. — P. 1114–1116 (in Russian).
- Маненков А. А., Прохоров А. М.* Лазерное разрушение прозрачных твердых тел // Успехи физических наук. — 1986. — Т. 148, № 1. — С. 179–211.
- Manenkov A. A., Prokhorov A. M.* Lazernoe razrushenie prozrachnykh tverdykh tel [Laser-induced damage in solids] // Sov. Phys. Usp. — 1986. — Vol. 29, iss. 1. — P. 104–122. — DOI: 10.1070/PU1986v029n01ABEH003117 (in Russian).
- Carr C. W., Exarhos G. J., Gruzdev V. E., Ristau D., Soileau M. J.* (Editors) Laser-Induced Damage in Optical Materials 2018: 50th Anniversary Conference // Proc. SPIE «Laser Damage». — 2018. — Vol. 10805.
- Carr C. W., Trenholme J. B., Spaeth M. L.* Effect of temporal pulse shape on optical damage // Appl. Phys. Lett. — 2007. — Vol. 90. — P. 041110. — <https://doi.org/10.1063/1.2431705>
- Gallais L., Ollé A., Sozet M., Lamaignère L.* Phenomenology and mechanisms of laser damage growth on optical coatings in the sub-ps pulse regime (Conference Presentation) // Proc. SPIE 11173, Laser-induced Damage in Optical Materials 2019, 1117309 (26 November 2019). <https://doi.org/10.1117/12.2537620>
- Maeji T., Imano K., Yoshikawa S., Inoue D., Kuroyanagi S., Mori K., Hoashi E., Yamanoi K., Sarukura N., Ueda Y.* Laser energy absorption coefficient and in-situ temperature measurement of laser-melted tungsten // Fusion Engineering and Design. 2017. — Vol. 124, no. 11. — P. 287–291. — <https://doi.org/10.1016/j.fusengdes.2017.04.025>
- Papernov S.* Defect-Induced Damage // In book: Laser-Induced Damage of Optical Materials. — Taylor & Francis Group, LLC, 2015. — P. 25–74.
- Soileau M. J.* Laser-Induced Damage Phenomena in Optics: A Historical Overview // In book: Laser-Induced Damage of Optical Materials. — Taylor & Francis Group, LLC, 2015. — P. 3–8.
- Thorlabs* [Электронный ресурс]: https://www.thorlabs.com/newgrouppage9.cfm?objectgroup_id=5840 (дата обращения: 06.07.2021).
- Thorlabs* [Electronic resource]: https://www.thorlabs.com/newgrouppage9.cfm?objectgroup_id=5840 (accessed: 06.07.2021).
- Wood R. M.* Laser-Induced Damage of Optical Materials. — IOP Publishing Ltd, 2003. — 241 p.
- Zaitsev A. V., Ermolaev G. V., Polyanskiy T. A., Gurin A. M.* Study of absorption coefficient in laser cutting of metal // AIP Conference Proceedings. — 2018. — Vol. 2027. 030146. — P. 1–7. — <https://doi.org/10.1063/1.5065240>