

УДК: 550.388.2

Численная модель переноса в задачах неустойчивостей низкоширотной ионосферы Земли с использованием двумерной монотонизированной Z-схемы

Н. М. Кащенко^a, С. А. Ишанов^b, Е. В. Зубков^c

Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта,
Россия, 236016, г. Калининград, ул. А. Невского, д. 14

E-mail: ^a kaschtschenko@mail.ru, ^b sergey.ishanov@ya.ru, ^c evgenyzubkov@mail.ru

Получено 30.06.2021, после доработки — 24.08.2021.

Принято к публикации 26.08.2021.

Целью работы является исследование монотонной конечно-разностной схемы второго порядка точности, созданной на основе обобщения одномерной Z-схемы. Исследование проведено для модельных уравнений переноса несжимаемой среды. В работе описано двумерное обобщение Z-схемы с нелинейной коррекцией, использующей вместо потоков косые разности, содержащие значения из разных временных слоев. Численно проверена монотонность полученной нелинейной схемы для функций-ограничителей двух видов, как для гладких решений, так и для негладких, и получены численные оценки порядка точности построенной схемы. Построенная схема является абсолютно устойчивой, но теряет свойство монотонности при превышении шага Куранта. Отличительной особенностью предложенной конечно-разностной схемы является минимальность ее шаблона.

Построенная численная схема предназначена для моделей плазменных неустойчивостей различных масштабов в низкоширотной ионосферной плазме Земли. Одна из реальных задач, при решении которых возникают подобные уравнения, — это численное моделирование сильно нестационарных средне-масштабных процессов в земной ионосфере в условиях возникновения неустойчивости Рэлея–Тейлора и плазменных структур с меньшими масштабами, механизмами генерации которых являются неустойчивости других типов, что приводит к явлению F-рассеяния. Вследствие того, что процессы переноса в ионосферной плазме контролируются магнитным полем, в поперечном к магнитному полю направлении предполагается выполнение условия несжимаемости плазмы.

Ключевые слова: нелинейная конечно-разностная схема, Z-схема, математическое моделирование, численное моделирование, уравнение переноса, ионосфера, неустойчивость Рэлея–Тейлора, несжимаемая плазма, неустойчивость плазмы

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00361).

UDC: 550.388.2

Numerical model of transport in problems of instabilities of the Earth's low-latitude ionosphere using a two-dimensional monotonized Z-scheme

N. M. Kaschtschenko^a, S. A. Ishanov^b, E. V. Zubkov^c

Immanuel Kant Baltic Federal University,
14 A. Nevskogo st., Kaliningrad, 236016, Russia

E-mail: ^a kaschtschenko@mail.ru, ^b sergey.ishanov@ya.ru, ^c evgenyzubkov@mail.ru

Received 30.06.2021, after completion – 24.08.2021.

Accepted for publication 26.08.2021.

The aim of the work is to study a monotone finite-difference scheme of the second order of accuracy, created on the basis of a generalization of the one-dimensional Z-scheme. The study was carried out for model equations of the transfer of an incompressible medium. The paper describes a two-dimensional generalization of the Z-scheme with nonlinear correction, using instead of streams oblique differences containing values from different time layers. The monotonicity of the obtained nonlinear scheme is verified numerically for the limit functions of two types, both for smooth solutions and for nonsmooth solutions, and numerical estimates of the order of accuracy of the constructed scheme are obtained. The constructed scheme is absolutely stable, but it loses the property of monotony when the Courant step is exceeded. A distinctive feature of the proposed finite-difference scheme is the minimality of its template.

The constructed numerical scheme is intended for models of plasma instabilities of various scales in the low-latitude ionospheric plasma of the Earth. One of the real problems in the solution of which such equations arise is the numerical simulation of highly nonstationary medium-scale processes in the earth's ionosphere under conditions of the appearance of the Rayleigh–Taylor instability and plasma structures with smaller scales, the generation mechanisms of which are instabilities of other types, which leads to the phenomenon F-scattering. Due to the fact that the transfer processes in the ionospheric plasma are controlled by the magnetic field, it is assumed that the plasma incompressibility condition is fulfilled in the direction transverse to the magnetic field.

Keywords: nonlinear finite-difference scheme, Z-scheme, mathematical modeling, numerical simulation, transport equation, ionosphere, Rayleigh–Taylor instability, incompressible plasma, plasma instability

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2021, vol. 13, no. 5, pp. 1011–1023 (Russian).

Financial support. The reported study was funded by RFBR, project no. 20-01-00072.

1. Введение

Целью работы является исследование численного метода решения уравнений поперечного переноса ионосферной плазмы в низкоширотных моделях среднемасштабных и мелкомасштабных нестационарных процессов. Такие процессы в ионосферной плазме возникают при развитии различных неустойчивостей.

Одна из реальных задач, при решении которых возникают подобные уравнения, — это численное моделирование сильно нестационарных среднемасштабных процессов в земной ионосфере в условиях возникновения неустойчивости Рэля–Тейлора (НРТ). Одним из сценариев является процесс развития экваториальных плазменных пузырей (ЭПП) в ионосфере Земли из начальных неоднородностей в результате неустойчивости. В результате развития ЭПП одновременно растут вертикально вверх и удлиняются вдоль линий магнитного поля Земли [Кашенко, Мациевский, 2003]. Подобные особенности являются характерными для ЭПП на магнитном экваторе. Процессы развития ЭПП в условиях возникновения неустойчивости Рэля–Тейлора относятся к среднемасштабным и развиваются в ионосфере на геомагнитном экваторе Земли при наличии положительных значений инкремента НРТ.

При этом создаются большие градиенты концентраций и скоростей, что может приводить в этих зонах к развитию плазменных структур с меньшими масштабами, в качестве механизмов генерации которых можно отметить дрейфово-диссипативную неустойчивость, градиентно-дрейфовую неустойчивость и неустойчивость Кельвина–Гельмгольца. Последние приводят к возникновению мелкомасштабных неоднородностей и, как следствие, явлению экваториального F-рассеяния [Гершман, 1974], которое существенно влияет на точность работы спутниковых систем позиционирования, а также других космических и наземных радиоэлектронных систем.

Поэтому исследование этих процессов актуально как с практической точки зрения, так и для развития теории неустойчивостей. В частности, в теоретической работе [Sazonov, 1991] показано, что поперечное сечение вертикального канала, развитого рэлей-тейлоровского пузыря может сузиться до 1 км. Отсюда следует, что при концентрациях электронов в максимуме F-области $n_e = 10^{12} \text{ м}^{-3}$ и в вертикальном канале пузыря $n_e = 3 \cdot 10^9 \text{ м}^{-3}$, тогда градиент электронной концентрации составит

$$\nabla \ln n_e \approx 6 \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-1}.$$

Вследствие того, что процессы переноса в ионосферной плазме контролируются магнитным полем, в поперечном к магнитному полю направлении предполагается выполнение условия несжимаемости плазмы. По той же причине в продольном к магнитному полю направлении могут возникать достаточно высокие скорости теплопереноса и массопереноса.

Многие авторы исследовали экспериментально и численно процессы развития как одиночных, так и множественных ЭПП, например, это работы [Bernhardt, 2007; Kherani, 2009; Kil et al., 2009; Tulasi Ram et al., 2017; Yokoyama et al., 2014]. В работах некоторых авторов, в частности в одной из последних работ [Yokoyama et al., 2014], в которой представлена диффузионная модель развития ЭПП, учитывающая ионы O^+ и NO^+ , получены выводы о стохастизации ЭПП после его выхода во внешнюю ионосферу в результате каскада бифуркаций. На наш взгляд, это может быть связано не только со свойствами самого процесса, но и с постановкой задачи, в частности с такими факторами, как неучет ионов H^+ , некорректные свойства применяемых разностных схем. В любом случае причины такой стохастизации требуют отдельного исследования.

Используемые для одновременного моделирования таких разномасштабных процессов разностные схемы должны иметь высокое разрешение. Эти разностные схемы должны быть, с одной стороны, достаточно точными, а с другой — монотонными, поскольку механизмы

неустойчивостей могут усиливать погрешности разностных схем, особенно погрешности дисперсионного типа, что обычно приводит к нефизическим результатам.

Для решения этих проблем построено двумерное обобщение монотонной конечно-разностной схемы второго порядка точности, полученной на основе одномерной Z-схемы. В силу указанного выше свойства несжимаемости ионосферной плазмы в поперечном магнитном полю направлении исследование проведено для модельных уравнений переноса несжимаемой среды.

Используемые для моделирования таких процессов разностные схемы должны не только иметь высокое разрешение, но и быть, с одной стороны, достаточно точными, а с другой — монотонными, поскольку неустойчивости могут усиливать погрешности разностных схем, особенно погрешности дисперсионного типа, что приводит к нефизическим результатам.

Более конкретной целью работы является численное исследование точности и свойства монотонности одной из разностных схем решения уравнений поперечного переноса, полученной нелинейной коррекцией «косых разностей». Такая коррекция была предложена в работе [Кашенко и др., 2020], а в данной работе рассмотрено двумерное обобщение метода.

2. Математические модели

Запишем уравнения трехмерной модели среднемасштабных ионосферных процессов, позволяющей моделировать развитие НРТ в экваториальной ионосфере. В соответствии с [Гершман, 1974] математическая модель ионосферных процессов может быть записана в квазигидродинамическом приближении. Далее, в соответствии с уже ставшей классической монографией Б. Н. Гершмана [Гершман, 1974] математическая модель может быть упрощена различными способами для решения конкретных задач моделирования. В частности, на высотах F-области ионосферы может быть использовано диффузионное приближение, для которого $\frac{d\vec{V}_j}{dt} = 0$ [Кашенко, Мациевский, 2003]. Получаем вариант трехмерной модели, позволяющий исследовать ЭПП, возникающие в процессе развития НРТ [Кашенко, Мациевский, 2003].

В верхней части области диффузионное приближение может давать достаточно большие погрешности, а применение этого приближения на высотах внешней ионосферы для рассматриваемых задач оправдано тем, что в условиях развития пламенных пузырей вертикальная компонента скорости положительна, а характерные масштабы неоднородностей потенциала электрического поля составляют от 100 до 300 км, поэтому существенного влияния погрешности верхней области на высоты F-слоя нет.

Другое приближение использует сильную вытянутость неоднородностей плазмы вдоль геомагнитного поля, что позволяет использовать двумерные приближения уравнений, записываемые в экваториальной плоскости [Кашенко, Мациевский, 2003]. Аналогичные подходы использованы и в стандартных моделях США SAMI3/SAMI2 [Huba et al., 2008; Huba et al., 2009]. Таким образом, модель содержит следующие уравнения, которые более подробно описаны в работе [Кашенко, Мациевский, 2003].

Уравнения непрерывности ионов (концентрация электронов выражается через концентрации ионов из условия квазинейтральности ионосферной плазмы):

$$\frac{\partial n_j}{\partial t} + \nabla \cdot (n_j \vec{V}_j) = Q_j - L_j. \quad (1)$$

Уравнения движения ионов и электронов:

$$0 = -\frac{\nabla \hat{p}_j}{n_j m_j} + \frac{e_j}{m_j} (\vec{E} + \vec{V}_j \times \vec{B}) - \nu_{jn} (\vec{V}_j - \vec{V}_n) - \sum_{l \neq j} \nu_{jl} (\vec{V}_j - \vec{V}_l) + \vec{g}. \quad (2)$$

Уравнения теплопроводности ионов и электронов:

$$\frac{3}{2}n_jk\left(\frac{\partial T_j}{\partial t} + (\vec{V}_j\nabla)T_j\right) + p_j\nabla\vec{V}_j + \nabla q_j = G_j - P_j. \quad (3)$$

Уравнение потенциальности электрического поля:

$$\nabla \times \vec{E} = 0. \quad (4)$$

Уравнение непрерывности электрического тока:

$$\nabla\vec{J} \equiv \nabla \sum e_j n_j \vec{V}_j = 0, \quad (5)$$

где j — сорт заряженных частиц, ионы и электроны; \vec{V}_j — дрейфовая скорость заряженных частиц; Q_j — скорость образования ионов; L_j — скорость потерь ионов; n_j — концентрация заряженных частиц; m_j — масса заряженных частиц; e_j — заряд частиц; \widehat{p}_j — тензор давления газа заряженных частиц; v_{jn} — частоты соударений заряженных частиц с нейтралами; v_{jl} — частоты столкновений между заряженными частицами; T_j — температура заряженных частиц; q_j — плотность теплового потока; G_j, P_j — скорость нагрева и скорость охлаждения заряженных частиц; индексы указывают на типы частиц; k — постоянная Больцмана; \vec{E} — напряженность электрического поля; \vec{J} — плотность тока.

Отметим особенности правых частей в уравнениях непрерывности ионов (1) и теплопроводности (3). Слагаемые Q_j и L_j описывают процессы ионизации, зарядово-обменные реакции и реакции рекомбинации. Для задач, обсуждаемых в работе, скорость ионизации в области развития плазменных пузырей не превышает $10^7 \text{ м}^{-3}\text{с}^{-1}$ при концентрациях электронов, составляющих примерно от 10^{10} до 10^{12} м^{-3} , что определяет характерное время более 1000 с. Скорости зарядово-обменных реакций и реакций рекомбинации в F-области экваториальной ионосферы также имеют характерные времена, превышающие 1000 с.

Вследствие сильной замагниченности ионосферной плазмы F-области процессы переноса вдоль магнитного поля будут определяться столкновениями и инерцией, а поперек поля — дрейфовым движением плазмы. Благодаря условию электростатики электрическое поле потенциально:

$$\vec{E} = -\nabla\Phi, \quad (6)$$

где Φ — потенциал электрического поля.

Плазма на высотах экваториальных E- и F-областей является высокопроводящей вдоль геомагнитного поля средой, поэтому будем считать, что силовые линии геомагнитного поля эквипотенциальны. Магнитное поле Земли будем считать постоянным по времени и дипольным в соответствии с дипольной математической моделью [Фаткуллин, Ситнов, 1972], поэтому уравнение непрерывности электрического тока путем интегрирования вдоль силовых линий магнитного поля запишем в виде двумерного уравнения для потенциала Φ электрического поля:

$$\nabla_{\perp}(\widehat{\sigma}\nabla_{\perp}\Phi) = \nabla_{\perp}\vec{A}, \quad (7)$$

где $\widehat{\sigma}$ — тензор интегральных проводимостей поперек магнитного поля, ∇_{\perp} — поперечная часть оператора ∇ .

Во всех обсуждаемых моделях поперечный к магнитному полю перенос почти полностью определяется дрейфовым движением со скоростью $\vec{V}_{\perp} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}$. При этом для потенциального электрического поля выполняется равенство $\nabla_{\perp}(\vec{V}_{\perp}) = 0$, то есть в поперечном к магнитному полю направлении плазма ведет себя как несжимаемая среда. Таким образом, в двумерных

моделях и в качестве шага расщепления в трехмерных моделях необходимо решать уравнения поперечного переноса с выполнением условия $\nabla_{\perp}(\vec{V}_{\perp}) = 0$.

При численном исследовании процессов развития неустойчивостей в экваториальной F-области ионосферы для решения проблемы граничных условий использован следующий подход. Область решения выбирается так, чтобы процессы развития неустойчивостей не затрагивали приграничные зоны этой области. Поэтому на границах области использованы граничные условия следующего вида. На нижней границе:

$$Q_j = L_j, \quad G_j = P_j.$$

На боковых границах области:

$$\nabla n_j = 0, \quad \nabla T_j = 0.$$

На верхней границе в рассматриваемых задачах вертикальная компонента скорости переноса положительна, поэтому граничные условия там не ставятся.

Далее в статье в координатной форме записи через y обозначена горизонтальная координата, направленная на восток, через z — вертикальная координата, направленная вверх.

3. Численный алгоритм решения уравнения переноса

Конечно-разностные схемы, предназначенные для решения уравнений переноса в задачах моделирования НРТ, должны обладать достаточной точностью при моделировании на сравнительно грубых сетках. Основная проблема для таких задач — экспоненциальное усиление неоднородностей механизмом НРТ. При этом могут усиливаться и погрешности аппроксимации, что приводит к нефизическим результатам. Поэтому выбор метода решения уравнений переноса в задачах моделирования НРТ является ключевой проблемой.

В данной работе исследуется возможность применения в рассмотренных задачах метода решения уравнений переноса, построенного на основе рассматриваемой в работе [Кольцова и др., 2014] разностной схемы для решения одномерного уравнения конвективного переноса. Эта схема, названная *Z-схемой*, имеет второй порядок аппроксимации по времени и координате, кроме того, она абсолютно устойчива. Однако в силу теоремы Годунова эта схема немонотонна. На рис. 1 показан шаблон, соответствующий конечно-разностной одномерной *Z-схеме* [Кольцова и др., 2014].

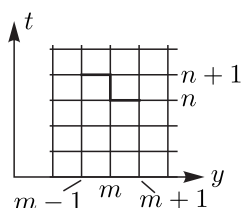


Рис. 1. Шаблон конечно-разностной одномерной *Z-схемы* для положительной скорости переноса [Кольцова и др., 2014]

Рассмотрим простейшее уравнение двумерного переноса:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + U \frac{\partial N}{\partial y} + V \frac{\partial N}{\partial z} = 0, \quad (8)$$

где N — концентрация; U и V — скорости переноса по координате y и z соответственно; t — время. На этом этапе тестирования будем считать, что $U = \text{const}$, $V = \text{const}$ и $U > 0$, $V > 0$.

Рассмотрим решение этого уравнения в виде $N = \exp(-i\omega t + ik_y y + ik_z z)$, получим дисперсионное соотношение для простейшего уравнения переноса (8):

$$\omega = k_y U + k_z V. \tag{9}$$

На рис. 2 приведен шаблон двумерной Z-схемы, здесь тройка (n, m, k) — номера узлов прямоугольной разностной сетки, соответствующие переменным t, y и z .

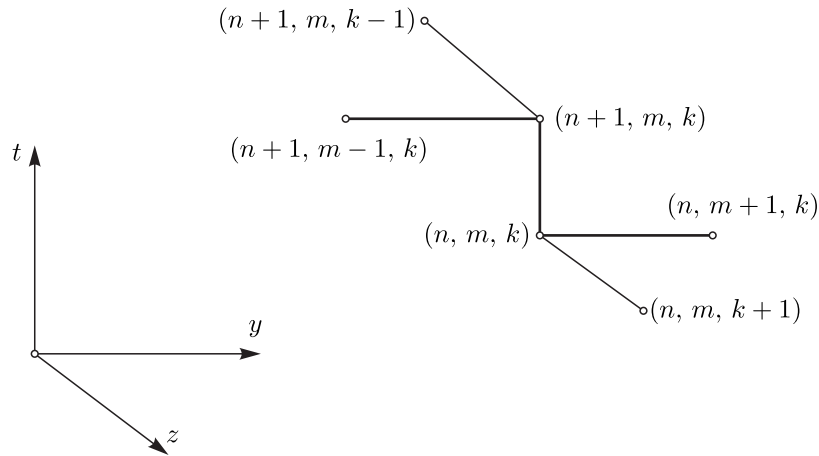


Рис. 2. Шаблон конечно-разностной двумерной Z-схемы. Первый индекс в маркировке узлов соответствует времени t , второй — переменной y , третий — переменной z

Запишем теперь двумерную линейную разностную Z-схему для этого уравнения, соответствующую шаблону на рис. 2; шаги равномерной сетки по переменным t, y и z обозначим соответственно через τ, h_y и h_z . Для удобства введем обозначения (числа Куранта по направлениям y и z соответственно):

$$K_y = \frac{\tau U}{h_y}, \quad K_z = \frac{\tau V}{h_z}. \tag{10}$$

Тогда разностная схема будет иметь вид

$$N_{mk}^{n+1} - N_{mk}^n + \frac{K_y}{2} (N_{mk}^{n+1} - N_{m-1k}^{n+1} + N_{m+1k}^n - N_{mk}^n) + \frac{K_z}{2} (N_{mk}^{n+1} - N_{mk-1}^{n+1} + N_{mk+1}^n - N_{mk}^n) = 0, \tag{11}$$

где верхний индекс — номер узлов вычислительной сетки по времени, первый нижний индекс — номер узлов сетки по пространственной переменной y , а второй — по z . В силу симметрии шаблона схема имеет второй порядок точности по времени и координатам. По этой же причине она является бездиссипативной, но при этом имеет дисперсионную погрешность. Для определения устойчивости применим спектральный признак устойчивости, для этого решение схемы (11) будем искать в виде

$$N_{mk}^n = \lambda^n e^{im\varphi} e^{ik\phi}.$$

Подставив в (11), получим уравнение

$$\lambda \left(1 + \frac{K_y}{2} (1 - e^{-i\phi}) + \frac{K_z}{2} (1 - e^{-i\varphi}) \right) = 1 - \frac{K_y}{2} (e^{i\phi} - 1) - \frac{K_z}{2} (e^{i\varphi} - 1).$$

Отсюда получаем, что $|\lambda| = 1$, что означает абсолютную устойчивость схемы.

Для получения монотонной схемы используется подход, описанный в работах [Ладонкина и др., 2009; Сафронов, 2010; Van Leer, 2006], а для коррекции схемы используются аналоги

потоков (косые потоки) [Кашенко и др., 2020]. Перепишем разностную схему (11), добавив корректирующие множители аналогично работе [Кашенко и др., 2020]:

$$N_{mk}^{n+1} - N_{mk}^n + \frac{K_y}{2} \left(2 \left(N_{mk}^{n+1} - N_{m-1k}^{n+1} \right) + f_{m+1/2} \left(N_{m+1k}^n - N_{mk}^{n+1} \right) - f_{m-1/2} \left(N_{mk}^n - N_{m-1k}^{n+1} \right) \right) + \\ + \frac{K_z}{2} \left(2 \left(N_{mk}^{n+1} - N_{mk-1}^{n+1} \right) + g_{k+1/2} \left(N_{mk+1}^n - N_{mk}^{n+1} \right) - g_{k-1/2} \left(N_{mk}^n - N_{mk-1}^{n+1} \right) \right) = 0, \quad (12)$$

где f и g с индексами — корректирующие множители. Если $f_c = 1$ и $g_c = 1$, то получаем схему (11). Если же величины f_c и g_c задать функциями

$$f_{m+1/2} = f \left(\frac{N_{mk}^n - N_{m-1k}^{n+1}}{N_{m+1k}^n - N_{mk}^{n+1}} \right) = f(r_y), \quad g_{k+1/2} = g \left(\frac{N_{mk}^n - N_{mk-1}^{n+1}}{N_{mk+1}^n - N_{mk}^{n+1}} \right) = g(r_z), \quad (13)$$

то при надлежащем выборе f и g получим монотонную схему. Так как можно построить формальное соответствие между схемами в [Ладонкина и др., 2009; Сафронов, 2010; Van Leer, 2006] и предлагаемой схемой, то для обеспечения монотонности корректирующие функции могут быть выбраны таким же образом, как в этих работах. Такое формальное соответствие может быть построено, поскольку для предлагаемой разностной схемы

$$N_{mk}^{n+1} - N_{mk}^n + \frac{K_y}{2} \left(N_{mk}^{n+1} - N_{m-1k}^{n+1} + N_{m+1k}^n - N_{mk}^n \right) + \frac{K_z}{2} \left(N_{mk}^{n+1} - N_{mk-1}^{n+1} + N_{mk+1}^n - N_{mk}^n \right) = 0$$

исходной базовой схемой является неявная монотонная схема первого порядка точности:

$$N_{mk}^{n+1} - N_{mk}^n + K_y \left(N_{mk}^{n+1} - N_{m-1k}^{n+1} \right) + K_z \left(N_{mk}^{n+1} - N_{mk-1}^{n+1} \right) = 0.$$

Для приводимых ниже экспериментов выбраны следующие виды функций-ограничителей:

- (A) $\max(0, \min(r, 1))$ (ограничитель $\min\text{mod}$ [Сафронов, 2010]);
- (B) $\max(0, \min(2r, 1), \min(r, 2))$ (ограничитель SuperBee [Сафронов, 2010]);
- (C) $\max\left(0, \frac{2r}{1+r}\right)$ (гладкий аналог (B));
- (D) $\max\left(0, r \sqrt{\frac{3}{2+r^2}}\right)$;
- (E) $\max\left(0, r \sqrt{\frac{2}{1+r^2}}\right)$.

При этом функция-ограничитель (D) в точке $r = 1$ имеет наклон $\frac{2}{3}$.

4. Результаты численных экспериментов

Погрешности приближенного решения определялись по формулам, соответствующим норме L_2 для функции N :

$$p = \sqrt{\frac{\sum_{m,k} (N_{mk} - N_{0mk})^2}{\sum_{m,k} N_{0mk}^2}},$$

где p — погрешность концентрации, N_{0mk} — точное решение. Для тестирования взято двумерное уравнение переноса (8). Область интегрирования задавалась в виде прямоугольника:

$$-200 \leq y \leq 200, \quad 100 \leq z \leq 1100.$$

Такой выбор параметров моделирования обусловлен особенностями ионосферных задач, для которых построен метод решения уравнений переноса. Профиль скоростей задавался модельно в виде $U = 100$, $V = 200$. Начальный профиль концентрации был задан двумя вариантами с помощью функций вида (I):

$$N(y, z) = 100 \left(\max \left(1 - \left(\frac{y - y_0}{a} \right)^2 - \left(\frac{z - z_0}{b} \right)^2, 0 \right) \right)^2,$$

где y_0 , a , z_0 , b — параметры профиля и функции, график которой является треугольной пирамидой (II). Функция вида (I) гладкая, а функция вида (II) непрерывная, но не гладкая. На рис. 3 показано распределение начального значения для этих вариантов, здесь использованы значения $a = 60$, $b = 150$, а размеры ненулевой зоны составляют 1/6 от размеров области по уровню 0,5. В этой серии расчетов шаг по времени выбирался равным 2/3 шага Куранта. Для этой задачи была проведена серия расчетов с разными шагами по пространственным переменным и разными видами ограничителей косых потоков. Обобщенные результаты приведены в таблицах 1–6, для каждой серии расчетов приведены показатели степени при аппроксимации погрешности в виде $O(h^p)$.

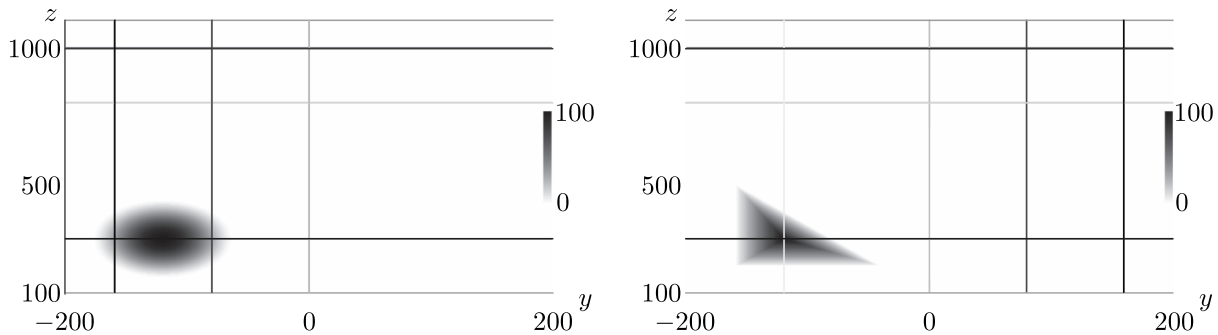


Рис. 3. Распределение начального значения для двумерного уравнения. Координаты указаны в безразмерных величинах. Градации уровней значений по равномерной шкале также в безразмерных величинах указаны в правой части каждого рисунка. Слева — вариант начального профиля (I), справа — вариант (II)

В таблице 1 приведены результаты расчетов для начального профиля типа (I) для различных размеров вычислительной сетки.

Таблица 1. Зависимость погрешности от числа точек разностной сетки для профиля (I) без коррекции

Размеры сетки	Погрешность	Погрешность сеточных разностей	Минимальное значение	Максимальное значение
101, 151	0,158	0,378	-8,32	103,46
201, 301	0,0513	0,181	-3,90	100,44
401, 601	0,0164	0,0893	-1,72	100,068
801, 1201	0,00518	0,0444	-0,737	100,016
1601, 2401	0,00164	0,0222	-0,304	100,0033

Средняя скорость убывания погрешности для этого варианта составляет 3,15, что соответствует зависимости погрешности от шага вида $O(h^{1,65})$, а для разностной производной эта зависимость имеет вид $O(h^{1,02})$. Выход значений функции (столбцы 4 и 5) за границы диапазона $[0; 100]$ демонстрирует немонотонность исходной линейной схемы (11).

В таблице 2 приведены результаты расчетов для начального профиля типа (I) для различных размеров вычислительной сетки при использовании ограничителя minmod.

Таблица 2. Зависимость погрешности от числа точек разностной сетки для профиля (I) с коррекцией с помощью minmod

Размеры сетки	Погрешность	Погрешность сеточных разностей	Минимальное значение	Максимальное значение
101, 151	0,139	0,340	0,00	99,49
201, 301	0,0528	0,207	0,00	99,87
401, 601	0,0201	0,109	0,00	99,968
801, 1201	0,00673	0,0548	0,00	99,992
1601, 2401	0,00218	0,0277	0,00	99,998

Средняя скорость убывания погрешности составляет 2,92, что соответствует зависимости погрешности от шага вида $O(h^{1,55})$, а для разностной производной эта зависимость имеет вид $O(h^{0,95})$. Столбцы 4 и 5 таблицы демонстрируют неубывание минимума и невозрастание максимума решения. Численная обработка результатов подтверждает свойство монотонности решения для этого варианта.

В таблице 3 приведены результаты расчетов для начального профиля типа (I) для различных размеров вычислительной сетки при использовании ограничителя типа (D).

Таблица 3. Зависимость погрешности от числа точек разностной сетки для профиля (I) с коррекцией с помощью (D)

Размеры сетки	Погрешность	Погрешность сеточных разностей	Минимальное значение	Максимальное значение
101, 151	0,0763	0,245	0,00	99,765
201, 301	0,0289	0,136	0,00	99,942
401, 601	0,00953	0,0727	0,00	99,9854
801, 1201	0,00307	0,0388	0,00	99,9964
1601, 2401	0,000975	0,0205	0,00	99,9991

Средняя скорость убывания погрешности в этом эксперименте составляет 3,06, что соответствует зависимости погрешности от шага вида $O(h^{1,61})$, а для разностной производной эта зависимость имеет вид $O(h^{0,90})$. Так же как для предыдущего случая, столбцы 4 и 5 таблицы демонстрируют неубывание минимума и невозрастание максимума решения. Численная обработка результатов подтверждает свойство монотонности решения для этого варианта. По сравнению с предыдущим вариантом погрешность здесь примерно в два раза меньше.

Следующая серия экспериментов была проведена для негладкого начального профиля типа (II). В таблице 4 приведены результаты расчетов для начального профиля типа (II) для различных размеров вычислительной сетки без коррекции.

Таблица 4. Зависимость погрешности от числа точек разностной сетки для профиля (II) без коррекции

Размеры сетки	Погрешность	Погрешность сеточных разностей	Минимальное значение	Максимальное значение
101, 151	0,502	1,097	-22,97	98,00
201, 301	0,259	0,850	-14,26	99,00
401, 601	0,128	0,671	-8,96	99,50
801, 1201	0,0642	0,541	-5,64	99,75
1601, 2401	0,0321	0,447	-3,552	99,88
3201, 4801	0,0161	0,398	-2,237	99,94

Средняя скорость убывания погрешности составляет 1,99, что соответствует зависимости погрешности от шага вида $O(h^{0,99})$, а для разностной производной эта зависимость имеет вид $O(h^{0,32})$. Выход значений функции (столбцы 4 и 5) за границы диапазона [0; 100] демонстрирует немонотонность исходной линейной схемы (11), причем существенно сильнее, чем для гладкого начального профиля.

В таблице 5 приведены результаты расчетов для начального профиля типа (II) для различных размеров вычислительной сетки с коррекцией minmod.

Таблица 5. Зависимость погрешности от числа точек разностной сетки для профиля (II) с коррекцией minmod

Размеры сетки	Погрешность	Погрешность сеточных разностей	Минимальное значение	Максимальное значение
101, 151	0,344	1,41	0,00	96,25
201, 301	0,187	0,848	0,00	98,12
401, 601	0,101	0,611	0,00	99,06
801, 1201	0,0540	0,471	0,00	99,53
1601, 2401	0,0280	0,369	0,00	99,77

Средняя скорость убывания погрешности составляет 1,87, что соответствует зависимости погрешности от шага вида $O(h^{0,91})$, а для разностной производной эта зависимость имеет вид $O(h^{0,49})$. Столбцы 4 и 5 подтверждают неувеличение максимума и неуменьшение минимума.

В таблице 6 приведены результаты расчетов для начального профиля типа (II) для различных размеров вычислительной сетки с коррекцией с помощью (D).

Таблица 6. Зависимость погрешности от числа точек разностной сетки для профиля (II) с коррекцией (D)

Размеры сетки	Погрешность	Погрешность сеточных разностей	Минимальное значение	Максимальное значение
101, 151	0,247	1,00	0,00	96,31
201, 301	0,125	0,642	0,00	98,16
401, 601	0,0633	0,474	0,00	99,08
801, 1201	0,0317	0,366	0,00	99,54

Средняя скорость убывания погрешности составляет 1,98, что соответствует зависимости погрешности от шага вида $O(h^{0,99})$, а для разностной производной эта зависимость имеет вид $O(h^{0,49})$. Столбцы 4 и 5 подтверждают неувеличение максимума и неуменьшение минимума в этом варианте. Погрешности здесь немного меньше, чем для ограничителя minmod.

5. Заключение

Представленные выше результаты численных экспериментов, которые описаны в § 4, а также их краткое обсуждение позволяют сделать следующие выводы.

1. Построен двумерный вариант Z-схемы, нелинейная коррекция которого с помощью косых разностей является монотонной.

2. Как для гладкого, так и негладкого начального профиля лучшей схемой из рассмотренных является схема с непрерывным ограничителем типа (D), имеющим в точке 1 наклон 2/3. Другие типы ограничителей, указанные в § 3, показали существенно более худшие результаты. В показанных в работе вариантах ограничителей были численно подтверждены монотонность рассматриваемой разностной схемы и свойство неувеличения вариации (TVD-свойство). При

превышении шага Куранта схема остается устойчивой, но становится непригодной для обсуждаемого класса задач неустойчивости, поскольку условия монотонности перестают в этом случае выполняться.

3. В отличие от работы [Кашенко и др., 2020], в которой для решения двумерных уравнений использовалась симметризованная схема расщепления, построенная в данной работе разностная схема, на взгляд авторов, позволяет построить обобщения на нерегулярные сетки, для которых схема расщепления становится неприменимой. В отличие от других подходов данный численный метод использует минимальный шаблон конечно-разностной сетки, что благоприятно сказывается на свойствах численного метода для рассматриваемого класса задач — моделях ионосферных плазменных неустойчивостей, поскольку в исследованиях авторов в более ранних работах было выявлено ухудшение качества модели при расширении конечно-разностного шаблона, вплоть до неприменимости получаемых разностных схем.

4. Особенности рассматриваемой разностной схемы в условиях постановки граничных условий общего вида и сложного поля скоростей переноса, так же как и обобщение на нерегулярные сетки, могут быть задачей дальнейших исследований.

Список литературы (References)

Гершман Б. Н. Динамика ионосферной плазмы. — М.: Наука, 1974.

Gershman B. N. Dinamika ionosfernoj plazmy [Dynamics of ionospheric plasma]. — Moscow: Nauka, 1974 (in Russian).

Кашенко Н. М., Ишанов С. А., Мацевский С. В. Эффективные алгоритмы численного моделирования среднemasштабных неоднородностей низкоширотной ионосферы // Математическое моделирование. — 2017. — Т. 29 (4). — С. 113–120.

*Kashchenko N. M., Ishanov S. A., Matsievsky S. V. Efficient algorithms of the numerical simulation of medium-scale irregularities in a low-latitude ionosphere // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2017. — Vol. 9 (6). — P. 742–748. (Original Russian paper: *Kashchenko N. M., Ishanov S. A., Matsievsky S. V. Effektivnye algoritmy chislennogo modelirovaniya srednemashtabnykh neodnorodnostey nizkoshirotnoy ionosfery // Matematicheskoe modelirovanie. — 2017. — Vol. 29 (4). — P. 113–120.*)*

Кашенко Н. М., Ишанов С. А., Зинин Л. В., Мацевский С. В. Численный метод решения двумерного уравнения переноса при моделировании ионосферы Земли на основе монотонизированной Z-схемы // Компьютерные исследования и моделирование. — 2020. — Т. 12 (1). — С. 43–58.

Kaschtschenko N. M., Ishanov S. A., Zinin L. V., Matsievsky S. V. Chislennyj metod resheniya dvumernogo uravneniya perenosa pri modelirovanii ionosfery Zemli na osnove monotonizirovannoj Z-skhemy [A numerical method for solving a two-dimensional transport equation in modeling the Earth's ionosphere based on a monotonized Z-scheme] // Komp'yuternye issledovaniya i modelirovanie. — 2020. — Vol. 12 (1). — P. 43–58 (in Russian).

Кашенко Н. М., Мацевский С. В. Математическое моделирование неустойчивостей экваториального F-слоя ионосферы // Вестник Калининградского государственного университета. — 2003. — Вып. 3. — С. 59–68.

Kaschtschenko N. M., Matsievsky S. V. Matematicheskoe modelirovanie neustojchivostej ekvatorial'nogo F-sloya ionosfery [Mathematical modeling of instabilities of the equatorial F-layer of the ionosphere] // Vestnik Kaliningradskogo gosudarstvennogo universiteta. — 2003. — Vol. 3. — P. 59–68 (in Russian).

Кольцова Э. М., Федосова Н. А., Балашкина Ю. А. Новый метод разностной аппроксимации решения для задач механики сплошных сред // Успехи в химии и химической технологии. — 2014. — Т. 28 (1). — С. 64–66.

Koltsova E. M., Fedosova N. A., Balashkina Yu. A. New method finite difference approximation of mechanics continuous media equations // Advances in Chemistry and Chemical Technology Journal. — 2014. — Vol. 28 (1). — P. 64–66 (in Russian).

Ладонкина М. Е., Неклюдова О. А., Тишкин В. Ф., Чеванин В. С. Об одном варианте существенно неосциллирующих разностных схем высокого порядка точности для систем законов сохранения // Математическое моделирование. — 2009. — Т. 21 (11). — С. 19–32.

- Ladonkina M.E., Neklyudova O.A., Tishkin V.F., Chevanin V.S.* A version of essentially nonoscillatory high-order accurate difference schemes for systems of conservation laws // *Mathematical Models and Computer Simulations*. — 2010. — Vol. 2 (3). — P. 304–316. (Original Russian paper: *Ladonkina M.E., Neklyudova O.A., Tishkin V.F., Chevanin V.S.* Ob odnom variante sushchestvenno neostsilliruiushchikh paznostnykh skhem vysokogo poriadka tochnosti dlia sistem zakonov sokhraneniia // *Matematicheskoe modelirovanie*. — 2009. — Vol. 21 (11). — P. 19–32.)
- Сафронов А. В.* Оценка точности и сравнительный анализ разностных схем сквозного счета повышенного порядка // *Вычислительные методы и программирование*. — 2010. — Т. 11 (1). — С. 137–143.
Safronov A. V. Otsenka tochnosti i sravnitelny analiz paznostnykh skhem skvoznogo scheta povyshennogo poriadka [Accuracy estimation and comparative analysis of difference schemes of high-order approximation] // *Vychislitelnye metody i programmirovaniye*. — 2010. — Vol. 11 (1). — P. 137–143 (in Russian).
- Фаткуллин М. Н., Ситнов Ю. С.* Диполярная система координат и ее некоторые особенности // *Геомагнетизм и аэрномия*. — 1972. — Т. 12 (2). — С. 333–335.
Fatkullin M. N., Sitnov Yu. S. Dipoliarnaia sistema koordinat i ee nekotorye osobennosti [Dipolar coordinates and its some features] // *Geomagnetizm i aeronomiia*. — 1972. — Vol. 12 (2). — P. 333–335 (in Russian).
- Bernhardt P.A.* Quasi-analytic models for density bubbles and plasma clouds in the equatorial ionosphere: 2. A simple Lagrangian transport model // *J. Geophys. Res.* — 2007. — Vol. 112. — P. A11310.
- Huba J.D., Joyce G., Krall J.* Three-dimensional equatorial spread F modeling // *Geophys. Res. Lett.* — 2008. — Vol. 35. — P. L10102.
- Huba J.D., Krall J., Joyce G.* Atomic and molecular ion dynamics during equatorial spread F // *Geophys. Res. Lett.* — 2009. — Vol. 36. — P. L10106.
- Kherani E. A., Abdu M. A., de Paula E. R. et al.* The impact of gravity waves rising from convection in the lower atmosphere on the generation and nonlinear evolution of equatorial bubble // *Ann. Geophys.* — 2009. — Vol. 27. — P. 1657–1668.
- Kil H., Heelis R. A., Paxton L. J., Oh S.-J.* Formation of a plasma depletion shell in the equatorial ionosphere // *J. Geophys. Res.* — 2009. — Vol. 114 (11). — P. A11302.
- Sazonov S. V.* Dissipative structures in the F-region of the equatorial ionosphere generated by Rayleigh–Taylor instability // *Planet. Space Sci.* — 1991. — Vol. 39 (12). — P. 1667–1671.
- Tulasi R. S., Ajith K. K., Yokoyama T. et al.* Vertical rise velocity of equatorial plasma bubbles estimated from Equatorial Atmosphere Radar (EAR) observations and HIRB model simulations // *J. Geophys. Res.* — 2017. — Vol. 122 (6). — P. 6584–6594.
- Van Leer B.* Upwind and high-resolution methods for compressible flow: from donor cell to residual-distribution schemes // *Commun. Comput. Phys.* — 2006. — Vol. 1 (2). — P. 192–206.
- Yokoyama T., Shinagawa H., Jin H.* Nonlinear growth, bifurcation, and pinching of equatorial plasma bubble simulated by three-dimensional high-resolution bubble model // *J. Geophys. Res.* — 2014. — Vol. 119 (12). — P. 10 474–10 482.