

УДК: 532.545

## Исследование влияния двух геометрических параметров на точность решения гидростатической задачи методом гидродинамики сглаженных частиц

И. И. Потапов<sup>a</sup>, О. В. Решетникова<sup>b</sup>

Вычислительный центр Дальневосточного отделения Российской академии наук,  
Россия, 680000, г. Хабаровск, ул. Ким-Ю-Чена, д. 65

E-mail: <sup>a</sup> potapov2i@gmail.com, <sup>b</sup> ov13r@yandex.ru

*Получено 17.06.2021, после доработки — 19.08.2021.*

*Принято к публикации 23.08.2021.*

В работе выделены два значимых геометрических параметра, влияющих на интерполяцию физических величин, в методе гидродинамики сглаженных частиц (SPH). Это коэффициент сглаживания, связывающий размер частицы с величиной радиуса сглаживания, и коэффициент объема, позволяющий корректно определять массу частицы при заданном распределении частиц в среде.

Предложена методика оценки влияния означенных параметров на точность интерполяций в методе SPH при решении гидростатической задачи. Для оценки точности численного решения вводятся аналитические функции относительной погрешности восстановления плотности и градиента давления в среде. Функции погрешности зависят от коэффициента сглаживания и коэффициента объема. Выбор конкретной интерполяции метода SPH позволяет преобразовать дифференциальную форму функций погрешности к форме алгебраического полинома. Корни такого полинома дают значения коэффициента сглаживания, обеспечивающие минимальную погрешность соответствующей интерполяции при заданном коэффициенте объема.

В работе осуществлены вывод и анализ функций относительных погрешностей плотности и градиента давления на выборке популярных ядер с различными радиусами сглаживания. Установлено, что для всех рассмотренных ядер не существует общего значения коэффициента сглаживания, обеспечивающего минимальную погрешность обеих SPH-интерполяций. Выделены представители ядер с различными радиусами сглаживания, позволяющие обеспечить наименьшие погрешности SPH-интерполяций при решении гидростатической задачи. Также определены некоторые ядра, не позволяющие обеспечить корректное интерполирование при решении гидростатической задачи методом SPH.

Ключевые слова: движение несжимаемой среды, SPH, метод гидродинамики сглаженных частиц, ядро, радиус сглаживания, интерполяционная функция, точность воспроизведения значения, законы сохранения

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ № 18-05-00530 А.

UDC: 532.545

## The two geometric parameters influence study on the hydrostatic problem solution accuracy by the SPH method

I. I. Potapov<sup>a</sup>, O. V. Reshetnikova<sup>b</sup>

Computing Center of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences,  
65 Kim U Chena st., Khabarovsk, 680000, Russia

E-mail: <sup>a</sup> potapov2i@gmail.com, <sup>b</sup> ov13r@yandex.ru

*Received 17.06.2021, after completion — 19.08.2021.*

*Accepted for publication 23.08.2021.*

The two significant geometric parameters are proposed that affect the physical quantities interpolation in the smoothed particle hydrodynamics method (SPH). They are: the smoothing coefficient which the particle size and the smoothing radius are connecting and the volume coefficient which determine correctly the particle mass for a given particles distribution in the medium.

In paper proposes a technique for these parameters influence assessing on the SPH method interpolations accuracy when the hydrostatic problem solving. The analytical functions of the relative error for the density and pressure gradient in the medium are introduced for the accuracy estimate. The relative error functions are dependent on the smoothing factor and the volume factor. Designating a specific interpolation form in SPH method allows the differential form of the relative error functions to the algebraic polynomial form converting. The root of this polynomial gives the smoothing coefficient values that provide the minimum interpolation error for an assigned volume coefficient.

In this work, the derivation and analysis of density and pressure gradient relative errors functions on a sample of popular nuclei with different smoothing radius was carried out. There is no common the smoothing coefficient value for all the considered kernels that provides the minimum error for both SPH interpolations. The nuclei representatives with different smoothing radius are identified which make it possible the smallest errors of SPH interpolations to provide when the hydrostatic problem solving. As well, certain kernels with different smoothing radius was determined which correct interpolation do not allow provide when the hydrostatic problem solving by the SPH method.

Keywords: incompressible medium motion, SPH, smoothed particle hydrodynamic, kernel, smoothing radius, interpolation function, value reproduction accuracy, conservation laws

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2021, vol. 13, no. 5, pp. 979–992 (Russian).

The work was supported by grant of RFBR № 18-05-00530 A.

## 1. Введение

Основная идея метода гидродинамики сглаженных частиц (SPH) состоит в дискретизации сплошной среды конечным набором лагранжевых частиц, каждая из которых обладает объемом, массой и является носителем физических свойств (плотности, скорости, давления и т. д.). Частицы движутся с некоторой скоростью относительно друг друга и допускают произвольную связность между собой. Это позволяет отказаться при вычислениях от генерации и перестроений расчетных сеток, заменяющих область непрерывного изменения свойств сплошной среды.

Величина некоторого свойства SPH-частицы в точке пространства  $x$  определяется совокупным, «сглаженным» вкладом от близлежащих частиц посредством весовой функции — ядра сглаживания (далее — ядра)  $W$ . Мера существенности вклада от некоторой произвольной частицы с координатами  $x'$  в значение свойства частицы с координатами  $x$  определяется пространственным расстоянием между частицами.

Для численного выражения значения свойства  $f$  в SPH-частице используется интерполяция [Monaghan, 2005; Monaghan, 1994; Егорова, 2015]

$$f_i = \sum_j^N V_j f_j W(r_{ij}, H), \quad (1)$$

полученная из интегрального представления

$$f(x_i^\alpha) = \int_{\Omega} f(x_j^\alpha) W(r_{ij}, H) dx_j^\alpha. \quad (2)$$

Здесь  $f_i = f(x_i^\alpha)$  — значение функции  $f$ , интерполируемой в  $i$ -й частице с координатами  $x_i^\alpha$ ;  $\alpha = 1, \dots, D$ ,  $D$  — размерность пространства задачи;  $V_j = m_j/\rho_j$  — локальный объем  $j$ -й частицы сплошной среды, где  $m_j$  и  $\rho_j$  — соответственно ее масса и плотность;  $W(r_{ij}, H)$  — ядро, удовлетворяющее условиям четности  $W(r_{ij}, H) = W(-r_{ij}, H)$  и компактности  $W(r_{ij}, H) = 0$ ,  $r_{ij} \geq H$ ;  $r_{ij} = \sqrt{\sum_\alpha (x_j^\alpha - x_i^\alpha)^2}$  — расстояние между частицами  $i$  и  $j$ ;  $N$  — количество  $j$ -х частиц, попавших в окрестность сглаживания с радиусом  $H$   $i$ -й частицы.

Из выражения (1) можно получить [Monaghan, 2005; Liu, 2003] две основные формулы метода SPH, позволяющие определять

– плотность среды:

$$\rho_i = \sum_j^N m_j W(r_{ij}, H); \quad (3)$$

– градиент давлений среде:

$$\nabla^\beta f_i = \sum_j^N V_j (f_i + f_j) \frac{dW(r_{ij}, H)}{dr_{ij}} \frac{x_i^\beta - x_j^\beta}{r_{ij}}, \quad (4)$$

где  $\nabla^\beta = \frac{\partial}{\partial x^\beta}$  — оператор Гамильтона.

Известно большое количество исследований, посвященных конструированию различных функций ядра и интерполяционных функций для метода сглаженных частиц [Liu, 2003; Liu, 2010]. Однако, несмотря на почти полувековую историю развития метода SPH, для анализа свойств интерполяционных функций предложено не так много методик.

Пионерной в данном направлении можно считать работу Дж. Дж. Монагана 1985 года [Monaghan, 1985], в которой изложен подход к выводу сплайн-ядер на основе фундаментального набора интерполирующих ядер Шенберга. Для оценки точности собственно интерполяционных функций используется прием разложения  $f_j$  из интегрального представления (2) в ряд Тейлора до второго члена [Liu, 2003; Liu, 2010]. Из этой операции получается, что при удовлетворении функции ядра условиям компактности и четности интерполяция (2) имеет второй порядок точности.

Однако при численной реализации SPH-метода интегральная интерполяция (2) заменяется дискретной (1) — суммированием по конечному числу кубатурных точек в окрестности  $x_i^\alpha$  радиусом  $H$ . Причем каждая из кубатурных точек наделяется физическими свойствами массы и объема — выполняется операция дискретизации расчетной области на отдельные SPH-частицы. Этим накладываются ограничения на минимально допустимые значения  $r_{ij}$  и относительное размещение учитываемых точек в окрестности  $x_i^\alpha$ . И остается нераскрытым вопрос о влиянии дискретизации расчетной области на точность интерполяций (1), используемых в SPH-методе.

В работе [Monaghan, 2005] изложен также подход к оценке точности дискретной SPH-интерполяции (1) для одномерных задач. Для этого сначала рассматривается бесконечное число соседей в области сглаживания  $N \rightarrow \infty$  и принимается, что для всех них  $V_j = \text{const}$ . Через формулу суммирования Пуассона такое представление раскладывается в ряд Фурье. Тогда дискретная интерполяция (1) по ограниченному  $N$  является частичной суммой ряда Фурье. Из этого следует, что интерполяция (1) не позволяет получить точного значения  $f_i$ , а ошибка интерполяции определяется из преобразования Фурье для ядра. Однако при определенном согласовании радиуса  $H$  с номинальным расстоянием между частицами в области сглаживания ошибку интерполяции можно свести к пренебрежительно малой величине. Аналогичный подход был применен и к оценке точности интерполяции производных в общем виде. При этом показано, что ошибка интерполяции производной функции существенно выше ошибки интерполяции самой функции. Но она также может быть приведена к пренебрежительно малой величине за счет согласования значений радиуса  $H$  и расстояния между частицами.

В данной работе предлагается методика получения количественной величины соотношения  $H$  и расстояния между частицами в области сглаживания, обеспечивающей минимизацию погрешностей SPH-интерполяций (3) и (4) для размерности пространства  $D > 1$ . Методика излагается на примере решения гидростатической задачи. При этом рассмотрено влияние двух параметров дискретизации расчетной области — коэффициента сглаживания и коэффициента объема SPH-частицы — на точность воспроизведения в ней плотности и градиента давления.

## 2. Ядро SPH и коэффициент сглаживания

В настоящий момент в литературе по методу SPH не наблюдается устоявшейся терминологии при описании структуры ядер. В работе при описании SPH-метода принята нотация, близкая к работе Монагана [Monaghan, 2005].

Радиусом сглаживания ядра называется размерная величина  $H$ , определяемая как расстояние от центра сглаживаемой частицы  $i$  до границы, за которой функция ядра  $W$  принимает нулевое значение (рис. 1). Радиус сглаживания выражается как  $H = hR$ , где  $h$  — сглаживающая длина (размерная величина),  $R$  — безразмерный радиус сглаживания. Сглаживающая длина  $h = kd$ , используемая как физический масштаб при построении функций ядра, определяется через размер  $d$  частицы и коэффициент сглаживания  $k$ . В итоге обобщенно функцию ядра представим как

$$W(r_{ij}, k, d, R) = \begin{cases} W_p(r_{ij}, k, d), & 0 \leq \frac{r_{ij}}{kd} \leq R, \\ 0, & \frac{r_{ij}}{kd} > R, \end{cases} \quad (5)$$

где  $W_p(r_{ij}, h)$  — порождающая функция ядра.

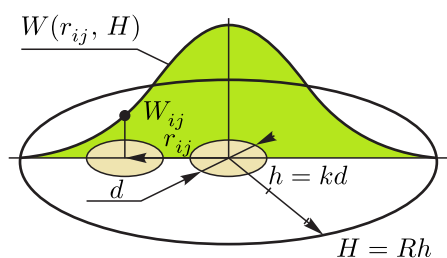


Рис. 1. Графическое представление ядра  $W(r_{ij}, H)$  SPH-метода как функции одной переменной  $r_{ij}$  и трех неявных параметров:  $d$  — размера частицы,  $k$  — коэффициента сглаживания и  $R$  — безразмерного радиуса сглаживания

Однако часто [Liu, 2003; Liu, 2010; Monaghan, 1985; Monaghan, 2005] функция ядра с учетом связи  $h = kd$  записывается в частной упрощенной форме:

$$W = W(r_{ij}, h, R).$$

Мы будем использовать обе формы записи функций ядер при их описании, переходя при анализе ядер к более полной форме (5).

Отметим, что достаточно часто величину  $h$  некорректно называют радиусом сглаживания ядра [Liu, 2006; Monaghan, 1985], что допустимо лишь в случаях, когда  $R = 1$ . Проводя аналогию с регулярными сеточными методами, можно соотнести величину  $h$  с шагом сетки, тогда как величина  $R$  эквивалентна размеру сеточного шаблона. Соответственно, чем больше  $R$ , тем выше может быть степень аппроксимации получаемого дискретного аналога [Monaghan, 1985].

Количество частиц, участвующих в интерполяции свойства SPH-методом, зависит от характерного размера  $d$ , связанного со сглаживающей длиной  $h$  через коэффициент сглаживания  $k$ . Последний в свою очередь зависит как минимум от размерности задачи и от способа дискретизации расчетной области. Экспериментальными исследованиями было также показано, что требуемая величина  $k$  при прочих равных условиях индивидуальна для разных функций ядра [Monaghan, 1994]. Влияние  $k$  на решение тестовой задачи будет рассмотрено ниже.

### 3. Обзор ядер SPH

Традиционно при решении задач механики сплошной среды SPH-методом используются ядра с  $R > 1$ . Для получения большей гладкости решения часто используются ядра со значением  $R = 3$ , например:

– суперядро Гаусса [Monaghan, 2005]:

$$W = A_D^S \begin{cases} \left( \frac{3}{2} - \left( \frac{r_{ij}}{h} \right)^2 \right) \exp \left( - \left( \frac{r_{ij}}{h} \right)^2 \right), & 0 \leq \frac{r_{ij}}{h} \leq 3, \\ 0, & \frac{r_{ij}}{h} < 3, \end{cases} \quad (6)$$

где  $A_D^S = \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \frac{2}{\pi h^2}, \frac{1}{16\pi h^3 e^{-4}} \right)$  — в одно-, двух- и трехмерном пространстве соответственно;

– ядро Морриса [Morris, 1997]:

$$W = A_D^M \begin{cases} \left(3 - \frac{r_{ij}}{h}\right)^5 - 6\left(2 - \frac{r_{ij}}{h}\right)^5 + 15\left(1 - \frac{r_{ij}}{h}\right)^5, & 0 \leq \frac{r_{ij}}{h} \leq 1, \\ \left(3 - \frac{r_{ij}}{h}\right)^5 - 6\left(2 - \frac{r_{ij}}{h}\right)^5, & 1 \leq \frac{r_{ij}}{h} \leq 2, \\ \left(3 - \frac{r_{ij}}{h}\right)^5, & 2 \leq \frac{r_{ij}}{h} \leq 3, \\ 0, & \frac{r_{ij}}{h} > 3, \end{cases} \quad (7)$$

где  $A_D^M = \left(\frac{120}{h}, \frac{7}{478\pi h^2}, \frac{3}{395\pi h^3}\right)$ .

Также очень широко используются ядра с  $R = 2$ , например:

– В-сплайн Монагана [Monaghan, 2005; Monaghan, 1985]:

$$W = A_D^B \begin{cases} \frac{2}{3} - \left(\frac{r_{ij}}{h}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{r_{ij}}{h}\right)^3, & 0 \leq \frac{r_{ij}}{h} \leq 1, \\ \frac{1}{6}\left(2 - \frac{r_{ij}}{h}\right)^3, & 1 \leq \frac{r_{ij}}{h} \leq 2, \\ 0, & \frac{r_{ij}}{h} > 2, \end{cases} \quad (8)$$

где  $A_D^B = \left(\frac{1}{h}, \frac{15}{7\pi h^2}, \frac{3}{2\pi h^3}\right)$ ;

– ядро Лю с коллегами [Liu, 2010]:

$$W^L = A_D^L \begin{cases} \frac{2}{3} - \frac{9}{8}\left(\frac{r_{ij}}{h}\right)^2 + \frac{19}{24}\left(\frac{r_{ij}}{h}\right)^3 - \frac{5}{32}\left(\frac{r_{ij}}{h}\right)^4, & 0 \leq \frac{r_{ij}}{h} \leq 2, \\ 0, & \frac{r_{ij}}{h} > 2, \end{cases} \quad (9)$$

где  $A_D^L = \left(\frac{1}{h}, \frac{15}{7\pi h^2}, \frac{315}{208\pi h^3}\right)$ ;

– ядро Джонсона с коллегами [Liu, 2010]:

$$W = A_D^J \begin{cases} \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\frac{r_{ij}}{h} + \frac{3}{16}\left(\frac{r_{ij}}{h}\right)^2, & 0 \leq \frac{r_{ij}}{h} \leq 2, \\ 0, & \frac{r_{ij}}{h} > 2, \end{cases} \quad (10)$$

где  $A_D^J = \left(\frac{1}{h}, \frac{2}{\pi h^2}, \frac{5}{4\pi h^3}\right)$ ;

– ядро Дисбрана [Desbrun, 1996]:

$$W = A_D^D \begin{cases} \left(2 - \frac{r_{ij}}{h}\right)^2, & 0 \leq \frac{r_{ij}}{h} \leq 2, \\ 0, & \frac{r_{ij}}{h} > 2, \end{cases} \quad (11)$$

где  $A_D^D = \left(\frac{1}{4h}, \frac{5}{16\pi h^2}, \frac{15}{64\pi h^3}\right)$ .

Ядра с радиусом сглаживания  $R \geq 2$  обеспечивают малую чувствительность к численной неустойчивости, возникающей при расчетах функций давления [Liu, 2003]. Однако наряду с достоинствами ядра с  $R \geq 2$  имеют ряд недостатков [Daviet, 2016; Liu, 2003], обусловленных ошибками интерполяции плотности, которые возникают:

- на свободной поверхности среды, что приводит к нефизичной подвижности частиц;
- на границах скольжения, при движении по ним тонких слоев частиц (2–4 частицы), что приводит к эффектам нефизического отталкивания потока частиц от границ скольжения.

Означенные проблемы ядер с  $R \geq 2$  требуют введения дополнительных компенсирующих алгоритмов при вычислении плотности на границах расчетной области [Liu, 2003; Monaghan, 1985]. Однако вышеприведенные ошибки интерполяции переходят в разряд некомпенсируемых при моделировании гранулированных сред. В данном случае ядра с  $R \geq 2$  не позволяют корректно представить движение самостоятельных гранул среды без введения дополнительных поправок в реологическую модель.

Отдельно стоит отметить тот факт, что чем больше безразмерный радиус сглаживания  $R$ , тем более трудоемкими становятся вычисления [Liu, 2003; Monaghan, 1985] при решении конкретной задачи.

Известны также SPH-реализации с компактным ядром  $R = 1$ , например ядро Мюллера с коллегами [Muller, 2003]:

$$W = A_D^{Mu} \begin{cases} \left(1 - \left(\frac{r_{ij}}{h}\right)^2\right)^3, & 0 \leq \frac{r_{ij}}{h} \leq 1, \\ 0, & \frac{r_{ij}}{h} > 1, \end{cases} \quad (12)$$

где  $A_D^{Mu} = \left(\frac{35}{16h}, \frac{4}{\pi h^2}, \frac{315}{64\pi h^3}\right)$ .

Компактные ядра с  $R = 1$  позволяют минимизировать при расчетах ошибки интерполяции плотности на границах области.

В работе [Потапов, 2021] для моделирования гранулированных сред предложено составное ядро с  $R = 1$ . Особенность его в том, что выражение для производной ядра сглаживания не является результатом дифференцирования последнего, а получено из другой порождающей функции. Здесь приведена модификация составного ядра только для двумерного пространства:

$$W = \frac{15}{13(kd)^2} \begin{cases} \left(1 - \left(\frac{r_{ij}}{kd}\right)^2\right)^2 \left(1 - \left(4 - \frac{52}{5\pi}\right)\left(\frac{r_{ij}}{kd}\right)^2\right), & 0 \leq \frac{r_{ij}}{kd} \leq 1, \\ 0, & \frac{r_{ij}}{kd} > 1, \end{cases} \quad (13a)$$

$$\frac{dW}{dr_{ij}} = -\frac{1369k^2}{28\pi(kd)^3(74k - 63)} \begin{cases} \frac{84}{37}k - 2\frac{r_{ij}}{kd}, & 0 \leq \frac{r_{ij}}{kd} \leq 1, \\ 0, & \frac{r_{ij}}{kd} > 1. \end{cases} \quad (13b)$$

Отметим, что для этого составного ядра выполняются условия сохранения массы и плотности в свободной SPH-частице, что позволяет правильно восстанавливать их поля на границах расчетной области, в том числе и при наличии структурных изменений каркаса гранулированной среды [Потапов, 2021].

#### 4. Коэффициент объема SPH-частицы

При SPH-моделировании необходимо выполнить дискретизацию сплошной расчетной области на множество подобластей с последующим переносом свойств подобласти на SPH-частицу. Для однородных сред дискретизация производится одинаковыми частицами; для неоднородных сред принимается, что частицы имеют одинаковые размеры, но различную массу. Однако в любом случае масса SPH-частицы строго неизменна в ходе моделирования.

Масса  $m$  каждой частицы среды, находящейся в естественном ненагруженном состоянии, определяется из выражения

$$m = \rho_0 V, \quad (14)$$

где  $\rho_0$  — плотность среды в естественном состоянии,  $V$  — объем SPH-частицы.

Существуют различные способы выделения подобластей в сплошной среде.

Часто используемый простейший прием [Monaghan, 1985; Liu, 2003; Liu, 2010] заключается в разбиении общего объема среды на равные кубы со стороной  $d$ , объемом  $V = d^3$  и массой  $m = \rho_0 d^3$ , сконцентрированной в центре каждого куба. Таким образом, сплошная среда делится на множество частиц, равномерно распределенных по узлам кубической решетки дискретизации на расстоянии  $d$  друг от друга. Длина  $d$  при этом рассматривается как характерный размер SPH-частицы.

Другой, гексагональный прием дискретизации среды [Кривцов, 2002] предполагает разбиение расчетной области на шестигранные призмы, каждое ребро которой также имеет длину  $d$ . Объем ячейки гексагональной решетки отличается от объема куба, и соответственно ему должна определяться концентрируемая в ячейке масса.

Существуют и другие способы разбиения объема расчетной области. Поэтому в общем случае (14) можно выразить как

$$m = a_p d^D d_0^{3-D} \rho_0, \quad (15)$$

где  $a_p$  — коэффициент объема,  $D$  — размерность задачи,  $d_0$  — характерный размер частицы по нерасчетному измерению.

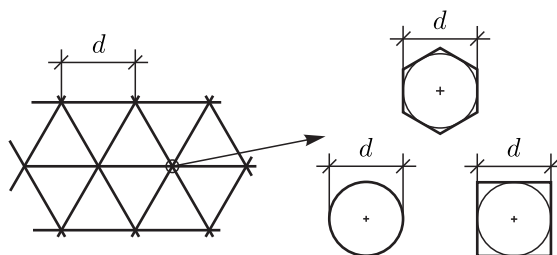


Рис. 2. Дискретизация двумерной сплошной расчетной области треугольной решеткой: масса одной SPH-частицы концентрируется в узле решетки и может вариативно определяться исходя из площади геометрической фигуры соответственного габарита  $d$

В настоящей работе рассматривается случай использования октаэдральной решетки дискретизации с длиной ребра  $d$ . Двумерный ее аналог получается путем развертки октаэдра, что дает плоскую треугольную решетку дискретизации (рис. 2), в узлах которой концентрируется масса. В работе рассмотрено три варианта представления объема SPH-частицы при данном способе дискретизации с целью исследования влияния коэффициента объема на точность интерполяций: через площади шестиугольника, круга и квадрата. Им соответствуют значения коэффициентов  $a_p = \left( \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\pi}{4}, 1 \right)$ .



### 5. Методика анализа точности интерполяций

Для анализа влияния коэффициента сглаживания и коэффициента объема на точность интерполяций в методе SPH, получаемых для ядер (6)–(13), была выбрана задача о тяжелом слое однородной среды, находящемся в состоянии покоя (рис. 3). При этом в слое реализуется гидростатическое распределение давления, градиент которого определяется по формулам

$$P = \rho_0 g y, \quad \frac{dP}{dy} = \rho_0 g, \quad \frac{dP}{dx} = 0. \tag{16}$$

Здесь  $x, y$  — горизонтальная и вертикальная координаты,  $g$  — ускорение свободного падения,  $\rho_0$  — естественная плотность среды.

Введем функции относительных погрешностей восстановления плотности и градиента давления в частице для решаемой задачи как

$$\varepsilon_\rho(k, a_p) = \frac{\rho_i}{\rho_0} - 1 \quad \text{и} \quad \varepsilon_{\nabla P}(k, a_p) = \frac{1}{\rho_0 g} \frac{dP_i}{dy} - 1. \tag{17}$$

Выражения (17) позволяют оценить точность восстановления аналитического решения (16) при использовании некоторой функции ядра в зависимости от параметров  $a_p$  и  $k$ .

Вид функций восстановления плотности  $\rho_i$  и градиента давления  $\frac{dP_i}{dy}$  в частице определяется способом дискретизации и значением радиуса сглаживания используемого ядра. Для плотной двумерной упаковки частиц общий вид выражения для получения интерполяционной плотности  $\rho_i$  в частице (3) можно представить как

$$\rho_i = a_p d^2 d_0 \rho_0 \begin{cases} W(0) + 6W(d), & R = 1; \\ W(0) + 6(W(d) + W(2d) + W(\sqrt{3}d)), & R = 2; \\ W(0) + 6(W(d) + W(2d) + W(\sqrt{3}d) + W(3d) + 2W(\sqrt{7}d)), & R = 3. \end{cases} \tag{18}$$

Здесь согласно (5)  $W(c) = W(r_{ij} = c, kd, R)$  и представляет значение ядра при расстоянии между парой частиц, кратном целому  $d$ .

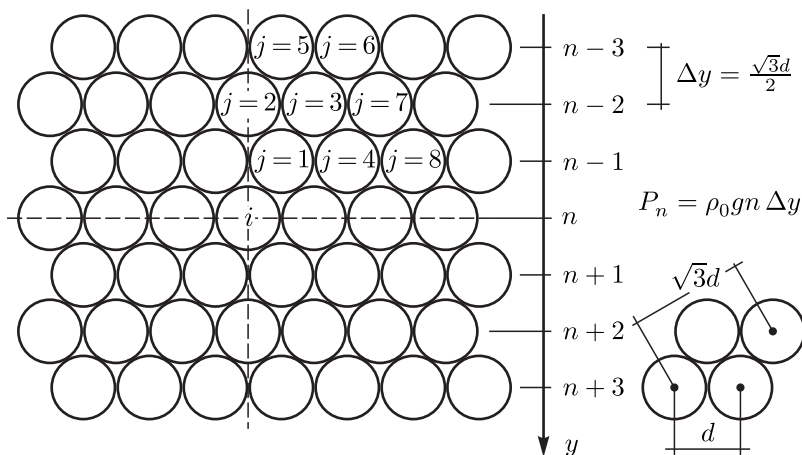


Рис. 3. Схема плотного размещения частиц при решении плоской задачи гидростатики: давление на уровне  $n$  зависит от его глубины, а градиент давления в частице  $i$  формируется с учетом давлений в  $j$ -х соседях (подробнее см. в тексте)

Для определения вертикальной компоненты градиента давлений  $\frac{dP_i}{dy}$  воспользуемся формулой (4). При этом необходимо учитывать расположение частицы по глубине. Давление на уровне  $n$  в объеме среды (см. рис. 3) вычисляется из (17) как

$$P_n = \rho_0 g \Delta y n, \quad (19)$$

где  $\Delta y$  — расстояние между слоями частиц,  $n$  — номер уровня. Тогда сумма давлений между парой частиц для набора пронумерованных на рис. 2 соседей  $P_i + P_j$  выражается как

$$P_i + P_j = \rho_0 g \frac{\sqrt{3}}{2} d \begin{cases} n + n - 1, & j = 1, 4, 8; \\ n + n - 2, & j = 2, 3, 7; \\ n + n - 3, & j = 5, 6. \end{cases} \quad (20)$$

В итоге выражение для вертикальной компоненты градиента давлений  $\frac{dP_i}{dy}$  с учетом уже всех соседей в зависимости от  $R$  будет определяться формулой

$$\frac{dP_i}{dy} = a_p d^2 d_0 \rho_0 g \frac{\Delta y}{d} \begin{cases} 2 \sqrt{3} W'(d), & R = 1; \\ 2 \sqrt{3} (W'(d) + 2W'(2d)) + 6W'(\sqrt{3}d), & R = 2; \\ 2 \sqrt{3} (W'(d) + 2W'(2d) + 3W'(3d)) + 6W'(\sqrt{3}d) + 28 \sqrt{\frac{3}{7}} W'(\sqrt{7}d), & R = 3. \end{cases} \quad (21)$$

Здесь  $W'(c) = \frac{dW(r_{ij}=c, kd, R)}{dr_{ij}}$ .

## 6. Сравнительный анализ ядер SPH

Сравнительный анализ SPH-ядер (6)–(13) проводился путем оценки по функциям относительной погрешности (17) величин  $\varepsilon_\rho(k, a_p)$  и  $\varepsilon_{\nabla P}(k, a_p)$ . Здесь коэффициент сглаживания  $k$  является переменной, поиск оптимальных значений которой вызывает наибольший практический интерес, а коэффициент объема  $a_p$  — фиксируемым параметром, который масштабирует функции  $\varepsilon_\rho(k, a_p)$  и  $\varepsilon_{\nabla P}(k, a_p)$  в зависимости от представления объема SPH-частицы при заданном способе дискретизации.

Будем считать, что рассматриваемые ядра обладают эквивалентной точностью, если для них выполняются условия

$$|\varepsilon_\rho(k, a_p)| \leq \varepsilon, \quad |\varepsilon_{\nabla P}(k, a_p)| \leq \varepsilon, \quad 0,75 \leq k \leq 1,25, \quad (22)$$

где  $\varepsilon$  — малая величина, на практике устанавливаемая в интервале  $0,001 \leq \varepsilon \leq 0,01$  [Monaghan, 2005]. Для определенности примем к рассмотрению верхнюю границу, то есть  $\varepsilon = 0,01$ .

На рис. 4–6 приведены графики функций  $\varepsilon_\rho(k, a_p)$  и  $\varepsilon_{\nabla P}(k, a_p)$ , из которых следует, что использование коэффициентов объема  $a_p = 1$  и  $a_p = \pi/4$  (кривые 2, 3 на рис. 4–6) приводит к нарушению условий (22), поэтому дальнейший анализ будет производиться только для случая  $a_p = \sqrt{3}/2$  (кривые 1 на рис. 4–6). Для краткости обозначим

$$\varepsilon_\rho(k) = \varepsilon_\rho(k, \sqrt{3}/2), \quad \varepsilon_{\nabla P}(k) = \varepsilon_{\nabla P}(k, \sqrt{3}/2). \quad (23)$$

Из кривых 1 на графиках рис. 4–6 следует, что для большинства рассмотренных ядер условия (23) выполняются. Однако исследование функций  $\varepsilon_\rho(k)$  и  $\varepsilon_{\nabla P}(k)$  показало, что для всех рассмотренных ядер не существует общих корней  $k_0$  таких, что  $\varepsilon_\rho(k_0) = \varepsilon_{\nabla P}(k_0) = 0$ . Следовательно,

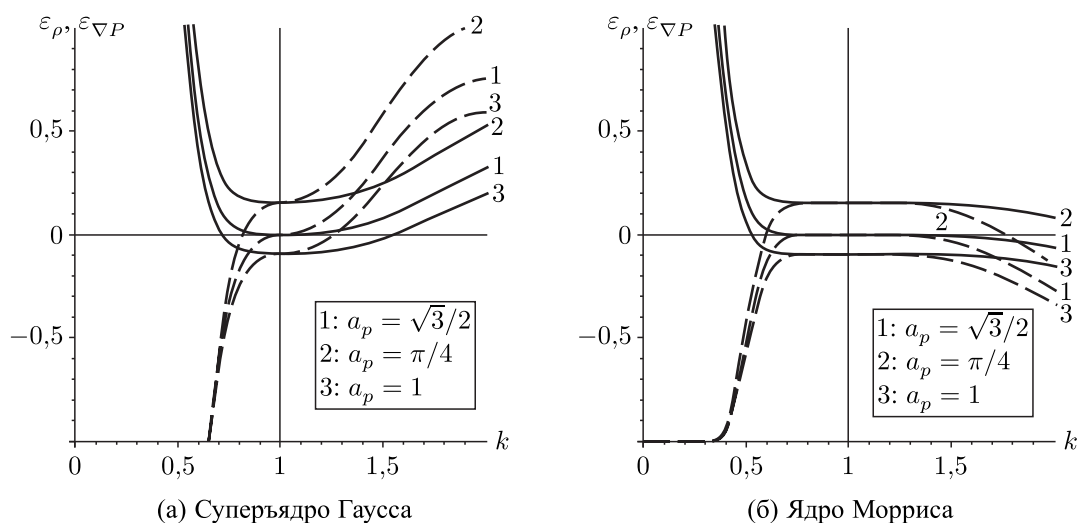


Рис. 4. Графики функций относительных погрешностей SPH-интерполяций  $\varepsilon_\rho(k, a_p)$  (сплошные линии) и  $\varepsilon_{\nabla P}(k, a_p)$  (штриховые линии) от безразмерной переменной  $k$  при некоторых значениях  $a_p$  для ядер с  $R = 3$  (обозначения см. в тексте)

Таблица 1. Множества корней  $k_\varepsilon$  функций  $\varepsilon_\rho(k)$  и  $\varepsilon_{\nabla P}(k)$  и соответствующие им значения относительных погрешностей SPH-интерполяций на рассматриваемом интервале значений аргумента

Ядро (выражающая его формула)	$k_\varepsilon$	$\varepsilon_\rho(k_\varepsilon)$	$\varepsilon_{\nabla P}(k_\varepsilon)$
Суперъядро Гаусса (6)	0,99435	0,00070	0
	1,05898	-0,00015	0
Ядро Морриса (7)	0,85834	0	-0,00078
	1,15824	0	0,00144
Ядро Монагана (8)	1,01578	-0,00412	0
	0,87869	0	-0,02780
Ядро Лю (9)	1,13488	0	0,02881
	0,97723	0,02027	0
Ядро Джонсона (10)	1,17497	-0,00167	0
	0,91494	0	0,42008
Ядро Дисбрана (11)	1,12303	0	-0,03923
	1,23147	0	0,03006
Ядро Мюллера (12)	1,06199	0,06506	0
	1,20768	0,05405	0
Составное ядро (13)	—	—	—
	0,91716	0,25791	0
Ядро Мюллера (12)	1,23110	-0,10059	0
	0,84933	0	$\gg 1$
Составное ядро (13)	1,05306	0	-0,84425
	0,99925	0,00076	0
Составное ядро (13)	0,99963	0	-0,00331

возникает необходимость выбора значения корня только одной из функций для использования в обеих интерполяциях (3) и (4) при практических вычислениях.

В таблице 1 приведены полученные в ходе исследования функций  $\varepsilon_\rho(k)$  и  $\varepsilon_{\nabla P}(k)$  наборы их собственных корней  $k_\varepsilon$  для рассматриваемых ядер, а также соответствующие этим  $k_\varepsilon$  величины получаемых относительных погрешностей. Данные таблицы 1 демонстрируют соответствие результатов анализа по предложенной методике выводам о точности SPH-интерполяций из ра-

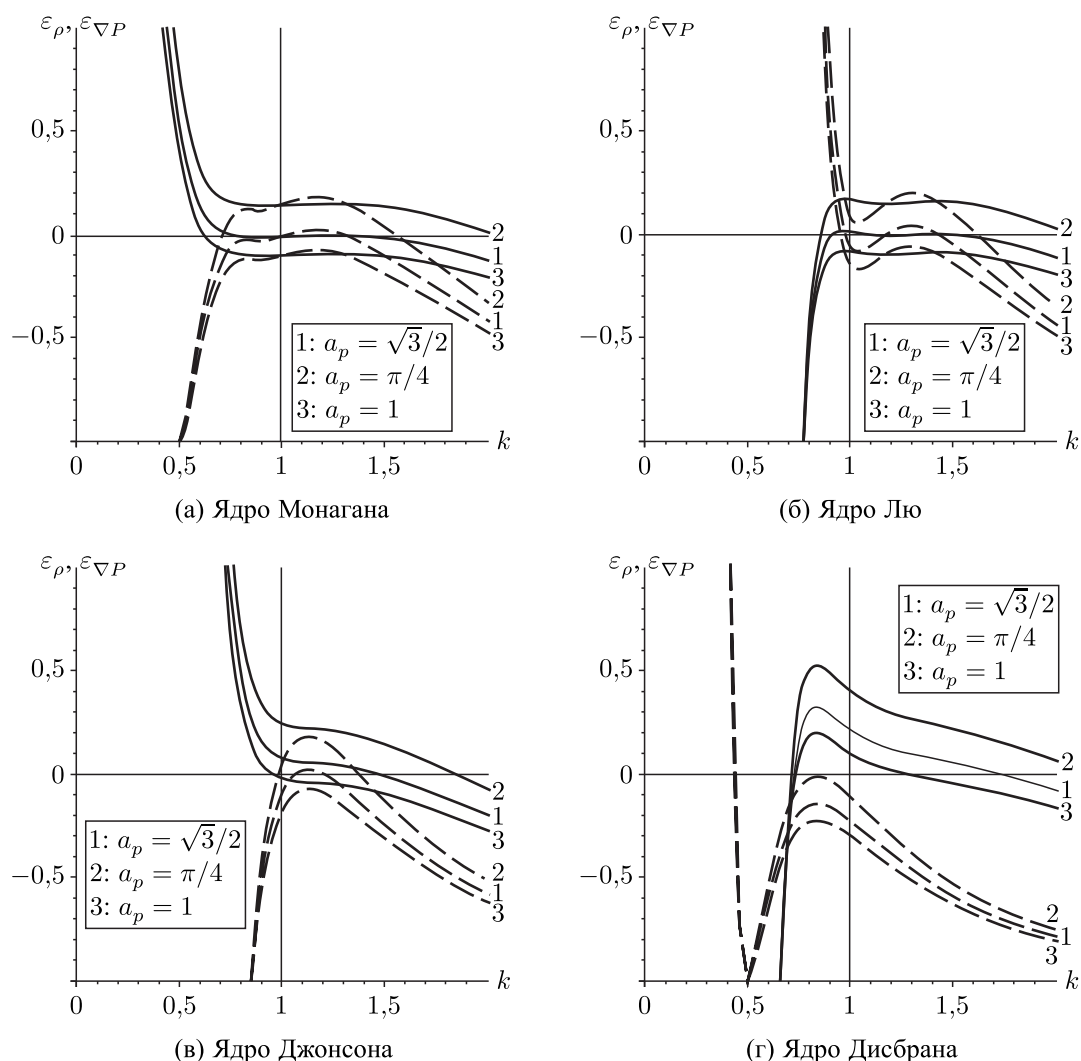


Рис. 5. Графики функций относительных погрешностей SPH-интерполяций  $\varepsilon_\rho(k, a_p)$  (сплошные линии) и  $\varepsilon_{\nabla P}(k, a_p)$  (штриховые линии) от безразмерной переменной  $k$  при некоторых значениях  $a_p$  для ядер с  $R = 2$  (обозначения см. в тексте)

боты [Monaghan, 2005]: достижимые погрешности восстановления градиента давлений при значении  $k$ , не являющемся корнем для  $\varepsilon_{\nabla P}(k)$ , — неоптимальном — в общем на порядок выше, чем погрешности восстановления плотности при аналогичном неоптимальном  $k$ .

В тестовых вычислениях авторы использовали значения  $k_\varepsilon$ , удовлетворяющие условию  $\varepsilon_{\nabla P}(k_\varepsilon) = 0$  (таблица 1). В пользу такого выбора свидетельствует, в частности, факт, что при этом оказывается минимальной суммарная погрешность  $\varepsilon_\rho(k_\varepsilon) + \varepsilon_{\nabla P}(k_\varepsilon)$ .

Сведения таблицы 1 также позволяют определять, как при означенном выборе  $k_\varepsilon$  будет вести себя плотная упаковка частиц с течением времени. Положительные значения  $\varepsilon_\rho(k_\varepsilon)$  будут давать завышение плотности в частице, что приведет к расширению расчетного объема среды; отрицательные значения  $\varepsilon_\rho(k_\varepsilon)$  будут приводить к обратному эффекту.

Также из таблицы 1 видно, что ядра Мюллера, Джонсона и Дисбрана не обеспечивают выполнение условия (22) и не могут использоваться для решения рассматриваемой задачи.

Отметим, что ядра с  $R = 3$  характеризуются наличием диапазона  $k$ , на котором функции погрешностей (17) нечувствительны к его изменениям. Например, для ядра Морриса такой диа-

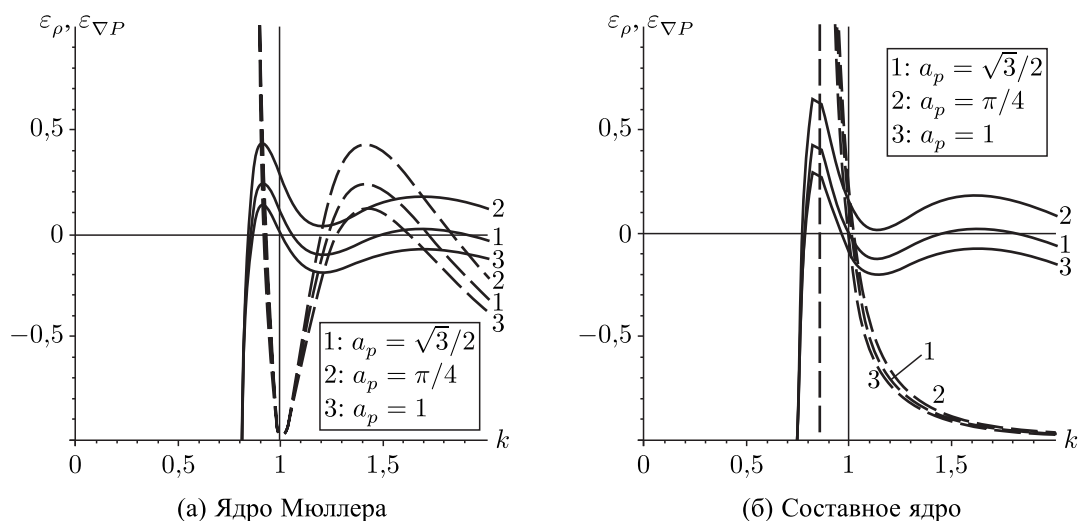


Рис. 6. Графики функций относительных погрешностей SPH-интерполяций  $\varepsilon_\rho(k, a_p)$  (сплошные линии) и  $\varepsilon_{\nabla P}(k, a_p)$  (штриховые линии) от безразмерной переменной  $k$  при некоторых значениях  $a_p$  для ядер с  $R = 1$  (обозначения см. в тексте)

пазон нечувствительности распространяется на весь рассматриваемый интервал  $k$ :  $|\varepsilon_\rho(k)| < 0,14\varepsilon$ ,  $|\varepsilon_{\nabla P}(k)| < 0,14\varepsilon$  при  $k = [0,75, 1,25]$ . Для суперъядра Гаусса диапазон нечувствительности гораздо уже:  $|\varepsilon_\rho(k)| < \varepsilon$ ,  $|\varepsilon_{\nabla P}(k)| < \varepsilon$  при  $k = [0,94, 1,04]$ . При  $R < 3$  таких диапазонов нечувствительности на графиках  $\varepsilon_\rho(k)$  и  $\varepsilon_{\nabla P}(k)$  не наблюдается.

## 7. Заключение

В работе предложена методика оценки влияния коэффициентов сглаживания и объема на погрешность восстановления величин плотности и градиента давления при SPH-моделировании. Анализ результатов реализации методики показал ее валидность и согласованность с известными данными. Для ряда ядер из рассмотренной выборки аналитически получены значения коэффициента сглаживания  $k$ , обеспечивающие достижение минимальной погрешности решения верификационной задачи при заданном способе дискретизации среды.

Методика позволяет оценить применимость ядер для решения различных задач методом SPH. В частности, на примере двумерной задачи гидростатики показано следующее:

- ядра Мюллера, Джонсона и Дисбрана не удовлетворяют условиям сохранения (22) и не могут использоваться для решения рассматриваемой задачи;
- наилучшими из рассмотренных для своего радиуса сглаживания являются ядра Морриса ( $R = 3$ ), Лю ( $R = 2$ ) и авторское составное ядро ( $R = 1$ ).

## Список литературы (References)

- Егорова М. С., Паршиков А. Н. Численное моделирование разрушения хрупких материалов методом SPH // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. — 2015. — Т. 16, № 4.  
 Egorova M. S., Parshikov A. N. SPH Modeling of Brittle Materials Failure Physical // Chemical Kinetics in Gas Dynamics. — 2015. — Vol. 16, no. 4. (Original Russian paper: Egorova M. S., Parshikov A. N. Chislennoye modelirovaniye razrusheniya khрупких materialov metodom SPH // Chemical Kinetics in Gas Dynamics. — 2015. — Vol. 16, no. 4.)

- Кривцов А. М., Кривцова Н. В.* Метод частиц и его использование в механике деформируемого твердого тела // Дальневосточный математический журнал ДВО РАН. — 2002. — Т. 3, № 2. — С. 254–276.  
*Krivtsov A. M., Krivtsova N. V.* Metod chastits i yego ispol'zovaniye v mekhanike deformiruyemogo tverdogo tela [Particle method and its use in solid mechanics] // Dal'nevostochnyy matematicheskiy zhurnal DVO RAN. — 2002. — Vol. 3, no. 2. — P. 254–276 (in Russian).
- Потапов И. И., Решетникова О. В.* Использование составного ядра в методе SPH для моделирования движения сыпучих материалов // Вычислительные технологии. — 2021. — Т. 26, № 1. — С. 50–61.  
*Potapov I. I., Reshetnikova O. V.* Usage of composite kernel in the SPH method for simulating the movement of granular materials // Computational Technologies. — 2021. — Vol. 26, no. 1. — P. 50–61. (Original Russian paper: *Potapov I. I., Reshetnikova O. V.* Ispol'zovaniye sostavnogo yadra v metode SPH dlya modelirovaniya dvizheniya sypuchikh materialov // Computational Technologies. — 2021. — Vol. 26, no. 1. — P. 50–61.)
- Daviet G., Bertails-Descoubes F.* A Semi-Implicit Material Point Method for the Continuum Simulation of Granular Materials // ACM Trans. Graph. — 2016. — Vol. 35, no. 4. — P. 1–3.
- Desbrun M., Cani M. P.* Smoothed Particles: A new paradigm for animating highly deformable bodies // Eurographics Workshop on Computer Animation and Simulation (EGCAS). — 1996. — P. 61–76.
- Liu G. R., Liu M. B.* Smoothed Particle Hydrodynamics: A Meshfree Particle Method. — World Scientific, 2003.
- Liu M. B., Liu G. R.* Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH): an Overview and Recent Developments // Arch. Comput. Methods Eng. — 2010. — Vol. 17. — P. 25–76.
- Monaghan J. J.* Particle methods for hydrodynamics // Computer Physics Reports 3. — North-Holland, Amsterdam, 1985. — P. 71–124.
- Monaghan J. J.* Simulating Free Surface Flows with SPH // Journal of Computational Physics. — 1994. — Vol. 110. — P. 399–406.
- Monaghan J. J.* Smoothed particles hydrodynamics // Reports on Progress in Physics. — 2005. — Vol. 68. — P. 1703–1759.
- Monaghan J. J., Gingold R. A.* Shock simulation by the particle method SPH // Journal of Computational Physics. — 1983. — Vol. 52, no. 2. — P. 374–389.
- Morris J. P., Fox P. J., Zhu Y.* Modeling low Reynolds number incompressible flows using SPH // Comput. Phys. — 1997. — Vol. 136. — P. 214–226.
- Muller M., Charypar D., Gross M.* Particle-Based Fluid Simulation for Interactive Applications // Proceedings of 2003 ACM SIGGRAPH Symposium on Computer Animation. — 2003. — P. 154–159.