

УДК: 517.9

Особенности численных решений некоторых задач для кноидальной волны как периодического решения уравнения Кортевега – де Фриза

А. П. Черняев^{1,a}, С. А. Черняева^{2,b}

¹Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет),
Россия, 141700, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9

²Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана,
Россия, 105082, Москва, Рубцовская набережная, 2/18

E-mail: ^a chernyaev49@yandex.ru, ^b sofee2@rambler.ru

Получено 31.05.2018, после доработки — 04.09.2021.

Принято к публикации 07.09.2021.

В данной статье рассмотрены особенности численных решений некоторых задач для кноидальных волн, которые являются периодическими решениями классического уравнения Кортевега – де Фриза типа бегущей волны. Точные решения, описывающие эти волны, получены путем сведения автоволновым приближением уравнения Кортевега – де Фриза к обыкновенным дифференциальным уравнениям сначала третьего, затем второго и, наконец, первого порядков. Обращение к числовому примеру показывает, что полученные таким образом обыкновенные дифференциальные уравнения не являются равносильными. Сформулированная и доказанная в настоящей статье теорема и замечание к ней показывают, что множество решений уравнения третьего порядка самое широкое и в качестве подмножеств включает в себя множества решений уравнений первого и второго порядков, которые в свою очередь равносильными не являются. Полученное автоволновым приближением обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка является источником для нахождения точных формул для описания кноидальной волны (периодического решения) и солитона (уединенной волны). Несмотря на это, с вычислительной точки зрения это уравнение является самым неудобным. Для этого уравнения не выполняется условие Липшица по искомой функции в окрестности постоянных решений. Отсюда теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка не является справедливой. В частности, в стационарных точках нарушается единственность решения задачи Коши. Поэтому для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, полученного из уравнения Кортевега – де Фриза, и в случае кноидальной волны, и в случае солитона задачу Коши нельзя ставить в точках экстремума. Начальное условие может быть поставлено лишь в точке убывания или роста, а отрезок численного решения необходимо выбрать так, чтобы он лежал между соседними точками экстремума. Но для уравнений второго и третьего порядков начальные условия можно ставить как в точках убывания или роста, так и в точках экстремума. При этом отрезок для численного решения сильно расширяется и наблюдается периодичность. Для решений этих обыкновенных уравнений изучаются постановки задач Коши, проводится сравнение полученных результатов с точными решениями и между собой. Показана численная реализация перерождения кноидальной волны в солитон. Результаты статьи имеют гемодинамическую интерпретацию пульсационного течения кровотока в цилиндрическом кровеносном сосуде, состоящем из упругих колец.

Ключевые слова: уравнение Кортевега – де Фриза, кноидальные волны, солитон, задача Коши, условие Липшица

UDC: 517.9

Features of numerical solutions of some problems for cnoidal waves as periodic solutions of the Korteweg – de Vries

A. P. Chernyaev^{1,a}, S. A. Chernyaeva^{2,b}

¹Moscow Institute of physics and technology (national research University),
9 Institutsky per., Dolgoprudny, 141700, Russia

²Moscow State Technical University N. Uh. Bauman,
2/18 Naberezhnaya Rubtsovskaya, Moscow, 105082, Russia

E-mail: ^a chernyaev49@yandex.ru, ^b sofee2@rambler.ru

Received 31.05.2018, after completion – 04.09.2021.

Accepted for publication 07.09.2021.

This article discusses the features of the numerical solutions of some problems for cnoidal waves, which are periodic solutions of the classical Korteweg – de Vries equation of the traveling wave type. Exact solutions describing these waves were obtained by communicating the autowave approximation of the Korteweg – de Vries equation to ordinary functions of the third, second, and finally, first orders. Referring to a numerical example shows that in this way ordinary differential equations are not equivalent. The theorem formulated and proved in this article and the remark to it include the set of solutions of the first and second order, which, in their ordinal, are not equivalent. The ordinary differential equation of the first order obtained by the autowave approximation for the description of a cnoidal wave (a periodic solution) and a soliton (a solitary wave). Despite this, from a computational point of view, this equation is the most inconvenient. For this equation, the Lipschitz condition for the sought-for function is not satisfied in the neighborhood of constant solutions. Hence, the existence theorem and the unique solutions of the Cauchy problem for an ordinary differential equation of the first order are not valid. In particular, the uniqueness of the solution to the Cauchy problem is violated at stationary points. Therefore, for an ordinary differential equation of the first order, obtained from the Korteweg – de Vries equation, both in the case of a cnoidal wave and in the case of a soliton, the Cauchy problem cannot be posed at the extremum points. The first condition can be a set position between adjacent extremum points. But for the second, third and third orders, the initial conditions can be set at the growth points and at the extremum points. In this case, the segment for the numerical solution greatly expands and periodicity is observed. For the solutions of these ordinary solutions, the statements of the Cauchy problems are studied, and the results are compared with exact solutions and with each other. A numerical realization of the transformation of a cnoidal wave into a soliton is shown. The results of the article have a hemodynamic interpretation of the pulsating blood flow in a cylindrical blood vessel consisting of elastic rings.

Keywords: Korteweg – de Vries, cnoidal waves, soliton, Cauchy problem, Lipschitz condition

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2021, vol. 13, no. 5, pp. 885–901 (Russian).

1. Введение

Уравнение Кортевега – де Фриза (КдФ) — нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных третьего порядка. Впервые оно было получено Жозефом Бусинеском в 1877 году, но подробный анализ был проведен уже Дидериком Кортевегом и Густавом де Фризом в 1895 году. Несмотря на то что КдФ возникло из потребностей гидродинамики [Уизем, 1977; Бхатнагар, 1983], оно уже проникло не только в различные разделы математической физики, но и в многочисленные области научного знания. Решения уравнения КдФ, как правило, имеют практический смысл, причем очень широкого использования. В различных разделах математической физики наиболее интересными являются решения этого уравнения, описывающие волновые процессы.

Практические области научных исследований, где решения уравнения КдФ являются эффективными первыми приближениями реальных волновых процессов, наиболее интересны для настоящей работы. Классическое уравнение КдФ и его обобщения и модификации активно применяются в гемодинамике и артериальной механике [Лэм, 1983; Demiray, 2007; Wazwaz, 2007; Абдель Латиф, 2011; Черняев, 2019]. Серия математических моделей гемодинамики и артериальной механики, основанных на уравнении КдФ, получила активное продолжение [Лэм, 1983; Demiray, 2007; Wazwaz, 2007; Абдель Латиф, 2011]. Уравнение КдФ в этих моделях было усложнено, обобщено и модифицировано. Для некоторых модификаций уравнения КдФ, предназначенных для гемодинамики и артериальной механики, были найдены точные решения.

Большое количество точных решений уравнения КдФ представляет собой стационарные нелинейные волны. Периодические решения уравнения КдФ получили название кноидальных волн, а решения типа уединенной волны были названы солитонами. Поскольку в гемодинамических моделях [Черняев, 2019] изучаются в основном колебательные решения, то основное внимание в настоящей статье уделяется кноидальным волнам. Математически кноидальные волны описываются эллиптическими интегралами с параметрами, определяющими амплитуды и периоды.

Эти два вида решений типа бегущей волны могут быть получены путем сведения автоволновым приближением уравнения КдФ к обыкновенным дифференциальным уравнениям (ОДУ) первого, второго и третьего порядков. Для этих ОДУ можно ставить задачи Коши и сравнивать полученные результаты с точными решениями и между собой. Довольно неожиданным оказалось то, что после обращения к численному примеру кноидальной волны было замечено, что полученные ОДУ не являются равносильными и что задачу Коши для ОДУ первого порядка нельзя ставить в точке экстремума. Несколько позже появился и численный пример солитона с похожими свойствами. По поводу неполной равносильности ОДУ в статье сформулированы и доказаны теорема и замечание к ней, которые можно считать завершением строгого обоснования теории автоволнового приближения. Что касается начального условия для ОДУ первого порядка, то оно может быть поставлено лишь в точке убывания или роста, а отрезок для численного решения необходимо выбрать так, чтобы он лежал между соседними точками экстремума. В настоящей работе показано, что это происходит в силу того, что при понижении порядка ОДУ со второго до первого нарушается условие Липшица, которое нужно для справедливости теоремы существования и единственности решения задачи Коши. В то же время показано, что для уравнений второго и третьего порядков, полученных из уравнения КдФ, начальные условия можно ставить и в точке убывания, и в точке роста, и в точке экстремума. Это происходит потому, что нужное условие Липшица для указанных порядков ОДУ справедливо, и теорема существования и единственности решения задачи Коши работает. При этом отрезок для численного решения значительно расширяется и численно наблюдается периодичность.

2. Основные обыкновенные дифференциальные уравнения, к которым может быть сведено уравнение Кортевега – де Фриза

Рассматривается нелинейное уравнение КдФ в частных производных в виде [Полянин, Зайцев, 2002; Скотт, 2007; Новокшенов, 2002]

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (1)$$

Интересующее нас решение уравнения (1) ищется известным методом аналогично [Бхатнагар, 1983; Скотт, 2007; Рыскин, Трубецков, 2017] в виде

$$u(x, t) = u(\xi), \quad \xi = x - ct, \quad (2)$$

где $u(x, t)$ — общее решение типа бегущей волны. Несмотря на то что уравнение КдФ в [Рыскин, Трубецков, 2017] приведено в другом виде, уравнение (1) может быть получено из уравнения указанного труда заменой переменных. Таким образом, уравнение (1) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению третьего порядка [Скотт, 2007]:

$$u'''(\xi) = 6u(\xi)u'(\xi) + cu'(\xi). \quad (3)$$

Умножив обе части уравнения (3) на $d\xi$, интегрируя и преобразовывая полученное, имеем

$$u''(\xi) = 3u^2(\xi) + cu(\xi) + A, \quad A \in \mathfrak{R}, \quad (4)$$

где \mathfrak{R} — множество действительных чисел и A — константа интегрирования. Умножая обе части уравнения (4) на $u'(\xi)d\xi$, интегрируя и упрощая полученное, имеем уравнение первого порядка:

$$(u'(\xi))^2 = 2P(u(\xi)), \quad (5)$$

или [Скотт, 2007]

$$u'(\xi) = \pm \sqrt{2P(u(\xi))}, \quad (6)$$

где

$$P(u) = u^3 + \frac{c}{2}u^2 + Au + B, \quad A \in \mathfrak{R}, \quad B \in \mathfrak{R}. \quad (7)$$

Обозначаем через u_1, u_2, u_3 корни многочлена $P(u)$. Тогда

$$P(u) = (u - u_1)(u - u_2)(u - u_3). \quad (8)$$

Уравнение (4) в этом случае, в силу (7), примет вид

$$\begin{aligned} u'' &= 3u^2 + cu + A = P'(u) = (u - u_2)(u - u_3) + (u - u_1)(u - u_3) + (u - u_1)(u - u_2) = \\ &= 3u^2 - 2(u_1 + u_2 + u_3)u + u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_1. \end{aligned} \quad (9)$$

Исходя из (9), получим

$$c = -2(u_1 + u_2 + u_3), \quad A = u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_1. \quad (10)$$

Полагая в (7) и (8) $u = 0$, получаем

$$B = -u_1u_2u_3. \quad (11)$$

Приведем пример, показывающий, что уравнения (3), (4) и (6) не являются эквивалентными.

Положим, например, $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = 3$, тогда в силу (8), (9) и (10) уравнения (3), (4) и (6) будут иметь вид

$$u'''(\xi) = 6u(\xi)u'(\xi) - 12u'(\xi), \quad (12)$$

$$u''(\xi) = 3u^2(\xi) - 12u(\xi) + 11, \quad (13)$$

$$u'(\xi) = \pm \sqrt{2(u(\xi) - 1)(u(\xi) - 2)(u(\xi) - 3)}. \quad (14)$$

Функции $u(\xi) = \text{const}$ являются решениями уравнения (12), но при произвольной правой части последнего равенства не будут решениями уравнений (13) и (14). Функции $u(\xi) = 1$, $u(\xi) = 2$, $u(\xi) = 3$ будут решениями уравнения (14), но не являются решениями уравнения (13). Корни квадратного трехчлена правой части (13), являясь решениями уравнения (13), не являются решениями уравнения (14).

Связь между решениями уравнений (3), (4) и (6) устанавливается следующей теоремой.

Теорема. Если $u = u(\xi)$ удовлетворяет уравнению

$$u'(\xi) = \pm \sqrt{2(u(\xi) - u_1)(u(\xi) - u_2)(u(\xi) - u_3)}, \quad (15)$$

где u_1, u_2, u_3 — некоторые числа, и неравенствам $u(\xi) \neq u_1$, $u(\xi) \neq u_2$, $u(\xi) \neq u_3$, то $u = u(\xi)$ является решением уравнения

$$u''(\xi) = 3u^2(\xi) - 2(u_1 + u_2 + u_3)u(\xi) + u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_1. \quad (16)$$

Если $u = u(\xi)$ удовлетворяет уравнению (16), то $u = u(\xi)$ является решением уравнения

$$u'''(\xi) = 6u(\xi)u'(\xi) - 2(u_1 + u_2 + u_3)u'(\xi). \quad (17)$$

Кроме того, функции $u(\xi) = u_1$, $u(\xi) = u_2$, $u(\xi) = u_3$ также являются решениями уравнения (17).

Доказательство. Из уравнения (15) имеем

$$\begin{aligned} u''(\xi) &= \pm \sqrt{2} \frac{\partial}{\partial \xi} (u(\xi) - u_1)(u(\xi) - u_2)(u(\xi) - u_3) = \\ &= \pm \sqrt{2} \frac{u'(\xi)}{2} \left[(u(\xi) - u_1)^{-1/2} (u(\xi) - u_2)^{1/2} (u(\xi) - u_3)^{1/2} + (u(\xi) - u_1)^{1/2} (u(\xi) - u_2)^{-1/2} (u(\xi) - u_3)^{1/2} + \right. \\ &\quad \left. + (u(\xi) - u_1)^{1/2} (u(\xi) - u_2)^{1/2} (u(\xi) - u_3)^{-1/2} \right] = \\ &= \pm \frac{u'(\xi)}{\sqrt{2}(u(\xi) - u_1)^{1/2} (u(\xi) - u_2)^{1/2} (u(\xi) - u_3)^{1/2}} \times \\ &\quad \times \left[(u(\xi) - u_2)(u(\xi) - u_3) + (u(\xi) - u_1)(u(\xi) - u_3) + (u(\xi) - u_1)(u(\xi) - u_2) \right] = \\ &= 3u^2(\xi) - (u_2 + u_3 + u_1 + u_3 + u_1 + u_2)u(\xi) + u_2u_3 + u_1u_3 + u_1u_2 = \\ &= 3u^2(\xi) - 2(u_1 + u_2 + u_3)u(\xi) + u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_1. \end{aligned}$$

Дифференцируя по ξ уравнение (16), имеем справедливость уравнения (17).

Поскольку функции $u(\xi) = \text{const}$ при любой правой части являются решениями уравнения (17), то они удовлетворяют (17) и при правых частях u_1, u_2, u_3 .

ЗАМЕЧАНИЕ. Из теоремы следует, что любое решение уравнения (15) является решением уравнения (17).

Отметим, что уравнение (15) — это (6) при (8), уравнение (16) — (4) при (10), а уравнение (17) — (3) при (10).

3. Точные решения уравнения КдФ типа кноидальной волны, сравнение с ними численных решений ОДУ первого, второго и третьего порядков

Сразу заметим, что

$$u = u_1, \quad u = u_2, \quad u = u_3 \quad (18)$$

— стационарные решения уравнения (6). Если $u \neq u_1$, $u \neq u_2$, $u \neq u_3$, то из (6) и (8) следует, что

$$\frac{du}{\sqrt{(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3)}} = \pm \sqrt{2} d\xi. \quad (19)$$

Сделаем в (19) замену

$$u - u_1 = \eta^2, \quad u = u_1 + \eta^2, \quad (20)$$

которая приводит к выражениям

$$du = 2\eta d\eta, \quad u - u_2 = u_1 - u_2 + \eta^2, \quad u - u_3 = u_1 - u_3 + \eta^2.$$

Тогда (19) приводится к виду

$$\pm d\xi = \frac{\sqrt{2} d\eta}{\sqrt{(u_2 - u_1 - \eta^2)(u_3 - u_1 - \eta^2)}}. \quad (21)$$

Если в (21) сделать замену

$$\eta = \sqrt{u_2 - u_1} s, \quad s = \frac{\eta}{\sqrt{u_2 - u_1}} = \sqrt{\frac{u - u_1}{u_2 - u_1}}, \quad (22)$$

то

$$\begin{aligned} u_2 - u_1 - \eta^2 &= (u_2 - u_1)(1 - s^2), \\ u_3 - u_1 - \eta^2 &= u_3 - u_1 - (u_2 - u_1)s^2 = (u_3 - u_1)(1 - k^2 s^2), \quad k = \sqrt{\frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1}}. \end{aligned} \quad (23)$$

С учетом (22) и (23) уравнение (21) приводится к виду

$$\pm \sqrt{\frac{u_3 - u_1}{2}} d\xi = \frac{ds}{\sqrt{(1 - s^2)(1 - k^2 s^2)}}. \quad (24)$$

Из (22) следует, что если $u = u_1$, то $s = 0$, а если $u = u_2$, то $s = 1$.

Пусть u_1, u_2, u_3 действительны, различны и $u_1 < u_2 < u_3$. Возьмем интеграл от обеих частей (24), выбирая при этом c_1 так, чтобы $\xi + c_1 = 0$ при $s = 0$:

$$\pm \sqrt{\frac{u_3 - u_1}{2}} (\xi + c_1) = \int_0^s \frac{d\tau}{\sqrt{(1 - \tau^2)(1 - k^2 \tau^2)}}. \quad (25)$$

Пусть

$$F(s, k) = \int_0^s \frac{d\tau}{\sqrt{(1 - \tau^2)(1 - k^2 \tau^2)}} \quad (26)$$

— неполный эллиптический интеграл правой части (25) с модулем k , тогда $F(s, k)$ — функция, обратная к $\operatorname{sn}(F, k)$ — эллиптической функции Якоби [Бхатнагар, 1983, с. 44]. Из (25) следует

$$\operatorname{sn}\left(\pm\sqrt{\frac{u_3-u_1}{2}}(\xi+c_1), k\right) = s = \sqrt{\frac{u-u_1}{u_2-u_1}},$$

и тогда

$$u(\xi) = u_2 - (u_2 - u_1) \operatorname{cn}^2\left(\pm\sqrt{\frac{u_3-u_1}{2}}(\xi+c_1), k\right) \quad (27)$$

[Скотт, 2007]. Здесь мы воспользовались равенством $\operatorname{sn}^2(F, k) + \operatorname{cn}^2(F, k) = 1$, где $\operatorname{cn}(F, k)$ — эллиптическая функция Якоби, а k определяется правой формулой (23). Из (25) получим период T функции $u(\xi)$ по координате ξ [Бхатнагар, 1983]:

$$T = 2\sqrt{\frac{2}{(u_3-u_1)}} \int_0^1 \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k^2\tau^2)}} = \frac{2\sqrt{2}K(k)}{\sqrt{u_3-u_1}}, \quad (28)$$

где $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. В этом случае ограниченное решение уравнения (1) описывает периодическую волну с периодом (28) и амплитудой $u_3 - u_1$. Из-за наличия в (27) эллиптической функции Якоби $\operatorname{cn}(F, k)$ соответствующая волна называется кноидальной.

Положим, как и ранее, $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = 3$. Тогда $k = 1/\sqrt{2}$. Уравнение (6) с учетом (8) будет иметь вид (14), а его решение согласно (27) —

$$u = 2 - \operatorname{cn}^2\left(\pm(\xi+c_1), 1/\sqrt{2}\right). \quad (29)$$

Константу $c_1 \approx 0,826018$ находим численно из трансцендентного уравнения $\operatorname{cn}^2(\pm c_1, 1/\sqrt{2}) = 0,5$. Итак, строим график в системе компьютерной алгебры Wolfram Mathematica функции $u(\xi) = 2 - \operatorname{cn}^2(\pm(\xi + 0,826018), 1/\sqrt{2})$.

Решим дифференциальное уравнение первого порядка (14) численно, выбрав перед правой частью знак плюс. Для этого поставим задачу Коши, добавив к уравнению (15) условие

$$u(\xi_0) = u_0. \quad (30)$$

В качестве ξ_0 и u_0 в (30) нельзя брать значения, в которых какая-либо кноидальная волна достигала бы минимума или максимума, поскольку в этих точках нарушается единственность решения задачи Коши. А это значит, что $u_0 \neq 1$ и $u_0 \neq 2$, т.е. $1 < u_0 < 2$. Таким образом, условия (30) нельзя задавать в точках экстремума кноидальной волны, а можно задавать лишь в точках ее убывания или роста.

Это происходит потому, что нарушено условие Липшица правой части (14) по переменной u [Амосов и др., 1994; Галанин, Савенков, 2010; Романко, 2002], так как производная правой части (14) по u в окрестностях корней $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = 3$ неограниченна [Кудрявцев, 1986]. Отсюда следует, что теорема существования и единственности решения задачи Коши (14), (30) не работает. Хотя по этой причине единственность решения задачи Коши лишь может нарушаться. А то, что она обязательно нарушается, следует из того, что горизонтальные прямые $u = 1$, $u = 2$ являются как особыми решениями уравнения (5), так и его дискриминантными кривыми. Они являются также и огибающими семейства (29). При этом уравнение (5) рассматривается как дифференциальное уравнение первого порядка, неразрешенное относительно производной [Романко, 2002]. Чтобы установить, что $u = 1$, $u = 2$ — дискриминантные кривые, достаточно

продифференцировать уравнение (5) по переменной u' , получить уравнение $u' = 0$ и подставить последнее в (5) [Романко, 2002]. Убедиться в том, что $u = 1$, $u = 2$ — особые решения и огибающие семейства кривых (29), аналитически сложнее. Однако здесь помогают выражение (29) и периодичность эллиптической функции Якоби $\operatorname{sn}(F, k)$. Отсюда следует, что точки экстремума правой части (29) могут быть при любых значениях независимой переменной ξ , что иллюстрирует рис. 1.

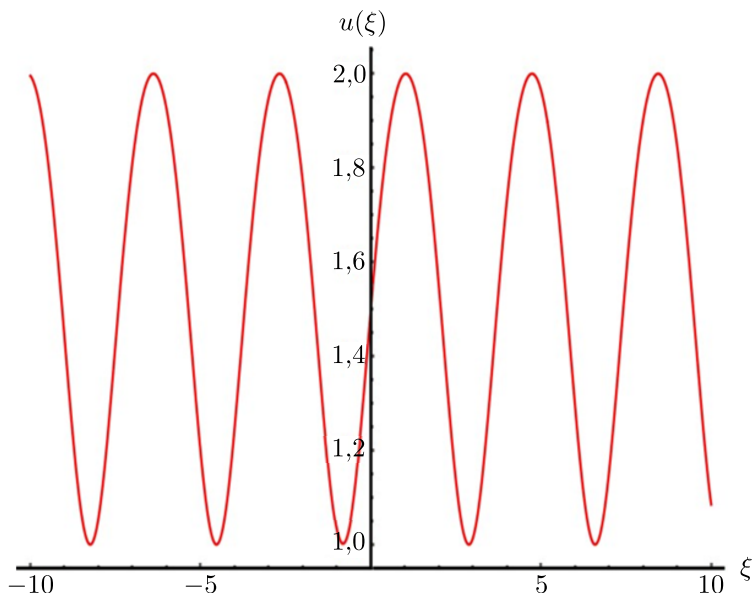


Рис. 1. График кноидальной волны $u = 2 - \operatorname{sn}^2(\pm(\xi + c_1), 1/\sqrt{2})$ при $\xi \in [-10, 10]$ — точного решения дифференциального уравнения $u' = \sqrt{2(u-1)(u-2)(u-3)}$, где константа c_1 — решение трансцендентного уравнения $\operatorname{sn}^2(\pm c_1, 1/\sqrt{2}) = 0,5$, приближение к которому равно $c_1 \approx 0,826018$. График построен в системе компьютерной алгебры Wolfram Mathematica

При выборе начального условия исключаются точки минимума и максимума функции $u(\xi)$, так как через них проходят также решения $u = 1$ и $u = 2$ соответственно. В (30) зададим $\xi_0 = 0$, тогда $u(0) = 1,5$. Решаем задачу Коши с указанным начальным условием с помощью команды NDSolve, в качестве метода зададим метод Рунге–Кутты 4-го порядка [Амосов и др., 1994; Галанин, Савенков, 2010]. Далее выбираем отрезок, на котором будем получать численное решение. Ближайшая точка минимума от начала координат — $(-0,846594; 1)$, точка максимума — $(1,23938; 2)$ (рис. 1).

На рис. 2 приведены графики аналитического $u(\xi)$ и численного $u^*(\xi)$ решений уравнения (15) с начальным условием $u(0) = 1,5$ на отрезке $[-0,825018; 1,02706]$.

Попытки расширить отрезок $[-0,825018; 1,02706]$ на рис. 2, где показана зависимость переменной ξ численного решения $u^*(\xi)$, к успеху не приводят. Расчеты показывают очень малую величину ошибки численного решения $u^*(\xi)$. В частности, приближенные вычисления в системе компьютерной алгебры Wolfram Mathematica показывают, что

$$\|u^* - u\|_{C[-0,825018; 1,02706]} = \max_{\xi \in [-0,825018; 1,02706]} |u^*(\xi) - u(\xi)| \approx 2,52968 \cdot 10^{-8}.$$

Кривые на рис. 2 практически сливаются, поэтому график точного решения наносится красным цветом, а приближенного — синим.

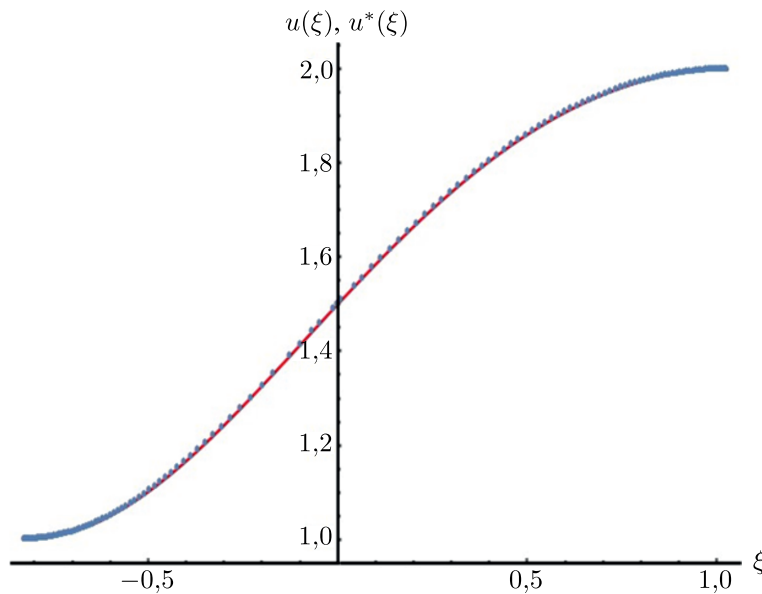


Рис. 2. Графики численного решения задачи Коши $u' = \sqrt{2(u-1)(u-2)(u-3)}$, $u(0) = 1,5$, для кноидальной волны методом Рунге–Кутты 4-го порядка и точного решения этой же задачи при $\xi \in [-0,825018; 1,02706]$. Норма ошибки в пространстве $C[-0,825018; 1,02706]$ равна $2,52968 \cdot 10^{-8}$. Графики построены в системе компьютерной алгебры Wolfram Mathematica

Уравнение второго порядка (4) с учетом (10) и (11) при $u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 3$ будет иметь вид (13). Задача Коши для уравнения (13) будет иметь два начальных условия:

$$u(\xi_0) = u_0, \quad u'(\xi_0) = u'_0. \tag{31}$$

Правая часть уравнения (31) удовлетворяет условию Липшица по u и не зависит от u' . Единственность решения задачи Коши (13), (31) не нарушается, и поэтому условия (31) можно задавать как в точках экстремума кноидальной волны, так и в точках ее убывания или роста. Поэтому $1 \leq u_0 \leq 2$. Отметим, что если взять отрезок $[-10, 10]$, то видно, что численное решение является периодическим (рис. 3).

Расчеты показывают еще более малую величину ошибки численного решения $u^*(\xi)$. В частности, приближенные вычисления в системе компьютерной алгебры Wolfram Mathematica показывают, что

$$\|u^* - u\|_{C[-10; 10]} = \max_{\xi \in [-10; 10]} |u^*(\xi) - u(\xi)| \approx 1,28702 \cdot 10^{-9}.$$

Уравнение третьего порядка (3) с учетом (10) при $u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 3$ будет иметь вид (12). Задача Коши для уравнения (12) будет иметь три начальных условия:

$$u(\xi_0) = u_0, \quad u'(\xi_0) = u'_0, \quad u''(\xi_0) = u''_0. \tag{32}$$

Правая часть уравнения (12) удовлетворяет условию Липшица по u и u' [Романко, 2002] и не зависит от u'' . Единственность решения задачи (12), (32) не нарушается, и условия (32) можно задавать как в точках экстремума кноидальной волны, так и в точках ее убывания или роста. Поэтому $1 \leq u_0 \leq 2$. Отметим, что если взять отрезок $[-10, 10]$, то видно, что численное решение является периодическим (рис. 4).

Расчеты показывают еще промежуточную величину ошибки численного решения $u^*(\xi)$. Она почти на порядок меньше, чем аналогичная величина для уравнения первого порядка (14),

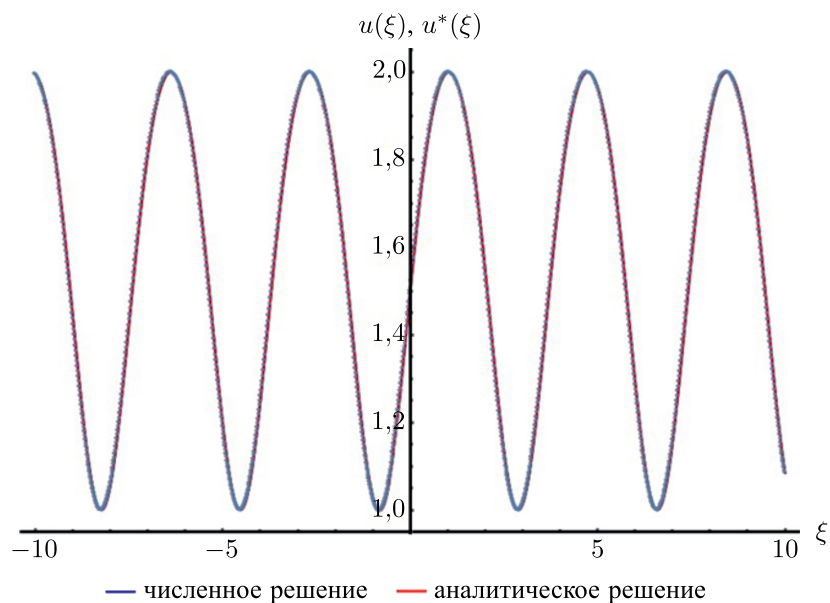


Рис. 3. Графики численного решения задачи Коши $u'' = 3u^2 - 12u + 11$, $u(0) = 1,5$, $u'(0) = \sqrt{3}/2 \approx 0,8660254$ для кноидальной волны методом Рунге–Кутты 4-го порядка и точного решения этой же задачи при $\xi \in [-10; 10]$. Норма ошибки в пространстве $C[-10; 10]$ приблизительно равна $1,28702 \cdot 10^{-9}$. Графики построены в системе компьютерной алгебры Wolfram Mathematica

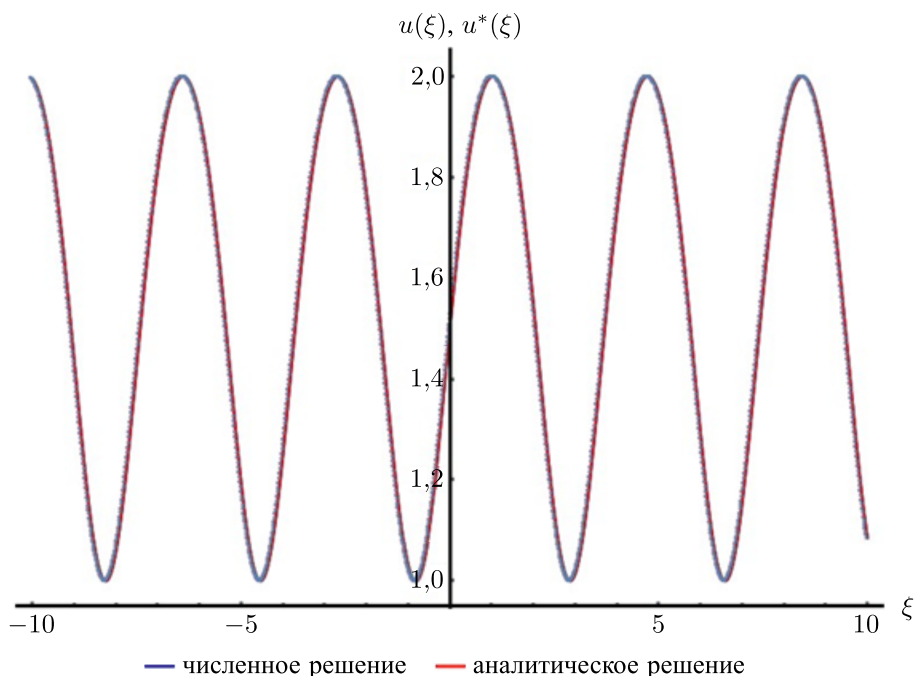


Рис. 4. Графики численного решения задачи Коши $u''' = 6uu' - 12u'$, $u(0) = 1,5$, $u'(0) = \sqrt{3}/2 \approx 0,8660254$, $u''(0) = -0,25$ для кноидальной волны методом Рунге–Кутты 4-го порядка и точного решения этой же задачи при $\xi \in [-10; 10]$. Норма ошибки в пространстве $C[-10; 10]$ приблизительно равна $2,96162 \cdot 10^{-9}$. Графики построены в системе компьютерной алгебры Wolfram Mathematica

и чуть больше для уравнения второго порядка (13). В частности, приближенные вычисления в системе компьютерной алгебры Wolfram Mathematica показывают, что

$$\|u^* - u\|_{C[-10; 10]} = \max_{\xi \in [-10; 10]} |u^*(\xi) - u(\xi)| \approx 1,28702 \cdot 10^{-9}.$$

Укажем на некоторые особенности сравнительного анализа множеств решений уравнений (14), (13) и (12), а также задач Коши к этим уравнениям.

Если $u = u(\xi)$ удовлетворяет уравнению (14) и $u \neq 1$, $u \neq 2$ ($u \neq 3$ не рассматривается, поскольку $1 < u < 2$), то в силу доказанной выше теоремы о неравносильности множества решений $u = u(\xi)$ удовлетворяет (13). Обратное не верно, так как корни квадратного трехчлена правой части (13) являются решениями (13), но не удовлетворяют (14). Однако $u = u(\xi)$, в силу теоремы, удовлетворяет (12).

Если $u = u(\xi)$ удовлетворяет уравнению (13), то в силу теоремы $u = u(\xi)$ удовлетворяет и (12). Обратное также не верно, так как $u(\xi) = \text{const}$ при произвольной правой части удовлетворяет уравнению (12), но не удовлетворяет (13).

Это происходит потому, что переход от (12) к (13) осуществляется интегрированием, а переход от (13) к (14) — домножением обеих частей уравнения (13) на u' и интегрированием, а затем извлечением корня.

Эквивалентными становятся задачи Коши для этих трех уравнений при соответствующих условиях (30), (31) и (32).

Если при переходе от одного уравнения к другому приобретаются дополнительные решения, то эти решения могут нарушить теорему единственности решения задачи Коши в некоторых точках. Поэтому уравнения с приобретенными решениями могут быть менее удобными для приближенных вычислений.

Именно в результате последнего понижения порядка со второго до первого, т. е. при переходе от (13) к (14), перестает быть справедливым условие Липшица в окрестностях корней $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = 3$. Именно в результате этого эти корни становятся особыми решениями и дискриминантными кривыми уравнения (5) и огибающими семейства (29).

Как показывают проведенные вычисления, задача Коши (13), (31) наиболее благоприятна для приближенных вычислений. Это объясняется тем, что, помимо того, что правая часть (13) удовлетворяет условию Липшица, корни $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = 3$ не являются решениями этого уравнения.

4. Замечания по неперiodическим точным решениям уравнения КдФ типа «солитон» и сравнению с ними численных решений ОДУ первого, второго и третьего порядков

Пусть $u_1, u_2, u_3 \in \mathfrak{R}: u_1 < u_2 = u_3$. Тогда, $P(u) = (u - u_1)(u - u_2)^2$. В силу теоремы и замечания к ней сразу обращаемся к уравнению (15). Заметим, что $u = u_1$, $u = u_2$ по-прежнему решения уравнения (15), а значит, и (5). Поскольку решение должно быть вещественным, то будем считать, что u заключено между u_1 и u_2 . Из (21) следует, что

$$\pm d\xi = \frac{\sqrt{2} d\eta}{\eta^2 - (u_2 - u_1)}. \quad (33)$$

После интегрирования (33) получим

$$\pm \sqrt{2}(\xi + c_2) = \frac{1}{\sqrt{u_2 - u_1}} \ln \left| \frac{\eta - \sqrt{u_2 - u_1}}{\eta + \sqrt{u_2 - u_1}} \right|, \quad c_2 \in \mathfrak{R}. \quad (34)$$

Мы воспользовались тем, что если $u = u_2$, то $\eta = 0$, поэтому выбрали $\xi + c_2 = 0$ при $\eta = 0$. Из (34) будем иметь

$$\pm \sqrt{2(u_2 - u_1)}(\xi + c_2) = \ln \left| \frac{\eta - \sqrt{u_2 - u_1}}{\eta + \sqrt{u_2 - u_1}} \right| = \ln \frac{\sqrt{u_2 - u_1} - \eta}{\sqrt{u_2 - u_1} + \eta} = \ln \frac{\sqrt{u_2 - u_1} - \sqrt{u - u_1}}{\sqrt{u_2 - u_1} + \sqrt{u - u_1}}, \quad c_2 \in \mathfrak{R}.$$

Выбирая в левой части последнего знак минус, после преобразования получим

$$e^{-\sqrt{2(u_2 - u_1)}(\xi + c_2)} = \frac{\sqrt{u_2 - u_1} - \sqrt{u - u_1}}{\sqrt{u_2 - u_1} + \sqrt{u - u_1}}, \quad c_2 \in \mathfrak{R}.$$

Разрешая последнее относительно u , имеем

$$u(\xi) = u_1 + (u_2 - u_1) \left(\frac{1 - e^{-\sqrt{2(u_2 - u_1)}(\xi + c_2)}}{1 + e^{-\sqrt{2(u_2 - u_1)}(\xi + c_2)}} \right)^2 = u_1 + (u_2 - u_1) \left(\frac{e^{\sqrt{2(u_2 - u_1)}(\xi + c_2)} - 1}{e^{\sqrt{2(u_2 - u_1)}(\xi + c_2)} + 1} \right)^2. \quad (35)$$

По аналогии с [Бхатнагар, 1983, с. 46] процесс, определяемый (35), будем называть уединенной волной, или солитоном. Для иллюстрации положив в (35) $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, получим

$$u(\xi) = 1 + \left(\frac{e^{\sqrt{2}(\xi + c_2)} - 1}{e^{\sqrt{2}(\xi + c_2)} + 1} \right)^2 = 1 + \operatorname{th}^2 \left[\frac{\xi + c_2}{\sqrt{2}} \right]. \quad (36)$$

Значение c_2 определим из трансцендентного уравнения

$$u(0) = 1,5, \quad (37)$$

а это значит, что $\operatorname{th}(c_2/\sqrt{2}) = 1/\sqrt{2}$. Решив численно это уравнение, получим $c_2 \approx 1,24645$. Подставив (37) в (36), будем иметь

$$u(\xi) = 1 + \operatorname{th}^2 \left[\frac{\xi + 1,24645}{\sqrt{2}} \right]. \quad (38)$$

Построив график солитона (38) на рис. 5, мы можем наблюдать следующее. В точке минимума функции (38) нарушается единственность решения уравнения

$$u'(\xi) = (2 - u)\sqrt{2(u - 1)}. \quad (39)$$

Это происходит потому, что горизонталь $u = 1$ касается графика функции (38) в точке ее минимума. Отсюда следует, что $u = 1$ является особым решением уравнения

$$(u'(\xi))^2 = 2(u - 1)(u - 2)^2, \quad (40)$$

его же дискриминантной кривой, а также огибающей семейства (36). С другой стороны, горизонталь $u = 2$ не имеет общих точек с графиком функции (38). Эта горизонталь является решением уравнений (39) и (40), но не является особым решением уравнения (40). Значит, в точках горизонтали $u = 2$ единственность решения не нарушается. Это происходит потому, что правая часть уравнения (39) удовлетворяет условию Липшица в окрестности точки $u = 2$ и не удовлетворяет условию Липшица в окрестности точки $u = 1$.

Сравнивая графики рис. 1 и рис. 5, можно численно и качественно проследить процесс перерождения кноидальной волны в солитон.

Для этого воспользуемся таблицей 30 [Янке, Эмде, Леш, 1964, с. 118] численных значений полных эллиптических интегралов и на основании формул (23) и (28) составим таблицу перерождения кноидальной волны в солитон. Первый и третий столбцы нашей матрицы взяты из

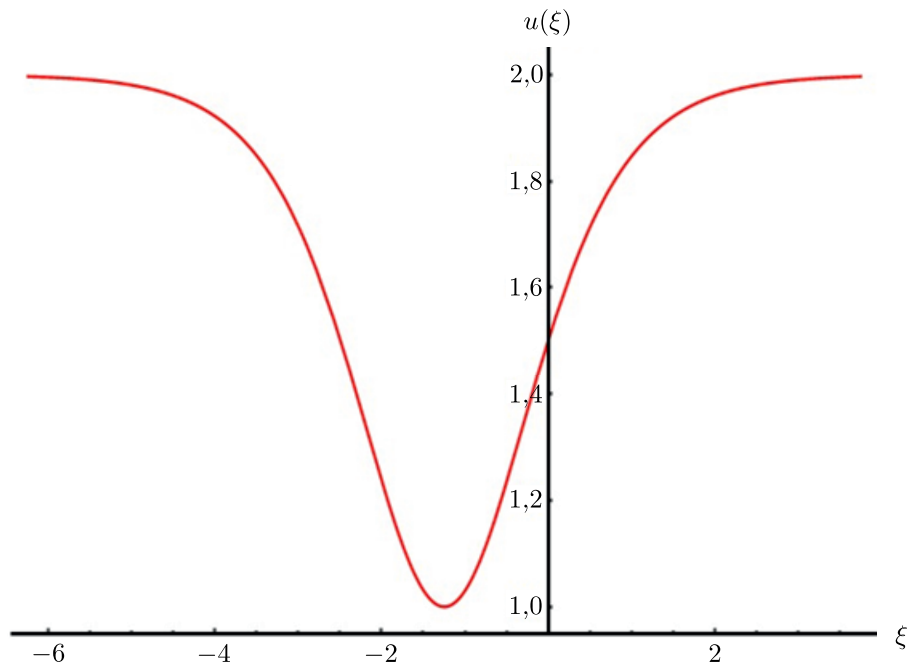


Рис. 5. График солитона $u = 1 + \text{th}^2((\xi + c_2)/\sqrt{2})$ — точного решения дифференциального уравнения $u' = (2 - u)\sqrt{2(u - 1)}$, где константа c_2 — решение трансцендентного уравнения $\text{th}(c_2/\sqrt{2}) = 1/\sqrt{2}$, приближение к которому равно $c_1 \approx 1,24645$. График построен в системе компьютерной алгебры Wolfram Mathematica

таблицы 30. Чтобы получить второй и четвертый столбцы матрицы перерождения кноидальной волны в солитон, мы в правой формуле (23) и в формуле (28) положили $u_1 = 1$ и $u_2 = 2$, а u_3 уменьшаем от 3 до 2. Тогда

$$u_3 = 1 + \frac{1}{k^2} \quad (41)$$

и

$$T = 2 \sqrt{\frac{2}{(u_3 - 1)}} \int_0^1 \frac{d\tau}{\sqrt{(1 - \tau^2)(1 - k^2\tau^2)}} = \frac{2\sqrt{2}K(k)}{\sqrt{u_3 - 1}} = 2k\sqrt{2}K(k). \quad (42)$$

Второй столбец нашей матрицы — это численные значения величины (41), а четвертый — значения периода кноидальной волны (42).

Первая строка этой таблицы с очень малой погрешностью соответствует рис. 2, на котором изображено поведение точного и приближенного решений уравнения первого порядка (14) со знаком плюс перед корнем на отрезке длиной $1,02706 - (-0,825018) = 1,852078$, что приблизительно равно половине периода в четвертом столбце первой строчки $3,7082 : 2 = 1,8541$. Это демонстрирует точность таблицы.

Второй столбец таблицы показывает характер приближения корня u_3 ко второму корню 2,0000, а четвертый столбец иллюстрирует рост периода звена кноидальной волны к $+\infty$. Этот период растет сначала довольно медленно, а при приближении аргумента k^2 к 1,00 этот рост становится очень быстрым.

Если придерживаться математической модели однокамерного сердца на основе уравнения КдФ [Лэм, 1983; Черняев, 2019], то зависимость четвертого столбца приведенной таблицы иллюстрирует процесс остановки однокамерного сердца. Сначала увеличивается период кноидальной волны, а затем полной остановке однокамерного сердца предшествует солитон. Чтобы

Таблица перерождения кноидальной волны в солитон

k^2	u_3	$K(k)$	T
0,50	3,0000	1,8541	3,7082
0,52	2,9231	1,8714	3,8169
0,54	2,8519	1,8895	3,9273
0,56	2,7857	1,9085	4,0395
0,58	2,7241	1,9285	4,1541
0,60	2,6667	1,9496	4,2714
0,62	2,6129	1,9713	4,3914
0,64	2,5625	1,9953	4,5148
0,66	2,5151	2,0203	4,6423
0,68	2,4706	2,0469	4,7742
0,70	2,4286	2,0754	4,9113
0,72	2,3889	2,1059	5,0542
0,74	2,3514	2,1390	5,2044
0,76	2,3158	2,1748	5,3625
0,78	2,2821	2,2140	5,5306
0,80	2,2500	2,2572	5,7103
0,82	2,2195	2,3052	5,9042
0,84	2,1905	2,3593	6,1160
0,86	2,1628	2,4209	6,3500
0,88	2,1364	2,4926	6,6136
0,90	2,1111	2,5781	6,9178
0,92	2,0870	2,6836	7,2804
0,94	2,0638	2,8208	7,7354
0,96	2,0417	3,0161	8,3585
0,98	2,0204	3,3541	9,3915
1,00	2,0000	$+\infty$	$+\infty$

модель однокамерного сердца нормально функционировала, нельзя допускать ситуации, близкой к солитонному решению, т. е. близости второго и третьего корней многочлена $P(u)$.

Если мы поставим задачу Коши для ОДУ первого порядка, то, аналогично случаю кноидальной волны, в качестве u_0 в (30) нельзя брать значение, в котором солитон достигает минимума, поскольку в этой точке нарушается единственность решения задачи Коши. Таким образом, при выборе начального условия исключается точка минимума функции (38), так как через нее также проходит решение $u = u_1$ уравнения

$$u'(\xi) = \pm(u - u_2) \sqrt{2(u - u_1)},$$

которое следует из (6) и (8).

Если мы поставим задачу Коши для ОДУ второго порядка, то правая часть этого уравнения удовлетворяет условию Липшица по u и не зависит от u' , поэтому единственность решения задачи Коши с условиями (31) не нарушается.

Если мы поставим задачу Коши для ОДУ третьего порядка, то правая часть этого уравнения удовлетворяет условию Липшица по u и по u' , а также не зависит от u'' .

Поэтому единственность решения задачи Коши с условиями (32) не нарушается.

5. Заключение

Обращение к численным примерам в статье оказалось многофункциональным. Благодаря ему, во-первых, было замечено, что ОДУ первого, второго и третьего порядков, полученные

автоволновым приближением из уравнения КдФ, не являются равносильными. Во-вторых, было установлено, что задачу Коши для ОДУ первого порядка нельзя ставить в точках экстремума.

Множество решений ОДУ третьего порядка включает в себя в качестве подмножеств множества решений ОДУ первого и второго порядков, которые в свою очередь не являются эквивалентными. Эту сформулированную и доказанную в статье теорему можно назвать теоремой о неполной равносильности ОДУ первого, второго и третьего порядков, а также теоремой обратного хода автоволнового приближения. Действительно, автоволновым приближением из уравнения КдФ получается сначала ОДУ третьего порядка, затем второго и, наконец, первого. В доказательстве теоремы сначала рассматривается ОДУ первого порядка, затем второго и, наконец, третьего. Считаем эту теорему недостающим и завершающим звеном строгого обоснования автоволнового приближения для классического КдФ. Эта теорема должна иметь обобщения для усложненных, обобщенных и модифицированных обобщений уравнений КдФ [Demiray, 2007; Wazwaz, 2007; Абдель Латиф, 2011; Sanchez, 2015], которые возникают хотя бы потому, что серия математических моделей гемодинамики и артериальной механики, основанных на уравнении КдФ, получила активное продолжение.

Наиболее оригинальная часть работы связана с тем, что при автоволновом приближении уравнения КдФ при помощи сведения его к ОДУ третьего, второго и первого порядков уравнение первого порядка наименее удобно для приближенного решения (рис. 2). Это происходит несмотря на то, что именно уравнение первого порядка является источником получения точных решений. Именно благодаря тому, что при понижении порядка ОДУ со второго на первый нарушается условие Липшица в окрестности экстремума, нарушается единственность решения в точке экстремума. В [Бхатнагар, 1983; Рыскин, Трубецков, 2017; Скотт, 2007] приведены аналитические формулы, аналогичные многим формулам настоящей статьи, однако уравнение КдФ записано у этих авторов в другой форме. Аналитические формулы статьи необходимы, чтобы проследить, каким образом нарушается условие Липшица на этапе понижения порядка уравнения со второго на первый.

В работе с помощью системы компьютерной алгебры Wolfram Mathematica исследуются периодические решения уравнения КдФ конкретного вида. Численные решения задач Коши для ОДУ первого, второго и третьего порядка сравниваются с соответствующим точным решением, которое и нужно для этого сравнения.

Для ОДУ первого порядка, полученного из уравнения КдФ, в случае кноидальной волны задачу Коши нельзя ставить в точках экстремума, так как в этих точках правая часть уравнения не удовлетворяет условию Липшица. Поэтому начальное условие ставим в точке роста, а отрезок выбираем таким образом, чтобы он лежал между точками экстремума.

Изучено ОДУ второго порядка, которое удовлетворяет условию Липшица, и показываем, что задачу Коши для этого уравнения в случае кноидальной волны можно ставить как в точках убывания или роста, так и в точках экстремума. Кроме этого, отрезок для численного решения значительно расширяется, так что наблюдается периодичность.

Для ОДУ третьего порядка условие Липшица выполняется, и поэтому задача Коши также может ставиться как в точках убывания или роста, так и в точках экстремума.

Для решения типа «солитон» условие Липшица выполнено для уравнения первого порядка в окрестности кратного корня, а в окрестности второго корня не выполнено. Так что для солитона в точке экстремума теряется единственность решения и задачу Коши тоже ставить нельзя.

Это подтверждается численным анализом перерождения кноидальной волны в солитон.

Точные решения найдены не для всех обобщений уравнения КдФ, а для тех модификаций уравнения КдФ, где они найдены, они очень громоздки и сложны [Demiray, 2007; Wazwaz, 2007; Абдель Латиф, 2011; Sanchez, 2015]. Применение численных методов для указанных модификаций уравнения КдФ необходимо, однако, несмотря на отсутствие громоздкости, это имеет

свои специфические сложности. Именно для изучения этих сложностей необходимо вернуться к классическому уравнению КдФ с вычислительной точки зрения.

Если придерживаться математической модели однокамерного сердца на основе уравнения КдФ [Лэм, 1983; Черняев, 2019], то приведенная в последнем пункте работы табличная зависимость периода кноидальной волны иллюстрирует процесс остановки однокамерного сердца. Сначала увеличивается период функции, описывающей кноидальную волну, а затем полной остановке однокамерного сердца предшествует уединенная волна (солитон). Чтобы модель однокамерного сердца нормально функционировала, нельзя допускать ситуации, близкой к режиму уединенной волны, т. е. близости второго и третьего корней многочлена, стоящего в правой части уравнения первого порядка.

Список литературы (References)

- Абдель Латиф М. С.* Симметричный анализ и некоторые новые точные решения модифицированного уравнения Кортевега – де Фриза с переменными коэффициентами, возникающего в артериальной механике // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2011. — Т. 11, вып. 2. — С. 42–48.
Abdel Latif M. S. Symmetriyniy analiz i nekotorye novye tochnye resheniya modifitsirovannogo uravneniya Kortevega – de Friza s peremennymi koeffitsientami, vznikayushogo v arterialnoi mehanike [Symmetric analysis and some new exact solutions of the modified Korteweg – de Vries equation with variable coefficients arising in arterial mechanics] // Izv. Sarat. un-ta. New ser. Ser. Maths. Mechanics. Informatics. — 2011. — Vol. 11, iss. 2. — P. 42–48 (in Russian).
- Амосов А. А., Дубинский Ю. А., Копченова Н. В.* Вычислительные методы для инженеров: учеб. пособие. — М.: Высшая школа, 1994. — 544 с.
Amosov A. A., Dubinsky Yu. A., Kopchenova N. B. Vichislitelnye metody dlya ingenerov [Computational methods for engineers]: ucheb. posobie. — Moscow: Vysshaya Shkola, 1994. — 544 p. (in Russian).
- Бхатнагар П.* Нелинейные волны в одномерных диспергирующих системах. — М.: Мир, 1983. — 136 с.
Bhatnagar P. Nelineinye volny v odnomernykh dispergiruiyushih sistemah [Nonlinear waves in one-dimensional dispersing systems]. — Moscow: Mir, 1983. — 136 p. (in Russian).
- Галанин М. П., Савенков Е. Б.* Методы численного анализа математических моделей. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2010. — 591 с.
Galanin M. P., Savenkov E. B. Metody chislenного analiza matematicheskikh modelei [Methods of numerical analysis of mathematical models]. — Moscow: Izd-vo MGTU im. N. Uh. Bauman, 2010. — 591 p. (in Russian).
- Кудрявцев Л. Д.* Краткий курс математического анализа. — М.: Наука, 1986. — 736 с.
Kudryavtsev L. D. Kratkii kurs matematicheskogo analiza [Short course of mathematical analysis]. — Moscow: Science, 1986. — 736 p. (in Russian).
- Лэм Дж. Л.* Введение в теорию солитонов. — М.: Мир, 1983. — 294 с.
Lam J. L. Vvedenie v teoriyu solitonov [Introduction to the theory of solitons]. — Moscow: Mir, 1983. — 294 p. (in Russian).
- Новокшенов В. Ю.* Введение в теорию солитонов. — М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. — 96 с.
Novokshenov V. Yu. Vvedenie v teoriyu solitonov [Introduction to the theory of solitons]. — Moscow–Izhevsk: Institute of Computer Research, 2002. — 96 p. (in Russian).
- Полянин А. Д., Зайцев В. Ф.* Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения. — М.: Физматлит, 2002. — 432 с.
Polyanin A. D., Zaitsev V. F. Spravochnik po nelineinym uravneniyam matematicheskoy fiziki: tochnye resheniya [Handbook of nonlinear equations of mathematical physics: exact solutions]. — Moscow: Fizmatlit, 2002. — 432 p. (in Russian).
- Романко В. К.* Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. — М.: Лаборатория базовых знаний, 2002. — 344 с.
Romanko V. K. Kurs differentsialnyh uravnenii i variatsionnogo ischisleniya [Course in differential equations and calculus of variations]. — Moscow: Laboratory of basic knowledge, 2002. — 344 p. (in Russian).

- Рыскин Н. М., Трубецков Д. И.* Нелинейные волны. — М.: ЛЕНАНД (Урсс), 2017. — 312 с.
Ryskin N. M., Trubetskov D. I. Nelineinye volny [Nonlinear waves]. — Moscow: LENAND (Urss), 2017. — 312 p. (in Russian).
- Скотт Э.* Нелинейная наука: рождение и развитие когерентных структур. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 560 с.
Scott E. Nelineinaya nauka: rozdenie i razvitie kogerentnykh struktur [Nonlinear Science: The Birth and Development of Coherent Structures]. — Moscow: FIZMATLIT, 2007. — 560 p. (in Russian).
- Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977. — 624 с.
Wisam G. Lineinye i nelineinye volny [Linear and nonlinear waves]. — Moscow: Mir, 1977. — 624 p. (in Russian).
- Черняев А. П.* Основы гипотезы условий ритмичной работы сердечной камеры в рамках некоторых математических моделей // Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. — 2019. — № 6. — Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/jun19/11/text.pdf> — DOI 10.30898/1684-1719.2019.6.11
Chernyaev A. P. Osnovy gipotezy uslovii ritmichnoi raboty serdechnoi kamery v ramkah nekotorykh matematicheskikh modeley [Fundamentals of the hypothesis of the rhythmic conditions of the cardiac chamber in the framework of some mathematical models] // Journal of Radio Electronics [electronic journal]. — 2019. — No. 6. — Access mode: <http://jre.cplire.ru/jre/jun19/11/text.pdf> — DOI 10.30898/1684-1719.2019.6.11 (in Russian).
- Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. — М.: Наука, 1964. — 344 с.
Yanke E., Emde F., Lesh F. Spetsialnye funktsii. Formuly, grafiki, tablitsy [Special functions. Formulas, graphs, tables]. — Moscow: Nauka, 1964. — 344 p. (in Russian).
- Demiray H.* Waves in fluid elastic tubes with a stenosis: Variable coefficients KdV equations // J. Comput. Appl. Math. — 2007. — Vol. 202. — P. 328–338.
- Sanchez P.* Cnoidal solutions, shock waves, and solitary wave solutions of the improved Korteweg – de Vries equation // Romanian Journal of Physics. — 2015. — Vol. 60, no. 3–4. — P. 379–400.
- Wazwaz A.* The extended tanh method for abundant solitary wave solutions of nonlinear wave equations // Appl. Math. Comput. — 2007. — Vol. 187. — P. 1131–1142.