

УДК: 330.4.51-77

Математические методы стабилизации структуры социальных систем при действии внешних возмущений

Л. Е. Варшавский

Центральный экономико-математический институт РАН,
Россия, 117418, г. Москва, Нахимовский пр., д. 47

E-mail: hodvar@yandex.ru

Получено 11.06.2021, после доработки — 23.06.2021.

Принято к публикации 05.07.2021.

В статье рассматривается билинейная модель влияния внешних возмущений на стабильность структуры социальных систем. Исследуются подходы к стабилизации третьей стороной исходной системы, состоящей из двух групп, — путем сведения исходной системы к линейной системе с неопределенными параметрами и использования результатов теории линейных динамических игр с квадратичным критерием. На основе компьютерных экспериментов анализируется влияние коэффициентов условной модели социальной системы и параметров управления на качество стабилизации системы. Показано, что использование третьей стороной минимаксной стратегии в форме управления с обратной связью приводит к относительно близкому приближению численности второй группы (возбуждаемой внешними воздействиями) к приемлемому уровню даже при неблагоприятном периодическом динамическом воздействии.

Исследуется влияние на качество стабилизации системы одного из ключевых коэффициентов в критерии (ε), используемого для компенсации воздействия внешних возмущений (последние присутствуют в линейной модели в форме неопределенности). С использованием операционного исчисления показывается, что уменьшение коэффициента ε должно приводить к увеличению значений суммы квадратов управления. Проведенные в статье компьютерные расчеты показывают также, что улучшение приближения структуры системы к равновесному уровню при уменьшении коэффициента ε достигается за счет весьма резких изменений управления U_t в начальный период, что может индуцировать переход части членов спокойной группы во вторую, возбужденную группу.

В статье исследуется также влияние на качество управления значений коэффициентов модели, характеризующих уровень социальной напряженности. Расчеты показывают, что повышение уровня социальной напряженности (при прочих равных условиях) приводит к необходимости значительного увеличения третьей стороной усилий на стабилизацию, а также величины управления в начальный момент времени.

Результаты проведенного в статье статистического моделирования показывают, что рассчитанные управления с обратной связью успешно компенсируют случайные возмущения, действующие на социальную систему (как в форме независимых воздействий типа белый шум, так и в форме автокоррелированных воздействий).

Ключевые слова: модели, социальные группы, стабильность, линейные динамические системы, неопределенные параметры

UDC: UDC: 330.4.51-77

Mathematical methods for stabilizing the structure of social systems under external disturbances

L. E. Varshavsky

Central Economics and Mathematics Institute RAS,
47 Nahimovskii ave., Moscow, 117418, Russia

E-mail: hodvar@mail.ru

Received 11.06.2021, after completion — 23.06.2021.

Accepted for publication 05.07.2021.

The article considers a bilinear model of the influence of external disturbances on the stability of the structure of social systems. Approaches to the third-party stabilization of the initial system consisting of two groups are investigated — by reducing the initial system to a linear system with uncertain parameters and using the results of the theory of linear dynamic games with a quadratic criterion. The influence of the coefficients of the proposed model of the social system and the control parameters on the quality of the system stabilization is analyzed with the help of computer experiments. It is shown that the use of a minimax strategy by a third party in the form of feedback control leads to a relatively close convergence of the population of the second group (excited by external influences) to an acceptable level, even with unfavorable periodic perturbations.

The influence of one of the key coefficients in the criterion (ε) used to compensate for the effects of external disturbances (the latter are present in the linear model in the form of uncertainty) on the quality of system stabilization is investigated. Using Z-transform, it is shown that a decrease in the coefficient ε should lead to an increase in the values of the sum of the squares of the control. The computer calculations carried out in the article also show that the improvement of the convergence of the system structure to the equilibrium level with a decrease in this coefficient is achieved due to sharp changes in control in the initial period, which may induce the transition of some members of the quiet group to the second, excited group.

The article also examines the influence of the values of the model coefficients that characterize the level of social tension on the quality of management. Calculations show that an increase in the level of social tension (all other things being equal) leads to the need for a significant increase in the third party's stabilizing efforts, as well as the value of control at the transition period.

The results of the statistical modeling carried out in the article show that the calculated feedback controls successfully compensate for random disturbances on the social system (both in the form of «white» noise, and of autocorrelated disturbances).

Keywords: models, social groups, stability, linear dynamical systems, uncertain parameters.

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2021, vol. 13, no. 4, pp. 845–857 (Russian).

© 2021 Leonid E. Varshavsky

This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Unported License.

To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/>
or send a letter to Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

1. Введение

Стабильность социальных систем зависит от большого числа социально-экономических, политических, национальных, религиозных и других факторов. Эти факторы определяют деятельность средств массовой информации (СМИ или массмедиа), оказывающих все большее влияние на состояние общества.

Уже в прошлом столетии в исследованиях специалистов по социологии и социальной психологии отмечалось сильное влияние, оказываемое такими ставшими к тому времени традиционными средствами массовой информации, как радио и телевидение, на психологическое состояние общества и поведение людей. Так, как отмечается в [Мейерс, 1997, гл. 12, с. 517–527], в Канаде и США, по мере распространения телевидения, транслирующего фильмы со сценами насилия, в 1957–1974 гг. количество убийств возросло в 2 раза.

Серьезный анализ влияния массмедиа и социальных сетей (social media) на широкий круг социально-экономических процессов (разжигание конфликтов, политические и протестные движения, предвыборные кампании, бизнес и др.) содержится в [Enikolopov, Petrova, 2017]. Так, как отмечается в этой статье, в Германии быстрому приобщению общества к нацистской идеологии с начала 1933 г. способствовала активная пропаганда нацизма в радиопередачах.

Новейшее время, особенно после арабских революций в 2010–2011 гг., характеризуется массовым использованием социальных сетей, способных оказывать как позитивное, так и негативное влияние на общественное развитие. Так, социальные сети выполняют не только часть функций СМИ по распространению и обобщению информации среди широких слоев населения, но также и по координации действий различных социальных групп (включая укрепление внутригрупповой солидарности участников протестных акций, идентификацию разных категорий пользователей сетей и др.) [Бобкова, 2013]. Отмечается также значительное влияние, оказываемое в некоторых сообщениях СМИ и социальных сетей на психическое состояние людей [Srivastava, 2018].

Только в России в начале 2021 г. пользователями социальных сетей было 99 млн чел. К аудитории пользователей относятся практически все подростки страны, которые в основном ориентированы на легкий контент. По данным социологических опросов, 89 % подростков ежедневно используют социальные сети, в то время как для взрослого населения эта доля составляет 53 %. Характерно, что для рабочих целей социальные сети использует лишь 32 % респондентов. Следует отметить также, что социальные сети успешно вытесняют радио и телевидение^{1, 2}. Более того, традиционные СМИ все в большей степени начали ориентироваться на интернет и социальные сети, которые стали формировать спрос на информацию и ее распространение среди широких слоев населения подчас без соблюдения основополагающих этических норм. Обострились политические процессы и противоречия, так как сети расширили «границы допустимых приемов политической борьбы» [Полтерович, 2021].

Таким образом, в настоящее время в связи с быстрым распространением информационных технологий в условиях углубляющегося неравенства и кризисных явлений весьма актуальной является проблема анализа как позитивного, так и негативного влияния современных массмедиа и социальных сетей на стабильность социальных групп. Необходимость исследования подобных проблем на основе динамических моделей была осознана еще до появления социальных сетей (см., например, [Takeuchi, Karmeshu, 1989]). В дальнейшем по мере широкого распространения социальных сетей подобные исследования превратились в одну из важных областей математической социологии (см., например, [Banisch, Olbrich, 2019; Agieva et al., 2020]). При этом используются аналогии и модели физико-химических и биологических процессов.

¹ URL: <https://wciom.ru/analytical-reviews/analiticheskii-obzor/podrostok-v-soczialnoj-seti-norma-zhizni-ili-signal-opasnosti> (дата обращения: 25.05.2021).

² URL: <https://www.web-canape.ru/business/internet-i-socseti-v-rossii-v-2021-godu-vsya-statistika/> (дата обращения: 15.05.2021).

Так, в [Khrennikov, 2016] для анализа широкомасштабных протестных акций, имевших место в прошлом десятилетии, предлагается использовать модель лазера.

В настоящей работе рассматривается модель стабилизации структуры социальной системы, подвергаемой внешним возмущениям (в частности, со стороны массмедиа и социальных сетей), основанная на использовании методов теории линейных динамических систем с неопределенными параметрами [Garcia et al., 1994], а также линейных динамических игр с квадратичным критерием [Basar, Bernhard, 1995].

2. Рассматриваемая модель

Ниже рассматривается модель воздействия массмедиа и социальных сетей на стабильность структуры социальных групп, основанная на использовании одного из вариантов одногрупповой модели ядерного реактора [Климов, 1985; Варшавский, 2021]. Предполагается, что во взаимодействии находятся две социальные группы численностью N_1 и N_2 человек, причем вторая группа находится в возбужденном состоянии. Источник возмущений (например, массмедиа) путем целевого воздействия на первую группу переводит часть ее участников $u_t N_{1t}$, $0 < u_t \leq 1$, в возбужденное состояние. Третья сторона пытается снять возбуждение второй группы, воздействуя на естественный процесс ее «остывания» доступными ей средствами (например, средствами социального контроля — social control, включая экономические меры и СМИ). Рассматриваемая модель имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} N_{1t+1} &= (1 - u_t - \beta)N_{1t} + \lambda N_{2t} + \mu T_t, \\ N_{2t+1} &= (u_t + \beta)N_{1t} + (1 - \lambda)N_{2t} - \mu T_t, \\ T_{t+1} &= \gamma N_{2t} + \alpha T_t + V_t, \end{aligned} \quad (1)$$

где $0 < \lambda$, $\alpha, \beta \leq 1$, T_t — переменная состояния, характеризующая снижение уровня возбуждения второй группы как за счет ее естественного «остывания», так и за счет воздействия третьей стороны V_t . В результате «остывания» второй группы происходит уменьшение ее численности на μT_t .

Можно привести множество примеров, описываемых данной моделью. Например, в рыночной экономике под информационным возмущением u_t можно понимать действия отдельных бизнес-структур, бросающих через СМИ тень на продукцию конкурентов с целью вытеснения последних с рынка. В этом примере первую и вторую группы в модели (1) могут составлять потребители, с одной стороны временно использующие продукцию атакуемой компании, а с другой — отказывающиеся от нее и требующие материальной компенсации. Третьей стороной в модели может быть компания, подвергаемая атакам со стороны конкурентов, которая для смягчения ситуации и успокоения потребителей 2-й группы вынуждена будет нести дополнительные затраты на доказательство соответствия качества своей продукции заявленным и требуемым характеристикам и параметрам, а возможно, и на частичную компенсацию претензий.

Другой пример связан со случаями использования отдельными структурами социальных сетей для сообщения населению информации, направленной против инициатив и мероприятий, осуществляемых властями разных уровней (муниципальных, региональных и др.). В этом примере в качестве третьей стороны в модели (1) могут выступать органы власти, применяющие широкий арсенал средств социального контроля, направленных на успокоение населения (разъяснительная работа, экономическое стимулирование, справедливая компенсация потерь и др.). В вышеприведенных примерах под T_t можно понимать энергию, высвобождаемую в момент t второй группой, что приводит к уменьшению ее численности на величину μT_t .

Если $\mu = 1$ и $0 < T_t \ll N_{2t}$, то под T_t можно понимать и непосредственно уменьшение численности второй (возбужденной) группы в результате ее естественного «остывания» и «охлаждающих» действий третьей стороны.

По аналогии с термодинамическими системами можно считать, что уравнение обратной связи относительно переменной T_t в (1) характеризует динамику теплообмена между второй группой и внешней средой (включая третью сторону), в результате которого уменьшается внутренняя энергия второй группы, что далее приводит к некоторому снижению ее численности (параметр μ в этой аналогии является величиной, обратной химическому потенциалу). В отличие от модели «социального лазера» [Khrennikov, 2016] в данной модели переход из возбужденного состояния в основное (невозбужденное) состояние μT_t под действием внешнего возмущения происходит с запаздыванием, что отражается вторым и третьим соотношениями (1).

Основываясь на энергетическом балансе человека при различных состояниях, принципиально возможно использовать в качестве единиц измерения переменной T_t единицы измерения, применяемые в термодинамике и энергетике, например джоуль и килокалории. Однако эта проблема требует отдельного рассмотрения.

Ввиду того, что из первых двух соотношений в (1) следует, что $N = N_{1t} + N_{2t} = \text{const}$, исходную систему (1) можно привести к системе из двух уравнений:

$$\begin{aligned} N_{1t+1} &= (1 - \lambda - u_t - \beta)N_{1t} + \mu T_t + \lambda N, \\ T_{t+1} &= -\gamma N_{1t} + \alpha T_t + \gamma N + V_t. \end{aligned} \tag{2}$$

В модели принимается допущение о том, что для нейтрализации воздействия возмущений, направленных на увеличение численности второй группы, третьей, успокаивающей («охлаждающей») стороной, используется минимаксная стратегия в соответствии с критерием

$$J = \sum_{t=0}^{\infty} (N_{1t} - \bar{N}_1)^2 + \frac{1}{2} \rho_v V_t^2 - \frac{1}{2} \rho_u u_t^2 \rightarrow \min_{V_t} \max_{u_t} \tag{3}$$

и ограничением (2), где \bar{N}_1, \bar{N}_2 ($\bar{N}_1 = N - \bar{N}_2$) — приемлемая (равновесная) для третьей стороны постоянная численность групп, с которой связаны равновесные значения других показателей (\bar{T}, \bar{V}), подчиняющихся уравнениям (2), $\rho_v > 0, \rho_u > 0$ — весовые коэффициенты.

Однако более простые и эффективные подходы к исследованию исходной билинейной системы (2) с критерием (3) заключаются в сведении ее к линейной системе. При этом возникает возможность использования достаточно простых и теоретически обоснованных методов оптимизации линейных систем управления.

В настоящей работе исследованы два подхода. В соответствии с первым подходом предполагается, что коэффициент u_t в (1) является неопределенным, причем $u_t = u_{avg} + dg_t, |g_t| \leq 1$, где d — постоянный коэффициент, характеризующий диапазон отклонения переменной u_t от предполагаемого уровня u_{avg} , а g_t — переменная, характеризующая неопределенность.

Второй подход основан на решении линейно-квадратичной игры применительно к системе (2), в которой в первом уравнении слагаемое $u_t N_{1t}$ заменено на $\xi_t = u_t N_{1t}$.

Тогда, переходя в (2) к отклонениям значений показателей от равновесных значений, можно получить следующие соотношения.

В первом случае

$$\begin{aligned} n_{1t+1} &= (1 - \lambda - u_{avg} - \beta)n_{1t} + \mu \theta_t + \sigma_t, \\ \theta_{t+1} &= -\gamma n_{1t} + \alpha \theta_t + v_t, \end{aligned} \tag{4a}$$

где $n_{1t} = N_{1t} - \bar{N}_1$, $\theta_t = T_t - \bar{T}$, $v_t = V_t - \bar{V}$, $\sigma_t = dg_t n_{1t}$, $|g_t| \leq 1$. При этом вместо (3) становится возможным использовать следующий критерий [Garcia et al., 1994]:

$$J = \sum_{t=0}^{\infty} n_{1t}^2 + \rho_v v_t^2 + \varepsilon^{-1} (d^2 n_{1t}^2 - \sigma_t^2) \rightarrow \min_{v_t} \max_{\sigma_t} \quad (3a)$$

причем $\rho_v > 0$, $\varepsilon > 0$.

Во втором случае

$$\begin{aligned} n_{1t+1} &= (1 - \lambda - \beta)n_{1t} + \mu\theta_t - \xi_t, \\ \theta_{t+1} &= -\gamma n_{1t} + \alpha\theta_t + v_t, \end{aligned} \quad (4b)$$

и критерий имеет следующий вид [Basar, Bernhard, 1995]:

$$J = \sum_{t=0}^{\infty} n_{1t}^2 + \frac{1}{2} \rho_v v_t^2 - \rho_{\xi} \xi_t^2 \rightarrow \min_{v_t} \max_{\xi_t} \quad (3b)$$

где $\xi_t = U_t - \bar{U}$, причем \bar{U} — предполагаемый уровень возмущающего воздействия на систему, находящуюся в равновесном состоянии.

Как первый, так и второй подход основаны на решении расширенных уравнений Риккати [Garcia et al., 1994; Basar, Bernhard, 1995; Варшавский, 2018]. В результате оптимальная стратегия для третьей стороны, обеспечивающая устойчивость системы (точнее, квадратичную стабилизируемость [Garcia et al., 1994]) и приближение показателей к желаемым уровням, оказывается связанной с показателями системы следующим образом:

$$V_t = \bar{V} - F' \begin{pmatrix} n_{1t} \\ \theta_t \end{pmatrix} = \bar{V} - F' \begin{pmatrix} N_{1t} - \bar{N}_1 \\ T_t - \bar{T} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где F — вектор, зависящий в каждом из подходов от положительно-определенного решения соответствующего уравнения Риккати. При этом качество решений зависит от значений выбранных коэффициентов $\rho_v > 0$, $\rho_{\xi} > 0$, а также ε , входящих в критерии. Так, при втором подходе управление, соответствующее минимальному значению коэффициента $\rho_{\xi \min}$, при котором существует положительно-определенное решение уравнения Риккати, является H_{∞} -оптимальным (робастным) управлением. При реализации такого управления H_{∞} -норма оптимальной системы, характеризующая чувствительность выходных переменных к возмущениям, минимальна [Basar, Bernhard, 1995].

3. Результаты расчетов

В качестве иллюстрации первого из рассмотренных подходов на рис. 1–4 приведена динамика численности второй группы при постоянном значении $u_t = 0.05$, а также при изменении u_t по синусоидальному закону: $u_t = u_{avg}(1 + g_t) = 0.05 \cdot (1 - \sin(0.7t))$ как при наличии, так и при отсутствии управления с обратной связью, рассчитанной для наиболее вероятного среднего уровня $u_{avg} = 0.05$. В условном примере приняты следующие значения параметров: $\lambda = \rho_u = 0.03$, $\beta = 0.05$, $\mu = 0.01$, $\alpha = 0.9$, $\gamma = 0.5$, начальных и допустимых значений численности групп: $N_{10} = 25$, $N_{20} = 25$, $\bar{N}_1 = 30$, $\bar{N}_2 = 20$, а также переменной состояния: $T_0 = 0$, $\bar{T} = 240$. Расчеты проводились при разных значениях параметра ε , равных 0.05; 0.005; 0.0005 и 0.00005.

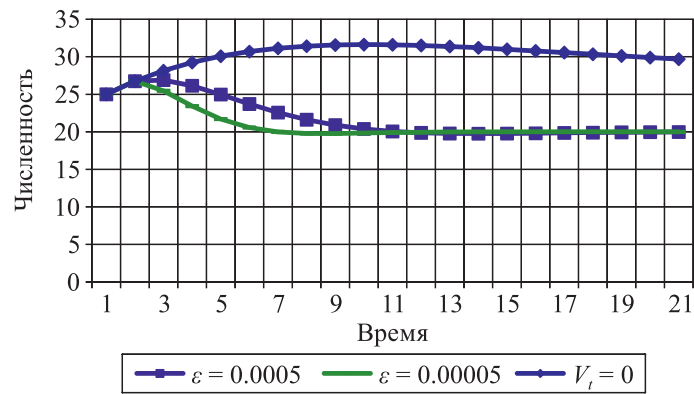


Рис. 1. Динамика численности второй группы при отсутствии ($V_i = 0$) и наличии управлений с обратной связью $V_i(\epsilon)$, соответствующих различным значениям ϵ при постоянном значении $u_i = 0.05$

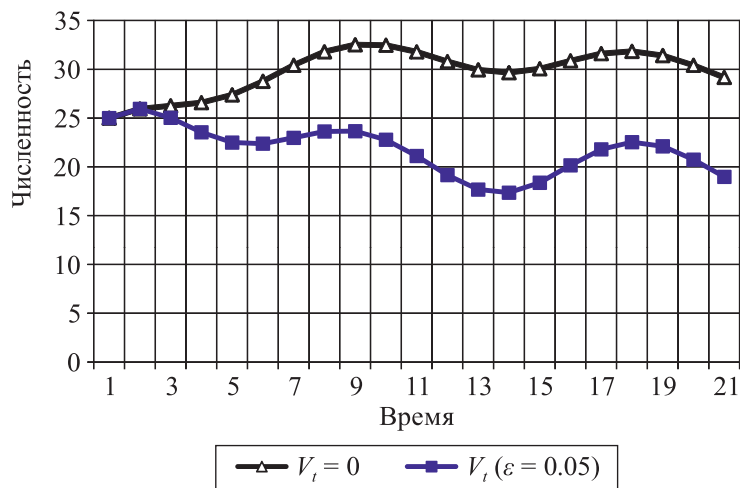


Рис. 2. Динамика численности второй группы при отсутствии ($V_i = 0$) и наличии управления с обратной связью ($V(\epsilon = 0.05)$) при изменении u_i по синусоидальному закону ($u_{avg} = 0.05$)

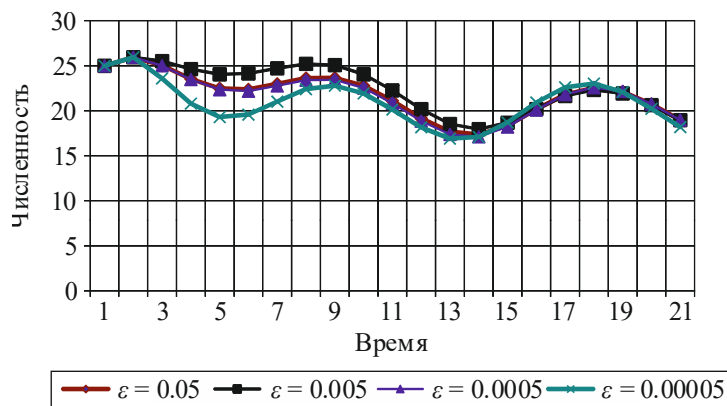


Рис. 3. Динамика численности второй группы при наличии управлений с обратной связью $V_i(\epsilon)$, соответствующих различным значениям ϵ при изменении u_i по синусоидальному закону ($u_{avg} = 0.05$)

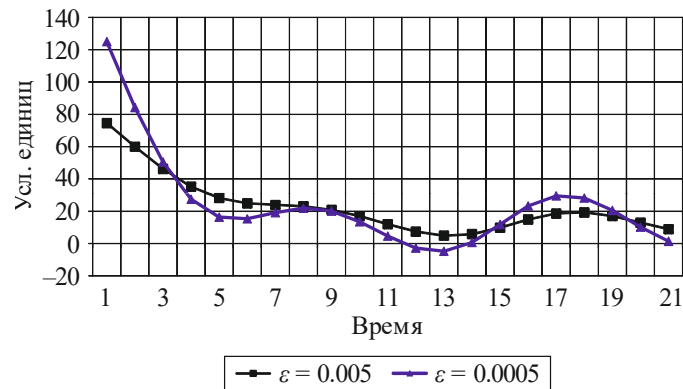


Рис. 4. Динамика управляющих воздействий с обратной связью третьей стороны $V_t(\epsilon)$, соответствующих различным значениям ϵ при изменении u_t по синусоидальному закону ($u_{avg} = 0.05$)

Использование третьей стороной управления с обратной связью (своего рода «расхолаживания») приводит к относительно близкому приближению численности второй группы к приемлемому уровню $\bar{N}_2 = 20$ даже при неблагоприятном периодическом воздействии (рис. 2). Дальнейшее улучшение приближения может быть обеспечено путем уменьшения коэффициента ϵ в критерии (3а). Однако такое улучшение достигается за счет увеличения коэффициентов вектора F в (5) и, соответственно, резких изменений управления V_t в начальный период (рис. 3, 4).

Наглядное объяснение этого может быть обеспечено путем перехода в (4б) к операционному исчислению (Z-преобразованию). Тогда по аналогии с [Варшавский, 2020] можно показать, что справедливо:

$$v_t = -\frac{(1 + \epsilon^{-1}d^2)zW_1((z)^{-1})[W_2(z)n_{01} + W_1(z)\theta_0]}{\rho_v + (1 + \epsilon^{-1}d^2)\left[W_1(z)W_1((z)^{-1}) - \frac{\rho_v}{\epsilon^{-1}}W_2(z)W_2((z)^{-1})\right]} =$$

$$= -\frac{zW_1((z)^{-1})[W_2(z)n_{01} + W_1(z)\theta_0]}{\rho_v\epsilon\left(\frac{1}{(\epsilon + d^2)} - W_2(z)W_2((z)^{-1})\right) + W_1(z)W_1((z)^{-1})}, \quad (6)$$

где $W_1(z) = \frac{\mu}{z^2 - (m + \alpha)z + m\alpha + \mu\gamma}$, $W_2(z) = \frac{z - \alpha}{\mu}W_1(z)$ — передаточные функции, связывающие управление v_t и возмущение σ_t с переменной n_{1t} :

$$n_{1t} = W_1(z)v_t + W_2(z)\sigma_t + zW_1(z)\theta_0 + zW_2(z)n_{01}, \quad (7)$$

причем z представляет собой оператор сдвига: $zx_t = x_{t+1}$; n_{01} , θ_0 — слагаемые, характеризующие начальные значения соответствующих показателей, $m = 1 - \lambda - u_{avg} - \beta$.

Так как максимум критерия (3а) по σ_t достигается при $W_2(z)W_2((z)^{-1}) < \frac{1}{(\epsilon + d^2)}$, то из (6) следует, что уменьшение ϵ должно приводить к увеличению значений суммы квадратов управления: $\|V_t\|^2 = (v_t, v_t) = \sum_{i=0}^{\infty} v_i^2$ (квадрата нормы управления). График зависимости этой величины от ϵ для рассматриваемого условного примера при горизонте планирования 20 временных

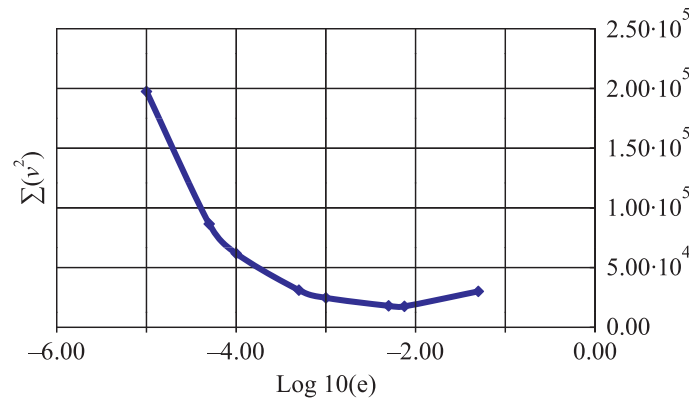


Рис. 5. Зависимость суммы квадратов управлений $\sum_{t=0}^{20} v_t^2$ от различных значений ε при оптимальных v_t ($u_{avg} = 0.05$)

единиц представлен на рис. 5. Как правило, рост $\sum_{t=0}^{\infty} v_t^2$ при уменьшении ε обусловлен появлением более резких изменений управления V_t в начальный период (особенно при удаленности начальных значений системы от равновесных, как это имеет место в рассматриваемом примере, в котором принято $T_0 = 0 \ll \bar{T} = 240$).

Очевидно, что реализация третьей стороной управления, соответствующего малому значению ε и большому значению V_0 в начальный момент времени, возможна при наличии у нее необходимого потенциала средств социального контроля для резкого импульсного воздействия на ситуацию в начальный момент. С другой стороны, такой вид воздействия может вызвать конфронтацию первой группы с третьей стороной и тем самым индуцировать переход части членов спокойной группы во вторую, возбужденную группу.

Следует отметить также влияние на качество управления значений коэффициентов λ и β модели, характеризующих переход членов из одной группы в другую при невозмущенном состоянии социальной системы и тем самым уровень социальной напряженности в исходной системе, который можно определить как $I_{se} = \frac{N'_{2\infty}}{N'_{1\infty}} = \frac{\beta}{\lambda + \gamma\mu / (1 - \alpha)}$, где $N'_{i\infty}$, $i = 1, 2$ — равновес-

ная численность групп при отсутствии возмущений. Очевидно, при прочих равных условиях большему значению коэффициента β и меньшему значению коэффициента λ , характеризующим социальную напряженность (а следовательно, большему значению индекса социальной напряженности I_{se}), будет соответствовать большая продолжительность переходного процесса при стабилизации системы (рис. 6). Как показывают расчеты, для того, чтобы достичь такой же продолжительности переходного процесса при большем значении $\beta = 0.1$ (при этом $I_{se} = 1.25$), чем в базовом варианте ($\beta = 0.05$, при этом $I_{se} = 0.625$), третьей стороне при прочих равных условиях придется увеличить величину управления в начальный момент времени V_0 на 65 %.

При этом потребуются значительно больше усилий, так как сумма квадратов управлений $\sum_{t=0}^{20} v_t^2$ возрастет в 2.45 раза.

Таким образом, уровень социальной напряженности в системе (зависящий от социального и экономического неравенства, социальной, политической и др. видов дискриминации) определяет реальную возможность и скорость перевода социальной системы, подвергаемой внешним возмущениям, в окрестность допустимого равновесного состояния.

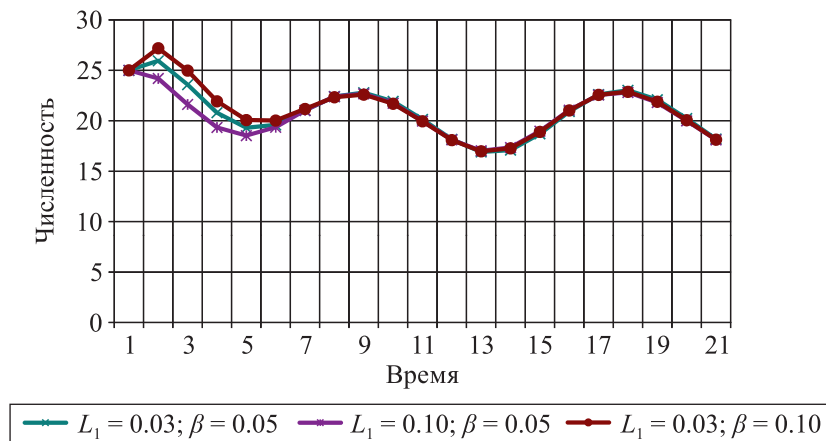


Рис. 6. Динамика численности второй группы при разных значениях коэффициентов λ и β при наличии управления с обратной связью $V_t(\varepsilon)$ и при изменении u_t по синусоидальному закону ($\varepsilon = 0.00005$; $u_{avg} = 0.05$)

Результаты расчетов на основе второго подхода (линейно-квадратичной динамической игры) практически совпадают с результатами, полученными при использовании первого подхода. Если при первом подходе наилучшее приближение к равновесному уровню численности \bar{N}_2 достигается за счет уменьшения (хотя и немонотонного) до минимально допустимой величины коэффициента ε , то во втором случае скорость приближения к \bar{N}_2 увеличивается за счет уменьшения коэффициента ρ_ξ в (3b).

Следует также отметить, что при уменьшении лага «расхолаживания» второй группы, характеризуемого коэффициентом α в (4a), (4b), использование робастных H_∞ -оптимальных управлений σ_t или ξ_t может приводить к сильным отклонениям траекторий численности N_{2t} от равновесного уровня \bar{N}_2 в начальный период. Так, уменьшение величины α с 0.9 в базовом варианте до 0.3^3 (и при одновременном увеличении γ до 3.5 для сопоставимости результатов) приводит в случае изменения u_t по принятому в расчетах синусоидальному закону к уменьшению значения N_{2t} в начальный период до 15 единиц (рис. 7).

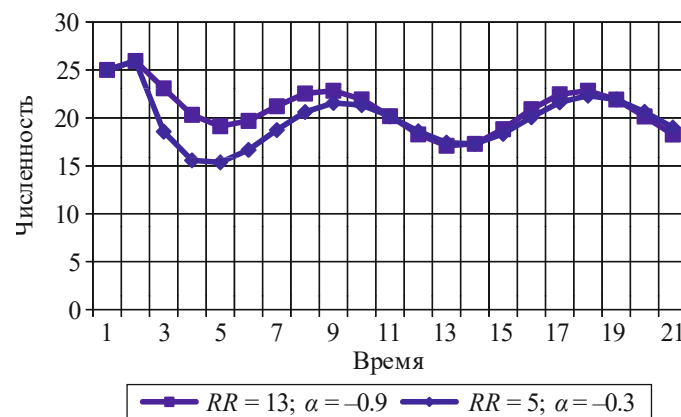


Рис. 7. Динамика численности второй группы при разных коэффициентах α в соотношениях (1), (4b) в случае изменения u_t по синусоидальному закону при H_∞ -оптимальном управлении ($\rho_\xi = RR$; $u_{avg} = 0.05$)

³ При этом значения коэффициента $RR = \rho_\xi$ при H_∞ -оптимальном управлении уменьшаются с $RR = 13$ до $RR = 5$.

4. Результаты статистического моделирования

Как показывают результаты статистического моделирования, управления с обратной связью (5), соответствующие малым значениям ε , успешно компенсируют случайные независимые воздействия g_t (белый шум), подчиняющиеся равномерному закону распределения в интервале $g_t \in [-1; +1]$. Так, в результате 10 000 статистических испытаний получено, что при $\varepsilon = 0.00005$, $u_t = 0.05 \cdot (1 + g_t)$ отклонения численности второй группы от целевого уровня $\bar{N}_2 = 20$ после переходного периода в 4 временные единицы не превышают 0.05 единиц. Достаточно удовлетворительная стабилизация структуры на желаемом уровне достигается и в случае коррелированных воздействий g_t . Так, в результате компьютерных экспериментов получено, что при $g_t = g_{t-1} + \chi_e$, где χ_e — случайная величина, подчиняющаяся равномерному закону распределения в интервале $\chi_e \in [-1; +1]$, указанные выше отклонения более чем в 99.4 % случаев не превышают 1.5 единиц. После 8–10 моментов времени в обоих случаях численность практически выходит на равновесный уровень $\bar{N}_2 = 20$.

Типичная динамика численности второй группы при некоррелированных (corr) и коррелированных (autocorr) возмущениях представлена на рис. 8.

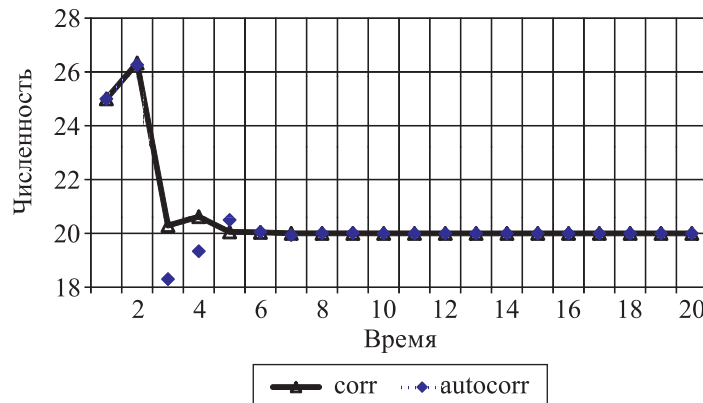


Рис. 8. Типичная динамика численности второй группы при наличии управления с обратной связью $V_t(\varepsilon)$ в случае возмущений g_t типа белый шум ($\varepsilon = 0.00005$; $u_{avg} = 0.05$)

Результаты проведенного статистического моделирования интересно сопоставить с другим полезным подходом, основанным на стабилизации линейных динамических систем со случайными параметрами. Так, если считать, что $u_t = u_{avg} + g_t$, где g_t — случайный процесс типа белый шум, причем $Eg_t = 0$, $Eg_t^2 = g_g^2$, то систему (4а) можно представить в пространстве состояний в виде

$$X_{t+1} = AX_t + Bv_t + A_1X_t, \tag{8}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \lambda - u_{avg} - \beta & \mu \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} g_t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Минимизируя критерий

$$J = \frac{1}{2} E \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} X_t' Q X_t + \rho_v v_t^2 \right\} \rightarrow \min_{v_t} \tag{10}$$

можно получить следующие соотношения для определения закона обратной связи [Пакшин, 1994, с. 127]:

$$H = (A - BF)'H(A - BF) + g_g^2 A_1' H A_1 + F' \rho_v F + Q, \quad (11)$$

$$v_t = -F' X_t = -[B' H B + \rho_v]^{-1} X_t. \quad (12)$$

Проведенные нами имитационные расчеты (проводилось 10 000 статистических испытаний) при использовании соотношений (11)–(12), где H — положительно-определенное решение модифицированного уравнения Риккати (11) при принятых в примере значениях параметров, показали, что в случае, когда возмущения $g_t \in [-1; +1]$ представляют собой белый шум, причем $g_g^2 = 2/3 \cdot 0.05^2 = 0.001667$, отклонения численности второй группы от целевого уровня $\bar{N}_2 = 20$ после переходного периода в 4 временные единицы не превышают большую, чем в предыдущем подходе, величину — 1.5 единиц. После 10–12 моментов времени отклонение численности данной группы от равновесного уровня не превышают 0.05 единиц.

Этот результат применительно к рассматриваемому примеру также можно считать удовлетворительным. Вместе с тем при коррелированных возмущениях использование подхода, основанного на стабилизации линейных динамических систем со случайными параметрами, становится затруднительным из-за значительного усложнения алгоритмов вычислений.

5. Заключение

Рассмотренная модель позволяет провести полезный качественный анализ влияния внешних возмущений на стабильность социальных групп.

Использование теории линейно-квадратичных регуляторов с неопределенными коэффициентами, а также линейных динамических игр может служить основой для эффективной стабилизации структуры социальных систем.

Одним из условий успешной стабилизации структуры социальных систем при деструктивных внешних воздействиях является низкий уровень социальной напряженности (фактической и потенциальной) в самих системах.

Дальнейших исследований требует проблема измерения используемых в рассмотренной модели уровней возбуждения социальных групп.

Список литературы (References)

Бобкова И. А. Использование социальных сетей в политике // Анализ и моделирование экономических и социальных процессов / Математика. Компьютер. Образование: сб. научн. трудов. — М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2013. — Вып. 20. — С. 120–129.

Bobkova I. A. Ispol'zovanie social'nykh setej v politike // Analiz i modelirovanie ehkonomicheskikh i social'nykh processov [Using social networks in politics] / Mathematics. Computing. Education; Proceedings of the 20th International Conference. Analysis and Modeling of Economic and Social Processes [Mathematics. Computing. Education; Proceedings of the 20th International Conference. Analysis and Modeling of Economic and Social Processes]. — Moscow–Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics]. — 2013. — Vol. 20. — P. 120–129 (in Russian).

Варшавский Л. Е. Моделирование динамики экономических систем с неопределенными параметрами // Компьютерные исследования и моделирование. — 2018. — Т. 10, № 2. — С. 261–276.

Varshavsky L. E. Modelirovanie dinamiki ehkonomicheskikh sistem s neopredelennymi parametrami [Uncertainty factor in modeling dynamics of economic systems] // Computer Research and Modeling. — 2018. — Vol. 10, No. 2. — P. 261–276 (in Russian).

- Варшавский Л. Е.* Моделирование развития олигополистических рынков при наличии киберугроз // Труды Института системного анализа Российской академии наук. — 2020. — Т. 70, № 2. — С. 21–29.
Varshavsky L. E. Modelirovanie razvitiya oligopolisticheskikh rynkov pri nalichii kiberugroz [Analysis of economic indicators of oligopolistic markets under cyberthreats] // Trudy Instituta sistemnogo analiza Rossijskoj akademii nauk [Proceeding of the ISA RAS]. — 2020. — Vol. 70, No. 2. — P. 21–29 (in Russian).
- Варшавский Л. Е.* Использование моделей кинетики физико-химических процессов при исследовании динамики экономических систем // Теория и практика институциональных преобразований в России: сб. научных трудов / Б. Г. Ерзнкян (ред.). — М.: ЦЭМИ РАН, 2021. — Вып. 51. — С. 62–73.
Varshavsky L. E. Ispol'zovanie modelej kinetiki fiziko-khimicheskikh processov pri issledovanii dinamiki ehkonomicheskikh sistem] // Teoriya i praktika institucional'nykh preobrazovanij v Rossii: sb. nauchnykh trudov / B. H. Erznkyan (red.). [Theory and Practice of Institutional Reforms in Russia / ed. by B. H. Erznkyan]. — Moscow: CEMI Russian Academy of Sciences, 2021. — Iss. 51. — P. 62–73 (in Russian).
- Климов А. Н.* Ядерная физика и ядерные реакторы. — М.: Энергоатомиздат, 1985.
Klотов A. N. Yadernaya fizika i yadernye reaktory [Nuclear Physics and Nuclear Reactors]. — Moscow: Energoatomizdat, 1985 (in Russian).
- Мейерс Д.* Социальная психология. — СПб.: Питер, 1997.
Myers D. G. Social'naya psikhologiya [Social Psychology]. — St. Petersburg: Piter, 1997 (in Russian).
- Пакишин П. В.* Дискретные системы со случайными параметрами и структурой. — М.: Физматлит, 1994.
Pakshin P. V. Diskretnye sistemy so sluchajnymi parametrami i strukturoj [Discrete Systems with Stochastic Parameters and Structure]. — Moscow: Physmatlit, 1994 (in Russian).
- Полтерович В. М.* Кризис институтов политической конкуренции, интернет и коллаборативная демократия // Вопросы экономики. — 2021. — № 1. — С. 1–21.
Polterovich V. M. Krizis institutov politicheskoy konkurencii, internet i kollaborativnaya demokratiya // Voprosy ekonomiki. — 2021. — No. 1. — P. 1–21 (in Russian).
- Agieva M. T., Korolev A. V., Ougolnitsky G. A.* Modeling and Simulation of Impact and Control in Social Networks with Application to Marketing // Mathematics. — 2020. — Vol. 8. — 1529. — doi:10.3390/math8091529
- Banisch S., Olbrich E.* Opinion polarization by learning from social feedback // The Journal of Mathematical Sociology. — 2019. — Vol. 43, No. 2. — P. 76–103.
- Basar T., Bernhard P.* H^∞ -optimal control and related minimax design problems. — Birkhauser, Boston, 1995.
- Enikolopov R., Petrova M.* Mass media and its influence on behavior // The Centre de Recerca en Economia Internacional (CREI). — December 2017. — No. 44. — URL: https://www.crei.cat/wp-content/uploads/2018/03/Opuscle-44_ENG.pdf (дата обращения: 25.03.2021).
- Garcia G., Bernussou J., Arzeiler D.* Robust Stabilization of Discrete-Time Linear Systems with Norm-Bounded Time-Varying Uncertainty // Systems & Control Letters. — 1994. — Vol. 22, No. 5. — P. 327–339.
- Khrennikov A.* ‘Social Laser’: action amplification by stimulated emission of social energy // Philosophical Transactions of the Royal Society. A. — 2016. — Vol. 374, No. 2054. — 20150094. — <http://doi.org/10.1098/rsta.2015.0094>. — URL: <https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rsta.2015.0094> (дата обращения: 29.01.2021).
- Srivastava K., Chaudhury S., Bhat P. S., Mujawar S.* Media and mental health // Ind Psychiatry Journal. — 2018. — Vol. 27, No. 1. — P. 1–5.
- Takeuchi Y., Karmeshu.* Dynamic Model of Three Competing Social Groups // International Journal of Systems Science. — 1989. — Vol. 20, No. 11. — P. 2125–2137.

