

УДК: 519.63

Параллельный метод вложенных дискретных трещин для моделирования течений в трещиноватых пористых средах

Р. М. Янбарисов

Институт вычислительной математики РАН им. Г. И. Марчука,
Россия, 119333, г. Москва, ул. Губкина, д. 8

E-mail: ruslan.yanbarisov@gmail.com

Получено 29.04.2021, после доработки — 28.06.2021.

Принято к публикации 05.07.2021.

В данной работе рассматривается параллельный метод решения задач однофазной фильтрации в трещиноватой пористой среде, основанный на представлении трещин вложенными в расчетную сетку поверхностями и называемый в литературе моделью (или методом) вложенных дискретных трещин. В рамках модели пористая среда и крупные трещины представляются в виде двух независимых континуумов. Отличительной особенностью рассматриваемого подхода является то, что расчетная сетка не перестраивается под положение трещин, при этом для каждой ячейки, пересекаемой трещиной, вводится дополнительная степень свободы. Дискретизация потоков между введенными континуумами трещин и пористой среды использует предназначенные характеристики пересечения поверхностей трещин с трехмерной расчетной сеткой. При этом дискретизация потоков внутри пористой среды не зависит от потоков между континуумами. Это позволяет интегрировать модель в уже существующие симуляторы многофазных течений в пористых коллекторах и при этом точно описывать поведение течений вблизи трещин.

Ранее автором был предложен монотонный метод вложенных дискретных трещин, основанный на применении метода конечных объемов с нелинейными схемами дискретизации потоков внутри пористой среды: монотонной двухточечной схемы или компактной многоточечной схемы с дискретным принципом максимума. Было доказано, что дискретное решение полученной нелинейной задачи для системы «пористая среда + трещины» сохраняет неотрицательность или удовлетворяет дискретному принципу максимума в зависимости от выбора схемы дискретизации.

Данная работа является продолжением предыдущих исследований. Предложенный метод был параллелизован с помощью программной платформы INMOST и протестирован. Были использованы такие возможности INMOST, как сбалансированное распределение сетки по процессорам, масштабируемые методы решения разреженных распределенных систем линейных уравнений и другие. Были проведены параллельные расчеты, демонстрирующие хорошую масштабируемость при увеличении числа процессоров.

Ключевые слова: трещиноватые пористые среды, модель вложенных дискретных трещин, параллельные вычисления

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-90110.

UDC: 519.63

Parallel embedded discrete fracture method for flows in fractured porous media

R. M. Yanbarisov

Marchuk Institute of Numerical Mathematics RAS,
8 Gubkina st., Moscow, 119333, Russia

E-mail: ruslan.yanbarisov@gmail.com

Received 29.04.2021, after completion — 28.06.2021.

Accepted for publication 05.07.2021.

In this work, parallel method for solving single-phase flow problems in a fractured porous media is considered. Method is based on the representation of fractures by surfaces embedded into the computational mesh, and known as the embedded discrete fracture model. Porous medium and fractures are represented as two independent continua within the model framework. A distinctive feature of the considered approach is that fractures do not modify the computational grid, while an additional degree of freedom is introduced for each cell intersected by the fracture. Discretization of fluxes between fractures and porous medium continua uses the pre-calculated intersection characteristics of fracture surfaces with a three-dimensional computational grid. The discretization of fluxes inside a porous medium does not depend on flows between continua. This allows the model to be integrated into existing multiphase flow simulators in porous reservoirs, while accurately describing flow behaviour near fractures.

Previously, the author proposed monotonic modifications of the model using nonlinear finite-volume schemes for the discretization of the fluxes inside the porous medium: a monotonic two-point scheme or a compact multi-point scheme with a discrete maximum principle. It was proved that the discrete solution of the obtained nonlinear problem preserves non-negativity or satisfies the discrete maximum principle, depending on the choice of the discretization scheme.

This work is a continuation of previous studies. The previously proposed monotonic modification of the model was parallelized using the INMOST open-source software platform for parallel numerical modelling. We used such features of the INMOST as a balanced grid distribution among processors, scalable methods for solving sparse distributed systems of linear equations, and others. Parallel efficiency was demonstrated experimentally.

Keywords: fractured porous media, embedded discrete fracture model, parallel computing

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2021, vol. 13, no. 4, pp. 735–745 (Russian).

The reported study was funded by RFBR, project number 19-31-90110.

Введение

Естественно-трещиноватые коллекторы содержат значительную долю мировых запасов углеводородов, в связи с чем представляют большой интерес для гидрогеологического моделирования. Такие коллекторы часто содержат связные сети трещин различных масштабов и проводимостей. Развитие численных моделей течений, способных корректно учитывать как высокопроводящие каналы, суммарный поток по которым может значительно превосходить поток внутри пористой среды, так и барьеры, существенно меняющие направление течения, является актуальным направлением исследований.

Среди наиболее распространенных подходов численного моделирования течений в трещиноватых пористых средах можно выделить следующие: модели эквивалентного континуума [Begg et al., 1989; Durllofsky, 1991], модели двойной пористости – двойной проницаемости [Баренблатт и др., 1960; Warren, Root, 1963; Kazemi et al., 1976], модели дискретных трещин [Kim, Deo, 2000; Karimi-Fard et al., 2004], модели вложенных дискретных трещин [Lee et al., 2001; Li, Lee, 2008; Hajibeygi et al., 2011].

Для оптимизации численных расчетов с большим количеством трещин последние часто разделяют по масштабам на мелкие и крупные, где мелкими считаются трещины, длина которых меньше блока расчетной сетки, а крупными – более длинные трещины, пересекающие несколько блоков. При таком разделении мелкие трещины можно учесть через изменение эффективных свойств пористой среды (пористости и проницаемости), в то время как крупные трещины моделируются явным образом [Lee et al., 2001].

Модель вложенных дискретных трещин (Embedded Discrete Fracture Model, EDFM), рассматриваемая в данной работе, основана на представлении крупных трещин в виде поверхностей, вложенных в расчетную сетку пористой среды. Пористая среда и крупные трещины представляются в виде двух связанных континуумов. Континуум пористой среды на дискретном уровне задается ячейками расчетной сетки с заданными на них эффективными свойствами. Дискретное представление континуума трещин основано на введении дополнительных степеней свободы в каждой ячейке пористой среды, пересекаемой трещинами. При этом расчетная сетка пористой среды не перестраивается под положение трещин, что отличает этот класс моделей от моделей дискретных трещин. Данная особенность позволяет внедрять модели EDFM для учета трещин в уже существующие гидрогеологические симуляторы течений, при этом добавляется минимально необходимое число дополнительных неизвестных. Также преимуществом является то, что данный подход может быть расширен на многофазные и многокомпонентные течения. В частности, EDFM успешно применяется для анализа многофазных течений и задач повышения нефтеотдачи [Moinfar et al., 2014; Xu et al., 2019b], моделирования гидроразрыва пласта и задач геомеханики [Norbeck et al., 2016; Ren et al., 2018; Xu et al., 2019a].

В оригинальной модели использовались структурированные сетки для пористой среды и линейная двухточечная схема дискретизации для всех типов потоков [Li, Lee, 2008]. Однако в случае анизотропной среды и неортогональных расчетных сеток линейная двухточечная схема не дает аппроксимации для потоков, что может существенно менять течение в области [Никитин, 2010].

Ранее в работах [Nikitin, Yanbarisov, 2020; Yanbarisov, Nikitin, 2021] был предложен монотонный метод вложенных дискретных трещин, который корректно учитывает анизотропию пористой среды, сохраняет неотрицательность дискретного решения или удовлетворяют дискретному принципу максимума (ДПМ) в зависимости от выбранной нелинейной схемы дискретизации потока между ячейками пористой среды. Удовлетворение ДПМ в задачах многофазной фильтрации в анизотропных средах может быть существенным для получения физически корректного решения [Nikitin et al., 2016].

В этой работе рассматривается параллельная версия предложенного ранее монотонного метода. Для параллелизации использовалась программная платформа INMOST. Метод был протестирован, продемонстрирована хорошая масштабируемость при увеличении числа процессоров.

Однофазная фильтрация в трещиноватой пористой среде

Рассмотрим трещиноватую пористую среду. Будем предполагать, что она может быть представлена в виде двух независимых областей для пористой среды и для трещин, вложенных в пористую среду. Тогда течение в трещиноватой пористой среде с неизвестным давлением p задается законом сохранения потоков Дарси в каждой из областей:

$$\begin{aligned} [-\operatorname{div} \mathbf{K} \nabla p]^m &= g^m + q^{mf} && \text{в } \Omega^m \subset \mathbb{R}^3, \\ [p]^m &= g_D && \text{на } \Gamma_D^m, \\ [\mathbf{K} \nabla p]^m \cdot \mathbf{n} &= g_N && \text{на } \Gamma_N^m \end{aligned} \quad (1)$$

в пористой среде (обозначено как $[\cdot]^m$) и

$$\begin{aligned} [-\operatorname{div} \mathbf{K} \nabla p]^f &= g^f + q^{fm} && \text{в } \Omega^f \subset \mathbb{R}^2, \\ [p]^f &= g_D && \text{на } \Gamma_D^f, \\ [\mathbf{K} \nabla p]^f \cdot \mathbf{n} &= g_N && \text{на } \Gamma_N^f \cup \Gamma_0^f \end{aligned} \quad (2)$$

в трещинах (обозначено как $[\cdot]^f$). Здесь Ω^m — трехмерная область с границей $\Gamma^m = \Gamma_D^m \cup \Gamma_N^m$, состоящей из границы $\Gamma_D^m = \bar{\Gamma}_D^m$, $\Gamma_D^m \neq \emptyset$, с фиксированным давлением и границы Γ_N^m с фиксированным потоком; Ω^f — двумерная область трещин, вложенных в пористую среду Ω^m . Ребра трещин, $\Gamma^f = \Gamma_D^f \cup \Gamma_N^f \cup \Gamma_0^f$, разделяются на внутренние $\Gamma_0^f \subset \Omega^m$ и ребра $\Gamma_D^f \subset \Gamma_D^m$ и $\Gamma_N^f \subset \Gamma_N^m$, выходящие на границу Ω^m .

Свойства пористой среды задаются в общем случае анизотропным, неоднородным тензором проницаемости $\mathbf{K}^m = (\mathbf{K}^m)^T > 0$. В среде трещин тензор проницаемости полагается изотропным: $\mathbf{K}^f = k^f \mathbf{I}$, где \mathbf{I} — единичный тензор размером 3×3 .

Слагаемые g^m , g^f соответствуют источникам/стокам, g_D , g_N задают фиксированные давления и потоки на границах. Слагаемые $q^{mf} = -q^{fm}$ соответствуют перетокам между пористой средой и средой трещин. На границе Γ_0^f задаются условия непротекания $g_N = 0$.

Модель вложенных дискретных трещин для задачи однофазной фильтрации

Будем рассматривать длинные трещины $L_f \gg h$ (h — размер ячеек расчетной сетки в окрестности трещины), поскольку мелкие трещины могут быть учтены изменением локального тензора проницаемости ячеек. Ширина трещин $w_f \ll h$ считается малой, трещина не разрешается на расчетной сетке. В данной работе каждая трещина F_i , $i = 1, \dots, n_f$, задана плоской двумерной поверхностью Ω_i^f , представленной конформной триангуляцией, с фиксированными расположением и толщиной. Здесь n_f — число трещин, область трещин $\Omega^f = \bigcup_{j=1}^{n_f} \Omega_j^f$.

Рассмотрим полиэдральную расчетную сетку \mathcal{T} . Для каждой ее ячейки $T \in \mathcal{T}$ введем неизвестную p_T^m давления в пористой среде, определенного в центре масс T .

Метод вложенных трещин основан на представлении каждой трещины F_i виртуальными ячейками $T_i = T \cap F_i$ — двумерными многоугольниками пересечения с ячейками расчетной сетки $T \in \mathcal{T}$, не разрешенными ею. Каждой виртуальной ячейке T_i соответствует определенная

в центре масс многоугольника пересечения дополнительная степень свободы $p_{T,i}^f, i = 1, \dots, n_T$, локального давления трещины. Здесь n_T — количество трещин, пересекающих T . Для поддержания связности виртуальных ячеек вводятся виртуальные грани — отрезки пересечения ребер и граней \mathcal{T} с F_i . Таким образом, каждой трещине F_i соответствует связный набор степеней свободы виртуальных ячеек.

Для дискретизации уравнений (1), (2) в областях пористой среды и трещин используется метод конечных объемов, применяемый для всех типов потоков, включая потоки между ячейками пористой среды, ячейками пористой среды и трещин, ячейками одной трещины и пересекающимися трещин (рис. 1). Это приводит к следующим уравнениям модели для задачи однофазной фильтрации в ячейках T и $T_i, i = 1, \dots, n_T$:

$$\sum_{\sigma \in \partial T} \mathbf{q}_\sigma \cdot \mathbf{n}_\sigma - \sum_{i=1, \dots, n_T} q_{F_i, T} = \int_T g^m dx, \tag{3}$$

$$\sum_{\sigma_j \in \partial T_i} q_{F_i, \sigma_j} + \sum_{j=1, \dots, n_T} q_{F_{i,j}, T} + q_{F_i, T} = \int_{T_i} g^f dx, \quad i = 1, \dots, n_T, \tag{4}$$

где $\mathbf{q}_\sigma \cdot \mathbf{n}_\sigma$ — диффузионный поток между ячейкой T и ее соседом через грань σ , $q_{F_i, T}$ — поток между T и T_i .

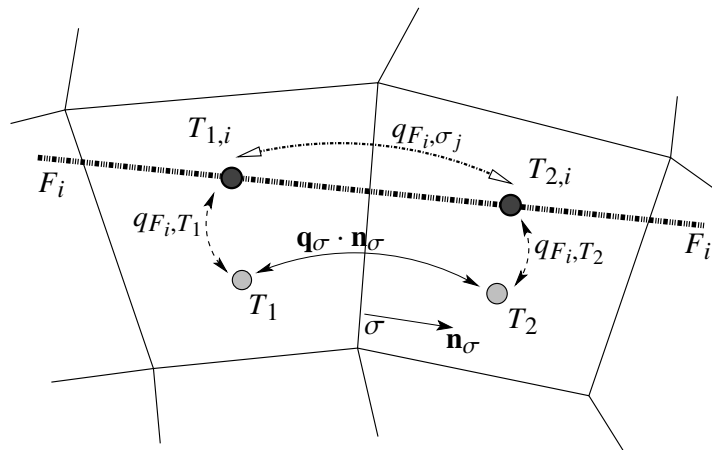


Рис. 1. Потоки Дарси: между ячейками пористой среды $\mathbf{q}_\sigma \cdot \mathbf{n}_\sigma$ (сплошная горизонтальная стрелка), между ячейками пористой среды и трещины $q_{F_i, T}$ (пунктирные вертикальные стрелки), между ячейками трещины q_{F_i, σ_j} (прерывистая горизонтальная стрелка)

Уравнения (4) записаны для каждой виртуальной ячейки T_i с потоками q_{F_i, σ_j} внутри трещины через виртуальные грани σ_j . Также учитываются потоки $q_{F_{i,j}, T}$ между ячейками пересекающихся трещин T_i и $T_j = T \cap F_j$. Отметим, что

$$q_{F_{i,j}, T} = -q_{F_{j,i}, T}.$$

В оригинальной модели вложенных дискретных трещин рассматриваются пористые среды с изотропными тензорами проницаемости, представимые структурированными расчетными сетками. Для всех типов потоков (3), (4) используется линейная двухточечная схема дискретизации (Two-Point Flux Approximation, TPFA) [Li, Lee, 2008; Moinfar et al., 2014]:

- $q_{F_i, T_1} = \widehat{\lambda}_{F_i, T_1} (p_{T_1}^m - p_{T_1, i}^f)$ — поток между ячейкой пористой среды T_1 и трещиной F_i , пересекающей T_1 ;

- $\mathbf{q}_\sigma \cdot \mathbf{n}_\sigma = \widehat{\lambda}_\sigma (p_{T_1}^m - p_{T_2}^m)$ – поток между ячейками пористой среды T_1 и T_2 через их общую грань σ ;
- $q_{F_i, \sigma_j} = \widehat{\lambda}_{F_i, \sigma_j} (p_{T_{2,i}, f}^f - p_{T_{1,i}, f}^f)$ – поток внутри трещины F_i между виртуальными ячейками $T_{1,i}, T_{2,i}$ с общей виртуальной гранью σ_j ;
- $q_{F_{i,j}, T} = \widehat{\lambda}_{F_{i,j}, T} (p_{T_i}^f - p_{T_j}^f)$ – поток между трещинами F_i, F_j внутри ячейки T , пересекаемой обеими трещинами.

Для расчета постоянных коэффициентов $\widehat{\lambda}_*$ используются предначитанные характеристики пересечения трещин и расчетной сетки (площадь и центр масс многоугольника трещины внутри ячейки, расстояние между центрами масс ячеек пористой среды и трещины и другие). Поскольку расположение трещин фиксировано, достаточно посчитать характеристики и коэффициенты один раз в начале расчета.

Уравнения (3), (4) для всех ячеек пористой среды T и виртуальных ячеек трещин $T_i = T \cap F_i$ образуют линейную алгебраическую систему уравнений $M\mathbf{p} = \mathbf{f}$ с разреженной матрицей M и блочным вектором $\mathbf{p} = (\mathbf{p}^m, \mathbf{p}_1^f, \dots, \mathbf{p}_{n_f}^f)^T$, состоящим из вектора неизвестных в пористой среде \mathbf{p}^m и векторов неизвестных в каждой из n_f трещин $\mathbf{p}_i^f, i = 1, \dots, n_f$.

Одним из недостатков оригинальной модели EDFM является некорректность применения TRFA для потоков внутри пористой среды при использовании анизотропных тензоров проницаемости и неортогональных сеток. Для получения корректных решений в этих случаях следует использовать другие методы дискретизации этого типа потоков. Например, в работе [Zhang et al., 2019] используются нелинейные конечно-объемные дискретизации в рамках модели дискретных трещин. В [Yan et al., 2016] было предложено использовать метод опорных операторов (Mimetic Finite Difference) в рамках модели EDFM.

Ранее автором были предложены монотонные модификации оригинальной модели EDFM [Nikitin, Yanbarisov, 2020], в которых для потоков внутри пористой среды используются нелинейные конечно-объемные дискретизации. В этом случае уравнения (3), (4) для всех ячеек пористой среды T и виртуальных ячеек трещин $T_i = T \cap F_i$ образуют нелинейную систему уравнений $M(\mathbf{p})\mathbf{p} = \mathbf{f}$. Для ее решения используются методы Ньютона или Пикара.

Параллелизация модели

Описанная выше модель была параллелизована с использованием открытой программной платформы INMOST [Василевский, 2013; Danilov et al., 2016], представляющей продвинутое инструменты для параллельного численного моделирования на неструктурированных сетках общего вида. Инструментарий платформы использует технологии MPI и OpenMP.

Инструменты для параллельных расчетов, реализованных в INMOST и использованных в этой работе, включают в себя:

- сбалансированное распределение расчетной сетки между процессорами;
- решение разреженных систем линейных уравнений реализованными внутри INMOST масштабируемыми итерационными методами и предобуславливателями;
- параллельные структуры данных, позволяющие автоматизировать заполнение и обмен данными между процессорами;
- вспомогательные параллельные процедуры, такие как сохранение распределенных сеток и другие.

Численный эксперимент

Рассмотрим задачу однофазной фильтрации (с неизвестным гидравлическим напором h) в пористой среде с сетью крупных высокопроводящих трещин. Оцифрованная сеть состоит из 52 трещин, получена с помощью постобработки реальных данных с месторождения, доступна в открытом репозитории работы [Berre et al., 2021]¹.

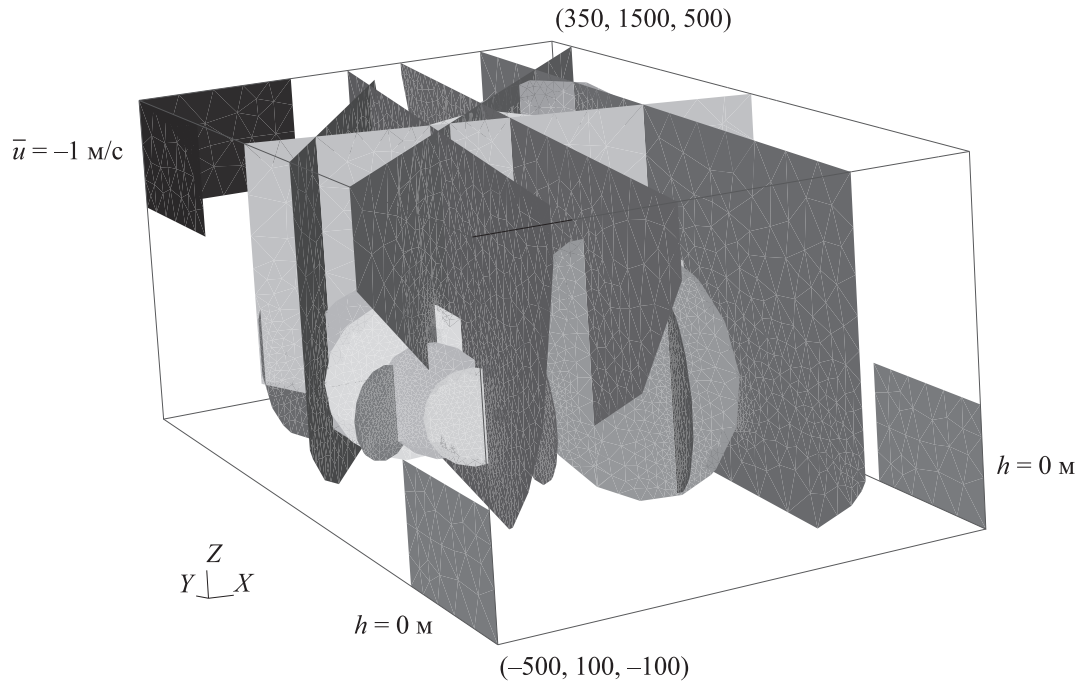


Рис. 2. Расчетная область и расположение трещин для задачи field из [Berre et al., 2021]. На границах расчетной области в дальнем верхнем углу ($\partial\Omega_{in}$, черным) задан фиксированный вток $\bar{u} = -1$ м/с, в ближних нижних углах ($\partial\Omega_{out}$, темным) задан фиксированный гидравлический напор $h = 0$ м

Расчетная область $\Omega^m = (-500 \text{ м}, 350 \text{ м}) \times (100 \text{ м}, 1500 \text{ м}) \times (-100 \text{ м}, 500 \text{ м})$ — прямоугольный параллелепипед, расположение трещин представлено на рис. 2. Ширина $w_f = 10^{-2}$ м и проницаемость всех трещин $\mathbf{K}^f = k^f \mathbf{I}$, $k^f = 10^4 \text{ м}^2$ одинаковы, проницаемость пористой среды $\mathbf{K}^m = k^m \mathbf{I}$, $k^m = 1 \text{ м}^2$, однородна и изотропна. Граница расчетной области $\partial\Omega = \partial\Omega_{in} \cup \partial\Omega_{out} \cup \partial\Omega_N$ разбита на границу втока, вытока и непротекания:

$$\begin{aligned} \partial\Omega_N &= \partial\Omega \setminus (\partial\Omega_{in} \cup \partial\Omega_{out}), \\ \partial\Omega_{in} &= \partial\Omega_{in,0} \cup \partial\Omega_{in,1}, \\ \partial\Omega_{out} &= \partial\Omega_{out,0} \cup \partial\Omega_{out,1}, \\ \partial\Omega_{in,0} &= (-500 \text{ м}, -200 \text{ м}) \times \{1500 \text{ м}\} \times (300 \text{ м}, 500 \text{ м}), \\ \partial\Omega_{in,1} &= \{-500 \text{ м}\} \times (1200 \text{ м}, 1500 \text{ м}) \times (300 \text{ м}, 500 \text{ м}), \\ \partial\Omega_{out,0} &= \{-500 \text{ м}\} \times (100 \text{ м}, 400 \text{ м}) \times (-100 \text{ м}, 100 \text{ м}), \\ \partial\Omega_{out,1} &= \{-350 \text{ м}\} \times (100 \text{ м}, 400 \text{ м}) \times (-100 \text{ м}, 100 \text{ м}). \end{aligned}$$

На границе $\partial\Omega_{out}$ задается фиксированный гидравлический напор $h = 0$ м, на границе $\partial\Omega_{in}$ задается фиксированный вток $[\mathbf{K}\nabla h]^m \cdot \mathbf{n} = \bar{u} = -1$ м/с.

¹ <https://git.iws.uni-stuttgart.de/benchmarks/fracture-flow-3d>

Для верификации и сравнения с другими дискретизациями требовалось посчитать гидравлический напор вдоль двух прямых — l_1 : (350 м, 100 м, –100 м) ÷ (–500 м, 1500 м, 500 м) и l_2 : (–500 м, 100 м, –100 м) ÷ (350 м, 1500 м, 500 м).

Использовалась расчетная сетка $68 \times 112 \times 30$, состоящая из 228 480 прямоугольных параллелепипедов со сторонами $12.5 \text{ м} \times 12.5 \text{ м} \times 20 \text{ м}$. В рассматриваемой постановке тензоры проницаемости сред изотропны, сетка ортогональна, поэтому решение, полученное с помощью оригинального метода EDFM, не содержит постоянную ошибку аппроксимации.

Для решения систем линейных уравнений использовался итерационный метод BiCGSTAB(l) с предобуславливателем KЗВІІLU2, основанным на блочной версии метода неполной LU-факторизации второго порядка [Karogin, Konshin, 2002]. Критерием остановки итерационного метода служило падение начальной невязки в $1/\varepsilon_{rel}$ раз, $\varepsilon_{rel} = 10^{-10}$.

Результаты, полученные в этой работе (рис. 3), близки к результатам, полученным другими исследователями с использованием верифицированных методов, что можно считать удовлетворительным результатом.

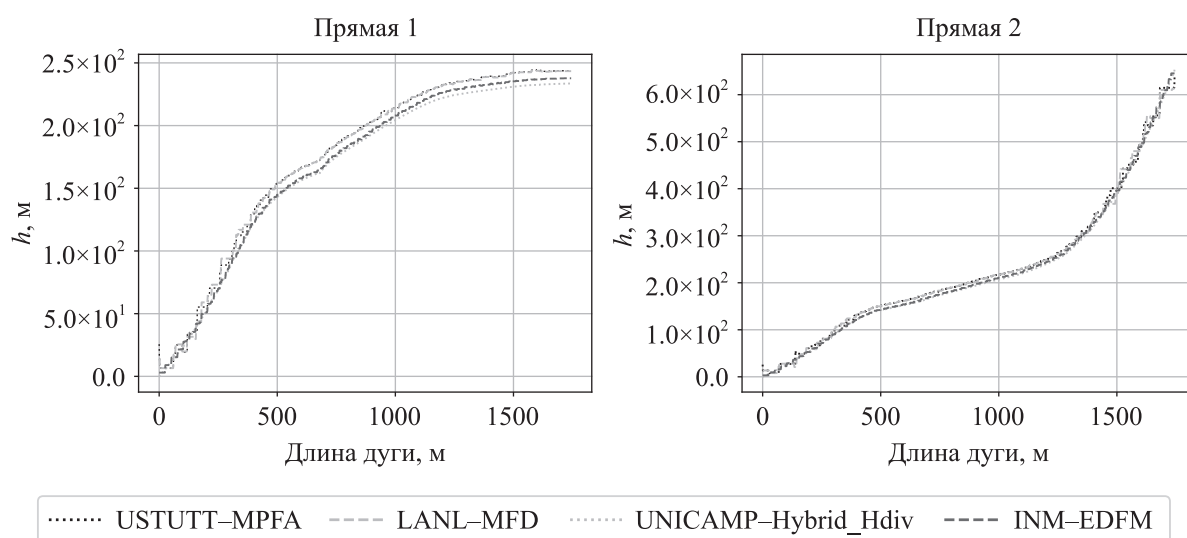


Рис. 3. Гидравлический напор вдоль прямых l_1 (слева) и l_2 (справа) для представленного метода (темная прерывистая линия, INM-EDFM) и других методов (результаты взяты из открытого репозитория работы [Berre et al., 2021])

Также были проведены параллельные расчеты с различным числом процессоров. Результаты (времена решения и ускорение) представлены в таблице 1. Отметим, что метод ускоряется с увеличением числа процессоров, полное время на решение задачи падает в 21 раз при увеличении процессоров с 1 до 128.

Дополнительно были проведены параллельные расчеты с использованием монотонной модификации оригинального метода с сохранением неотрицательности дискретного решения. Нелинейные системы решались с помощью метода Ньютона до падения относительной невязки в $1/\widehat{\varepsilon}_{rel}$ раз, $\widehat{\varepsilon}_{rel} = 10^{-4}$. Поскольку для предложенной выше конфигурации эксперимента нелинейная схема дискретизации сводится к линейной двухточечной схеме, тензор проницаемости в пористой среде изменен на однородный анизотропный:

$$\mathbf{K}^m = R_\theta \mathbf{D} R_\theta^T, \quad R_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Таблица 1. Времена на: построение матрицы системы t_{mat} , решение системы t_{sol} , обмен данными решения t_{exch} , общее время решения t_{tot} ; число линейных итераций N_{liters} , ускорение S

N_{proc}	t_{mat}	t_{sol}	t_{exch}	t_{tot}	N_{liters}	S
1	0.881	3.301	0.322	4.515	83	1
2	0.650	2.270	0.201	3.126	118	1.44
4	0.502	1.239	0.131	1.874	124	2.41
8	0.423	0.848	0.099	1.371	133	3.29
16	0.368	0.482	0.072	0.924	154	4.89
32	0.246	0.274	0.040	0.562	161	8.04
64	0.145	0.160	0.028	0.334	180	13.52
128	0.088	0.112	0.018	0.218	208	20.73

Анизотропия тензора характеризуется диагональной матрицей $D = \text{diag}(10, 1, 1)$ и матрицей поворота R_θ на угол $\theta = \pi/4$ вокруг оси y .

Результаты параллельных расчетов (время решения и ускорение) с различным числом процессоров для обновленной конфигурации задачи представлены в таблице 2. Отметим, что метод ускоряется и при использовании нелинейных схем дискретизации, полное время на решение задачи падает в 16 раз при увеличении числа процессоров с 1 до 128. Отметим, что среднее время, затраченное на одну нелинейную итерацию, сопоставимо со временем решения линейной задачи.

Таблица 2. Времена на: построение матрицы системы t_{mat} , решение системы t_{sol} , обмен данными решения t_{exch} , общее время решения t_{tot} ; число линейных N_{liters} и нелинейных $N_{niliters}$ итераций, ускорение S

N_{proc}	t_{mat}	t_{sol}	t_{exch}	t_{tot}	$N_{niliters}$	N_{liters}	S
1	4.569	12.561	1.447	18.637	4	344	1
2	3.170	7.486	0.901	11.577	4	405	1.61
4	2.314	4.336	0.582	7.242	4	646	2.57
8	2.068	3.075	0.469	5.619	4	689	3.32
16	2.053	1.980	0.384	4.422	4	712	4.21
32	1.607	1.272	0.219	3.102	4	716	6.01
64	0.859	0.642	0.141	1.646	4	789	11.32
128	0.572	0.518	0.090	1.182	4	939	15.77

Несмотря на рост числа линейных итераций, необходимых для достижения заданной точности, время решения линейных систем падает с увеличением числа процессоров.

Заключение

Автором была представлена параллельная версия метода вложенных дискретных трещин. Работа является развитием подхода, предложенного в [Nikitin, Yanbarisov, 2020]. Метод был реализован с помощью инструментов открытой программной платформы INMOST. Были проведены параллельные верификационные расчеты, демонстрирующие масштабируемость на задаче, для которой сеть трещин была получена постобработкой реального месторождения.

Список литературы (References)

- Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н. Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах // Прикладная математика и механика. — 1960. — Т. 24, № 5. — С. 58–73.

- Barenblatt G.I., Zheltov I.P., Kochina I.N.* Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks [strata] // Journal of applied mathematics and mechanics. — 1960. — Vol. 24, No. 5. — P. 1286–1303. (Original Russian paper: *Barenblatt G.I., Zheltov I.P., Kochina I.N.* Ob osnovnykh predstavleniyakh teorii fil'tratsii v treshchinovatykh sredakh // Prikladnaya matematika i mekhanika. — 1960. — Vol. 24, No. 5. — P. 58–73.)
- Василевский Ю. В., Коньшин И. Н., Копытов Г. В., Терехов К. М.* INMOST — программная платформа и графическая среда для разработки параллельных численных моделей на сетках общего вида: учеб. пособие. — М.: Изд-во Москов. ун-та, 2013. — 144 с.
Vassilevsky Yu. V., Konshin I. N., Kopytov G. V., Terekhov K. M. INMOST — programmnyaya platforma i graficheskaya sreda dlya razrabotki parallel'nykh chislennykh modelei na setkakh obshchego vida: uchebnoe posobie [INMOST — software platform and graphical environment for the development of parallel numerical models on general meshes: a tutorial]. — Moscow: Izd-vo Moskov. un-ta [Lomonosov Moscow State University], 2013. — 356 p. (in Russian).
- Никитин К. Д.* Нелинейный метод конечных объемов для задач двухфазной фильтрации // Математическое моделирование. — 2010. — Т. 22, № 11. — С. 131–147.
Nikitin K. D. Nelineyniy metod konechnykh ob'emov dlya zadach dvukhfaznoi fil'tratsii [Nonlinear finite volume method for the two-phase filtration problems] // Matematicheskoe modelirovanie [Mathematical Models and Computer Simulations]. — 2010. — Vol. 22, No. 11. — P. 131–147 (in Russian).
- Begg S. H., Carter R. R., Dranfield P.* Assigning effective values to simulator gridblock parameters for heterogeneous reservoirs // SPE reservoir engineering. — 1989. — Vol. 4, No. 04. — P. 455–463.
- Berre I., Boon W. M., Flemisch B., Fumagalli A., Gläser D., Keilegavlen E., Scotti A., Stefansson I., Tatomir A., Brenner K., Burbulla S., Devloo P., Duran O., Favino M., Hennicker J., Lee I.-H., Lipnikov K., Masson R., Mosthaf K., Nestola M. G. C., Ni C.-F., Nikitin K., Schadle P., Svyatskiy D., Yanbarisov R., Zulian P.* Verification benchmarks for single-phase flow in three-dimensional fractured porous media // Advances in Water Resources. — 2021. — Vol. 147. — P. 103759.
- Danilov A. A., Terekhov K. M., Konshin I. N., Vassilevski Yu. V.* Parallel software platform INMOST: a framework for numerical modeling // Supercomputing Frontiers and Innovations. — 2016. — Vol. 2, No. 4. — P. 55–66.
- Durlofsky L. J.* Numerical calculation of equivalent grid block permeability tensors for heterogeneous porous media // Water resources research. — 1991. — Vol. 27, No. 5 — P. 699–708.
- Hajibeygi H., Karvounis D., Jenny P.* A hierarchical fracture model for the iterative multiscale finite volume method // Journal of Computational Physics. — 2011. — Vol. 230, No. 24. — P. 8729–8743.
- Kaporin I. E., Konshin I. N.* A parallel block overlap preconditioning with inexact submatrix inversion for linear elasticity problems // Numerical linear algebra with applications. — 2002. — Vol. 9, No. 2. — P. 141–162.
- Karimi-Fard M., Durlofsky L. J., Aziz K.* An efficient discrete-fracture model applicable for general-purpose reservoir simulators // SPE journal. — 2004. — Vol. 9, No. 02. — P. 227–236.
- Kazemi H., Merrill L. S., Porterfield K. L., Zeman P. R.* Numerical simulation of water-oil flow in naturally fractured reservoirs // Society of Petroleum Engineers Journal. — 1976. — Vol. 16, No. 06. — P. 317–326.
- Kim J. G., Deo M. D.* Finite element, discrete-fracture model for multiphase flow in porous media // AIChE Journal. — 2000. — Vol. 46, No. 6. — P. 1120–1130.
- Li L., Lee S. H.* Efficient field-scale simulation of black oil in a naturally fractured reservoir through discrete fracture networks and homogenized media // SPE Reservoir Evaluation & Engineering. — 2008. — Vol. 11, No. 4.

- Lee S. H., Lough M. F., Jensen C. L.* Hierarchical modeling of flow in naturally fractured formations with multiple length scales // *Water resources research*. — 2001. — Vol. 37, No. 3. — P. 443–455.
- Moinfar A., Varavei A., Sepehrnoori K., Johns R. T.* Development of an efficient embedded discrete fracture model for 3D compositional reservoir simulation in fractured reservoirs // *SPE Journal*. — 2014. — Vol. 19, No. 2. — P. 289–303.
- Nikitin K., Novikov K., Vassilevski Y.* Nonlinear finite volume method with discrete maximum principle for the two-phase flow model // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. — 2016. — Vol. 37, No. 5. — P. 570–581.
- Nikitin K. D., Yanbarisov R. M.* Monotone embedded discrete fractures method for flows in porous media // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. — 2020. — Vol. 364. — P. 112353.
- Norbeck J. H., McClure M. W., Lo J. W., Horne R. N.* An embedded fracture modeling framework for simulation of hydraulic fracturing and shear stimulation // *Computational Geosciences*. — 2016. — Vol. 20, No. 1. — P. 1–18.
- Ren G., Jiang J., Younis R. M.* A model for coupled geomechanics and multiphase flow in fractured porous media using embedded meshes // *Advances in Water Resources*. — 2018. — Vol. 122. — P. 113–130.
- Warren J. E., Root P. J.* The behavior of naturally fractured reservoirs // *Society of Petroleum Engineers Journal*. — 1963. — Vol. 3, No. 03. — P. 245–255.
- Xu J., Sun B., Chen B.* A hybrid embedded discrete fracture model for simulating tight porous media with complex fracture systems // *Journal of Petroleum Science and Engineering*. — 2019. — Vol. 174. — P. 131–143.
- Xu Y., Fernandes B. R. B., Marcondes F., Sepehrnoori K.* Embedded discrete fracture modeling for compositional reservoir simulation using corner-point grids // *Journal of Petroleum Science and Engineering*. — 2019. — Vol. 177. — P. 41–52.
- Yan X., Huang Z., Yao J., Li Y., Fan D.* An efficient embedded discrete fracture model based on mimetic finite difference method // *Journal of Petroleum Science and Engineering*. — 2016. — Vol. 145. — P. 11–21.
- Yanbarisov R. M., Nikitin K. D.* Projection-based monotone embedded discrete fractures method for flow and transport in porous media // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. — 2021. — Vol. 392. — P. 113484.
- Zhang W., Al Kobaisi M.* Cell-Centered Nonlinear Finite-Volume Methods with Improved Robustness // *SPE Journal*. — 2020. — Vol. 25, No. 1. — P. 288–309.