**КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2021 Т. 13 № 4 С. 725–733**
DOI: 10.20537/2076-7633-2021-13-4-725-733

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И ОСНОВЫ ИХ РЕАЛИЗАЦИИ

УДК: 519.6

Метод самосогласованных уравнений при решении задач рассеяния волн на системах цилиндрических тел

А. Ю. Ветлужский

Институт физического материаловедения СО РАН,
Россия, 670047, г. Улан-Удэ, ул. Сахьяновой, д. 6

E-mail: vay@ipms.bscnet.ru

Получено 08.04.2021, после доработки — 25.06.2021.
Принято к публикации 05.07.2021.

Рассматривается один из численных методов решения задач рассеяния электромагнитных волн на системах, образованных параллельно ориентированными цилиндрическими элементами, — двумерных фотонных кристаллах. Описываемый метод является развитием метода разделения переменных при решении волнового уравнения. Его суть применительно к дифракционным задачам заключается в представлении поля в виде суммы первичного поля и неизвестного рассеянного на элементах среды вторичного поля. Математическое выражение для последнего записывается в виде бесконечных рядов по элементарным волновым функциям с неизвестными коэффициентами. В частности, поле, рассеянное на N элементах, ищется в виде суммы N дифракционных рядов, в которой один из рядов составлен из волновых функций одного тела, а волновые функции в остальных рядах выражены через собственные волновые функции первого тела при помощи теорем сложения. Далее из удовлетворения граничным условиям на поверхности каждого элемента получаются системы линейных алгебраических уравнений с бесконечным числом неизвестных — искомых коэффициентов разложения, которые разрешаются стандартными способами. Особенностью метода является использование аналитических выражений, описывающих дифракцию на одиночном элементе системы. В отличие от большинства строгих численных методов данный подход при его использовании позволяет получить информацию об амплитудно-фазовых или спектральных характеристиках поля только в локальных точках структуры. Отсутствие необходимости определения параметров поля во всей области пространства, занимаемой рассматриваемой многоэлементной системой, обуславливает высокую эффективность данного метода. В работе сопоставляются результаты расчета спектров пропускания двумерных фотонных кристаллов рассматриваемым методом с экспериментальными данными и численными результатами, полученными с использованием других подходов. Демонстрируется их хорошее согласие.

Ключевые слова: численные методы, дифракция, фотонные кристаллы, спектральное разложение, теорема сложения

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и высшей школы РФ (грант № 075-15-2020-787 для реализации крупного научного проекта «Фундаментальные основы, методы и технологии цифрового мониторинга и прогнозирования экологической обстановки Байкальской природной территории»).

COMPUTER RESEARCH AND MODELING
2021 VOL. 13 NO. 4 P. 725–733
DOI: 10.20537/2076-7633-2021-13-4-725-733

NUMERICAL METHODS AND THE BASIS FOR THEIR APPLICATION

UDC: 519.6

Method of self-consistent equations in solving problems of wave scattering on systems of cylindrical bodies

A. Yu. Vetluzhsky

Institute of Physical Materials Science SB RAS,
6 Sakhyanovoy st., Ulan-Ude, Russia, 670047

E-mail: vay@ipms.bscnet.ru

Received 08.04.2021, after completion — 25.06.2021.
Accepted for publication 05.07.2021.

One of the numerical methods for solving problems of scattering of electromagnetic waves by systems formed by parallel oriented cylindrical elements — two-dimensional photonic crystals — is considered. The method is based on the classical method of separation of variables for solving the wave equation. The essence of the method is to represent the field as the sum of the primary field and the unknown secondary scattered on the elements of the medium field. The mathematical expression for the latter is written in the form of infinite series in elementary wave functions with unknown coefficients. In particular, the field scattered by N elements is sought as the sum of N diffraction series, in which one of the series is composed of the wave functions of one body, and the wave functions in the remaining series are expressed in terms of the eigenfunctions of the first body using addition theorems. From satisfying the boundary conditions on the surface of each element we obtain systems of linear algebraic equations with an infinite number of unknowns — the required expansion coefficients, which are solved by standard methods. A feature of the method is the use of analytical expressions describing diffraction by a single element of the system. In contrast to most numerical methods, this approach allows one to obtain information on the amplitude-phase or spectral characteristics of the field only at local points of the structure. The absence of the need to determine the field parameters in the entire area of space occupied by the considered multi-element system determines the high efficiency of this method. The paper compares the results of calculating the transmission spectra of two-dimensional photonic crystals by the considered method with experimental data and numerical results obtained using other approaches. Their good agreement is demonstrated.

Keywords: numerical methods, diffraction, photonic crystals, spectral decomposition, addition theorem

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2021, vol. 13, no. 4, pp. 725–733 (Russian).

The work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (grant No. 075-15-2020-787 for implementation of large scientific project «Fundamentals, methods and technologies for digital monitoring and forecasting of the environmental situation on the Baikal natural territory»).

Введение

Одним из интересных объектов исследований в оптике и радиофизике последних десятилетий, с которым связывают разнообразные перспективы практического применения, являются фотонные кристаллы (ФК) — среды с периодически меняющейся в одном, в двух или в трех направлениях в пространстве диэлектрической проницаемостью с характерным масштабом периодичности, сопоставимым с длиной волны электромагнитного излучения. Современная концепция ФК была сформулирована в работе [Yablonovitch, 1987]. Ключевое понятие теории фотонных кристаллов — запрещенная зона, означает полосу частот, в пределах которой подавляется распространение электромагнитных волн через ФК. Физическая природа такого подавления заключается в брэгговском рассеянии излучения на периодических неоднородностях среды. Таким образом, спектр пропускания любого ФК представляет собой чередование запрещенных и разрешенных зон, при этом в диапазоне последних излучение практически свободно проходит через ФК.

Области практического применения ФК существенным образом зависят от характера пространственной периодичности кристалла. Одномерные ФК могут, например, рассматриваться как основа эффективных резонаторов радио- и оптического диапазонов, двумерные кристаллы — как базовый элемент различного рода волноводных и преобразующих световые потоки устройств, трехмерные, способные к формированию полных запрещенных зон кристаллы могут обеспечить полный контроль спонтанного испускания фотонов, что позволит, в принципе, создавать беспороговые лазеры [Noda et al., 2007; Vetrov et al., 2016]. Однако, несмотря на уникальные свойства трехмерных структур и проводимые в последние годы их всесторонние теоретические исследования, их непосредственная практическая реализация для использования в оптическом диапазоне все еще представляет значительные трудности. Поэтому двумерные ФК, создание которых современными технологическими методами не составляет сложностей, а интересные физические свойства представляются на сей день даже более разнообразными, чем у их трехмерных аналогов, вызывают особый интерес в силу возможности непосредственного практического применения.

Теоретические методы, использовавшиеся для изучения свойств ФК на всех этапах истории их исследований, весьма разнообразны. Поскольку задача возбуждения ФК электромагнитным полем — типичная дифракционная задача, изначально использовались хорошо развитые к моменту появления работы [Yablonovitch, 1987] применительно к задачам рассеяния на дифракционных решетках различной размерности аналитические и численно-аналитические методы (например, методы матриц передачи и матриц рассеяния, исходящие из физической постановки проблемы, метод полуобращения матричных операторов и модифицированный метод вычетов, оперирующие математической формулировкой краевой дифракционной задачи и т. д. [Lourtioz et al., 2008]). По мере развития вычислительной техники все большую популярность приобретали строгие численные методы. К числу последних относятся и широко используемые в последние годы прямые методы численного решения уравнений Максвелла — метод конечных элементов [Гринев, Гиголо, 2015; Cardoso, 2019] и метод конечных разностей во временной области [Gao et al., 2016; Lin et al., 2017].

На наш взгляд, общими недостатками упомянутых численных методов при их использовании для решения дифракционных задач рассеяния волн на системах тел являются получение подчас избыточного количества информации и, как следствие, высокие требования к вычислительным ресурсам и значительное время, требуемое для расчетов. Действительно, так как данные методы относятся к сеточным методам решения дифференциальных уравнений, применяя их к задаче возбуждения ФК произвольной геометрии, получаем полное представление об амплитудно-фазовом распределении поля во всей рассматриваемой области пространства. Однако многие электродинамические задачи, связанные с ФК, ограничиваются необходимостью получения амплитудных спектров пропускания таких структур в заданной полосе частот либо определения интенсивности поля в некоторых ключевых точках ФК без анализа его характеристик в других областях. Рассмотрение простого в алгоритмизации, не требовательного к вычислительным ресурсам численного метода, реализующего такой подход, является целью настоящей работы.

Основная концепция метода самосогласованных уравнений была сформулирована еще в середине прошлого века в [Tversky, 1951] применительно к задаче дифракции волн на параллельных цилиндрах. Позднее эти идеи использовались в [Иванов, 1966] для получения аналитических выражений, описывающих процессы рассеяния волн на двух цилиндрических телах. Однако, поскольку принципиальным недостатком метода являлась невозможность его практического применения для систем более чем из двух тел из-за громоздкости получающихся выражений, дальнейшего развития в то время метод не получил. Для решения дифракционных задач, касающихся систем большого числа рассеивателей, его применение стало возможным лишь по мере развития вычислительной техники [Ветлужский, 2017].

Метод самосогласованных уравнений

Рассмотрим задачу возбуждения системы N параллельно расположенных диэлектрических бесконечно протяженных цилиндров кругового сечения нитью синфазного (электрического или магнитного) тока, ориентированной вдоль элементов структуры. Запишем решение двумерного неоднородного уравнения Гельмгольца в цилиндрической системе координат для поля, рассеянного произвольным j-м цилиндром ($j = 1, 2, \ldots, N$), в виде разложения по азимутальным гармоникам:

$$u_{pac}\left(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_j\right)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}P_{mj}H_m^{(1)}\left(k\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j\right|\right)e^{in\varphi_{r-r_j}}, \tag{1}$$

где k — волновое число, $H_m^{(1)}$ — функция Ханкеля первого рода m-го порядка, $\varphi_{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j}$ — угол, образованный вектором $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j$ и осью x системы координат (рис. 1), P_{mj} — неизвестные амплитудные коэффициенты отдельных гармонических составляющих.

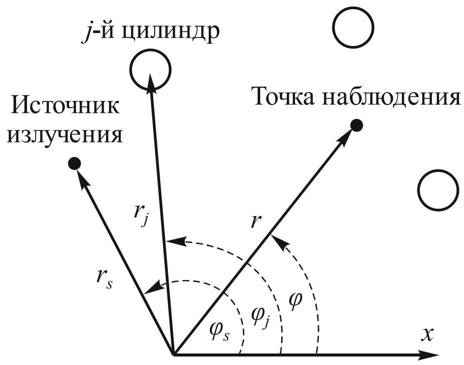

Рис. 1. Концептуальная схема рассматриваемой задачи, где радиальные (r_s, r_j, r) и азимутальные (φ_s, φ_j, φ) координаты определяют местоположение источника излучения, произвольного j-го цилиндра и точки наблюдения поля соответственно

Полное падающее на некоторый i-й цилиндр поле ($i = 1, 2, \ldots, N,\ i \neq j$) представим в виде суммы поля источника и полей, рассеянных остальными элементами системы:

$$u^i_{\text{пад}}\left(\boldsymbol{r}\right)=u_0\left(\boldsymbol{r}\right)+\sum_{j=1,\,j\neq i}^{N}u_{\text{рас}}\left(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_j\right). \tag{2}$$

Это же поле можно описать в виде разложения, аналогичного (1):

$$u^i_{\text{пад}}(\boldsymbol{r}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{mj} J_m\left(k\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j\right|\right) e^{in\varphi_{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j}}. \tag{3}$$

Здесь B_{mj} — вновь неизвестные амплитудные коэффициенты. Радиальная зависимость поля в (3) выражена через функцию Бесселя m-го порядка, поскольку в отличие от функции Ханкеля она не имеет особенностей при $\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r}_j$.

Для определения неизвестных коэффициентов P_{mj} и B_{mj} выразим рассеянное поле $u_{\text{рас}}\left(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_j\right)$ для каждого j-го цилиндра через волновые функции i-го элемента ($i \neq j$). Для этого используем теорему сложения для цилиндрических функций [Korn, Korn, 1961]:

$$Z_m(\alpha d) e^{im\psi} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Z_{m+k}(\alpha\rho_1) J_k(\alpha\rho_2) e^{ik(\varphi_1-\varphi_2)}, \tag{4}$$

где $\rho_1 > \rho_2$, Z — произвольная цилиндрическая функция (рис. 2).

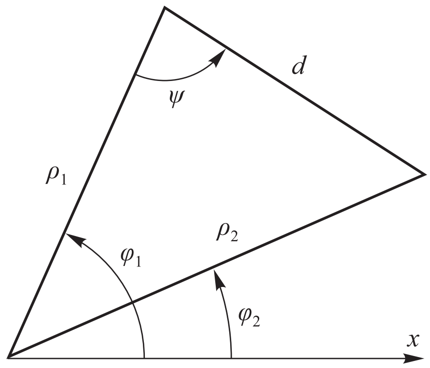

Рис. 2. Геометрическая иллюстрация к теореме сложения для цилиндрических функций

Применяя (4) к (1), получаем

$$u_{\text{рас}}\left(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_j\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{mj,i} J_m\left(k\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i\right|\right) e^{in\varphi_{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i}}, \tag{5}$$

где

$$C_{mj,i} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} P_{lj} H^{(1)}_{l-m}\left(k\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j\right|\right) e^{i(l-n)\varphi_{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j}}. \tag{6}$$

Для дальнейших преобразований поле источника представим в аналогичной формулировке — в виде разложения по волновым функциям i-ого цилиндра:

$$u_0(\boldsymbol{r}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_{mi} J_m\left(k\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i\right|\right) e^{in\varphi_{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i}}, \tag{7}$$

где коэффициенты D_{mi} связаны с известной комплексной амплитудой поля источника A_0 и местоположением последнего, определяемым вектором $\boldsymbol{r}_s$:

$$D_{mj} = A_0 H^{(1)}_m\left(k\left|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_s\right|\right) e^{im\varphi_{\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_s}}.$$

Подставляя выражения (3), (5) и (7) в (2), получим

$$B_{mi} = D_{mi} + \sum_{j=1,\, j\neq i}^{N} C_{mj,i}. \tag{8}$$

В последнем выражении неизвестными являются два коэффициента: B_{mi} и P_{lj}. Для их определения необходимо установить между ними дополнительное соотношение, что достигается решением простейшей задачи дифракции волн на одиночном цилиндре. Удовлетворяя граничным условиям на его поверхности, получаем хорошо известное выражение (ограничимся его формулировкой для E (TM) волн, т. е. для параллельной ориентации вектора напряженности электрического поля $\boldsymbol{E}$ относительно цилиндров):

$$\frac{P_{mi}}{B_{mi}} = \frac{nJ_m(ka)J'_m(nka) - J'_m(ka)J_m(nka)}{J_m(nka)H_m^{(1)\prime}(ka) - nH_m^{(1)}(ka)J'_m(nka)}. \tag{9}$$

Здесь n — показатель преломления материала цилиндра.

Применяя последовательно описанную процедуру ко всем цилиндрам и учитывая (6) и (9), получаем систему N самосогласованных линейных неоднородных уравнений (8), в которой каждый неизвестный коэффициент P_{mi}, описывающий возбуждение соответствующего цилиндра, определяется через коэффициенты, характеризующие состояние других цилиндров системы. Разрешая систему стандартными методами, окончательно находим поле в произвольной точке пространства с использованием следующего выражения:

$$u(\boldsymbol{r}) = u_0(\boldsymbol{r}) + \sum_{i=1}^{N} \sum_{m=-\infty}^{\infty} P_{mi} H_m^{(1)}\left(k|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i|\right) e^{in\varphi_{r-r_i}}.$$

Ряды в (8) линейно сходящиеся. Скорость сходимости рядов совпадает со скоростью сходимости рядов в аналогичном решении задачи дифракции волн на одиночном цилиндре и определяется размерами рассеивателя. В [Иванов, 1966] было показано, что достаточная для большинства практических задач электродинамики точность достигается при выполнении условия $N \geq [8ka] + 1$, где N — учитываемое число членов ряда, при этом индексы в выражениях (5) и (6) принимают значения $m, l = 0, \pm 1, \ldots, \pm N$.

Достоинствами описанного метода являются: простота алгоритмизации и программной реализации; получение сколь угодно высокой точности расчетов при учете соответствующего числа пространственных гармоник; непосредственная применимость для произвольного взаимного положения источника излучения, рассеивателей и точки наблюдения в отличие от большинства численных методов; возможность получения информации не только о результирующем поле в системе, но и о полях, рассеиваемых отдельными элементами структуры. Основной недостаток — возможность расчета электромагнитных полей только в системах объектов, задачи дифракции на которых имеют аналитическое решение.

Верификация метода

Рассмотрим две задачи возбуждения локально плоскими волнами двумерных ФК, элементы которых образуют квадратные решетки, спектры пропускания которых, рассчитанные с использованием метода самосогласованных уравнений, представлены на рис. 3, *а*, *б*.

В первом случае полагаем ФК состоящим из идеально проводящих цилиндров $(n \to \infty)$, что допустимо в пренебрежении тепловыми потерями в металле в СВЧ-диапазоне, коэффициент заполнения структуры $f = {\pi a^2}/{d^2} = 7.85\cdot 10^{-3}$, период $d = 1$ см, радиус цилиндров $a = 0.05$ см. Количество элементов в структуре — 121 (11 на 11). Во втором случае считаем диэлектрическую проницаемость элементов $\varepsilon = 9$ (оксид алюминия Al_2O_3), коэффициент заполнения структуры $f = 12.56\cdot 10^{-2}$, $d = 1$ см, $a = 0.2$ см. Количество элементов в этом случае равно 361 (19 на 19).

Спектры определялись в направлении распространения ГХ в пространстве волновых векторов или, используя понятие двумерных индексов Миллера, в направлении (10). Ломаная линия на рис. 3, *а* описывает полученные автором экспериментальные данные по прохождению волн через металлический ФК в СВЧ-диапазоне. Методика проведения экспериментов описана в [Ломухин, Ветлужский, 2003]. Рис. 3, *в*, *г* иллюстрируют рассчитанные методом разложения по плоским волнам [Лозовик, Эйдерман, 2008] дисперсионные диаграммы обоих рассматриваемых ФК.

Хорошее согласие между теоретически и экспериментально полученными данными, а также наблюдаемое соответствие частотных диапазонов формирования как полных, так и неполных запрещенных зон ФК, определенных разными методами, позволяют сделать вывод об адекватности получаемых методом самосогласованных уравнений результатов реальным электродинамическим характеристикам двумерных ФК.

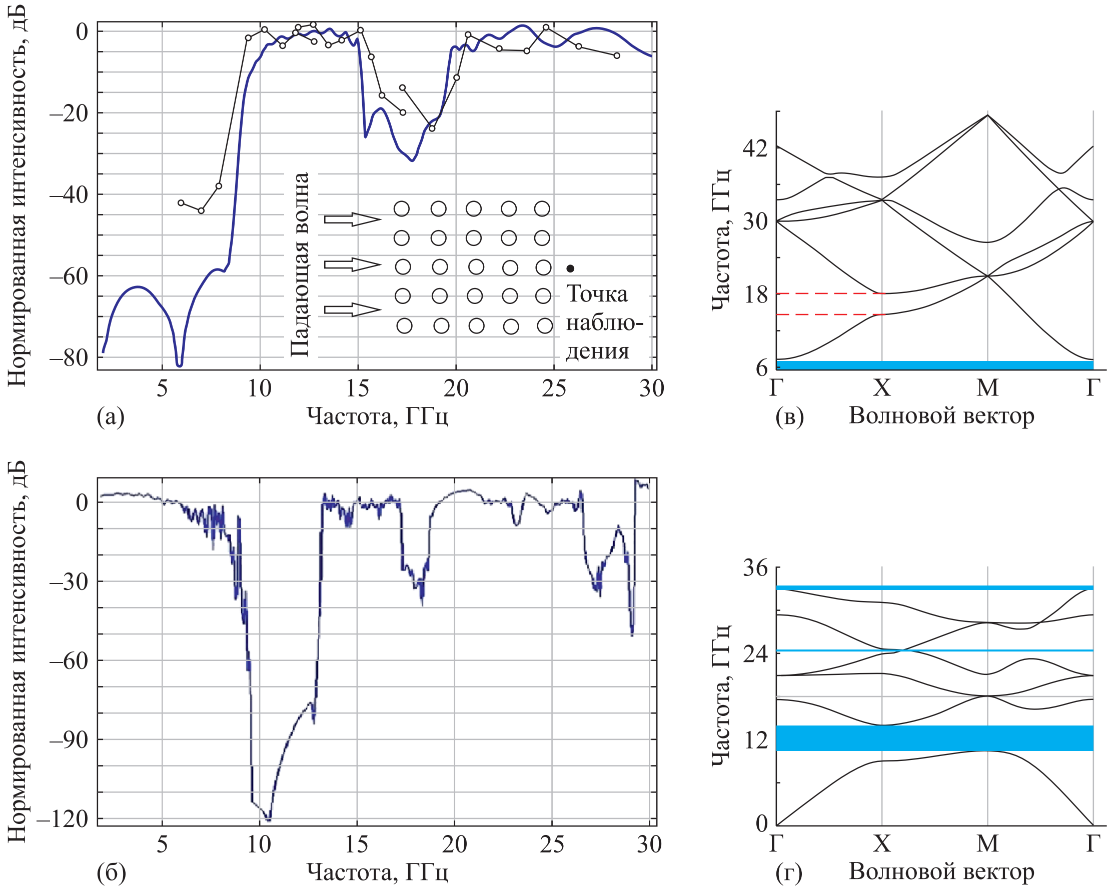

Рис. 3. (а, б) Плавные кривые — рассчитанные спектры пропускания металлического и диэлектрического ФК соответственно, ломаная кривая на рис. 3, *а* отображает результаты экспериментов; (в, г) дисперсионные диаграммы, соответствующие металлической и диэлектрической структурам, где Г, X, M — точки высокой симметрии, ограничивающие неприводимую зону Бриллюэна в пространстве волновых векторов, полные запрещенные зоны указаны выделенными цветом прямоугольными областями, пунктирными линиями на рис. 3, *в* обозначена неполная запрещенная зона в направлении ГХ

Заключение

В работе рассмотрен один из методов решения задач дифракции волн на больших совокупностях рассеивателей, позволяющий определять спектральные характеристики таких систем при произвольном положении источника и точки наблюдения, а также пространственную структуру поля как в пределах, так и в дальней зоне рассматриваемых систем. В последнем случае не требуется введения специальных краевых условий на границах рассматриваемой области пространства, как при использовании прямых численных методов решения уравнений Максвелла. Кроме того, предлагаемый метод не имеет ограничений, связанных с регулярностью расположения элементов в системе. Он с одинаковой эффективностью может применяться для анализа электродинамических характеристик как упорядоченных, так и случайно расположенных совокупностей тел (при сохранении их параллельной пространственной ориентации), что, в частности, приводит к определенным сложностям при использовании прямых численных методов [Lehikoinen, 2014]. К достоинствам метода можно отнести и возможность непосредственного определения амплитудно-фазовых параметров излучения, формируемого как всей совокупностью рассеивателей, так и отдельными элементами структуры, что открывает возможности для детального изучения физических механизмов, связанных с многократным рассеянием волн и приводящих к различным эффектам, в частности, при распространении излучения в дискретных случайных средах.

Работоспособность и эффективность метода подтверждена сопоставлением полученных с его помощью результатов с экспериментальными данными и другими теоретическими подходами. Ограничением описываемого метода является необходимость существования аналитических решений задач рассеяния волн на отдельных элементах рассматриваемой системы.

Список литературы (References)

Ветлужский А. Ю. Волноводные устройства на основе линейных дефектов в металлических электромагнитных кристаллах // Журнал технической физики. — 2017. — Т. 87, № 1. — С. 150–154.

Vetluzhsky A. Yu. Waveguides based on linear defects in metal electromagnetic crystals // Journal of Communications Technology and Electronics. — 2017. — Vol. 62, No. 1. — P. 178–182. (Original Russian paper: *Vetluzhskii A. Yu.* Volnovodnye ustrojstva na osnove linejnyh defektov v metallicheskih elektromagnitnyh kristallah // Zhurnal tekhnicheskoj fiziki. — 2017. — Vol. 87, No. 1. — P. 150–154.)

Гринев А. Ю., Гиголо А. И. Математические основы и методы решения задач электродинамики. — М.: Радиотехника, 2015.

Grinev A. Yu., Gigolo A. I. Matematicheskie osnovy i metody resheniya zadach elektrodinamiki [Mathematical foundations and methods for solving problems of electrodynamics]. — Moscow: Radiotekhnika, 2015 (in Russian).

Иванов Е. А. К решению задачи о дифракции плоской волны на двух круговых цилиндрах в случае коротких волн // Радиотехника и электроника. — 1966. — Т. 11, № 5. — С. 931–942.

Ivanov E. A. K resheniyu zadachi o difrakcii ploskoj volny na dvuh krugovyh cilindrah v sluchae korotkih voln [On the solution of the problem of diffraction of a plane wave by two circular cylinders in the case of short waves] // Radiotekhnika i elektronika. — 1966. — Vol. 11, No. 5. — P. 931–942 (in Russian).

Лозовик Ю. Е., Эйдерман С. Л. Зонная структура сверхпроводящих фотонных кристаллов // Физика твердого тела. — 2008. — Т. 50, № 11. — С. 1944–1947.

Lozovik Yu. E., Éĭderman S. L. Band structure of superconducting photonic crystals // Physics of the Solid State. — 2008. — Vol. 50, No. 11. — P. 2024–2027. (Original Russian paper: *Lozovik Yu. E., Ejderman S. L.* Zonnaya struktura sverhprovodyashchih fotonnyh kristallov // Fizika tverdogo tela. — 2008. — Vol. 50, No. 11. — P. 1944–1947.)

Ломухин Ю. Л., Ветлужский А. Ю. Методы дополнительного ослабления электромагнитных полей. — Новосибирск: Наука, 2003.

Lomukhin Yu. L., Vetluzhsky A. Yu. Metody dopolnitel'nogo oslableniya elektromagnitnyh polej [Methods for additional attenuation of electromagnetic fields]. —Novosibirsk: Nauka, 2003 (in Russian).

Cardoso J. R. Electromagnetics through the Finite Element Method A Simplified Approach Using Maxwell's equations. — CRC Press, 2019.

Gao Y.-J., Yang H.-W., Wang G.-B. A research on the electromagnetic properties of Plasma Photonic Crystal based on the Symplectic Finite-Difference Time-Domain method // Optik. — 2016.— Vol. 127, Iss. 4. — P. 1838–1841.

Korn G., Korn T. Mathematical handbook for scientists and engineers. — New York; Toronto; London: McCraw Hill Book Company, 1961.

Lehikoinen A. Spectral Stochastic Finite Element Method for Electromagnetic Problems with Random Geometry // Electrical, Control and Communication Engineering. — 2014. — Vol. 6, Iss. 1. — P. 5–12.

Lin X., Wan N., Weng L., Zhu H. FDTD Method and Models in Optical Education // ETOP Proceedings. — 2017. — P. 104524.

Lourtioz J.-M., Benisty H., Berger V. Photonic Crystals: Towards Nanoscale Photonic Devices. 2^{nd} edition. — Springer, 2008.

Noda S., Fujita M., Asano T. Spontaneous-emission control by photonic crystals and nanocavities // Nature Photonic. — 2007. — Vol. 1, No. 8. — P. 449–458.

Tversky V. Multiple scattering of radiation by an arbitrary configuration of parallel cylinders // J. Acoust. Sos. Am. — 1951. — Vol. 24, No. 1. — P. 42–46.

Vetrov S. Ya., Pankin P. S., Timofeev I. V. The optical Tamm states at the interface between a photonic crystal and a nanocomposite containing core–shell particles // J. Opt. — 2016. — Vol. 18, No. 6. — P. 65106.

Yablonovitch E. Inhibited spontaneous emission in solid-state physics and electronics // Phys. Rev. Lett. — 1987. — Vol. 58, No. 20. — P. 2059–2062.