

УДК: 519.6

Применение модели кинетического типа для изучения пространственного распространения COVID-19

В. В. Аристов^{1,2,a}, А. В. Строганов^{2,b}, А. Д. Ястребов^{2,c}

¹Вычислительный центр им. А. А. Дородницына
Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук
Россия, 119333, г. Москва, ул. Вавилова, д. 40

²МИРЭА — Российский технологический университет (РТУ МИРЭА),
119454, ЦФО, г. Москва, проспект Вернадского, д. 78

E-mail: ^a aristovvl@yandex.ru, ^b savthe@gmail.com, ^c andr.yast711@gmail.com

Получено 26.12.2020.

Принято к публикации 01.03.2021.

Предлагается простая модель на основе уравнения кинетического типа для описания распространения вируса в пространстве посредством миграции носителей вируса из выделенного центра. Рассматриваются страны, для которых применима одномерная модель: Россия, Италия, Чили. Одномерный подход возможен из-за географического расположения этих стран и их протяженности в направлениях от центров заражения (Москвы, Ломбардии и Сантьяго соответственно). Определяется изменение плотности зараженных во времени и пространстве. Применяется двухпараметрическая модель. Первый параметр — величина средней скорости распространения, соответствующий переносу инфицированных транспортными средствами. Второй параметр — частота уменьшения количества инфицированных элементов по мере продвижения по территории страны, что связано с прибытием пассажиров в места назначения, а также с карантинными мерами, препятствующими их перемещению по стране. Параметры модели определяются по фактически известным данным. Строится аналитическое решение, для получения серии расчетов применяются также простые численные методы. В модели рассматривается пространственное распространение заболевания, при этом заражения на местах не учитываются. Поэтому вычисленные значения на начальном этапе хорошо соответствуют экспериментальным данным, а затем плотность заболевших начинает быстрее возрастать из-за заражений на местах. Тем не менее модельные расчеты позволяют делать некоторые предсказания. Помимо скорости заражения, возможна аналогичная «скорость выздоровления». По моменту времени достижения охвата большей части населения страны при движении фронта выздоровления делается вывод о начале глобального выздоровления, что соответствует реальным данным.

Ключевые слова: математическое моделирование, COVID-19, уравнение кинетического типа

Один из авторов (А. В. Строганов) благодарит фонд РФФИ за финансовую поддержку (грант РФФИ 18-07-01500).

UDC: 519.6

Application of the kinetic type model for study of a spatial spread of COVID-19

V. V. Aristov^{1,2,a}, A. V. Stroganov^{2,b}, A. D. Yastrebov^{2,c}

¹ Dorodnicyn Computing Centre, Federal Research Center “Computer Science and Control”
of Russian Academy of Sciences,
40 Vavilova st., Moscow, 119333, Russia

² Federal State Budget Educational Institution of Higher Education
“MIREA — Russian Technological University”,
78 Vernadsky Avenue, Moscow, 119454, Russia

E-mail: ^a aristovvl@yandex.ru, ^b savthe@gmail.com, ^c andr.yast711@gmail.com

Received 26.12.2020.

Accepted for publication 01.03.2021.

A simple model based on a kinetic-type equation is proposed to describe the spread of a virus in space through the migration of virus carriers from a certain center. The consideration is carried out on the example of three countries for which such a one-dimensional model is applicable: Russia, Italy and Chile. The geographical location of these countries and their elongation in the direction from the centers of infection (Moscow, Milan and Lombardia in general, as well as Santiago, respectively) makes it possible to use such an approximation. The aim is to determine the dynamic density of the infected in time and space. The model is two-parameter. The first parameter is the value of the average spreading rate associated with the transfer of infected moving by transport vehicles. The second parameter is the frequency of the decrease of the infected as they move through the country, which is associated with the passengers reaching their destination, as well as with quarantine measures. The parameters are determined from the actual known data for the first days of the spatial spread of the epidemic. An analytical solution is being built; simple numerical methods are also used to obtain a series of calculations. The geographical spread of the disease is a factor taken into account in the model, the second important factor is that contact infection in the field is not taken into account. Therefore, the comparison of the calculated values with the actual data in the initial period of infection coincides with the real data, then these data become higher than the model data. Those no less model calculations allow us to make some predictions. In addition to the speed of infection, a similar “speed of recovery” is possible. When such a speed is found for the majority of the country's population, a conclusion is made about the beginning of a global recovery, which coincides with real data.

Keywords: mathematical modeling, COVID-19, kinetic type equation

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2021, vol. 13, no. 3, pp. 611–627 (Russian).

One of the authors (A. V. Stroganov) is grateful to the Russian Foundation for Basic Research for financial support (grant 18-07-01500).

1. Введение

Пандемия COVID-2019 является самой масштабной за прошедшее столетие. Развитие ее обладает новыми особенностями, поэтому даже частичное описание ее характеристик представляется важным. В [Elton, 2020] говорится о трудности предсказания взрывных процессов вторжения (животных и растений, а также бактерий и вирусов), тем не менее можно искать пути, чтобы остановить это вторжение или хотя бы постараться уменьшить его силу. Построение моделей развития пандемии выступает как теоретическое средство для этого, имеется в виду, что понятые закономерности могут предотвратить более опасный сценарий развития эпидемии.

Среди факторов, способствующих распространению инфекции, можно отметить нынешние значительные скорости транспортных средств и большое количество социальных контактов в городах. При этом современные информационные технологии позволяют оперативно отслеживать распространение эпидемии, а также собирать достаточно точные данные для построения адекватных математических моделей.

Известны различные пространственные модели распространения вирусов, но часто они содержат много параметров, которые требуют определения их точного взаимного соответствия, а также применения высокопроизводительных вычислений. Поэтому более простые модели, передающие качественные и количественные закономерности распространения, определенно представляют научный и практический интерес.

Известны исследования, посвященные задачам моделирования биологических и социальных процессов. Отметим [Fischer, 1937; Колмогоров и др., 1937] с применением уравнения диффузионного типа (см. также [Пастухова, Евсеева, 2017]). На основе таких методов изучались различные автоволновые процессы, включая распространение инфекций, см., например, [Васильев и др., 1987; Рубин, 1999; Ризниченко, 2011]. В [Prigogine, Herman, 1971] рассматривались кинетические уравнения переноса для исследования характера транспортных потоков. В [Аристов, Ильин, 2014; Aristov, Ilyin, 2015] применялись уравнения кинетического типа для моделирования некоторых социоисторических процессов (модель агрессии).

Над изучением распространения пандемии работают различные научные группы. Мы отметим только многопараметрическую модель [Ivorra, Ferrández, 2020] и модель распространения первой волны вируса в пространстве и времени [Gross et al., 2020]. Цели и наборы параметров настоящей работы и [Gross et al., 2020] схожи между собой и отличны от [Ivorra, Ferrández, 2020], но важным отличием нашей модели является то, что для изучения характера пространственного распространения COVID-19 в нашей работе применяется уравнение кинетико-переносного типа. Предлагается одномерная кинетическая модель пространственного движения инфицированных носителей в России, Италии и Чили [Электронные ресурсы: карта распространения коронавируса; Распространение COVID-19 в Италии; Роспотребнадзор; Распространение COVID-19 в Чили].

Для России, Италии и Чили миграция носителей вируса происходила из выделенных центров: Москва (определяется распространение вируса на восток), провинция Ломбардия и Сантьяго соответственно. Заметим, что в России существовал еще один центр распространения, связанный с Санкт-Петербургом, поэтому в данной простой модели не рассматривалось пространство на запад от Москвы. Также можно рассмотреть миграцию носителей вируса, возвращающихся через Хабаровск, но это усложнило бы модель. Аналогичная модификация задачи для Италии имела бы смысл не на правой границе, а в середине для Рима. Возможность использования одномерной модели связана с социально-географическими условиями — отношение «длины» к «ширине» достаточно большое. «Боковыми» вторжениями вируса можно пренебречь: в России на севере находятся малонаселенные области, на юге — пустыни и горы на границах других стран. В Италии с запада и востока Апеннинский полуостров ограничен соответственно Тирренским морем и Адриатическим морем. В Чили с запада находится Тихий океан, с востока — высокие горы Анды.

В одномерной модели используется осреднение по достаточно большим территориям стран. Карта каждой страны разбивалась на крупные по площади полосы. Для России выделено

7 полос, для Италии — 9, для Чили — 4 и 3 (к северу и к югу от Сантьяго соответственно). Предлагаемая модель определяется следующими параметрами: U — средняя скорость транспорта, идущего от центра заражения, и σ — «сопротивление» продвижению в транспортных средствах носителей вируса.

В настоящем кинетико-переносном подходе рассматривается начальный период пандемии COVID-19, который пришелся на весну 2020 года. Данная модель близка к моделям, использованным в [Аристов, Ильин, 2014; Aristov, Pyin, 2015]. Но в настоящей работе она проще, поскольку является линейной. В отличие от отмеченных предыдущих работ, где выбывали элементы фона, участвовавшие во взаимодействии, здесь параметры фона не меняются с продвижением инфицированных элементов по пространству.

Можно выделить два механизма распространения инфекции: переносный и контактный. В нашей работе изучается именно переносный механизм, то есть заражения, обусловленные миграцией инфицированных носителей из центра заражения. Контактный механизм является вторичным после появления инфицированных носителей из центра, он обусловлен заражениями на местах. Наложение этих двух факторов и дает сумму всех зараженных. Первая фаза процесса связана с переносным заражением. Эта фаза закладывает основы для следующей фазы развития заражения, связанной с контактами на местах. Контактные заражения более отчетливо проявляются при введении мер карантинной изоляции отдельных регионов. Третья фаза связана с распространением «выздоровления», что определяется, в частности, достижением максимума новых заражений в день для каждого региона.

Перенос носителей вируса осуществлялся различными транспортными средствами. Мы рассматриваем осредненную скорость, в которой учитываются скорости самолета, поезда, автобуса и автомобиля. Другим упомянутым выше параметром модели является величина «сопротивления» продвижению носителей вирусов.

Основным уравнением модели является неоднородное уравнение переноса с кинетическим членом в правой части: учитывается убывание носителей, связанное с возвращением их в места проживания или в места временного пребывания для покидающих очаг заражения. Некоторую роль также играют и карантинные барьеры между регионами.

2. Математическая модель

По аналогии с [Васильев и др., 1987; Аристов, Ильин, 2014; Aristov, Pyin, 2015] для определения плотности инфицированных пассажиров, высаживающихся в определенном месте в некоторый момент времени, применяется следующее неоднородное уравнение переноса:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + U \frac{\partial n}{\partial x} = -\sigma n(t, x), \quad (1)$$

где t — время, x — расстояние, $n(t, x)$ — плотность перемещающихся носителей вируса в транспортном средстве, U — скорость транспортного средства, σ — коэффициент «сопротивления» движению инфицированных элементов в основном за счет высаживания пассажиров в местах проживания, он имеет размерность частоты.

Начальное условие для задачи Коши имеет вид

$$n_0(x) = H(-x),$$

где $H(x)$ — функция Хевисайда. Такая постановка задачи означает, что в исследуемую область $x > 0$ через границу $x = 0$ поступают носители вируса, что соответствует представлению об основном постоянном источнике заражения. Используем стандартные методы решения линейного уравнения в частных производных. Решение имеет следующий вид:

$$n(t, x) = n_0(x - Ut) \cdot e^{-\sigma \frac{x}{U}}. \quad (2)$$

На рис. 1 для иллюстрации приведено сравнение точного и численного решения, полученного с помощью простой разностной схемы. Здесь за единицу времени принят день (сутки), за единицу расстояния — километр; соответственно, скорость выражается в километрах в сутки (сут), «коэффициент сопротивления» (частота) имеет размерность (сут)⁻¹.

Будем обозначать плотность высидившихся в данной точке носителей вируса через $n_M(t, x)$; ясно, что эта плотность растет так же, как убывает $n(t, x)$; следовательно, можно записать

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dt} + \frac{dn_M}{dt} &= 0, \\ \frac{dn}{dt} &= \frac{\partial n}{\partial t} + U \frac{\partial n}{\partial x}, \\ \frac{dn_M}{dt} &= \frac{\partial n_M}{\partial t}. \end{aligned}$$

Соответственно, с учетом (1) уравнение для $n_M(t, x)$ принимает следующий вид:

$$\frac{\partial n_M}{\partial t} = \sigma n. \tag{3}$$

Решение данного уравнения записывается так:

$$n_M(t, x) = n_{M0}(x) + \int_0^t \sigma \cdot n(\tau, x) d\tau.$$

Подстановка выражения (2) и начальных условий $n_{M0}(x) = 0$ и $n_0(x) = H(-x)$ позволяет получить выражение для $n_M(t, x)$:

$$n_M(t, x) = \frac{\sigma}{U} \cdot (Ut - x) \cdot H(Ut - x) \cdot e^{-\frac{\sigma x}{U}}. \tag{4}$$

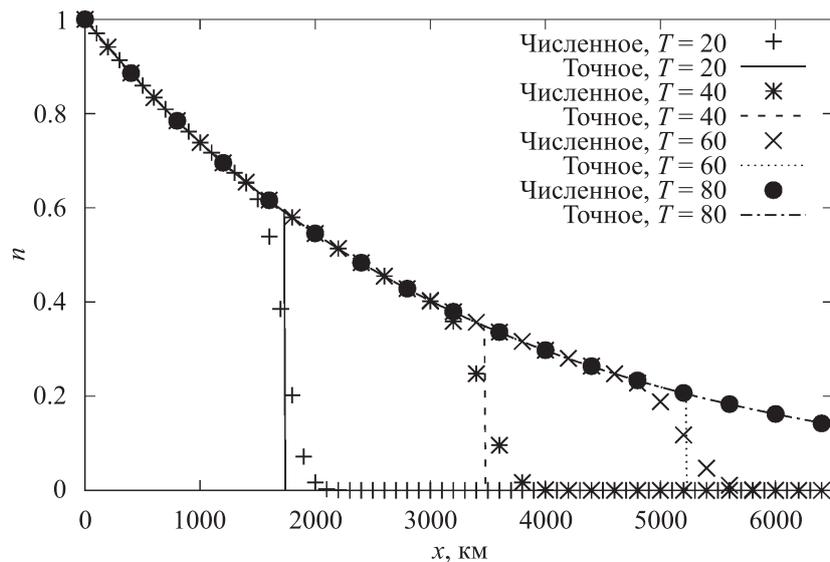


Рис. 1. Решение уравнения (1). Представлено точное решение (линии) по формуле (2) и численное (точки) — по явной схеме первого порядка для различных моментов времени T (единица времени — сутки). $n(t, x)$ — плотность перемещающихся носителей вируса

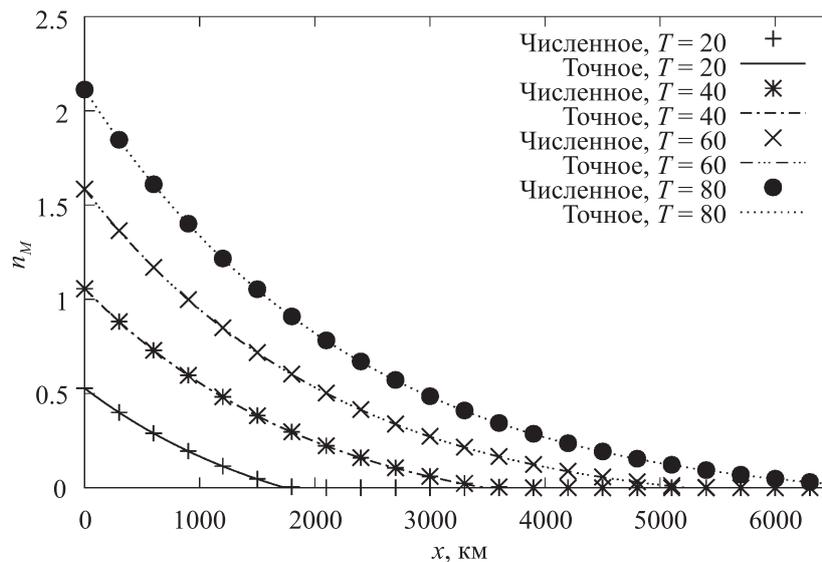


Рис. 2. Решение уравнения (2). Представлено точное решение (линии) по формуле (4) и численное (точки) — по явной схеме первого порядка для различных моментов времени T . $n_M(t, x)$ — плотность носителей вируса, высадившихся в данной точке

Для иллюстрации представим решения по формуле (4) со следующими параметрами: $U = 87$ км/сут (как будет показано далее, эта величина соответствует скорости распространения эпидемии по России). Тогда из (4) и рис. 1 получаем $\sigma = 0.026$ (сут) $^{-1}$, что соответствует уменьшению плотности инфицированных элементов в транспортном средстве в e раз примерно на 4000 километров. Решения по уравнениям модели представлены на рис. 2. Показаны профили $n_M(t, x)$ для четырех моментов времени. Плотность высадившихся пассажиров $n_M(t, x)$ растет со временем, поскольку прибывают новые инфицированные. Важно отметить, что профиль инфицированных пассажиров в транспортном средстве $n(t, x)$ на рис. 1 выходит к четвертому моменту времени на некоторую определенную кривую, экспоненциально убывающую по пространству. Но плотность $n_M(t, x)$ будет постоянно увеличиваться во времени в каждой пространственной точке, если не будут изменены условия, например не введен режим изоляции областей. В этом случае необходимо изменить граничные условия.

В общем случае σ может зависеть от t и x (U также может быть зависимой величиной, но мы полагали ее постоянной). Один из вариантов зависимости σ от координаты может быть получен с помощью учета плотности населения:

$$\sigma(x) = \sigma_1 \cdot \rho(x), \quad (5)$$

где $\rho(x)$ — линейная плотность населения, имеющая размерность 1/км, а σ_1 — некоторая константа, имеющая размерность км·(сут) $^{-1}$.

Подставляя (5) в формулу (2), получаем следующее выражение:

$$n(t, x) = n_0(x - Ut) \cdot e^{-\frac{\sigma_1 x}{U} \int_0^x \rho(z) dz}.$$

Аналогичная подстановка в формулу (4) в результате дает

$$n_M(t, x) = \frac{\sigma_1 \cdot \rho(x)}{U} \cdot n_0(Ut - x) \cdot e^{-\frac{\sigma_1 x}{U} \int_0^x \rho(z) dz}. \quad (6)$$

Чтобы определить параметр σ_1 , зафиксируем t в формуле (6) и запишем ее для двух значений x : $x = 0$ (центр распространения инфекции), $x = \Delta$ (расстояние до второй полосы), при

этом интеграл аппроксимируем формулой трапеций, тогда

$$\sigma_1 = \frac{2U}{(\rho_1 + \rho_2)\Delta} \ln \left(\frac{\rho_2 n_M(t, 0)}{\rho_1 n_M(t, \Delta)} \right). \tag{7}$$

Как отмечалось ранее, вдоль выделенного направления распространения инфекции территория страны разбивается на полосы. В открытых источниках есть информация о количестве новых случаев заражения и выздоровления за каждый день по регионам [Электронные ресурсы: карта распространения коронавируса; Распространение COVID-19 в Италии; Роспотребнадзор; Распространение COVID-19 в Чили]. Для аппроксимации этих данных в выделенных полосах мы суммировали значения в регионах, вошедших в полосу, с соответствующими весами. Вес вычислялся как отношение плотности населения в регионе к сумме плотностей по всем регионам, вошедшим в полосу. Пусть a — количество новых заражений в сутки для полосы. Для i -го региона известно количество новых заражений a_i . Допустим, что в полосу входит N регионов. Имеем набор a_1, \dots, a_N величин. Пусть ρ_1, \dots, ρ_n — плотности населения в регионах, входящих в полосу. Тогда параметр a можно представить как взвешенную сумму:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^N \rho_i a_i}{\sum_{i=1}^N \rho_i}.$$

Для применения модели были выбраны Россия, Италия и Чили. В них распространение инфекции происходило преимущественно в одном направлении из выделенного центра. Этому способствовали уникальность ситуации и географические особенности стран. Важнейшие источники эпидемии были связаны со столичными центрами стран (Москвой, Миланом — столицей Ломбардии в Италии, Сантьяго — столицей Чили), в которые приезжали туристы или граждане этой страны, возвращавшиеся из других стран, в которых эпидемия уже началась. В России граждане, возвращавшиеся из-за границы, через Москву отправляются на восток в свои места проживания. Географическое протяжение страны позволяет рассматривать одномерное уравнение.

3. Применение модели: Россия

В направлении на восток территория России на карте была разделена на 7 полос (таблица 1). В таблице 1 указаны регионы, входящие в каждую из полос.

Таблица 1. Разделение на регионы в направлении от Москвы на восток

	Расстояние, км	Регионы
1	0	Москва, Московская область
2	500	Нижегородская обл., Ивановская обл., Республика Мордовия, Пензенская обл., Тамбовская обл., Волгоградская обл., Ульяновская обл., Костромская обл., Республика Чувашия, Республика Марий Эл, Саратовская обл.
3	1160	Пермский край, Республика Коми, Республика Башкортостан, Оренбургская обл., Самарская обл., Республика Татарстан, Кировская обл., Ненецкий АО
4	1850	Тюменская обл., Ханты-Мансийский АО, Курганская обл., Свердловская обл., Челябинская обл.
5	2150	Омская обл., Томская обл., Ямало-Ненецкий АО, Новосибирская обл.
6	3600	Красноярский край, Иркутская обл.
7	6000	Хабаровский край, Еврейская АО, Амурская обл., Приморский край

Здесь Республика Саха не включена из-за весьма незначительной плотности населения.

Плотность населения по полосам приведена на рис. 3.

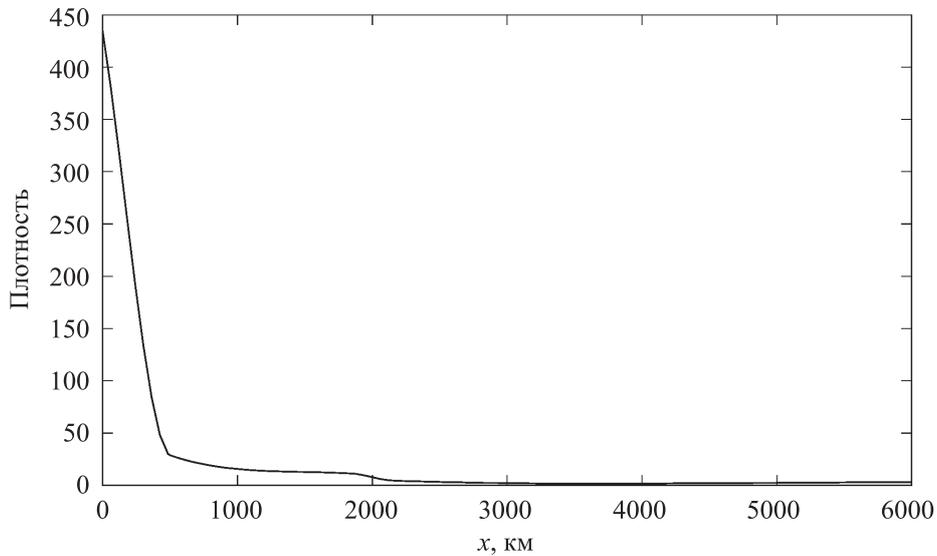


Рис. 3. Плотность населения России

Параметр U , определяющий скорость распространения инфицированных элементов, можно оценить по данным о первых заражениях в каждой полосе. Мы фиксировали первый день, в который было не менее 5 заболевших. Построив точки, соответствующие этим дням, с помощью метода наименьших квадратов построим прямую, проходящую через точку, соответствующую центру заражения (Москве). По тангенсу угла наклона этой прямой на рис. 4 находим U .

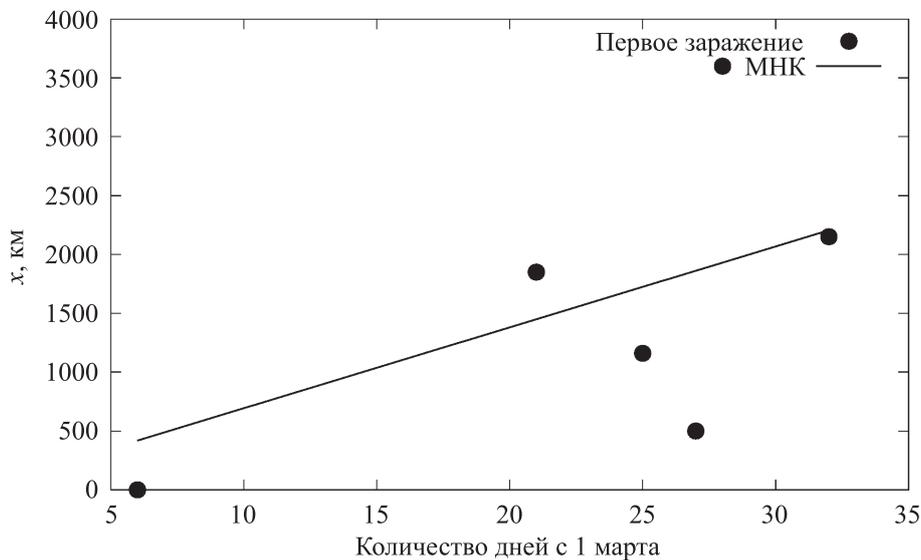


Рис. 4. Распространение заболевания в России. Точки соответствуют первым случаям заражения в каждой полосе. С помощью метода наименьших квадратов построена прямая, угловой коэффициент которой позволяет оценить U — скорость распространения заболевания

Для России получаем скорость $U = 87$ км/сут. По формуле (7) находим $\sigma_1 = 0.0031$ км·(сут)⁻¹.

Сравнение решения по уравнениям модели с реальными данными представлено на рис. 5 для первых двух недель наблюдений (начиная с 5 марта). Плотность высадившихся пассажиров $n_M(t, x)$ растет со временем, поскольку прибывают новые инфицированные. Графики на рис. 5, а

и рис. 5, б близки, но реальные величины заражений растут быстрее. Более быстрый рост для реальных данных можно связать с заражениями на местах.

Численные расчеты для времени после двух недель заражения подтверждают качественно развитие процесса и, естественно, меньшие значения количества зараженных по сравнению с реальными данными. Здесь уже основную роль играет второй фактор — контактный. Полагается, что строго выполняются условия карантина, так что перенос не играет уже роли.

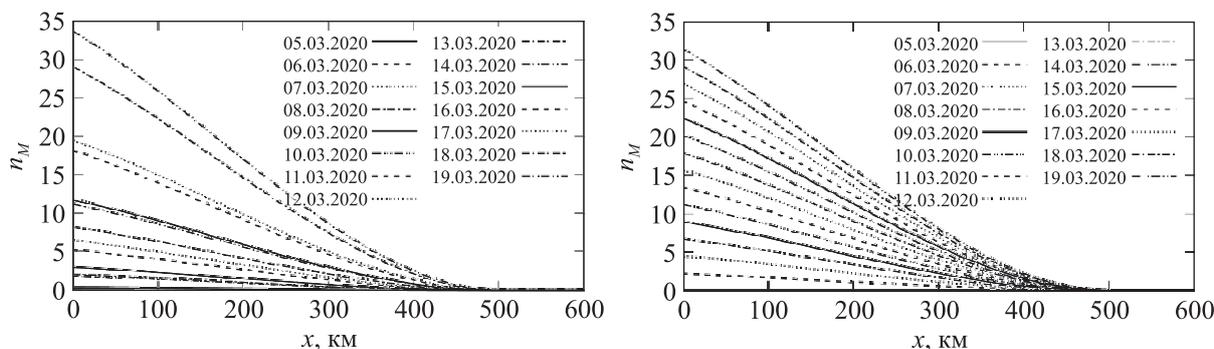


Рис. 5а. Значения n_M , наблюдаемые в период с 5 по 19 марта 2020 года

Рис. 5б. Значения n_M , вычисленные по формуле (6)

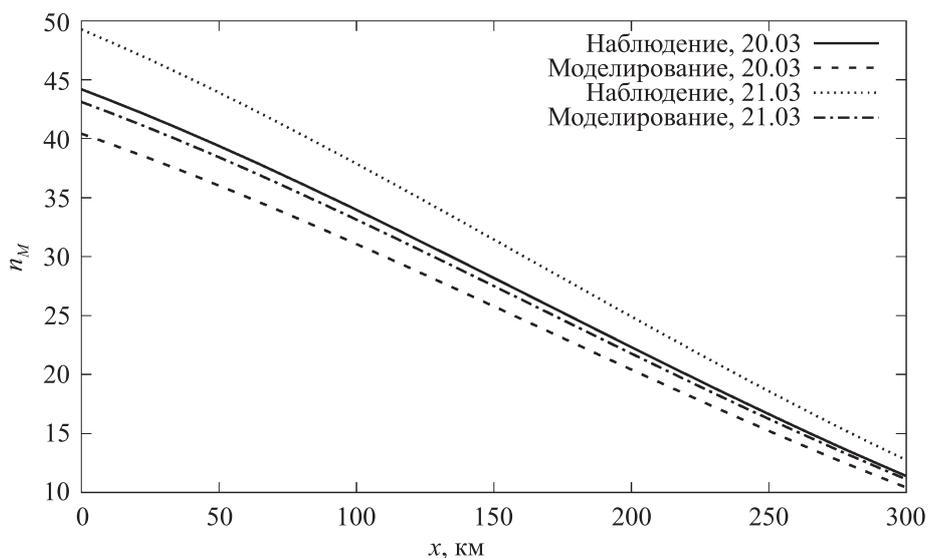


Рис. 5в. Сравнение наблюдаемых значений плотности высевшихся носителей вируса (n_M) (данные из открытых источников) с вычисленными по формуле (6)

Из рис. 5, в видно, что реальные значения для двух последовательных дат начинают расти быстрее вычисленных из-за заражений на местах.

Начало выздоровления для выбранной полосы мы определяем как достижения максимума заражений в день. Использовался метод наименьших квадратов с приближением с помощью многочлена второго порядка. Для каждой параболы определялся максимум, который и соотносился с датой начала выздоровления для этой полосы. Данные о максимумах заражений в день для каждой полосы показаны на рис. 6 (для краткости представлены лишь некоторые полосы).

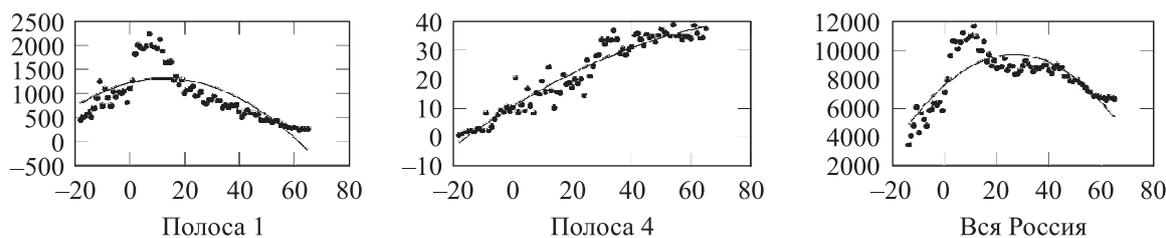


Рис. 6. Количество заражений в сутки (точки). По оси абсцисс отложены дни, нуль соответствует 1 мая. По оси ординат — количество заражений. По данным о заражении с помощью метода наименьших квадратов построена парабола

Скорость выздоровления определялась аналогично тому, как определялась скорость заражения (с использованием метода наименьших квадратов с линейным приближением), см. рис. 7, скорость U составила 52 км/сут. По графику распространения выздоровления можно предсказать примерное время начала выздоровления для России в целом, а именно дату, когда линия распространения выздоровления проходит точку, отвечающую примерно половине населения страны.

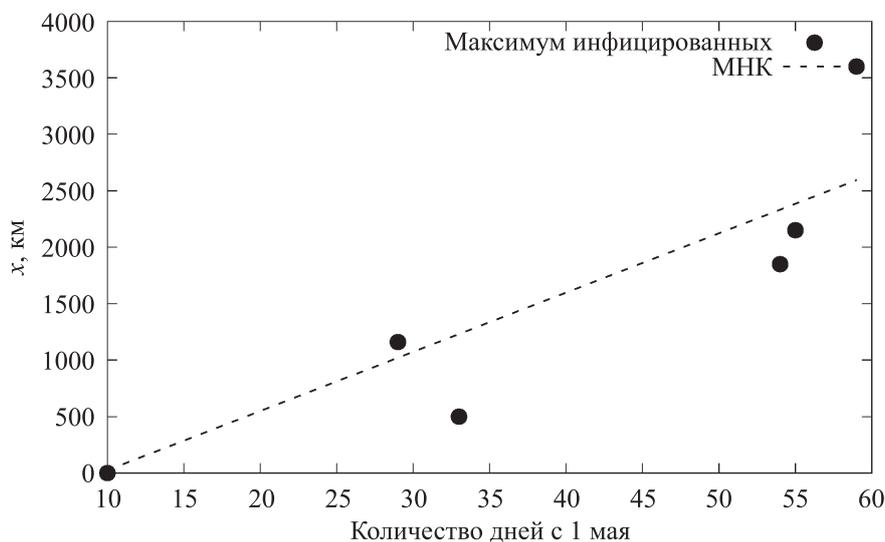


Рис. 7. Распространение выздоровления в России. Точки соответствуют максимумам инфицированных, найденным с помощью метода наименьших квадратов (см. рис. 6). По данным максимумам построена прямая, угловой коэффициент которой позволяет оценить скорость распространения выздоровления

На рис. 7 начало отсчета по оси абсцисс соответствует началу выздоровления (достижению максимума заражений) в Москве. Примерно половина населения России в силу неоднородности распределения плотности (см. рис. 3) соответствует территории до расстояния 1000 км от Москвы. Этой точке на рис. 7 соответствует 30 мая. Предсказанное по рис. 7 время начала выздоровления для всей России оказывается соответствующим началу выздоровления по рис. 6, на котором видно, что максимум заражений достигается к началу июня.

4. Применение модели: Италия

В Италии происходило распространение из области Ломбардии на юго-восток вдоль узкого Апеннинского полуострова. Территория страны была поделена на 9 полос (таблица 2), в которых значения по заболевшим и выздоровевшим, аналогично полосам в России, находились как взвешенные суммы по регионам, вошедшим в полосу.

Таблица 2. Разделение на регионы в направлении от Ломбардии на юг

	Расстояние, км	Регионы
1	0	Ломбардия
2	166	Пьемонт, Венето, Эмилия-Романья, Лигурия, Валле-д’Оста, Трентино-Альто-Адидже
3	272	Фриули-Венеция-Джулия, Тоскана
4	376	Марке, Умбрия
5	482	Абруццо, Лацио
6	592	Молизе
7	690	Кампания
8	781	Апулия, Базиликата
9	933	Калабрия

Плотность населения по полосам приведена на рис. 8. Параметры, полученные для Италии теми же методами, что и для России, имеют следующие значения: $U = 53$ км/сут, $\sigma_1 = 0.0012$ км·(сут)⁻¹. График, по которому была найдена скорость, приведен на рис. 9. Для вычисления σ_1 использовались данные на 12 марта. Скорость оказалась ниже аналогичной скорости в России из-за меньшей протяженности страны, поскольку средняя скорость транспортных средств меньше. Например, можно предположить, что самолеты (самый быстрый вид транспорта) используются для внутренних перевозок по России чаще, чем в Италии, что в результате дает меньшую скорость передвижения по Италии.

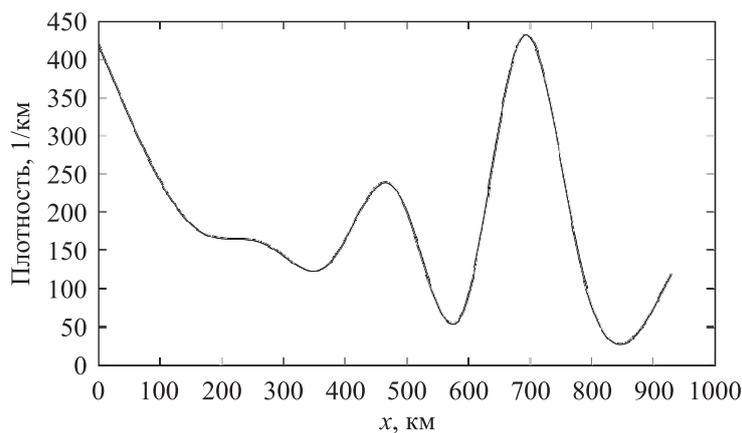


Рис. 8. Линейная плотность населения в Италии

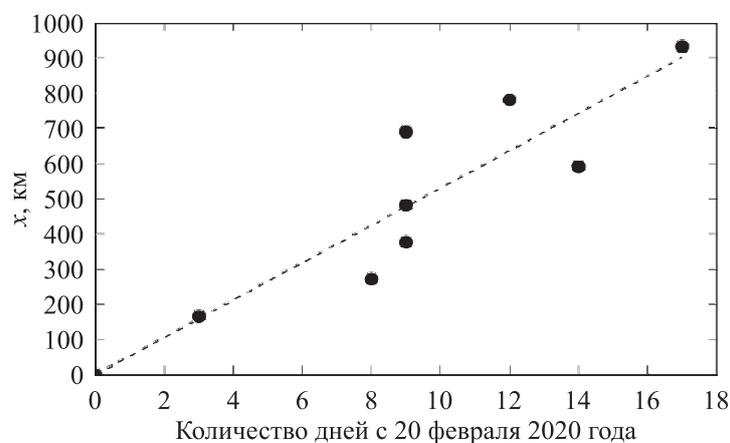


Рис. 9. Распространение заболевания в Италии. Точки соответствуют первым случаям заражения в каждой полосе

Сравнение численного решения для n_M с реальными данными для Италии на начальном этапе заражения представлено на рис. 10. На графиках видно, что характер реального и характер теоретического распределения схожи, но значения реальных данных находятся выше теоретических. Это явление наблюдается из-за большего количества населения во второй полосе, что обусловлено большим количеством регионов Италии, входящих во вторую полосу.

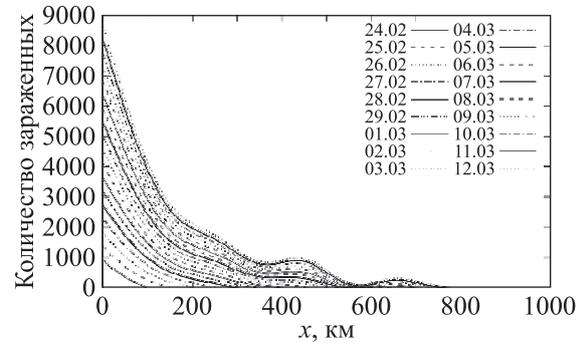
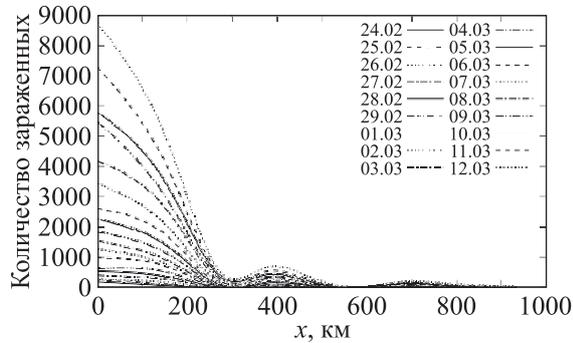
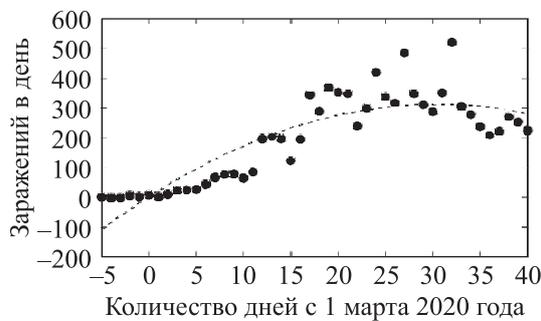


Рис. 10а. Значения n_M , наблюдаемые в период с 24 февраля по 12 марта 2020 года

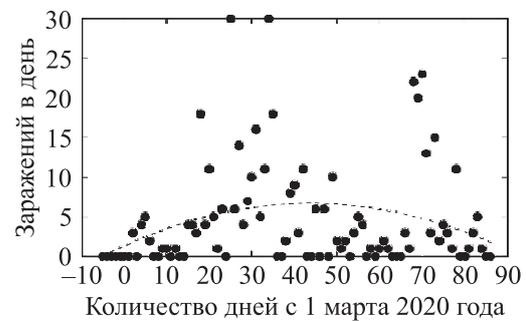
Рис. 10б. Значения n_M , вычисленные по формуле (6)

Скорость выздоровления находилась аналогично скорости выздоровления в России (рис. 11) и составила 53 км/сут. Скорости заражения и выздоровления примерно совпали. Такой вывод соответствует предположению о том, что условия протекания болезни были примерно одни и те же в разных областях, что обеспечивается строгой карантинной изоляцией каждой области.

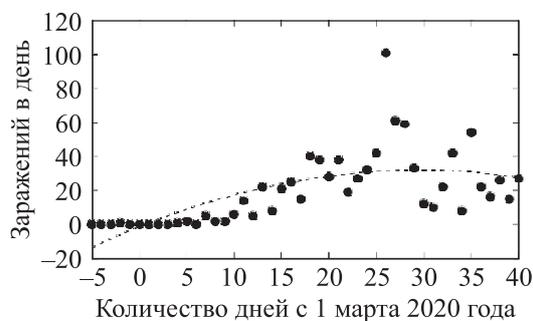
Максимумы заражений определялись так же, как и для России, по максимумам парабол, построенных методом наименьших квадратов (рис. 11). На рис. 11 за 0 на оси абсцисс считается 1 марта.



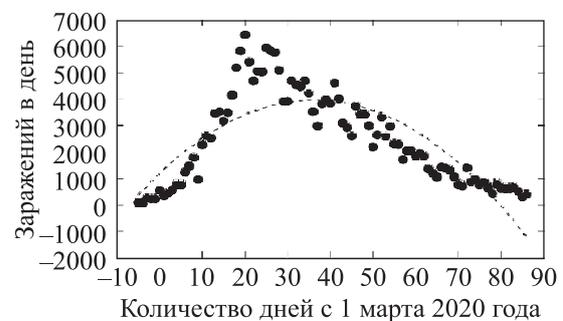
Полоса 3



Полоса 6



Полоса 9



Вся Италия

Рис. 11. Максимумы заражений за день (показаны 3 полосы и данные для всей страны)

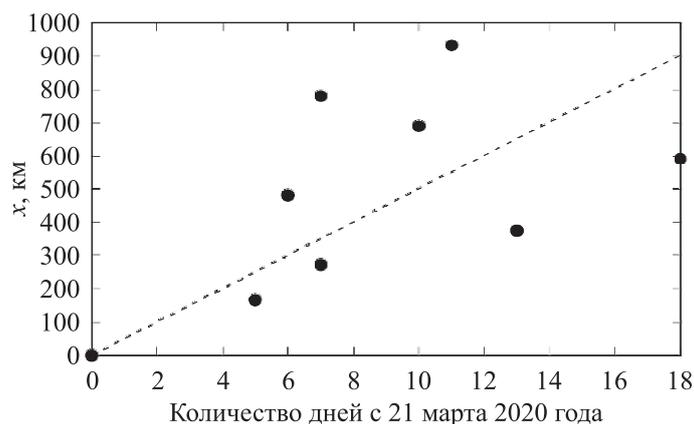


Рис. 12. Распространение выздоровления в Италии. Точки соответствуют максимумам инфицированных, найденным с помощью метода наименьших квадратов

На рис. 12 начало отсчета по оси абсцисс соответствует началу выздоровления (достижению максимума заражений) в Ломбардии. Примерно половина населения Италии соответствует расстоянию 600 км от Ломбардии (см. рис. 8). Этой точке на рис. 12 соответствует 2 июня. Предсказанное по рис. 12 время начала выздоровления для всей Италии оказывается соответствующим началу выздоровления по рис. 11, на котором видно, что максимум заражений достигается в первую неделю июня.

5. Применение модели: Чили

В Чили основным источником распространения вируса являлась столица Сантьяго, расположенная примерно в середине протяженной страны. Были выделены 4 полосы к северу от Сантьяго и 3 полосы к югу от столицы. Так же как для России и Италии, данные для Чили усреднялись для каждой полосы по вошедшим в нее регионам.

При моделировании два разных направления считаются независимыми друг от друга, то есть подразумевается, что количество зараженных пассажиров, выехавших, например, в сторону севера, а затем повернувших на юг, будет пренебрежимо мало по сравнению с общим количеством пассажиров.

Деление на полосы представлено в таблицах 3 и 4.

Далее на юге Чили есть еще два региона, но они в работе не учитываются, так как являются малозаселенными областями, статистика по коронавирусу в которых сравнима с погрешностью в других регионах.

Таблица 3. Деление на полосы в направлении на юг от Сантьяго

	Расстояние, км	Регионы
0	0	Сантьяго
1	50	Кокимбо, Вальпараисо
2	470	Атакама
3	850	Антофагаста
4	1340	Арика-и-Паринакота, Тарапака

Таблица 4. Деление на полосы в направлении на север от Сантьяго

	Расстояние, км	Регионы
0	0	Сантьяго
1	50	Либертадор-Хенераль-Бернардо-О’Хиггинс, Мауле, Ньюбле
2	410	Био-био, Араукания, Лос Риос
3	800	Лос Лагос

Плотность населения изображена на рис. 13 (13а — север, 13б — юг). На графиках здесь и далее не учитывается Сантьяго (точка отсчета $x = 0$), так как плотность населения в этом городе на порядок выше, чем в других полосах. Поэтому фактически учет плотности ведется от первой полосы в каждую сторону — они расположены на расстоянии 50 км к северу и к югу, из рис. 13а, 13б видно, что на север плотность населения от первой полосы начинает спадать, а в южном направлении вначале плотность немного возрастает, а потом уменьшается.

Значения параметров, полученные для Чили теми же методами, что и для России, имеют следующие значения: $U = 44$ км/сут, $\sigma_1 = 0.0026$ км·(сут) $^{-1}$ для севера страны и $U = 97$ км/сут, $\sigma_1 = 0.0065$ км·(сут) $^{-1}$ для юга. Графики, по которым были найдены скорости, приведены на рис. 14.

Сравнение численного решения для n_M с реальными данными на начальном этапе заражения для Чили представлено на рис. 15. На графиках (рис. 15а, 15б) видно, что вплоть до третьей полосы теоретически найденные величины соответствует реальным значениям. Начиная с третьей полосы, реальные данные оказываются существенно выше, что можно объяснить сильными контактными заражениями на местах. Такое предположение может быть справедливым. Действительно, для севера мы рассматривали более поздние даты, поскольку на север распространение эпидемии происходило позже, чем по остальной стране. Причиной этого могут быть некорректные данные в первые дни заражения. Так как брались более поздние даты, вычисленные значения начинаются выше, чем на графиках для других областей (отброшены первые девять дней, значения в которых близки к нулю).

Графики (рис. 15в, 15г) имеют сходный характер, несмотря на довольно неравномерный рост реальных данных.

Скорости выздоровления находились аналогично скорости выздоровления в России (рис. 16, 17). Скорости выздоровления: $U = 23$ км/сут на севере и $U = 96$ км/сут на юге. Несоответствие скорости выздоровления скорости заражения на севере может указывать на некоторую неточность данных.

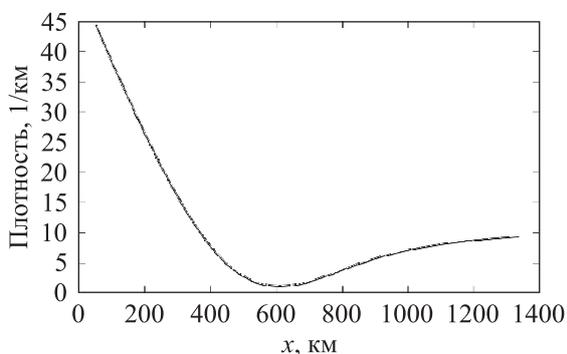


Рис. 13а. Плотность населения на севере

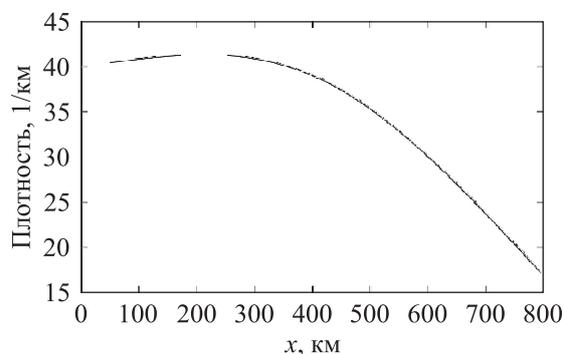


Рис. 13б. Плотность населения на юге

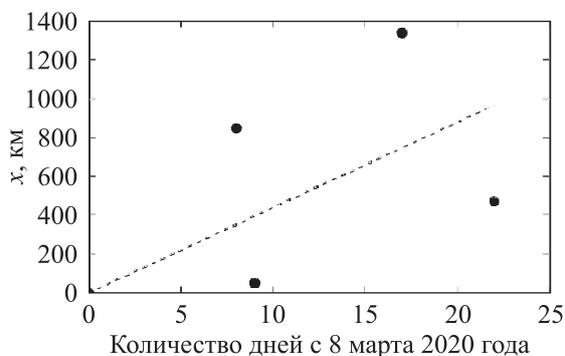


Рис. 14а. Скорость заражения на севере Чили

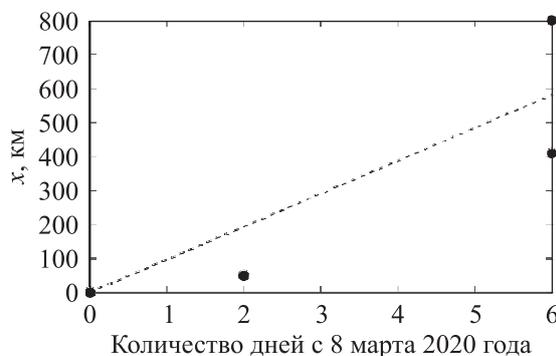


Рис. 14б. Скорость заражения на юге Чили

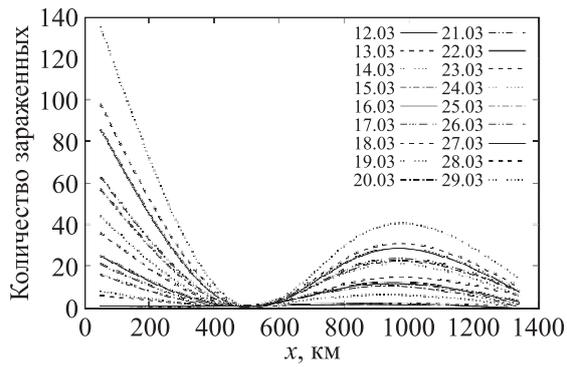


Рис. 15а. Значения n_M для севера, наблюдаемые в период с 12 по 29 марта 2020 года

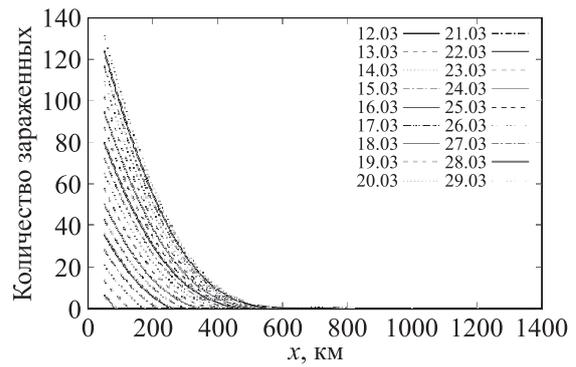


Рис. 15б. Значения n_M для севера, вычисленные по формуле (6)

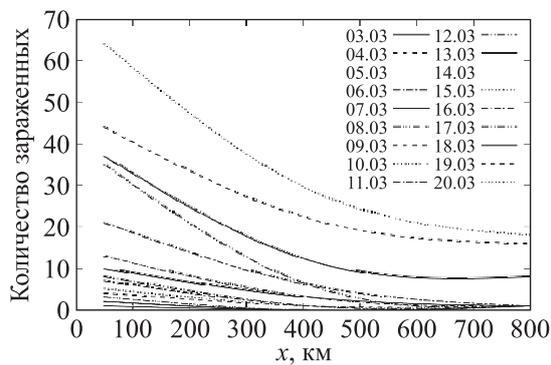


Рис. 15в. Значения n_M для юга, наблюдаемые в период с 3 по 20 марта 2020 года

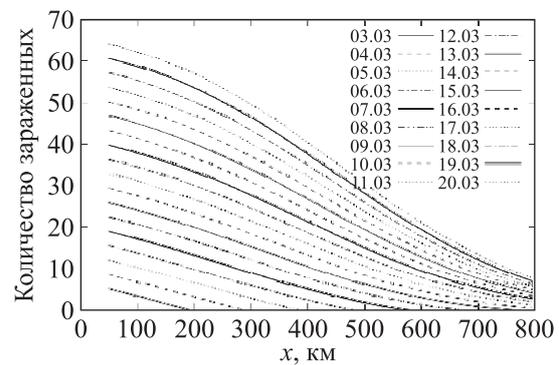


Рис. 15г. Значения n_M для юга, вычисленные по формуле (6)

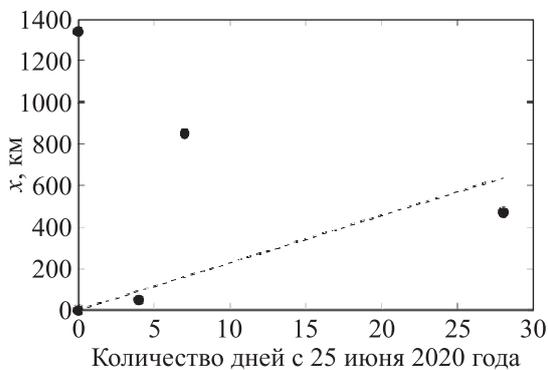


Рис. 16а. Распространение выздоровления на севере

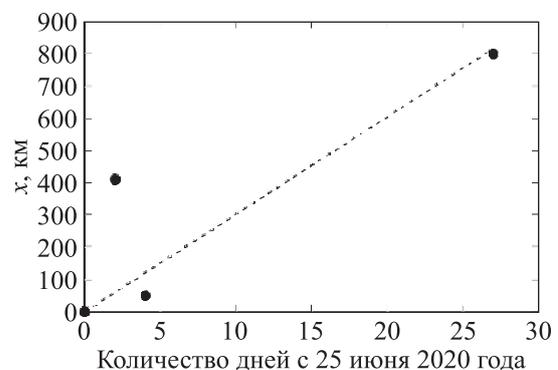


Рис. 16б. Распространение выздоровления на юге

На рис. 16 для обоих графиков начало отсчета по оси абсцисс соответствует началу выздоровления (достижению максимума заражений) в Сантьяго. Несмотря на разное распределение плотности населения к северу и к югу от Сантьяго, примерно половина населения в каждом из направлений соответствует расстоянию 400 км от Сантьяго (см. рис. 13). Этой точке на рис. 16 соответствует 12 июля на севере и 7 июля на юге. Предсказанное по рис. 16 время начала выздоровления для севера Чили оказывается соответствующим началу выздоровления по рис. 17, на котором видно, что максимум заражений достигается в середине июля. Для юга предсказание оказалось менее точным, но при этом предсказания по рис. 16 и рис. 17 различаются не более чем на неделю.

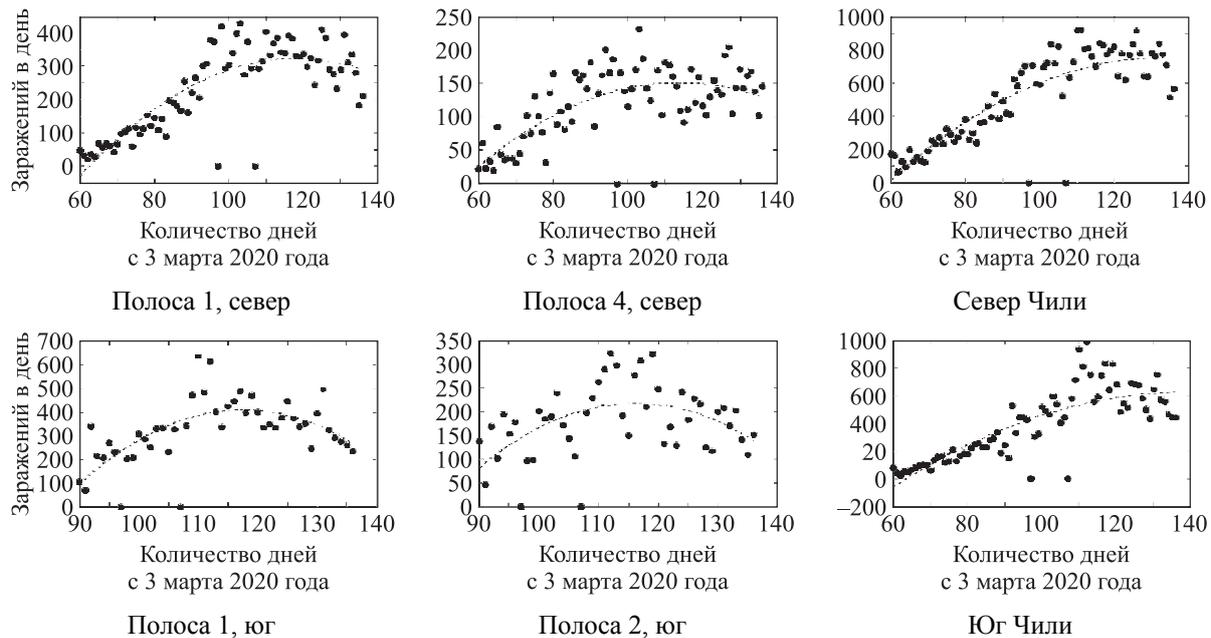


Рис. 17. Максимумы заражений за день в Чили (для примера показаны некоторые полосы)

6. Заключительные замечания

В настоящей работе представлена модель, способная воспроизвести характер распространения коронавируса в некоторых странах, в которых имеется отчетливый очаг распространения заболевания. Сравнение расчетов с реальными данными показало хорошее соответствие для первых недель переносного распространения инфекции. Полученные результаты имеют и предсказательные возможности.

Была предложена двухпараметрическая кинетическая одномерная модель пространственного распространения инфекции коронавируса на примере трех стран: России, Италии и Чили. Существенное предположение связано с фиксацией условий жесткого карантина начиная с некоторого времени и выполнения его в течение достаточно длительного периода. Полагалось, что до начала карантина происходила передача инфекции практически только за счет возвращающихся пассажиров из выделенных центров, которые можно отметить для рассматриваемых стран. Процесс выздоровления в определенном смысле симметричен процессу заражения: выздоровление начинается раньше в тех местах, где раньше произошло заражение.

Полученная модель в двумерном виде со многими центрами заражения могла бы быть использована в дальнейшем, но для этого необходимо проводить более сложные численные расчеты.

В настоящее время возникла новая волна пандемии и столь ясных условий развития и распространения COVID-19 уже не наблюдается. Осенняя волна пандемии имеет более сложный характер, чему способствовало много факторов. В частности, не было такой строгой изоляции, как весной. Тем не менее можно предположить, что Москва являлась основным центром распространения вируса на восток. Поэтому максимум заражения в Москве может быть достигнут примерно на три недели раньше, чем во всей России

Список литературы (References)

- Аристов В. В., Ильин О. В. Модель агрессии на основе кинетических уравнений // Компьютерные исследования и моделирование. — 2014. — Т. 6, № 5. — С. 165–174.
 Aristov V. V., Ilyin O. V. Model agressii na osnove kineticheskikh uravneniy [Description of the rapid invasion processes by means of the kinetic model] // Computer Research and Modeling. — 2014. — Vol. 6, No. 5. — P. 165–174 (in Russian).

- Васильев В. А., Романовский Ю. М., Яхно В. Г.* Автоволновые процессы. — М.: Наука, 1987.
Vasilev V. A., Romanovskiy Yu. M., Yahno V. G. Avtovolnovie processy [Autowave processes]. — Moscow: Nauka, 1987 (in Russian).
- Карта распространения коронавируса [Электронный ресурс]. <https://yandex.ru/web-maps/covid19> (дата обращения: 20.12.2020).
Karta rasprostraneniya koronavirusa [Map of COVID-19 spread] [Electronic resource] <https://yandex.ru/web-maps/covid19> (accessed: 20.12.2020) (in Russian).
- Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С.* Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества и его применение к одной биологической проблеме // Бюллетень МГУ. Сер. А. Математика и механика. — 1937. — Т. 1. — С. 1–25.
Kolmogorov A. N., Petrovskiy I. G., Piskunov N. S. Issledovanie uravneniya diffuzii, soedinennoi s vozrastaniem kolichestva veschestva i ego primenenie k odnoy biologicheskoy problem [Investigation of the diffusion equation combined with an increase in the amount of matter and its application to one biological problem] // Bulletin MGU, Ser. A. Matematika i mehanika. — 1937. — Vol. 1. — P. 1–25 (in Russian).
- Пастухова С. Е., Евсеева О. А.* Асимптотика решения уравнения диффузии в периодической среде на больших временах и ее применение к оценкам усреднения // Российский технологический журнал. — 2017. — Т. 5 (5). — С. 60–69. — <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2017-5-5-60-69>
Pastukhova S. E., Evseeva O. A. Asimptotika resheniya uravneniya diffuzii v periodicheskoy srede na bol'shikh vremenakh i ee primenenie k otsenkam usredneniya [Large-time asymptotic of the solution to the diffusion equation and its application to homogenization estimates] // Rossijskij tekhnologicheskij zhurnal [Russian Technological Journal]. — 2017. — Vol. 5 (5). — P. 60–69. — <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2017-5-5-60-69> (in Russian).
- Распространение COVID-19 в Италии [Электронный ресурс]. <http://lab24.ilsole24ore.com/coronavirus> (дата обращения: 26.05.2020).
Rasprostranenie COVID-19 v Italii [Spread of Covid-19 in Italy] [Electronic resource] <http://lab24.ilsole24ore.com/coronavirus> (accessed: 26.05.2020).
- Распространение COVID-19 в Чили [Электронный ресурс]. <https://www.minsal.cl/nuevo-coronavirus-2019-ncov/casos-confirmados-en-chile-covid-19/> (дата обращения: 15.06.2020).
Rasprostranenie COVID-19 v Chili [Spread of Covid-19 in Chile] [Electronic resource]. <https://www.minsal.cl/nuevo-coronavirus-2019-ncov/casos-confirmados-en-chile-covid-19/> (accessed: 15.06.2020).
- Ризниченко Г. Ю.* Лекции по математическим моделям в биологии. — М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011.
Risnichenko G. Yu. Leksii po matematicheskim modelyam v biologii [Lectons on mathematical models in biology]. — Moscow–Izhevsk: NIC “Regular and chaotic dynamics”, 2011 (in Russian).
- Роспотребнадзор [Электронный ресурс] https://www.rosпотребнадзор.ru/about/info/news/news_details.php?ELEMENT_ID=16253&spphrase_id=2989389 (дата обращения: 20.12.2020).
Rospotrebnadzor [Electronic resource] https://www.rosпотребнадзор.ru/about/info/news/news_details.php?ELEMENT_ID=16253&spphrase_id=2989389 (accessed: 20.12.2020) (in Russian).
- Рубин А. Б.* Биофизика. — М.: Высшая школа, 1999.
Rubin A. B. Biofizika [Biophysics]. — Moscow: Vishaya shkola, 1999 (in Russian).
- Aristov V. V., Ilyin O. V.* Kinetic Models for Historical Processes of Fast Invasion and Aggression // Phys. Rev. E. — 2015.
- Elton C. S.* The ecology of invasions by animals and plants. Second Edition. With Contributions by Daniel Simberloff and Anthony Ricciardi. — Springer Nature Switzerland AG, 2020.
- Fischer R. A.* The wave of advance of advantageous genes // Ann. Eugenics. — 1937. — Vol. 7. — P. 355–369.
- Gross B, Zheng Z., Liu S., Chen X., Sela A., Li J., Li D., Havlin S.* Spatio-temporal propagation of COVID-19 pandemics // EPL (Europhysics Letters). — 2020. — Vol. 131, No. 5.
- Ivorra B., Ferrández M. R., Vela-Pérez M., Ramos A. M.* Mathematical modeling of the spread of the coronavirus disease 2019 (COVID-19) taking into account the undetected infections. The case of China. Commun Nonlinear Sci Numer Simul. 2020.
- Prigogine I., Herman R.* Kinetic Theory of Vehicular Traffic. — New York: American Elsevier, 1971.