КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2021 Т. 13 № 3 С. 541–555
DOI: 10.20537/2076-7633-2021-13-3-541-555

УДК: 519.6; 539.3

Вариационный принцип для сплошных сред, обладающих памятью формы, при изменяющихся внешних силах и температуре

В. А. Грачев, Ю. С. Найштут[a]

Архитектурно-строительная академия Самарского государственного технического университета,
Россия, 443001, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 194

E-mail:[a] neustadt99@mail.ru

Получено 01.03.2021.
Принято к публикации 27.04.2021.

В рамках феноменологической механики сплошной среды без анализа микрофизики явления рассматривается квазистатическая задача деформирования сплавов с памятью формы. Феноменологический подход основан на сопоставлении двух диаграмм деформирования материалов. Первая диаграмма отвечает активному пропорциональному нагружению, когда сплав ведет себя как идеальный упругопластический материал; после снятия нагрузки фиксируется остаточная деформация. Вторая диаграмма наблюдается, если деформированный образец нагреть до определенной для каждого сплава температуры. Происходит восстановление первоначальной формы: обратная деформация совпадает с точностью до знака с деформациями первой диаграммы. Поскольку первый этап деформирования может быть описан с помощью вариационного принципа, для которого доказывается существование обобщенных решений при произвольном нагружении, становится ясным, как объяснить обратную деформацию в рамках слегка видоизмененной теории пластичности. Нужно односвязную поверхность нагружения заменить двусвязной и, кроме того, вариационный принцип дополнить двумя законами термодинамики и принципом ортогональности термодинамических сил и потоков. Доказательство существования решений и в этом случае не встречает затруднений. Успешное применение теории пластичности при постоянной температуре порождает потребность получить аналогичный результат в более общем случае изменяющихся внешних сил и температуры. В работе изучается идеальная упругопластическая модель Мизеса при линейных скоростях деформаций. Учет упрочнения и использование произвольной поверхности нагружения не вызывают дополнительных трудностей.

Формулируется расширенный вариационный принцип типа Рейсснера, который вместе с законами термопластичности позволяет доказать существование обобщенных решений для трехмерных тел, изготовленных из материалов, обладающих памятью формы. Основная трудность, которую приходится преодолевать, состоит в выборе функционального пространства для скоростей и деформаций точек континуума. Для этой цели в статье используется пространство ограниченных деформаций — основной инструмент математической теории пластичности. Процесс доказательства показывает, что принятый в работе выбор функциональных пространств не является единственным. Изучение других возможных расширенных постановок вариационной задачи, наряду с выяснением регулярности обобщенных решений, представляется интересной задачей для будущих исследований.

Ключевые слова: сплошная среда, вариационный принцип, материалы с памятью формы, термопластичность, пространство ограниченной деформации, обобщенные решения

COMPUTER RESEARCH AND MODELING
2021 VOL. 13 NO. 3 P. 541–555
DOI: 10.20537/2076-7633-2021-13-3-541-555

MODELS IN PHYSICS AND TECHNOLOGY

UDC: 519.6; 539.3

Variational principle for shape memory solids under variable external forces and temperatures

V. A. Grachev, Yu. S. Neustadt[a]

Academy of Building and Architecture, Samara State Technical University,
194 Molodogvardeiskaya st., Samara, 443001, Russia

E-mail:[a] neustadt99@mail.ru

Received 01.03.2021.
Accepted for publication 27.04.2021.

The quasistatic deformation problem for shape memory alloys is reviewed within the phenomenological mechanics of solids without microphysics analysis. The phenomenological approach is based on comparison of two material deformation diagrams. The first diagram corresponds to the active proportional loading when the alloy behaves as an ideal elastoplastic material; the residual strain is observed after unloading. The second diagram is relevant to the case when the deformed sample is heated to a certain temperature for each alloy. The initial shape is restored: the reverse distortion matches deformations on the first diagram, except for the sign. Because the first step of distortion can be described with the variational principle, for which the existence of the generalized solutions is proved under arbitrary loading, it becomes clear how to explain the reverse distortion within the slightly modified theory of plasticity. The simply connected surface of loading needs to be replaced with the doubly connected one, and the variational principle needs to be updated with two laws of thermodynamics and the principle of orthogonality for thermodynamic forces and streams. In this case it is not difficult to prove the existence of solutions either. The successful application of the theory of plasticity under the constant temperature causes the need to obtain a similar result for a more general case of variable external forces and temperatures. The paper studies the ideal elastoplastic von Mises model at linear strain rates. Taking into account hardening and arbitrary loading surface does not cause any additional difficulties.

The extended variational principle of the Reissner type is defined. Together with the laws of thermal plasticity it enables to prove the existence of the generalized solutions for three-dimensional bodies made of shape memory materials. The main issue to resolve is a challenge to choose a functional space for the rates and deformations of the continuum points. The space of bounded deformation, which is the main instrument of the mathematical theory of plasticity, serves this purpose in the paper. The proving process shows that the choice of the functional spaces used in the paper is not the only one. The study of other possible problem settings for the extended variational principle and search for regularity of generalized solutions seem an interesting challenge for future research.

Keywords: solids, variational principle, shape memory materials, thermal plasticity, space of bounded deformation, generalized solutions.

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2021, vol. 13, no. 3, pp. 541–555 (Russian).

1. Введение

Сплавы типа нитинола, механическое поведение которых интенсивно изучается в последние десятилетия [Лихачев, 1997; Lagoudas, 2008; Cisse et al., 2016], отличаются от большинства металлов тем, что после пластического деформирования силами и последующего нагревания способны восстанавливать первоначальную форму. Анализ напряженно-деформированного состояния сплошных сред, состоящих из сплавов с памятью формы, производится на основе физических моделей тел, в которых под действием внешних сил и температуры происходят мартенситно-аустенитные фазовые превращения [Frémond, 2012; Bonetti et al., 2016]. Другими словами, материал с памятью формы представляется смесью различных компонент, претерпевающих фазовые превращения. Соответствующие математические задачи исследуются в пространствах обобщенных функций с привлечением аппарата вариационных неравенств. На этом пути получено решение многих интересных проблем.

Следует отметить одну характерную особенность деформирования тел, изготовленных из материалов с памятью формы: необратимое изменение формы образцов после приложения и снятия нагрузки (при постоянной температуре) полностью восстанавливается, если образцы нагревать при определенной (для каждого сплава) температуре. Говоря иначе, феноменологически прямая и обратная деформации протекают одинаково с точностью до знака. Поскольку деформирование силами порождает пластическую деформацию, возникает вопрос, нельзя ли обратную деформацию объяснить на основе теории пластичности, не вникая в мартенситно-аустенитные превращения. Этой цели посвящена предлагаемая работа. Формулируется и доказывается вариационный принцип типа Э. Рейсснера о существовании седловой точки функции Лагранжа, определяемой для обобщенных скоростей дефомаций и напряжений, заданных в четырехмерном пространстве-времени. Принцип Рейсснера [Reissner, 1965, 1985] является развитием двух основных локальных минимальных принципов теории идеальной пластичности: минимального принципа для скоростей деформации и максимального принципа для поля скоростей напряжений [Койтер, 1961].

В § 2 приводятся эвристические соображения по формулировке вариационного принципа для материалов с памятью формы и доказывается его применимость в случае постоянной температуры [Grachev, Neustadt, 2018]. В § 3 доказывается существование обобщенных решений на основе вариационного принципа, приспособленного с помощью теории термопластичности к задачам деформирования идеализированных материалов с памятью формы (в принятой расчетной модели учет эффектов упрочнения не вызывает дополнительных осложнений). Разъясняется выбор функциональных пространств, в которых существует решение задачи. Указываются возможности замены условия текучести Мизеса произвольной гладкой поверхностью нагружения и приводятся следствия из обобщенного вариационного принципа.

2. Формулировка вариационных принципов деформирования материалов с памятью формы при постоянной температуре

При одноосном растяжении идеальных упругопластических материалов с памятью формы при постоянной температуре кривые «напряжение – относительная деформация» зависят от абсолютной θ температуры и имеют вид, показанный на рис. 1, $\theta_0 < \theta_1 < \theta_{2\bar{\varepsilon}}$.

Деформирование при «комнатных» температурах θ_0, θ_1 соответствует поведению идеальных упругопластических материалов с пределами текучести σ_0, σ_1. Если же испытание производится при температуре $\theta_{2\ddot{\varepsilon}}$, то наблюдаются две поверхности, σ_1 и $\sigma_{2\bar{\varepsilon}}$, на которых прослеживаются большие деформации разных знаков. Остаточная деформация в последнем случае отсутствует. Если $\sigma_{2\dot{\varepsilon}} \to 0$, то $\theta_{2\dot{\varepsilon}} \to \theta_2$ и число θ_2 называют температурой восстановления формы.

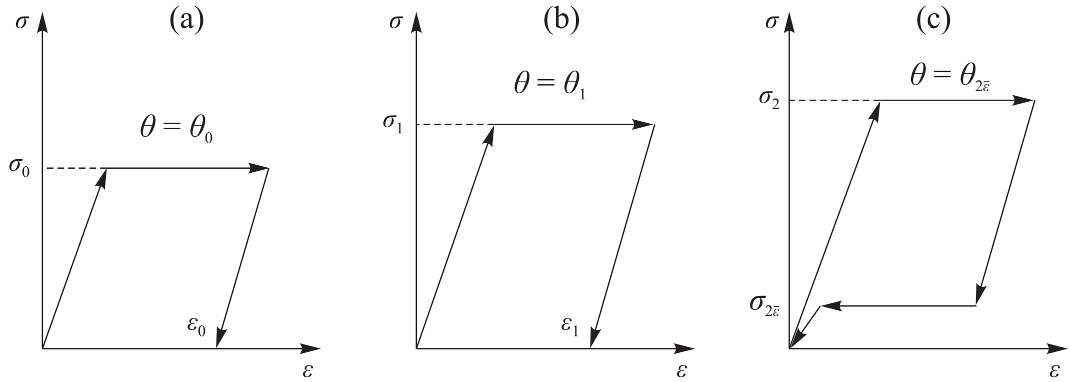

Рис. 1. a), b) Кривые «напряжение (σ) – относительная деформация (ε)» для одноосно растягиваемого стержня из материала с памятью формы при «комнатных» температурах θ_0, θ_1; c) зависимость между напряжениями и относительными деформациями при температуре «обратного превращения» $\theta_{2\dot{\varepsilon}}$

Кривые на рис. 1 допускают другое толкование. Рассмотрим две стадии деформирования среды. На первой стадии приложим напряжения $\sigma \le \sigma_0$ при температуре θ_0. Затем при той же температуре снимем нагрузку и измерим остаточную деформацию ε_0. На втором этапе поднимем температуру до значения θ_2 без дополнительного нагружения. Образец должен вернуться в первоначальное состояние.

Приведем математическую постановку задачи деформирования на первой стадии в случае произвольного напряженно-деформированного состояния среды.

Изучим задачу применительно к сплошной трехмерной среде с условием текучести Мизеса:

$$s_{ij}^2 = 2k^2, \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}, \quad \sigma = \sigma_{ii} / 3. \tag{1}$$

Здесь k — предел текучести материала на сдвиг, s_{ij} — девиатор напряжений, σ_{ij} — тензор напряжений, δ_{ij} — символ Кронекера.

Следуя [Койтер, 1961], будем называть тензор напряжений σ_{ij} допустимым, если его девиатор удовлетворяет соотношению $s_{ij}^2 \le 2k^2$. Если же девиатор s_{ij}^0 удовлетворяет неравенству $s_{ij}^0 s_{ij}^0 \le 2k_0^2$, $k_0 < k$, то отвечающий ему тензор σ_{ij}^0 назовем безопасным.

Выбираем в качестве определяющих параметров поведения континуума тензор напряжений σ_{ij} и скаляр λ, связанный с тензором скоростей пластической деформации ε_{ij}^p зависимостью [Качанов, 1969]

$$\dot{\lambda} = \lambda_{2ij}\varepsilon_{ij}^p, \quad \varepsilon_{ij}^p = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^e, \quad \varepsilon_{ij}^e = E_{ijkl}^{-1}\dot{\sigma}_{kl}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i). \tag{2}$$

Точкой обозначено дифференцирование по времени, u_i — вектор скорости точки континуума, ε_{ij} — тензор (линейный) скоростей деформаций, E_{ijkl} — тензор модулей упругости. Тензор λ_{2ij} возьмем по рекомендации Прагера [Prager, 1958]:

$$\lambda_{2ij} = \sigma_{ij}. \tag{3}$$

Скорость изменения плотности внутренней энергии определим по формуле

$$\dot{U} = E_{ijkl}^{-1}\sigma_{ij}\dot{\sigma}_{kl} + \dot{\lambda}, \tag{4}$$

основанной на следующем требовании: процесс упругопластического деформирования сплошной среды при постоянной температуре и отсутствии притока тепла должен описываться законом Прандтля–Рейсса:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{e} + \varepsilon_{ij}^{p} = E_{ijkl}^{-1}\dot{\sigma}_{kl} + \varepsilon_{ij}^{p}.$$

Формальная свертка этого выражения с тензором σ_{ij} приводит к равенствам

$$\dot{U} = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}, \quad \dot{U} = E_{ijkl}^{-1}\sigma_{ij}\dot{\sigma}_{kl} + \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^{p},$$

а интеграл от последнего выражения по объему и времени равносилен первому началу термодинамики, если нет притока тепла $(\dot{q} = 0)$.

Таким образом, если принять закон Прандтля–Рейсса в качестве определяющего соотношения, то для скорости изменения плотности внутренней энергии имеем выражение (4), где $\dot{\lambda} = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^{p}$. Физический смысл $\dot{\lambda}$ — мощность, необходимая для пластического деформирования единицы объема.

Тот же результат получается, если формально потребовать выполнения соотношений (2)–(4) и вывести из законов термодинамики правило разделения деформации на упругую и пластическую части. Действительно, из первого начала термодинамики при $\dot{q} = 0$ следует

$$\dot{U} = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = E_{ijkl}^{-1}\sigma_{ij}\dot{\sigma}_{kl} + \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^{p}, \tag{5}$$

что равносильно разделению деформации на упругую и пластическую части:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{e} + \varepsilon_{ij}^{p} = E_{ijkl}^{-1}\dot{\sigma}_{kl} + \varepsilon_{ij}^{p}. \tag{6}$$

Наконец, примем постулат Друкера о нормальности тензора ε_{ij}^{p} к поверхности нагружения и найдем

$$\varepsilon_{ij}^{p} = \lambda_p s_{ij}, \quad \varepsilon_{ii}^{p} = 0. \tag{7}$$

Подставляя выражения (7) в условие (1), определим параметр λ_p и девиатор s_{ij}:

$$\lambda_p^2 = \varepsilon_{ij}^{p}\varepsilon_{ij}^{p} / 2k^2, \quad s_{ij} = k\sqrt{2}\varepsilon_{ij}^{p}(\varepsilon_{ij}^{p}\varepsilon_{ij}^{p})^{-1/2}. \tag{8}$$

Соотношения (1)–(8) иллюстрирует рис. 2, на котором поверхность нагружения обозначена как S, а девятимерное возможное пространство напряжений — как R^*. Напряженное состояние, отвечающее точке B, упругое, а в точке A возможны пластические деформации.

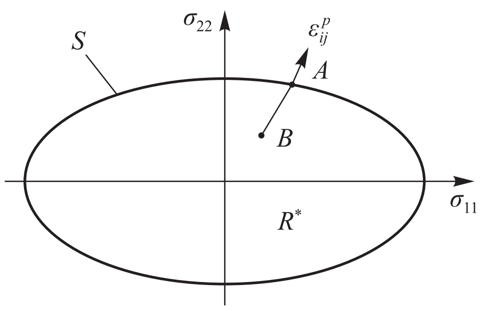

Рис. 2. Девятимерное пространство возможных напряжений названо R^* и ограничено поверхностью нагружения S. Упругое деформирование отвечает напряжениям в точке B. Если напряжения оказываются на поверхности нагружения, то возможны пластические деформации ε_{ij}^{p}

Выражение для скорости изменения плотности внутренней энергии преобразуется к виду

$$\dot{U} = f + h, \quad f = E^{-1}_{ijkl}\sigma_{ij}\dot{\sigma}_{kl}, \quad h = k\sqrt{2}(\varepsilon^{p}_{ij}\varepsilon^{p}_{ij})^{1/2}. \tag{9}$$

Таким образом, постулируя соотношения (3), (4), обнаруживаем не только разделение деформации на обратимую и необратимую части, но и автоматическое выполнение первого начала термодинамики при изотермической деформации сплошной среды без притока тепла. Второе начало термодинамики также выполняется автоматически, поскольку выражение f можно отождествить со скоростью изменения свободной энергии Гельмгольца, а отсутствие подводимого тепла $\dot{q} = 0$ и выражение (9) дают соотношение

$$0 = \dot{q} < \theta\dot{\eta} = h,$$

где θ — абсолютная температура, а $\dot{\eta}$ — скорость изменения энтропии, объединяющее в одной формуле два основных закона термодинамики при изотермическом нагружении.

В итоге получается, что постановка задачи изотермического деформирования упругопластических тел в окончательном виде не содержит ни температуры, ни законов термодинамики. Остается невыясненным, как преобразуется «скрытая теплота пластического плавления» h. Подразумевается, что эта часть энергии рассеивается в окружающую среду. Последний процесс протекает столь быстро (или деформация настолько медленная), что основные параметры течения не меняются.

Аналогия между пластическим течением при постоянной температуре и плавлением была замечена Борном и Фюртом [Furth, 1940] — оба явления сопровождаются рассеянием внутренней (скрытой) энергии в окружающую среду. Формула (4), так же как уравнения Прандля–Рейсса, обеспечивает конкретный механизм рассеяния: вначале при постоянной температуре работа внешних сил преобразуется во внутреннюю энергию образца; последняя затем рассеивается во внешнее пространство с коэффициентом теплопроводности, равным бесконечности.

Пусть на упругопластическое тело, занимающее область D с границей $\partial D = \partial D_u + \partial D_p$, действует система объемных сил X_i, причем на поверхности ∂D_u равны нулю скорости, а на ∂D_p — поверхностные напряжения. Интервал времени t, в течение которого происходит деформирование, ограничен величиной T, $[0 \le t \le T]$. Предположим, что в любой момент времени найдется безопасное статически допустимое распределение напряжений σ^{0}_{ij}, когда при любых скоростях $\dot{u}_i$ имеет место равенство

$$\int_D \sigma^{0}_{ij}\varepsilon_{ij}dx - \int_D X_i\dot{u}_i dx = 0. \tag{10}$$

Задача об упругопластическом поведении среды состоит в нахождении таких тензора σ_{ij} и вектора скоростей u_i, чтобы для функции состояния $\dot{U}(\sigma_{ij,}\varepsilon^{p}_{ij})$ из (9) при любых σ_{ij} выполнялись соотношение (5) и уравнения (1), (7). Внутренний параметр λ определяется из равенств (2), (3), а вектор нагрузки X_i удовлетворяет равенству (10).

Если существует решение системы уравнений (1)–(10), то справедливы два минимальных принципа [Койтер, 1961]:

М1: абсолютный минимум выражения

$$\frac{1}{2}\int_D \dot{\sigma}^{*}_{ij}\dot{\varepsilon}^{*}_{ij}dx - \int_{\partial D_u} \dot{\sigma}^{*}_{ij}n_j\dot{u}_{i0}dS,$$

определенного для всех статически возможных распределений скоростей изменения напряжений (отмечены звездочкой), отвечает действительному распределению скоростей изменения напряжений $\dot{\sigma}_{ij}$;

М2: абсолютный минимум выражения

$$\frac{1}{2}\int_D \dot{\sigma}_{ij}^0 \dot{\varepsilon}_{ij}^* dx - \int_D \dot{X}_i u_i^* dx - \int_{\partial Dp} p_i u_i^* dS,$$

определенного для всех кинематически возможных распределений скоростей деформаций, отвечает действительному распределению скоростей деформаций ε_{ij} и соответствующих им скоростей u_i.

Койтер высказал обратное предположение о том, что, основываясь на вариационной постановке задачи в виде двух утверждений, М1 и М2, удастся доказать существование обобщенных (в смысле принципа Дирихле) решений системы (1)–(10). Этот план был реализован на основе теории двойственности выпуклых задач функционального анализа. Два принципа — М1 и М2 — равносильны нахождению седловой точки функции Лагранжа

$$L(\sigma_{ij}, u_i) = \frac{1}{2}\int_{D\times[0,t]} E_{ijkl}^{-1} \dot{\sigma}_{ij}\dot{\sigma}_{kl} dV + \int_{D\times[0,t]} (\dot{\sigma}_{ij}^0 \varepsilon_{ij} - \dot{\sigma}_{ij}\varepsilon_{ij}) dV, \quad dV = dx_1 dx_2 dx_3 dt, \tag{11}$$

на множестве произвольных скоростей u_i и девиаторов $s_{ij}^2 \le 2k^2$.

Главная трудность состоит в выборе функциональных пространств, в которых надо искать седловую точку, поскольку приходится искать минимакс функции в пространстве $L_1(D)$, элементами которого являются скорости деформаций $\varepsilon_{ij}(x)$. Для того чтобы обеспечить слабую сходимость минимаксных последовательностей, нерефлексивное пространство $L_1(D)$ нужно расширить. Последнюю операцию можно осуществить несколькими способами [Мосолов, Мясников, 1981]. В работе [Найштут, 1993] использовано пространство мер, в котором доказывается существование седловой точки функции Лагранжа (11).

Из этого факта вытекает выполнение равенства (6) и первого начала термодинамики в форме (5) (при постоянной температуре θ = const). Поскольку $\dot{\lambda} \ge 0$, то справедливо второе начало термодинамики в форме неравенства Клаузиуса–Дюгема:

$$\dot{q} \le \theta\dot{\eta}, \tag{12}$$

так как в отсутствие внешнего теплового потока ($\dot{q} = 0$) скорость изменения внутренней энергии может быть представлена в виде $\dot{U} = f + \theta\dot{\eta}$, где $\theta\dot{\eta}$ — скорость диссипации энергии.

Механический смысл существования седловой точки в сплошной среде состоит в следующем. До тех пор, пока нагрузка такова, что можно указать в любой точке тела допустимый тензор σ_{ij}^0, решение существует. Убедимся, что и при обратной деформации (если температура постоянна) можно воспользоваться принципом седловой точки для функционала типа (11).

Снизим нагрузку σ_{ij}^0 до значения $\varepsilon_0\sigma_{ij}^0$, где ε_0 — малое число. Пусть напряженному состоянию в точке x_i, испытывающей при нагрузке σ_{ij}^0 пластические деформации, отвечает в пространстве напряжений тензор A, а при нагрузке $\varepsilon_0\sigma_{ij}^0$ — тензор С (рис. 3).

Нагреем тело до температуры $\theta_{2\bar{\varepsilon}}$ (рис. 1, *c*). Рассмотрим девятимерное многообразие R, ограниченное поверхностями $\{S : s_{ij}^2 = 2k_2^2\}$ и $\{S_{\bar{\varepsilon}} : s_{ij}^2 = 2\bar{\varepsilon}^2 k_2^2\}$. Поверхность $S_{\bar{\varepsilon}}$ — это результат подобного преобразования поверхности S с малым числом $\bar{\varepsilon}$. Назовем тензор σ_{ij} допустимым, если выполнено включение $\sigma_{ij} \subset R$.

Тензор σ_{ij} будем считать безопасным, если имеет место включение $\sigma_{ij} \subset R_0$. Многообразие $R_0 \subset R$ ограничено поверхностями $\{S^0 : s_{ij}^2 = 2k_{02}^2\}$ и $\{S_{\bar{\varepsilon}}^0 : s_{ij}^2 = 2\bar{\varepsilon}_1 k_2^2\}$, а входящие в определения поверхностей постоянные удовлетворяют неравенствам $k_{02} < k_2$, $\bar{\varepsilon}_1 > \bar{\varepsilon}$. Если ввести

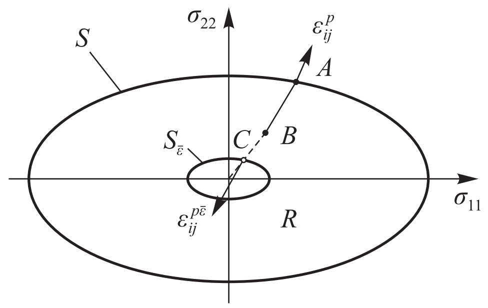

Рис. 3. Девятимерное пространство напряжений для сплошной среды с памятью формы характеризуется многообразием R, ограниченным двумя подобными поверхностями нагружения — S и $S_{\bar{\varepsilon}}$. В точке A возможно пластическое течение при активном нагружении, а в точке C — обратная деформация при нагревании. В точке B возможны только упругие деформации

предположение о том, что при температуре $\theta_{2\bar{\varepsilon}}$ под нагрузкой $\bar{\varepsilon}_0\sigma_{ij}^0$ в сплавах типа нитинола происходят пластические деформации, требующие дополнительных затрат тепла, а напряжения σ_{ij} являются допустимыми, то в согласии с законами упругопластического поведения можно сравнительно просто объяснить эффект памяти формы.

Действительно, продолжим подводить тепло интенсивностью $\dot{q}$. Если в этом процессе точка B окажется на поверхности $S_{\bar{\varepsilon}}$, то возможна пластическая деформация $\varepsilon_{ij}^{p\bar{\varepsilon}} = -\varepsilon_{ij}^{p}$ в силу подобия поверхностей S и $S_{\bar{\varepsilon}}$. Ясно, что приведенное рассуждение справедливо при отказе от постулата Друкера в первоначальной форме $((\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{*})\varepsilon_{ij}^{p} \geq 0,$ где σ_{ij} — действительное, σ_{ij}^{*} — любое возможное поле напряжений) и использовании его локального следствия $\dot{\sigma}_{ij}\varepsilon_{ij}^{p} = 0$ (либо в более общем случае негладкой поверхности нагружения условия об ортогональности термодинамических сил и потоков). Такой подход часто применяют в задачах термопластичности [Жермен, 1983; Ziegler, 1981].

В качестве внутренних параметров среды выбираем тензор напряжений σ_{ij} и мощность $\dot{\lambda}$, необходимую для обратного превращения. В соотношении (2) примем по аналогии с рис. 2 тензор $\lambda_{2ij} = \sigma_{ij}^{A}$, где σ_{ij}^{A} — тензор напряжений в точке A. Другими словами, обратное течение на поверхности S_{ε} требует такой же мощности, как течение на поверхности S. На поверхности $S_{\bar{\varepsilon}}$ будем иметь равенство (9) при замене h на

$$h_2 = k_2\sqrt{2}(\varepsilon_{ij}^{p}\varepsilon_{ij}^{p})^{1/2}, \tag{13}$$

причем в выражении (4) параметр $\dot{\lambda}$ заменяется на h_2, а в равенстве (8) число k становится равным $\varepsilon\, k_2$. Первое начало термодинамики преобразуется к виду

$$\dot{q} = \dot{U} - \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = E_{ijkl}^{-1}\sigma_{ij}\dot{\sigma}_{kl} - \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} + h_2. \tag{14}$$

Выражения (10) и (12) записываются в прежней форме.

Таким образом, имеем следующую аналогию: деформирование силами материала с памятью формы (когда $\dot{q} = 0$) и обратное тепловое восстановление (в отсутствие сил) в рамках механики сплошной среды заключается лишь в смене знака ε_{ii}^{p}. Феноменологически процесс деформирования в двух случаях протекает одинаково: удельная мощность пластической деформации $\dot{\lambda}$ зависит только от σ_{ij} и ε_{ii}^{p}, в формуле для внутренней энергии (9) или (13) изменяется лишь коэффициент k. Роль скрытой теплоты пластического плавления h при обратной тепловой деформации выполняет скрытая теплота обратного превращения h_2, а в первом начале термодинамики (при обратной деформации в отсутствие сил) скорость работы внешних сил $\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$ заменяется скоростью подвода тепла $\dot{q}$.

Поэтому на этапе теплового деформирования (при постоянной температуре) надо найти тензор скоростей изменения напряжений $\dot{\sigma}_{ij}$ и вектор скоростей $\dot{u}_i$ такие, чтобы на допустимом множестве девиаторов s_{ij} выполнялось равенство (14) и существовала седловая точка функции Лагранжа (11), в которой величина σ_{ij}^0 заменена на $\overline{\varepsilon}_0\sigma_{ij}^0$. Обобщение построений для задач, когда в процессе деформирования изменяются температура и внешняя нагрузка, приведено в следующем разделе. Существенно используется тот факт, что выражения для скорости изменения внутренней энергии можно принять в форме, близкой к (9) (с коэффициентом $k(\theta)$, зависящим от температуры) [Bertram, 1982]. Естественно, требуется корректировка уравнений первого и второго начал термодинамики (10), (12).

3. Обоснование вариационного принципа при изменяющихся температуре и нагрузке

Пусть среда занимает трехмерную область D с границей $\partial D = \partial D_u + \partial D_p$. На части границы ∂D_u задан вектор скоростей u_i, а на ∂D_p известен тензор скоростей напряжений $\dot{\sigma}_{ij}$. Будем изучать задачу на интервале времени $[0T]:[0 \le t \le T]$. Определим четырехмерную область $M = D \times [0T]$ с границей

$$\partial M = \partial M_u + \partial M_p, \quad \partial M_u = \partial D_u \times [0T], \quad \partial M_p = \partial D_p \times [0T].$$

Введем гильбертово пространство функций H как пополнение дифференцируемых в любой момент времени t тензоров $\dot{\sigma}_{ij}$ по норме, определяемой скалярным произведением

$$f_1(t)_H = (\dot{\sigma}_{ij}^1, \dot{\sigma}_{ij}^2)_H = \int_D \dot{\sigma}_{ij}^1 \dot{\sigma}_{ij}^2 dx, \quad dx = dx_1 dx_2 dx_3,$$

$$(f_1, f_2)_{L^2(0T,H)} = \int_0^T (f_1(t), f_2(t))_H \, dt. \tag{15}$$

Если H — рефлексивное пространство, то $L^p(0T, H)$ при $1 < p < \infty$ также рефлексивно, сопряженное пространство отождествляется с $L^{p'}(0T, H')$, где $1/p + 1/p' = 1$.

Пространство скоростей точек среды определим, следуя [Панагиотопулос, 1989; Temam, Strang, 1980]:

$$B\mathrm{E}(D) = \left\{ f \middle| f = \{f_i\},\, f_i \in L^1(D),\ \varepsilon_{ij}(f) = \frac{1}{2}(\partial f_i / \partial x_j + \partial f_j / \partial x_i) \in \mathrm{M}^1(D),\ i, j = 1,2,3 \right\}.$$

Здесь $\mathrm{M}^1(D)$ — пространство ограниченных мер на D.

Пространство $B\mathrm{E}(D)$ с нормой

$$\|f\|_{B\mathrm{E}(D)} = \sum_{i=1}^{3} |f_i|_1 + \sum_{i,j=1}^{3} \|\varepsilon_{ij}(f)\|_{\mathrm{M}^1(D)} \tag{16}$$

не является рефлексивным. В силу теорем вложения для пространств Соболева справедливо включение $W^{1,1}(D) \subset B\mathrm{E}(D) \subset [L^{n/(n+1)}(D)]^n$, где n — размерность пространства (в рассматриваемой задаче $n = 3$). Известно, что вложение $B\mathrm{E}(D) \subset [L^p(D)]^n$ компактно при $1 \le p \le n/(n-1)$, а при $p = n/(n-1)$ — непрерывно. Это свойство существенно для дальнейших построений наряду с тем, что если пространство H нерефлексивно, то сопряженным к нему служит $L_w^{p'}(0T, H')$, которое состоит из слабо измеримых функций f (т. е. таких, что $\|f\|_{L^{p'}(0T,H')} < \infty$).

Функции из $B\mathrm{E}(D)$ имеют след на кусочно-гладкой поверхности ∂D_u, принадлежащей пространству интегрируемых функций $L^1(\partial D_u)$. Это позволяет записать следующее условие неподвижности границы ∂M_u:

$$\|u_i\|_{L^1(\partial D_u)} = 0. \tag{17}$$

Отсутствие напряжений на ∂M_p запишем в виде

$$\|\sigma_{ij}(\partial M_p)\|_{L^2(\partial D_p)} = 0. \tag{18}$$

Равенства (17) и (18) должны выполняться для всех t из интервала [0, T].

Дальнейшие построения основаны на допущении, что для сплавов с памятью формы связь между скоростями изменения напряжений и скоростями деформаций подчиняется законам термопластичности идеальных упругопластических материалов с двумя поверхностями нагружения, показанными на рис. 3. При этом величины $\bar{\varepsilon}$, $\bar{\varepsilon}_1$, k_2, k_{02} являются функциями температуры θ. Вместо формулы (6) получается уравнение [Bertram, Krawietz, 2012]

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p + c_1\delta_{ij}\dot{\theta} = E_{ijkl}^{-1}\dot{\sigma}_{kl} + \varepsilon_{ij}^p + c_1\delta_{ij}\dot{\theta} \tag{19}$$

с коэффициентом теплового расширения c_1, δ_{ij} — символ Кронекера.

Мощность внутренней энергии такова:

$$\dot{U} = E_{ijkl}^{-1}\sigma_{ij}\dot{\sigma}_{kl} + k\sqrt{2}(\varepsilon_{ij}^p\varepsilon_{ij}^p)^{1/2} + \sigma_{ij}c_1\delta_{ij}\dot{\theta} + c_2\rho\dot{\theta},$$

где c_2 — удельная теплоемкость при нулевых деформациях, а ρ — плотность материала. Для связанной энергии получим выражение

$$U_s = \rho\eta\theta = \int_0^t k\sqrt{2}\varepsilon_{ij}^p\varepsilon_{ij}^{p1/2}d\tau + c_1E_{ijkl}\varepsilon_{kl}\delta_{ij}\theta + c_2\rho(\theta-\theta_0),$$

буквой η обозначена удельная энтропия тела-точки.

Пусть к сплошной среде приложена нагрузка X_i, которая может быть уравновешена в любой момент времени t безопасным тензором напряжений σ_{ij}^0:

$$2\bar{\varepsilon}_1 k_2^2 < s_{ij}^0 s_{ij}^0 < 2k_{02}^2, \quad s_{ij}^0 = \sigma_{ij}^0 - \sigma_{kk}^0\delta_{ij}/3, \quad k_{02} < k_2, \quad \bar{\varepsilon}_1 > \bar{\varepsilon},$$
$$\int_D \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dx = \int_D \sigma_{ij}^0\varepsilon_{ij}dx = -\int_D X_i u_i dx. \tag{20}$$

Первый закон термодинамики (уравнение притока тепла) для произвольного тела-точки имеет вид $\dot{U} = W + Q$, где W — мощность внешних сил, а Q — скорость подвода тепла. Принимая для изучаемых задач закон теплопроводности Фурье [Мейз, 1974] и учтя (20), найдем

$$Q = q(x,t) + c_3\nabla^2\theta, \quad W = \int_D X_i u_i dx.$$

В формуле для Q символ ∇^2 означает оператор Лапласа, $q(x, t)$ — скорость подвода тепла в единице объема, а c_3 — коэффициент теплопроводности. С учетом сказанного первый закон термодинамики записывается в обобщенном виде:

$$\int_0^t d\tau \int_D dx(E_{ijkl}^{-1}\sigma_{ij}\dot{\sigma}_{kl} + k\sqrt{2}(\varepsilon_{ij}^p\varepsilon_{ij}^p)^{1/2} + \sigma_{ij}c_1\delta_{ij}\dot{\theta} + c_2\rho\dot{\theta} - q(\tau) - c_3\nabla^2\theta + X_i u_i) = 0. \quad (21)$$

Закон сохранения (21) показывает, что если происходит текучесть материала на поверхности активного нагружения S, то деформирование может сопровождаться повышением температуры. При деформациях на поверхности S_ε нагревание образца может порождать работу внешних сил. Последнее свойство часто используется в двигателях, привод которых конструируется из материалов с памятью формы.

Второй закон термодинамики примем в форме Клазиуса–Дюгема: $\rho\dot{\eta}\theta \ge q(x,t)$ [Трусделл, 1975]. Вводя обозначение $A = \int_0^t d\tau \int_D (\rho\theta\dot{\eta} - q)dx$ и исключив из написанного неравенства энтропию, пользуясь выражением связанной энергии, получим такое соотношение:

$$A = \int_0^t d\tau \int_D dx(k\sqrt{2}(\varepsilon_{ij}^p\varepsilon_{ij}^p)^{1/2} - \theta^{-1}\int_0^\tau k\sqrt{2}(\varepsilon_{ij}^p\varepsilon_{ij}^p)^{1/2}d\xi - c_1 E_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl}\delta_{ij}\theta / \rho - c_2\frac{\theta_0}{\theta^2} - q(x,\tau)) \ge 0. \quad (22)$$

Пусть в начальный момент $t = 0$ известно поле температур в деформируемом теле:

$$\theta(t = 0, x) = \Theta(x). \quad (23)$$

Определим функцию Лагранжа:

$$L(\sigma_{ij}, u_i) = \frac{1}{2}\int_{D\times[0,t]} \dot{\sigma}_{ij}(E_{ijkl}^{-1}\dot{\sigma}_{kl} + c_1\delta_{ij}\dot{\theta})dV + \int_{D\times[0,t]} (\dot{\sigma}_{ij}^0\,\varepsilon_{ij} - \dot{\sigma}_{ij}\varepsilon_{ij})dV, \quad dV = dx_1dx_2dx_3dt, \quad (24)$$

и докажем, что на множестве скоростей напряжений из $L^2(0T, H)$, напряжений из $L^\infty(0T, H)$ и скоростей точек среды $L_w^{2/}(0T, B\mathrm{E}(D))$ при ограничениях (17)–(23) существуют σ_{ij}, u_i, которые соответствуют седловой точке функции Лагранжа $L(\sigma_{ij}, u_i)$.

Доказательство состоит в проверке выполнения условий следующей теоремы [Экланд, Темам, 1979]: если для множеств с ограничениями (15)–(23) существует такой элемент $u_{0i} \in L_w^{2/}(0T, B\mathrm{E}(D))$, что

$$\lim L(\sigma_{ij}, u_{0i}) = \infty, \quad \sigma_{ij} \in L^\infty(0T, H) \text{ при } \left\|\dot{\sigma}_{ij}\right\|_H \to \infty, \quad (25)$$

и выполняется соотношение

$$\liminf L(\sigma_{ij}, u_i) = -\infty \text{ при } u_i \in L_w^{2/}(0T, B\mathrm{E}(D)) \text{ и } \left\|u_i\right\|_{L_w^2(0T, B\mathrm{E}(D))} \to \infty, \quad (26)$$

то функционал $L(\sigma_{ij}, u_i)$ имеет на $L^2(0T, H) \times L_w^2(B\mathrm{E}(D))$ седловую точку

$$L(\sigma_{ij}, u_i) = \min_{\sigma'_{ij} \in L^2(0T,H)} \sup_{u'_i \in L_w^2(0T, B\mathrm{E}(D))} L(\sigma'_{ij}, u'_i) = \max_{u'_i \in L_w^2(0T, B\mathrm{E}(D))} \inf_{\sigma'_{ij} \in L^2(0T,H)} L(\sigma'_{ij}, u'_i) = m_0 \quad (27)$$

и среди σ'_{ij}, u'_i можно выбрать подпоследовательность такую, что $\sigma'_{ij} \to \sigma_{ij}$ слабо* в $L^2(0T, H)$, а $u'_i \to u_i$ слабо* в $L_w^{2/}(0T, B\mathrm{E}(D))$.

Условие (25) выполняется в силу положительной определенности формы $E^{-1}_{ijkl}\dot{\sigma}_{ij}\dot{\sigma}_{kl}$, а для проверки соотношения (26) возьмем тензоры $\sigma_{ij} = \sigma^0_{ij} + \alpha\, p_{ij}$ так, чтобы $p_{ij} = 1$ или $p_{ij} = -1$ в зависимости от того, производится интегрирование по подобласти M^+ или M^-. Подобласти M^+ или M^- выбираются так, чтобы знак σ^0_{ij} в них был соответственно положительным и отрицательным. При достаточно малом $\alpha > 0$ вследствие соотношений (20) справедливо включение $\sigma_{ij} \in R$. В силу равенства (24) имеем

$$\inf_{\sigma_{ij}\in R} L(\sigma'_{ij}, u_i) \le -c\|u_i\|_{BD(M)} + c_1. \tag{28}$$

Здесь c, c_1 — некоторые постоянные. Неравенство (28) влечет выполнение соотношения (26), и смешанный вариационный принцип обоснован.

Уравнение (21) можно разрешить, используя спектральное разложение оператора B [Иосида, 1967]:

$$B = (c_1\delta_{ij}\sigma_{ij} + c_2\rho)^{-1}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial x_3^2}\right),$$

и получить

$$\theta(t,x) = \exp((tB)\Theta(x) + \int_0^t \exp((t-s)B)\cdot(\dot{q}(s) - k\sqrt{2}(\varepsilon^p_{ij}\varepsilon^p_{ij})^{1/2} - E^{-1}_{ijkl}\sigma_{ij}\dot{\sigma}_{kl} + X_i u_i)ds,$$
$$\exp((t-x)B) = \sum_{k=0}^{\infty}((t-x)B)^k / k!, \quad B^k = \int_0^{\infty}\nu^k dE_\nu. \tag{29}$$

В качестве следствия из вариационного принципа отметим, что если σ_{ij} и u_i — дифференцируемые по координатам и времени функции, то в равенстве (24) можно заменить область M на D и убедиться в справедливости закона Прандтля–Рейсса. В самом деле, вариацию $L(\sigma_{ij}, u_i)$ представим в форме

$$\int_D (E^{-1}_{ijkl}\dot{\sigma}_{kl} + c_0\dot{\theta}\delta_{ij} - \varepsilon_{ij}(u_i))(\sigma_{ij} - \sigma'_{ij})dx \ge 0. \tag{30}$$

Вследствие произвольности $(\sigma_{ij} - \sigma'_{ij})$ везде, кроме точек поверхности обратной деформации

$$\Phi = s^2_{ij} - 2k_2^2\varepsilon^2 = 0, \tag{31}$$

можно записать равенство

$$\varepsilon_{ij} = E^{-1}_{ijkl}\dot{\sigma}_{kl} + c_0\dot{\theta}\delta_{ij} + \lambda\partial\Phi / \partial s_{ij}, \tag{32}$$

представляющее собой закон Прандтля–Рейсса при переменной температуре. Соотношение (32) можно интерпретировать как вариационное неравенство $\varepsilon^p_{ij} \in \partial\Phi_R$, в котором субдифференциал $\partial\Phi_R$ связывается с границей множества R на рис. 3. Попутно отметим, что для гладких функций, отвечающих течению на поверхности (31), соотношение (21) принимает вид

$$\int_D \dot{q}dx = \int_D ((1-\varepsilon)k_2\sqrt{2}(\varepsilon^p_{ij}\varepsilon^p_{ij})^{1/2})dx.$$

Интеграл в правой части написанной формулы неотрицателен, поэтому приток тепла имеет направленный характер, и второе начало термодинамики становится следствием первого.

Равенство (30) указывает также на возможность замены в условии текучести (1) поверхности (31) любой другой гладкой поверхностью $\Phi(s_{ij})=0.$ В формулах (8) нужно заменить s_{ij} на $\partial\Phi/\partial s_{ij}$, а вместо выражения $(\varepsilon_{ij}^{p}\varepsilon_{ij}^{p})^{1/2}$ подставить диссипативный потенциал, являющийся преобразованием Лежандра функции Φ.

Рассмотрим последовательность $\sigma_{ij}^{\bar\varepsilon}$, $u_i^{\bar\varepsilon}$, когда $\bar\varepsilon\to 0$ в условии (20). Так как величина $\max\left\|\sigma_{ij}^{\bar\varepsilon}\right\|$ ограничена, то при любом $\bar\varepsilon$ ограничен интеграл

$$U_p=\int\limits_D(\varepsilon_{ij}^{p}\varepsilon_{ij}^{p})^{1/2}\,dx.$$

Следовательно, при $\bar\varepsilon\to 0$ из последовательности $u_i^{\bar\varepsilon}$ можно выбрать подпоследовательность, которая слабо* стремится к некоторому пределу в $L_w^{2/}(0T,B\mathrm{E}(D)),$ его можно принять за решение задачи об обратном течении сплавов с памятью формы при температуре $\theta_{2\bar\varepsilon}$.

Разумеется, в предельном состоянии не справедлив вариационный принцип, так как в наиболее важном частном случае $\sigma_{ij}\to 0$ пропадают два первых члена подынтегрального выражения в правой части соотношения (20). Первый закон термодинамики превращается в очевидное равенство, которое описывает одномерное течение, поскольку запоминается лишь второй инвариант тензора ε_{ij}^{p}. Отметим также, что для преобразования условия экстремальности функции Лагранжа к форме (30) требуется доказательство регулярности тензора σ_{ij} и вектора u_i. Эта задача исследовалась многими авторами, но еще далека от решения [Уральцева, 1987; Capogna, Garofalo, 2003].

4. Выводы

Основной результат работы состоит в том, что смешанный вариационный принцип типа Рейсснера может быть применен к телам, изготовленным из материалов с памятью формы, если скорость изменения нагрузок и температуры достаточно произвольна. При этом феноменологически процесс может быть описан в рамках классической теории пластичности без привлечения соображений микрофизики, основанных на аустенитно-мартенситных превращениях сплавов. В ходе доказательства выясняется, что если задача деформирования сплошной среды с памятью формы может быть сформулирована в виде оптимального принципа, то такая постановка равносильна математической задаче с вариационными неравенствами [Мосолов, Мясников, 1981]. Поэтому поиск новых оптимальных принципов в механических задачах может быть полезным для понимания феноменологических связей между различными явлениями деформирования сплошных сред. Дальнейший прогресс теории поведения материалов с памятью формы требует решения ряда математических вопросов по совершенствованию вычислительных процедур и выяснению регулярности решений задач, вытекающих из смешанного вариационного принципа.

Список литературы (References)

Жермен П. Курс механики сплошных сред. — М.: Высшая школа, 1983.

Germain P. Cours de Mecanique des milieux continus. — Paris: Masson et Cie, 1973. (Russ. ed.: *Germen P.* Kurs mehaniki sploshnyh sred. — Moscow: Vysshaya shkola, 1983.)

Иосида К. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967.
Josida K. Functional Analysis. — Berlin etc.: Springer, 1965. (Russ. ed.: *Iosida K.* Funkcionalnyi analiz. — Moscow: Mir, 1967.)

Качанов Л. М. Основы теории пластичности. — М.: Наука, 1969.
Kachanov L. M. Osnovi teorii plastichnosti [Foundations of the theory of plasticity]. — Moscow: Nauka, 1969 (in Russian).

Койтер В. Т. Общие теоремы теории упругопластических сред. — М.: Изд-во иност. лит., 1961.
Koiter W. T. General Theorems for Elastic Plastic Solids // Progress in Solid Mechanics. V1. Amsterdam: North-Hollands, 1960. (Russ. ed.: *Koiter W. T.* Obschie teoremi teorii uprugopasticheskih sred. — Moscow: Izd-vo inost. lit., 1961.)

Лихачев В. А. Эффект памяти формы // Соросовский образовательный журнал. — 1997. — № 3. — С. 107–114.
Lihachev V. A. Effekt pamiati formi [Shape memory efect] // Sorosovskii obrazovateltyi gurnal. — 1997. — No. 3. — P. 107–114 (in Russian).

Мейз Д. Дж. Теория и задачи механики сплошных сред. — М.: Мир, 1974.
Mase G. E. Theory and Problems of Continuum Mechanics. — New York: MCGRAW-HILL, 1970. (Russ. ed.: *Mase G. E.* Teoriya i zadachi mehaniki sploshnyh sred. — Moscow: Mir, 1967.)

Мосолов П. П., Мясников В. П. Механика жесткопластических сред. — М.: Наука, 1981.
Mosolov P. P., Miasnikov V. P. Mehanika zhestkoplasticheskih shed [Mechanics of rigid plastic solids]. — Moscow: Nauka, 1981 (in Russian).

Найштут Ю. С. Обобщенные решения в теории течения идеальных упругопластических тел // Изв. РАН. МТТ. — 1993. — № 6. — С. 74–78.
Nayshtut Yu. S. Obobschenye reshenia v teorii techenia idealnyh uprugoplasticheskih tel [Generalised solutions in flow theory of ideal elastoplastic solids] // Izv. RAS. Mehanika tverdogo tela [Mechanics of solids]. — 1993. — No. 6. — P. 74–78 (in Russian).

Панагиотопулос П. Неравенства в механике и их приложения. — М.: Мир, 1989.
Panagiotopoulos P. Inequality Problems in Mechanics and Applications. — Boston etc.: Birkhauser, 1985. (Russ. ed.: *Panagiotopoulos P.* Neravenstva v mehanike i ih prilogeniya. — Moscow: Mir, 1989.)

Трусделл К. Первоначальный курс механики сплошных сред. — М.: Мир, 1975.
Truesdell C. A first course in rational continuum mechanics. — Johns Hopkins Univ. Baltimore, Maryland, 1972. (Russ. ed.: *Truesdell C.* Pervonachalnyi kurs mehaniki sploshnyh sred. — Moscow: Mir, 1975.)

Уральцева Н. Н. О регулярности решений вариационных неравенств // Успехи мат. наук. — 1987. — Т. 42, вып. 6 (258). — С. 151–174.
Uraltseva N. N. O reguliarnisti reshenii variazionnyh neravenstv [Regularity of solutions in the variational inequalities] // Uspehi math. nauk [Russian Mathematical Surveys]. — 1987. — Vol. 42, No. 6 (258). — P. 151–174 (in Russian).

Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. — М.: Мир, 1979.
Ekland I., Temam R. Convex Analysis and Variational Problems. — Amsterdam etc.: North-Holland, 1976. (Russ. ed.: *Ekland I., Temam R.* Vypuklyi analiz i variazionnye problemi. — Moscow: Mir, 1979.)

Bertram A. Thermo-mechanical constitutive equations for the description of shape memory effects in alloys // Nuclear engineering and design. —1982. — Vol. 74. — P. 174–182.

Bertram A., Krawietz A. On the introduction of thermoplasticity // Acta Mechanica. —2012. — Vol. 223. — P. 2257–2268.

Bonetti E., Colli P., Fabrizio V., Gilardi G. Existence of Solutions for a Mathematical Model Related to Solid–Solid Phase Transitions in Shape Memory Alloys // Archive for Rational Mechanics and Analysis. — 2016. — Vol. 219 (1). — P. 203–254.

Capogna L., Garofalo N. Regularity of minimizers of the calculus of variations // J. Eur. Math. Soc. — 2003. — Vol. 5. — P. 1–40.

Cisse Ch., Zaki W., Zineb T. A review of constitutive models and modeling techniques for shape memory alloys // Int. J. Plasticity. — 2016. — Vol. 76. — P. 244–284.

Frémond M. Phase change in mechanics. Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana. — Springer, Berlin, 2012. — xiii + 303 p.

Furth R. Relation between breaking and melting // Nature. — 1940. — No. 3680. — P. 741–761.

Grachev V., Neustadt Yu. Variational principle for shape memory alloys // https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1807/1807.03153.pdf —2018. — 13 p.

Lagoudas D. C. (ed.) Shape Memory Alloys. Modeling and Engineering Applications. — New York: Springer, Science + Business Media, 2008.

Prager W. Non-isothermal plastic deformation // Proc. Konikl. Nederl. Acad. Wet. — 1958. — Bd61. — No. 3. — P. 176–182.

Reissner E. A note on variational principles in elasticity // International Journal of Solids and Structures. —1965. — Vol. 1 (1). — P. 93–95.

Reissner E. On mixed variational formulations in finite elasticity // Acta Mechanica. — 1985. — Vol. 56. — P. 117–125.

Temam R., Strang G. Functions of bounded Deformation // Arch. Rath. Mech. Anal. — 1980. — Vol. 75. — P. 7–21.

Ziegler H. Discussion on some Objections to Thermomechanical Orthogonality // Ing. Archiv. — 1981. — Vol. 50. — P. 149–164.