

УДК: 534.222.2, 519.63

Численное исследование взаимодействия ударной волны с подвижными вращающимися телами сложной формы

А. В. Сосин¹, Д. А. Сидоренко², П. С. Уткин^{2,а}

¹Московский физико-технический институт (НИУ),
Россия, 141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9

²Институт автоматизации проектирования Российской академии наук (ИАП РАН),
Россия, 123056, г. Москва, ул. 2-я Брестская, д. 19/18

E-mail: ^аpavel_utk@mail.ru

Получено 17.02.2021, после доработки — 17.03.2021.

Принято к публикации 25.03.2021.

Статья посвящена разработке вычислительного алгоритма метода декартовых сеток для исследования взаимодействия ударной волны с подвижными телами с кусочно-линейной границей. Интерес к подобным задачам связан с прямым численным моделированием течений двухфазных сред. Эффект формы частицы может иметь значение в задаче о диспергировании пылевого слоя за проходящей ударной волной. Экспериментальные данные по коэффициенту аэродинамического сопротивления несферических частиц практически отсутствуют.

Математическая модель основана на двумерных уравнениях Эйлера, которые решаются в области с подвижными границами. Определяющая система уравнений численно интегрируется по явной схеме с использованием метода декартовых сеток. Вычислительный алгоритм на шаге интегрирования по времени включает: определение величины шага, расчет динамики движения тела (определение силы и момента, действующих на тело; определение линейной и угловой скоростей тела; расчет новых координат тела), расчет параметров газа. На каждом шаге интегрирования по времени все ячейки делятся на два класса — внешние (внутри тела или пересекаются его границами) и внутренние (целиком заполнены газом). Решение уравнений Эйлера строится только во внутренних. Основная сложность заключается в расчете численного потока через ребра, общие для внутренних и внешних ячеек, пересекаемых подвижными границами тел. Для расчета этого потока используются двухволновое приближение при решении задачи Римана и схема Стигера–Уорминга. Представлено подробное описание вычислительного алгоритма.

Работоспособность алгоритма продемонстрирована на задаче о подъеме цилиндра с основанием в форме круга, эллипса и прямоугольника за проходящей ударной волной. Тест с круговым цилиндром рассмотрен во множестве статей, посвященных методам погруженной границы. Проведен качественный и количественный анализ траектории движения центра масс цилиндра на основании сравнения с результатами расчетов, представленными в восьми других работах. Для цилиндра с основанием в форме эллипса и прямоугольника получено удовлетворительное согласие по динамике его движения и вращения в сравнении с имеющимися многочисленными литературными источниками. Для прямоугольника исследована сеточная сходимость результатов. Показано, что относительная погрешность выполнения закона сохранения суммарной массы газа в расчетной области убывает линейно при измельчении расчетной сетки.

Ключевые слова: ударная волна, метод декартовых сеток, уравнения Эйлера, подъем частицы, вращение частицы

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 20-71-00084).

UDC: 534.222.2, 519.63

Numerical study of the interaction of a shock wave with moving rotating bodies with a complex shape

A. V. Sosin¹, D. A. Sidorenko², P. S. Utkin^{2,a}

¹ Moscow Institute of Physics and Technology,
9 Institutskiy per., Dolgoprudny, Moscow Region, 141701, Russia

² Institute for Computer Aided Design of the Russian Academy of Sciences,
19/18 2nd Brestskaya st., Moscow, 123056, Russia

E-mail: ^a pavel_utk@mail.ru

Received 17.02.2021, after completion — 17.03.2021.

Accepted for publication 25.03.2021.

The work is devoted to the development of a computational algorithm of the Cartesian grid method for studying the interaction of a shock wave with moving bodies with a piecewise linear boundary. The interest in such problems is connected with direct numerical simulation of two-phase media flows. The effect of the particle shape can be important in the problem of dust layer dispersion behind a passing shock wave. Experimental data on the coefficient of aerodynamic drag of non-spherical particles are practically absent.

Mathematical model is based on the two-dimensional Euler equations, which are solved in a region with varying boundaries. The defining system of equations is integrated using an explicit scheme and the Cartesian grid method. The computational algorithm at the time integration step includes: determining the step value, calculating the dynamics of the body movement (determining the force and moment acting on the body; determining the linear and angular velocities of the body; calculating the new coordinates of the body), calculating the gas parameters. At each time step, all cells are divided into two classes – external (inside the body or intersected by its boundaries) and internal (completely filled with gas). The solution of the Euler equations is constructed only in the internal ones. The main difficulty is the calculation of the numerical flux through the edges common to the internal and external cells intersected by the moving boundaries of the bodies. To calculate this flux, we use a two-wave approximation for solving the Riemann problem and the Steger-Warming scheme. A detailed description of the numerical algorithm is presented.

The efficiency of the algorithm is demonstrated on the problem of lifting a cylinder with a base in the form of a circle, ellipse and rectangle behind a passing shock wave. A circular cylinder test was considered in many papers devoted to the immersed boundary methods development. A qualitative and quantitative analysis of the trajectory of the cylinder center mass is carried out on the basis of comparison with the results of simulations presented in eight other works. For a cylinder with a base in the form of an ellipse and a rectangle, a satisfactory agreement was obtained on the dynamics of its movement and rotation in comparison with the available few literary sources. Grid convergence of the results is investigated for the rectangle. It is shown that the relative error of mass conservation law fulfillment decreases with a linear rate.

Keywords: shock wave, Cartesian grid method, Euler equations, particle lifting, particle rotation

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2021, vol. 13, no. 3, pp. 513–540 (Russian).

The work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 20-71-00084).

1. Введение

Прямое численное моделирование движения совокупности тел в несущей среде сегодня является активно развивающимся направлением вычислительной механики двухфазных сред. Подобный подход в состоянии дать принципиально новые знания о механизмах коллективного взаимодействия частиц и о влиянии этих коллективных эффектов на динамику несущей фазы, получить которые иными способами практически невозможно. При этом прямое моделирование является вычислительно затратным. На сегодняшний день есть примеры прямого трехмерного моделирования динамики движения нескольких десятков тысяч тел в турбулентном потоке вязкой несжимаемой среды с использованием нескольких тысяч процессоров [Schneiders et al., 2017]. Большинство подобных исследований, как и приведенный выше пример [Schneiders et al., 2017], касаются медленных течений несжимаемой жидкости [Patankar et al., 2001; Jiang, Liu, 2019]. Как правило, при решении определяющей системы уравнений используются различные разновидности метода погруженной границы, не требующего построения и перестроения криволинейных расчетных сеток (см., например, обзоры в [Mittal, Iaccarino, 2005; Bennett et al., 2018], а также работы [Меньшов, Корнев, 2014; Афендииков, Никитин, 2020; Брагин, Рогов, 2020] для случая течений сжимаемых сред).

Важной особенностью прямого численного моделирования является возможность описания нестационарных аэродинамических эффектов. В [Saito et al., 2007] было исследовано влияние нестационарного коэффициента сопротивления частиц на характер распространения ударной волны (УВ) в запыленном газе. Особое внимание уделялось узкой области за фронтом УВ, в которой наблюдалась неравновесное течение двухфазной среды. Данные результаты сравнивались с расчетами с использованием стационарного коэффициента сопротивления частиц. Получены оценки пространственного масштаба, на котором нестационарный коэффициент сопротивления частиц за фронтом УВ на порядок больше, чем стационарное значение, на которое в конечном итоге выходят обе модели.

Прямое численное моделирование позволяет также проводить исследования влияния формы частиц на динамику их движения в потоке. Экспериментальные данные по коэффициенту аэродинамического сопротивления несферических частиц практически отсутствуют. Данный факт в том числе приводит к тому, что в математических моделях механики гетерогенных двухфазных сред частицы, как правило, считаются сферическими и с гладкой поверхностью. Даже если номинально форма частиц считается более сложной, замыкающие соотношения в моделях межфазного силового и теплового обмена основываются на формулах для сферической частицы, в том или ином смысле «эквивалентной» частице сложной формы. Вопрос о том, насколько это близко к истине (или насколько несферичность влияет на физические параметры межфазных обменных процессов), исследован очень мало. С точки зрения численного моделирования обращают на себя работы последнего времени [Лукашенко, Максимов, 2019a; Лукашенко, Максимов, 2019b]. Применительно к изучению механизмов движения фрагментов метеоритов в атмосфере рассмотрена динамика движения системы тел прямоугольной формы с учетом их торможения, относительного перемещения и вращения в сверхзвуковом потоке газа. В части натурных экспериментов редкие результаты по динамике движения тел несферической формы в сверхзвуковом потоке получены в [Бойко, Поплавский, 2005]. Получены данные по сопротивлению несферических тел и сферы на ранней стадии скоростной релаксации в потоке за ударной волной. Установлено, что сопротивления несферического тела и сферы в этих условиях близки и в 2–3 раза превышают таковое для сферы при стационарном обтекании. Многочисленные наблюдения показали, что устойчивое положение куба в потоке соответствует его максимальному миделевому сечению. При этом в [Лукашенко, Максимов, 2019b] делается иной вывод. Получено, что положение прямоугольного тела с диагональю поперек потока — неустойчивое. Устойчивым является положение тела большей стороной поперек потока. Другими словами, действительно устойчивым является положение с большим миделем, но не вообще, а среди двух устойчивых положений равновесия — малой или большой стороной по-

перек потока. Отличия в результатах, конечно, могут быть обусловлены тем, что в [Бойко, Поплавский, 2005] они основывались на трехмерных натуральных экспериментах в нестационарной постановке, а в [Лукашенко, Максимов, 2019b] — на двумерных расчетах фактически последовательности стационарных аэродинамических обтеканий при больших числах Маха. Тем не менее подобные различия в базовых представлениях о динамике движения тел сложной формы в сверхзвуковых потоках лишний раз показывают актуальность дальнейших исследований в этой области.

Данная работа является продолжением и расширением нашей предыдущей работы [Сидоренко, Уткин, 2018] на случай учета тел сложной формы, которые также могут вращаться. Цель работы — развитие методики работы [Сидоренко, Уткин, 2018] для случая тел, границы которых заданы замкнутыми ломаными, а также реализация и тестирование данной методики на задаче о подъеме и динамике движения одиночного цилиндра с основанием в форме эллипса [Ben-Artzi, Falcovitz, 2003] или прямоугольника [Du, Li, 2020].

2. Общая постановка задачи и математическая модель

Рассмотрим задачу о двумерном плоскопараллельном движении недеформируемого тела из материала с плотностью ρ_b в форме прямой призмы высотой H с основанием в виде произвольного N -угольника в невязком нетеплопроводном сжимаемом газе (см. рис. 1). Для этого считаем, что призма зажата своими основаниями между параллельными прозрачными пластинами, расстояние между которыми — H . По боковым пластинам основания призмы могут скользить без трения, пространство между пластинами заполнено газом. Введем в рассмотрение декартову систему координат $Oxyz$ (см. рис. 1). В плоскости Oxy вершины N -угольника в основании призмы имеют координаты $(x_i, y_i, 0)$, $i = 0, \dots, N-1$ (см. рис. 2). Граница N -угольника на рис. 2 отмечена жирной линией. Обозначим ее как $\Gamma = \{(x_\Gamma, y_\Gamma)\}$. Динамика движения тела описывается скоростью $\mathbf{V}(t) = (V_x, V_y, 0)$ его центра масс с координатами $\mathbf{r}_c(t) = (x_c, y_c, H/2)$ и угловой скоростью относительно центра масс $\boldsymbol{\omega}(t) = (0, 0, \omega_z)$. Течение газа считаем двумерным, то есть поля течения идентичны во всех плоскостях, параллельных плоскости Oxy .

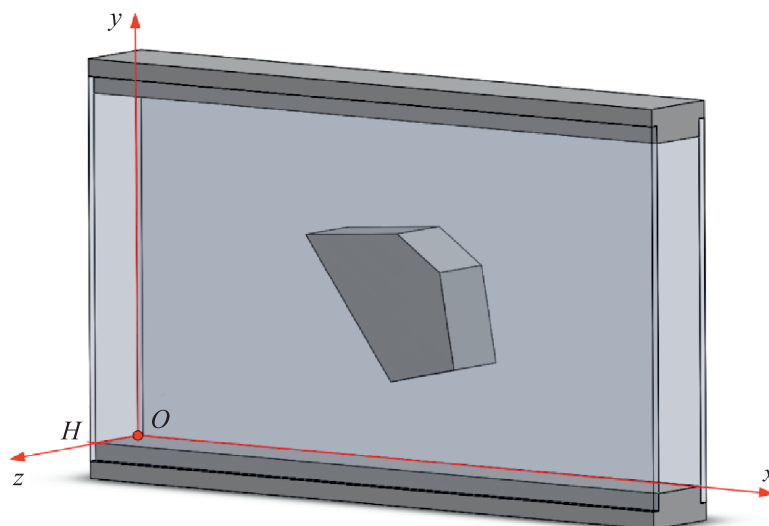


Рис. 1. Схематичная постановка задачи о взаимодействии ударной волны с телом в форме прямой призмы

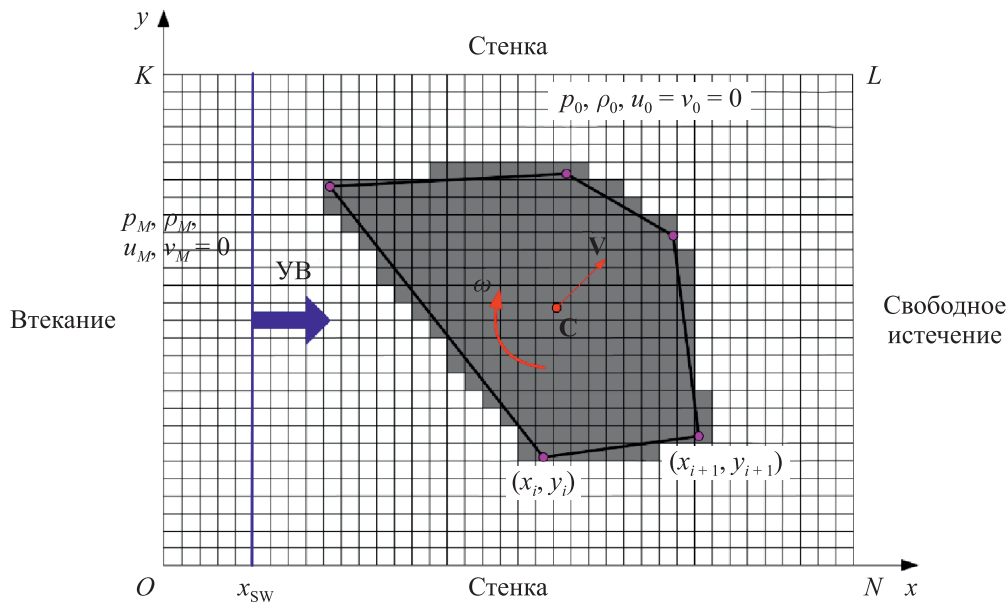


Рис. 2. Схематическая постановка задачи о взаимодействии ударной волны с телом в форме прямой призмы в плоскости Oxy и классификация типов расчетных ячеек

Уравнения движения тела под действием силы давления $\mathbf{F}(t) = (F_x, F_y, 0)$ и момента сил давления $\mathbf{M}(t) = (0, 0, M_z)$ со стороны газа:

$$\frac{dx_c}{dt} = V_x, \quad \frac{dy_c}{dt} = V_y, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega_z, \quad (1)$$

$$m \frac{dV_x}{dt} = F_x, \quad m \frac{dV_y}{dt} = F_y, \quad (2)$$

$$J_c \frac{d\omega_z}{dt} = M_z, \quad (3)$$

$$\mathbf{F} = \int_{\Gamma} P(\mathbf{r}_{\Gamma}) \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{n}_{\Gamma} \cdot dl_{\Gamma}, \quad (4)$$

$$\mathbf{M} = \int_{\Gamma} P(\mathbf{r}_{\Gamma}) \cdot \mathbf{H} \cdot [(\mathbf{r}_{\Gamma} - \mathbf{r}_c) \times \mathbf{n}_{\Gamma}] \cdot dl_{\Gamma}. \quad (5)$$

Здесь m — масса тела, J_c — момент инерции тела относительно оси, параллельной оси Oz и проходящей через центр масс тела, $P(\mathbf{r}_{\Gamma}, t)$ — давление газа на боковую поверхность тела в точке $\mathbf{r}_{\Gamma} = (x_{\Gamma}, y_{\Gamma}, H/2)$, \mathbf{n}_{Γ} — внутренняя нормаль к поверхности призмы в той же точке. Через φ обозначен угол между осью Ox и вектором $\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_c$, где $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, 0)$ — радиус-вектор одной из вершин многоугольника, ограничивающего тело, принятой за нулевую при индексации вершин. Интегрирование в (4) и (5) ведется по периметру многоугольника с границей Γ с элементом длины dl_{Γ} .

Начальное состояние тела определяется координатами его центра масс, линейной скоростью центра масс и угловой скоростью тела:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_c(0) &= \mathbf{r}_{c0} = (x_{c0}, y_{c0}, H/2), \\ \mathbf{V}(0) &= \mathbf{V}_0 = (V_{x0}, V_{y0}, 0), \quad \boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}_0 = (0, 0, \omega_{z0}). \end{aligned} \quad (6)$$

Начальное положение центра масс определяется следующим образом [Burke, электронный ресурс]:

$$x_{c0} = \frac{1}{6A} \sum_{i=0}^{N-1} (x_i + x_{i+1})(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i), \quad y_{c0} = \frac{1}{6A} \sum_{i=0}^{N-1} (y_i + y_{i+1})(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i),$$

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i).$$

Здесь и далее $x_N \equiv x_0$, $y_N \equiv y_0$. Площадь основания призмы равняется $|A|$.

Перейдем к определению инерционно-массовых характеристик тела. Зная площадь основания призмы, ее массу находим как

$$m = \rho_b |A| H. \quad (7)$$

По теореме Гюйгенса–Штейнера,

$$J_c = J_0 - m \mathbf{r}_c^2,$$

где момент инерции J_0 относительно оси Oz определяется интегралом

$$J_0 = \int_S \rho_b (x^2 + y^2) H dx dy.$$

С помощью теоремы Грина он сводится к интегралу по замкнутому контуру Γ , ограничивающему рассматриваемое тело:

$$J_0 = \rho_b H \int_{\Gamma} \left(-\frac{y^3}{3} dx + \frac{x^3}{3} dy \right) = \sum_{i=0}^{N-1} J_{0i} = \sum_{i=0}^{N-1} \rho_b H \left[\int_{\Gamma_i} \left(-\frac{y^3}{3} dx + \frac{x^3}{3} dy \right) \right]. \quad (8)$$

Рассмотрим сначала два специальных случая. Если $x_{i+1} = x_i$, то $J_{0i} = \rho_b H x_i^3 (y_{i+1} - y_i)/3$. Если $y_{i+1} = y_i$, то $J_{0i} = -\rho_b H y_i^3 (x_{i+1} - x_i)/3$. В общем случае $x_{i+1} \neq x_i$, $y_{i+1} \neq y_i$

$$J_{0i} = \rho_b H \int_{\Gamma_i} \left(-\frac{y^3}{3} dx + \frac{x^3}{3} dy \right) = -\frac{\rho_b H}{3} \int_{\Gamma_i} y^3 dx + \frac{\rho_b H}{3} \int_{\Gamma_i} x^3 dy = I_{1i} + I_{2i},$$

$$I_{1i} = -\frac{\rho_b H}{3} \int_{\Gamma_i} y^3 dx = -\frac{\rho_b H}{3} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (a_i x + b_i)^3 \frac{d(a_i x + b_i)}{a_i} = -\frac{\rho_b H}{3} \int_{y_i}^{y_{i+1}} y^3 \frac{dy}{a_i} = -\frac{\rho_b H}{12} \frac{y_{i+1}^4 - y_i^4}{a_i},$$

$$I_{2i} = \frac{\rho_b H}{3} \int_{\Gamma_i} x^3 dy = \frac{\rho_b H}{3} \int_{x_i}^{x_{i+1}} x^3 a_i dx = \frac{\rho_b H}{12} a_i (x_{i+1}^4 - x_i^4),$$

$$J_{0i} = -\frac{\rho_b H}{12} \frac{y_{i+1}^4 - y_i^4}{a_i} + \frac{\rho_b H}{12} a_i (x_{i+1}^4 - x_i^4), \quad a_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}.$$

Поскольку тело является недеформируемым, момент инерции тела необходимо вычислять один раз перед началом расчета. При моделировании движения тел с основанием в виде гладкой замкнутой кривой для повышения точности при расчете момента инерции число отрезков разбиения границы тела N может отличаться (быть больше) от того разбиения, которое будет использоваться в расчете динамики движения тела.

Предположение об идентичности полей течения газа в плоскостях, параллельных плоскости Oxy , позволяет рассматривать задачу в двумерном приближении в плоскости Oxy . Исходную трехмерную постановку тем не менее нужно всегда иметь в виду, поскольку исследуемое тело подвижно и динамика его движения определяется конкретными «трехмерными» инерционно-массовыми характеристиками. Особенно важно это становится при трактовке результатов натуральных экспериментов или при сравнении с результатами расчетов задач в трехмерной постановке. Например, в [Сидоренко, Уткин, 2020] в прямом моделировании исследовалась задача о прохождении УВ над совокупностью подвижных и взаимодействующих круговых цилиндров радиусом R , моделирующих слой сферических частиц радиусом R . Если в формуле (7) в качестве высоты H выбрать радиус основания R , то отношение масс сферической частицы и модельной цилиндрической частицы равно

$$\frac{m_{sph}}{m_{cyl}} = \frac{4/3 \pi R^3}{\pi R^2 \cdot R} = \frac{4}{3},$$

что, среди прочего — различие в коэффициентах сопротивления сферы и цилиндра, различие в проницаемости системы цилиндров и сфер, позволяет оценить результаты с количественной точки зрения.

Математическая модель для описания течения газа основывается на нестационарной двумерной системе уравнений Эйлера, записанной в декартовой системе координат (x, y) , которая решается вне границ тела:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y} &= 0, \\ \mathbf{u} &= \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(e + p) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho v u \\ \rho v^2 + p \\ v(e + p) \end{bmatrix}, \\ e &= \rho \varepsilon + \frac{\rho}{2}(u^2 + v^2), \quad \varepsilon = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь t — время, ρ — плотность газа, u, v — компоненты вектора скорости газа \mathbf{V}_g , p — давление, ε — удельная внутренняя энергия газа, e — полная энергия газа на единицу объема. Газ подчиняется уравнению состояния идеального газа с показателем адиабаты γ . Начальное положение плоской УВ с заданным числом Маха M определяется координатой $x = x_{sw}$ (см. рис. 2). Перед фронтом УВ находится покоящийся газ с давлением p_0 и плотностью ρ_0 . За фронтом УВ задаются параметры, определяемые соотношениями Ренкина–Гюгонио. Те же параметры задаются в качестве параметров втекания на левой границе расчетной области. На остальных границах выставляются условия непротекания. Расчет продолжается до момента прихода возмущений на правую границу области или несколько дальше так, чтобы правая граница не влияла на динамику движения тела в области. Также в данной работе не рассматриваются вопросы взаимодействия тела с границами области, то есть за время моделирования подобно взаимодействию не происходит.

Динамика движения тела описывается уравнениями (1)–(5) с начальными условиями (6), где далее под массой и моментом инерции тела, силой и моментом силы, действующими на тело, будут пониматься соответствующие физические величины, отнесенные к высоте призмы H .

3. Вычислительный алгоритм

Интегрирование определяющей системы уравнений (1)–(5), (9) осуществляется по явной схеме Эйлера. На n -м шаге по времени выполняются следующие процедуры в указанном порядке:

- определение величины шага интегрирования по времени Δt^n ;
- расчет динамики движения тела, включающий:
 - расчет силы и момента силы, действующих на тело,
 - расчет линейной и угловой скоростей тела,
 - расчет координат тела;
- расчет параметров газа.

Прямоугольник $OKLN$ на рис. 2 назовем расширенной расчетной областью. Расширенная расчетная область покрывается равномерной декартовой сеткой с узлами, координаты которых определяются следующим образом:

$$X_i = X_O + i \cdot h, \quad Y_j = Y_O + j \cdot h, \quad i = 0, \dots, I, \quad j = 0, \dots, J,$$

$$h \equiv \frac{X_N - X_O}{I} = \frac{Y_K - Y_O}{J}.$$

Для нумерации ячеек расширенной расчетной области будем использовать двухиндексную индексацию (i, j) , $i = 0, \dots, I-1$, $j = 0, \dots, J-1$.

Все ячейки этой сетки разделяются на два типа.

а) Внутренние. Это ячейки, заполненные газом, целиком лежащие внутри расчетной области и не пересекаемые границами расчетной области (неокрашенные ячейки на рис. 2). В таких ячейках определяются значения параметров газа.

б) Внешние. Это ячейки, в общем случае не заполненные газом (например, находящиеся в пределах твердых тел и т. п.), в том числе и пересекаемые границами расчетной области (серые ячейки). Сами по себе пересекаемые ячейки исключаются из расчета, но на гранях, по которым они граничат с внутренними, производится расчет численных потоков по специальному алгоритму [Davis, 1992; Chertock, Kurganov, 2008; Chertock et al., 2008; Сидоренко, Уткин, 2018], развиту для случая подвижных вращающихся твердых тел с границей в виде кусочно-линейной ломаной.

Назовем граничными такие ячейки, которые являются внутренними и имеют хотя бы одну внешнюю соседнюю ячейку. Ребра, по которым граничные ячейки соседствуют с внешними, назовем граничными ребрами.

Далее опишем перечисленные выше стадии алгоритма на каждом шаге интегрирования по времени.

3.1. Определение величины шага интегрирования по времени

Шаг по времени Δt^n рассчитывается исходя из двух условий. Первое условие заключается в том, что возмущения, распространяющиеся от ребра расчетной ячейки в обе стороны при расчете распада разрыва на данном ребре, за шаг по времени не должны достигать противоположной границы ячейки. Это условие носит название «условие Куранта–Фридрихса–Леви» и для каждой внутренней ячейки записывается в виде

$$\Delta t_{i,j}^n = \text{CFL} \cdot \min \left(\frac{h}{|u_{i,j}^n| + c_{i,j}^n}, \frac{h}{|v_{i,j}^n| + c_{i,j}^n} \right),$$

где h — шаг сетки, c — скорость звука, CFL — коэффициент запаса устойчивости, меньший единицы и выбиравшийся равным 0.5 в большинстве проведенных расчетов. Вторым условием на шаг по времени является требование того, чтобы тело за шаг по времени не перемещалось

более чем на половину шага сетки. Это требование достаточно для возможности определения параметров газа в ячейках, «освободившихся» от тела в результате его перемещения на шаге по времени (см. подпараграф 3.3). Согласно второму условию шаг по времени должен удовлетворять неравенству

$$\Delta t^n \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{|\mathbf{V}^n| + |\omega_z^n| r_{\max}}, \quad r_{\max} = \max_{i=0, N-1} |(x_c, y_c) - (x_i, y_i)|.$$

Поскольку уравнения динамики газа и тела интегрируются с одним и тем же шагом, в итоге условие на шаг интегрирования примет вид

$$\Delta t^n = \min \left[\min_{(i,j) \in \text{inner}} \text{CFL} \cdot \left(\frac{h}{|u_{i,j}| + c_{i,j}}, \frac{h}{|v_{i,j}| + c_{i,j}} \right), \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{|\mathbf{V}^n| + |\omega_z^n| r_{\max}} \right],$$

где минимум берется по всем внутренним ячейкам (i, j) .

3.2. Динамика движения тела

Расчет силы и момента силы, действующих на тело, осуществляется путем суммирования сил и моментов сил, действующих на граничные ребра со стороны газа в граничных ячейках. Интегралы в (4) и (5) численно аппроксимируются следующим образом:

$$\mathbf{F}^n = \sum_k (P^n(\mathbf{r}_k) \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{n}_k \cdot h), \quad (10)$$

$$\mathbf{M}^n = \sum_k (P^n(\mathbf{r}_k) \cdot \mathbf{H} \cdot [(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_c) \times \mathbf{n}_k] \cdot h). \quad (11)$$

Здесь k пробегает по всем граничным ребрам, принадлежащим одновременно внешней и внутренней ячейкам (ребро синего цвета на рис. 3), \mathbf{n}_k — единичная нормаль, направленная от внутренней ячейки (заполненной газом) к внешней (внутри тела), \mathbf{r}_k — координата середины граничного ребра, $P^n(\mathbf{r}_k)$ — давление газа на ребро k движущегося тела, способ расчета которого является одним из важных элементов метода. Давление находится из задачи о распаде разрыва для параметров $\mathbf{U}_{i,j}^n$ и \mathbf{U}_{ghost}^n по разные стороны от разрыва (см. рис. 3). Вектор \mathbf{U}_{ghost}^n

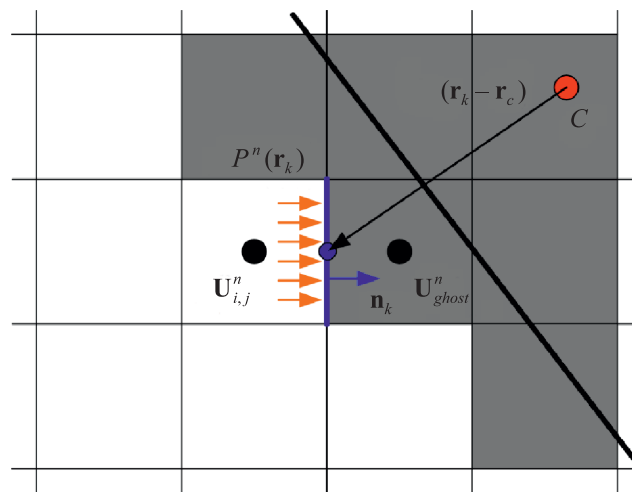


Рис. 3. К расчету силы и момента силы, действующих на тело. Белые ячейки — внутренние, серые — внешние. Черная прямая — граница тела. Синий отрезок — граничное ребро. Оранжевым условно показано давление со стороны газа на тело

реализует граничное условие подвижной стенки [Davis, 1992; Toro, 2009] и определяется формулами (17), (20) в подпараграфе 3.3 для расчета численного потока через граничное ребро k . Поскольку плотность и давление при определении \mathbf{U}_{ghost}^n всегда равны данным параметрам в ячейке (i, j) , разрыв распадается с образованием двух УВ или двух волн разрежения. Давление на контактном разрыве при этом вычисляется аналитически [Chertock, Kurganov, 2008]:

$$P^n(\mathbf{r}_k) = \begin{cases} p_{i,j}^n + 0.25 \cdot (\gamma + 1) \cdot \rho_{i,j}^n \cdot (\Delta V)^2 \cdot \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{4c_{i,j}^n}{(\gamma + 1)\Delta V} \right)^2} \right), & \Delta V \leq 0, \\ p_{i,j}^n \cdot \left(1 - \frac{(\gamma - 1)\Delta V}{2c_{i,j}^n} \right)^{2\gamma/(\gamma-1)}, & \Delta V > 0, \end{cases} \quad (12)$$

где $\Delta V = \mathbf{n}_k \cdot (\{\mathbf{V}(r_k)\}^n - \{\mathbf{V}_g\}_{i,j}^n)$ — проекция на нормаль \mathbf{n}_k разности скорости тела в точке \mathbf{r}_k и скорости газа во внутренней ячейке с ребром k . Линейная скорость каждой точки тела складывается из скорости поступательного движения центра масс и вращательного движения вокруг центра масс:

$$\mathbf{V}(r_k) = \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_c) = \begin{bmatrix} V_x - (r_{ky} - y_c) \cdot \omega_z \\ V_y + (r_{kx} - x_c) \cdot \omega_z \\ 0 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} u_b \\ v_b \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Расчет линейной и угловой скорости тела на следующем шаге производится путем интегрирования уравнений (2) и (3) с учетом (10), (11). Для этого также используются явные разностные схемы:

$$\mathbf{V}^{n+1} = \mathbf{V}^n + \mathbf{F}^n \cdot \frac{1}{m} \cdot \Delta t^n, \quad (14)$$

$$\omega_z^{n+1} = \omega_z^n + \mathbf{M}^n \cdot \frac{1}{J} \cdot \Delta t^n. \quad (15)$$

Расчет пространственной и угловой координат тела на следующем шаге осуществляется путем численного интегрирования уравнений (1) с учетом (14), (15) по разностным схемам

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_c^{n+1} &= \mathbf{x}_c^n + \mathbf{V}^{n+1} \cdot \Delta t^n, \\ \varphi^{n+1} &= \varphi^n + \omega_z^{n+1} \cdot \Delta t^n. \end{aligned}$$

Новые координаты вершин многоугольника, ограничивающего тело, рассчитываются по формуле

$$\mathbf{x}_i^{n+1} = \mathbf{x}_c^{n+1} + \begin{bmatrix} \cos(\omega_z^n \Delta t^n) & -\sin(\omega_z^n \Delta t^n) \\ \sin(\omega_z^n \Delta t^n) & \cos(\omega_z^n \Delta t^n) \end{bmatrix} (\mathbf{x}_i^n - \mathbf{x}_c^n), \quad i = 0, \dots, N-1.$$

3.3. Расчет параметров газа

Расчет параметров газа во внутренних ячейках (i, j) осуществляется интегрированием системы уравнений (9) с использованием явной схемы Эйлера и метода конечных объемов:

$$\mathbf{U}_{i,j}^{n+1} = \mathbf{U}_{i,j}^n - \frac{\Delta t^n}{h} (\mathbf{F}_{i+1/2,j} - \mathbf{F}_{i-1/2,j} + \mathbf{G}_{i,j+1/2} - \mathbf{G}_{i,j-1/2}). \quad (16)$$

Численные потоки консервативных переменных \mathbf{F} и \mathbf{G} на ребрах, по которым внутренние ячейки граничат с внутренними, рассчитываются методом Стигера–Уорминга [Steger, Warming, 1981]:

$$\mathbf{F}_{i+1/2,j} = \mathbf{F}_{\text{St.-Warm.}}(\mathbf{U}_{i,j}^n, \mathbf{U}_{i+1,j}^n), \quad \mathbf{G}_{i+1/2,j} = \mathbf{G}_{\text{St.-Warm.}}(\mathbf{U}_{i,j}^n, \mathbf{U}_{i,j+1}^n).$$

Обозначим вектор консервативных переменных слева от разрыва как \mathbf{U}_L , справа — как \mathbf{U}_R . Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{St.-Warm.}}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R) &= \mathbf{F}_{\text{St.-Warm.}}^+(\mathbf{U}_L) + \mathbf{F}_{\text{St.-Warm.}}^-(\mathbf{U}_R), \\ \mathbf{G}_{\text{St.-Warm.}}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R) &= \mathbf{G}_{\text{St.-Warm.}}^+(\mathbf{U}_L) + \mathbf{G}_{\text{St.-Warm.}}^-(\mathbf{U}_R), \\ \mathbf{F}_{\text{St.-Warm.}}^+ &= \Phi(\mathbf{U}_L, 1, 0, 1), \quad \mathbf{F}_{\text{St.-Warm.}}^- = \Phi(\mathbf{U}_R, 1, 0, -1), \\ \mathbf{G}_{\text{St.-Warm.}}^+ &= \Phi(\mathbf{U}_L, 0, 1, 1), \quad \mathbf{G}_{\text{St.-Warm.}}^- = \Phi(\mathbf{U}_R, 0, 1, -1), \\ \Phi(\mathbf{U}, \chi_1, \chi_2, \alpha) &= \frac{\rho}{2\gamma} \begin{bmatrix} 2(\gamma-1)\lambda_1^\alpha + \lambda_2^\alpha + \lambda_3^\alpha \\ 2(\gamma-1)\lambda_1^\alpha u + \lambda_2^\alpha(u+c\chi_1) + \lambda_3^\alpha(u-c\chi_1) \\ 2(\gamma-1)\lambda_1^\alpha v + \lambda_2^\alpha(v+c\chi_2) + \lambda_3^\alpha(v-c\chi_2) \\ (\gamma-1)\lambda_1^\alpha(u^2+v^2) + \frac{1}{2}\lambda_2^\alpha[(u+c\chi_1)^2 + (v+c\chi_2)^2] + \\ + \frac{1}{2}\lambda_3^\alpha[(u-c\chi_1)^2 + (v-c\chi_2)^2] + \frac{1}{2}c^2 \frac{3-\gamma}{\gamma-1}(\lambda_2^\alpha + \lambda_3^\alpha) \end{bmatrix}, \\ \lambda_n^\alpha &= \frac{1}{2}(\lambda_n + \alpha|\lambda_n|), \quad n=1, 2, 3, \\ \lambda_1 &= \chi_1 u + \chi_2 v, \quad \lambda_2 = \lambda_1 + c, \quad \lambda_3 = \lambda_1 - c. \end{aligned}$$

Выбор данного численного потока был обусловлен опытом авторов использования излагаемой методики для моделирования движения сферических частиц за ударной волной в двух- и трехмерной постановках [Sidorenko et al., 2019; Elesin et al., 2021]. В отличие, например, от расчетов методом Годунова [Годунов и др., 1976] в расчетах методом Стигера–Уорминга не возникает эффекта «карбункула».

Численные потоки через ребра ячеек, по которым внутренние ячейки соседствуют с внешними, находятся на основе алгоритма, идея которого изложена в [Davis, 1992; Chertock, Kurganov, 2008; Сидоренко, Уткин, 2018]. Рассмотрим поочередно все возможные подобные случаи (см. рис. 4). Обозначим через $\mathbf{U}_R(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2)$ вектор консервативных переменных, являющийся решением задачи Римана для первоначальных состояний слева и справа от разрыва, характеризующихся векторами \mathbf{U}_1 и \mathbf{U}_2 .

Случай на рис. 4, а. Подробно опишем алгоритм расчета потока $\mathbf{F}_{i-1/2,j}$ через вертикальное ребро, по которому внешняя ячейка $(i-1, j)$ граничит с внутренней ячейкой (i, j) . Для нахождения потока $\mathbf{F}_{i-1/2,j}$ сначала необходимо найти решение задачи Римана $\mathbf{U}_R(\mathbf{U}_{\text{ghost}}^n, \mathbf{U}_{i,j}^n)$, где

$$\mathbf{U}_{i,j}^n = \begin{bmatrix} \rho_{i,j}^n \\ \rho_{i,j}^n u_{i,j}^n \\ \rho_{i,j}^n v_{i,j}^n \\ e_{i,j}^n \end{bmatrix},$$

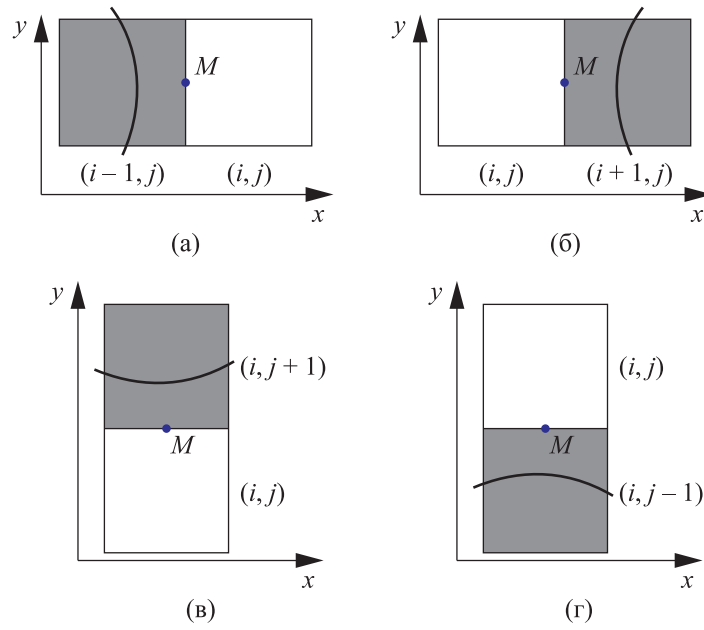


Рис. 4. Варианты расположения внутренней ячейки (i, j) (закрашена белом) и граничной ячейки (закрашена серым). Точка M — середина граничного ребра

$$\mathbf{U}_{ghost}^n = \begin{bmatrix} \rho_{i,j}^n \\ \rho_{i,j}^n (2u_b^n - u_{i,j}^n) \\ \rho_{i,j}^n v_b^n \\ \frac{p_{i,j}^n}{\gamma - 1} + \frac{\rho_{i,j}^n}{2} \left((2u_b^n - u_{i,j}^n)^2 + (v_b^n)^2 \right) \end{bmatrix}, \quad (17)$$

а u_b^n и v_b^n — компоненты скорости точки M на рис. 4, а, которые рассчитываются по формуле (13).

Как уже отмечалось в подпараграфе 3.2 и как видно из (17), при решении задачи Римана $\mathbf{U}_R(\mathbf{U}_{ghost}^n, \mathbf{U}_{i,j}^n)$ начальные значения плотности и давления слева и справа от разрыва равны. Решением сформулированной задачи в локально-одномерном случае вдоль оси абсцисс будут две УВ или две волны разрежения, связанные через контактный разрыв, на котором плотность не будет претерпевать разрыва, а x -компонента скорости газа будет иметь значение u_b^n . Также введем в рассмотрение вектор промежуточных состояний $\mathbf{U}_{i+1/2,j}^*(\mathbf{U}_{ghost}^n, \mathbf{U}_{i,j}^n)$:

$$\mathbf{U}_{i+1/2,j}^*(\mathbf{U}_{ghost}^n, \mathbf{U}_{i,j}^n) = \begin{bmatrix} R_* \\ R_* u_b^n \\ R_* v_* \\ \frac{P_*}{\gamma - 1} + \frac{R_*}{2} \left((u_b^n)^2 + (v_*)^2 \right) \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$v_* = \begin{cases} v_{i,j}^n, & \text{если } u_b^n \leq 0, \\ v_b^n & \text{иначе,} \end{cases}$$

где R_* и P_* — плотность и давление на контактном разрыве в решении задачи Римана (P_* определяется аналитическими формулами (12)). Поток $\mathbf{F}_{i-1/2,j}$ определяется следующим

образом:

$$\mathbf{F}_{i-1/2,j} = \begin{cases} \mathbf{f}(\mathbf{U}_{i,j}^n), & \text{если } u_b^n < -c_{i-1/2,j}^*, \\ \mathbf{F}_{\text{St.-Warm.}}(\mathbf{U}_{i-1/2,j}^*, \mathbf{U}_{i,j}^n), & \text{если } -c_{i-1/2,j}^* \leq u_b^n < c_{i-1/2,j}^*, \\ \mathbf{f}(\mathbf{U}_R(\mathbf{U}_{ghost}^n, \mathbf{U}_{i,j}^n)), & \text{если } u_b^n \geq c_{i-1/2,j}^*, \end{cases} \quad (19)$$

где $c_{i-1/2,j}^* = \sqrt{\gamma P^*/R^*}$. Формула (19) является следствием двухволнового приближения при решении задачи Римана для подвижного ребра, использованного в [Davis, 1992; Chertock, Kurganov, 2008; Chertock et al., 2008], когда характеристики $x = c_{i-1/2,j}^* t$ и $x = -c_{i-1/2,j}^* t$ разделяют состояния \mathbf{U}_{ghost}^n , $\mathbf{U}_{i-1/2,j}^*$ и $\mathbf{U}_{i,j}^n$. Через \mathbf{f} обозначен вектор дифференциального потока в (9), через $\mathbf{F}_{\text{St.-Warm.}}$ — поток Стигера–Уорминга.

Случай на рис. 4, б. Пусть внутренняя ячейка (i, j) граничит с внешней ячейкой $(i+1, j)$, которая пересекается границей тела. Вектор \mathbf{U}_{ghost}^n по-прежнему определяется формулой (17). Вид вектора промежуточных состояний также не меняется по сравнению с (18), за исключением выбора скорости v_* :

$$v_* = \begin{cases} v_{i,j}^n, & \text{если } u_b^n \geq 0, \\ v_b^n, & \text{если иначе.} \end{cases}$$

Численный поток определяется формулой

$$\mathbf{F}_{i+1/2,j} = \begin{cases} \mathbf{f}(\mathbf{U}_R(\mathbf{U}_{i,j}, \mathbf{U}_{ghost}^n)), & \text{если } u_b < -c_{i+1/2,j}^*, \\ \mathbf{F}_{\text{St.-Warm.}}(\mathbf{U}_{i,j}, \mathbf{U}_{i+1/2,j}^*), & \text{если } -c_{i+1/2,j}^* \leq u_b < c_{i+1/2,j}^*, \\ \mathbf{f}(\mathbf{U}_{i,j}), & \text{если } u_b \geq c_{i+1/2,j}^*. \end{cases}$$

Случай на рис. 4, в. Пусть внутренняя ячейка (i, j) граничит с внешней ячейкой $(i, j+1)$, которая пересекается границей тела. Вектор \mathbf{U}_{ghost}^n определяется формулой

$$\mathbf{U}_{ghost}^n = \begin{bmatrix} \rho_{i,j}^n \\ \rho_{i,j}^n u_b^n \\ \rho_{i,j}^n (2v_b^n - v_{i,j}^n) \\ \frac{P_{i,j}^n}{\gamma-1} + \frac{\rho_{i,j}^n}{2} \left((u_b^n)^2 + (2v_b^n - v_{i,j}^n)^2 \right) \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Вектор промежуточных состояний имеет вид

$$\mathbf{U}_{i,j+1/2}^* (\mathbf{U}_{i,j}^n, \mathbf{U}_{ghost}^n) = \begin{bmatrix} R_* \\ R_* u_* \\ R_* v_b^n \\ \frac{P_*}{\gamma-1} + \frac{R_*}{2} \left((u_*)^2 + (v_b^n)^2 \right) \end{bmatrix}, \quad (21)$$

$$u_* = \begin{cases} u_{i,j}^n, & \text{если } v_b^n \geq 0, \\ u_b^n, & \text{если иначе.} \end{cases}$$

Численный поток определяется формулой

$$\mathbf{G}_{i,j+1/2} = \begin{cases} \mathbf{g}\left(\mathbf{U}_R\left(\mathbf{U}_{i,j}, \mathbf{U}_{ghost}\right)\right), & \text{если } v_b < -c_{i,j+1/2}^*, \\ \mathbf{G}_{\text{St.-Warm.}}\left(\mathbf{U}_R\left(\mathbf{U}_{i,j}, \mathbf{U}_{i,j+1/2}^*\right)\right), & \text{если } -c_{i,j+1/2}^* \leq v_b < c_{i,j+1/2}^*, \\ \mathbf{g}\left(\mathbf{U}_{i,j}\right), & \text{если } v_b \geq c_{i,j+1/2}^*. \end{cases}$$

Случай на рис. 4, 2. Пусть внутренняя ячейка (i, j) граничит с внешней ячейкой $(i, j-1)$, которая пересекается телом. Вектор \mathbf{U}_{ghost}^n определяется формулой (20). Вектор промежуточных состояний определяется формулой (21) со следующим правилом отбора u_* :

$$u_* = \begin{cases} u_{i,j}^n, & \text{если } v_b^n \leq 0, \\ u_b^n, & \text{если иначе.} \end{cases}$$

Численный поток определяется формулой

$$\mathbf{G}_{i,j-1/2} = \begin{cases} \mathbf{g}\left(\mathbf{U}_{i,j}\right), & \text{если } v_b < -c_{i,j-1/2}^*, \\ \mathbf{G}_{\text{St.-Warm.}}\left(\mathbf{U}_R\left(\mathbf{U}_{i,j-1/2}^*, \mathbf{U}_{i,j}\right)\right), & \text{если } -c_{i,j-1/2}^* \leq v_b < c_{i,j-1/2}^*, \\ \mathbf{g}\left(\mathbf{U}_R\left(\mathbf{U}_{ghost}, \mathbf{U}_{i,j}\right)\right), & \text{если } v_b \geq c_{i,j-1/2}^*. \end{cases}$$

Для повышения порядка аппроксимации схемы по пространственным переменным используется покомпонентная minmod-реконструкция вектора консервативных переменных [Колган, 1972]:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{i+1/2,j}^{n-} &= \mathbf{U}_{i,j}^n + \frac{h}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \right)_{i,j}^n, \quad \mathbf{U}_{i-1/2,j}^{n+} = \mathbf{U}_{i,j}^n - \frac{h}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \right)_{i,j}^n, \\ \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \right)_{i,j}^n &= \min \text{mod} \left(\frac{\mathbf{U}_{i,j}^n - \mathbf{U}_{i-1,j}^n}{h}, \frac{\mathbf{U}_{i+1,j}^n - \mathbf{U}_{i,j}^n}{h} \right), \\ \mathbf{U}_{i,j+1/2}^{n-} &= \mathbf{U}_{i,j}^n + \frac{h}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} \right)_{i,j}^n, \quad \mathbf{U}_{i,j-1/2}^{n+} = \mathbf{U}_{i,j}^n - \frac{h}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} \right)_{i,j}^n, \\ \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} \right)_{i,j}^n &= \min \text{mod} \left(\frac{\mathbf{U}_{i,j}^n - \mathbf{U}_{i,j-1}^n}{h}, \frac{\mathbf{U}_{i,j+1}^n - \mathbf{U}_{i,j}^n}{h} \right), \\ \min \text{mod}(a, b) &= \frac{1}{2} (\text{sign } a + \text{sign } b) \min(|a|, |b|). \end{aligned}$$

Реконструкция осуществляется только для внутренних ячеек (i, j) , не граничащих с внешними ячейками.

За шаг интегрирования по времени в результате перемещения тела часть ячеек расширенной расчетной области может изменять тип и стать внутренней. Это ячейки, которые освобождаются телом и заполняются газом. В подобных ячейках требуется инициализировать вектор консервативных переменных. Это осуществляется с использованием векторов промежуточных состояний (18), (21) на ребрах вновь появившейся внутренней ячейки:

$$\mathbf{U}_{i,j}^{n+1} = \frac{\alpha_x}{\alpha_x + \alpha_y} \cdot \frac{\alpha_{i+1,j} \mathbf{U}_{i+1/2,j}^* + \alpha_{i-1,j} \mathbf{U}_{i-1/2,j}^*}{\alpha_{i+1,j} + \alpha_{i-1,j}} + \frac{\alpha_y}{\alpha_x + \alpha_y} \cdot \frac{\alpha_{i,j+1} \mathbf{U}_{i,j+1/2}^* + \alpha_{i,j-1} \mathbf{U}_{i,j-1/2}^*}{\alpha_{i,j+1} + \alpha_{i,j-1}},$$

$$\alpha_{i\pm 1, j} = \begin{cases} 1, & \text{если ячейка } (i \pm 1, j) \text{ была внутренней,} \\ 0, & \text{если иначе,} \end{cases}$$

$$\alpha_{i, j\pm 1} = \begin{cases} 1, & \text{если ячейка } (i, j \pm 1) \text{ была внутренней,} \\ 0, & \text{если иначе,} \end{cases}$$

$$\alpha_x = \max(\alpha_{i+1, j}, \alpha_{i-1, j}), \quad \alpha_y = \max(\alpha_{i, j+1}, \alpha_{i, j-1}).$$

4. Задача о подъеме кругового цилиндра за ударной волной

До изучения динамики движения тел сложной формы в потоке газа рассмотрим сначала более простой тест о подъеме цилиндра за проходящей УВ. Движение цилиндра считается поступательным, граница аппроксимируется не кусочно-линейным профилем, а аналитически заданным уравнением окружности. Данная задача, по-видимому, впервые была рассмотрена в [Falcovitz et al., 1997] в качестве тестовой для валидации метода расчета течений сжимаемых сред в областях с подвижными границами. Мотивирующим фактором для авторов [Falcovitz et al., 1997] также послужило практически полное отсутствие на тот момент экспериментальных данных, которые могли бы быть использованы для этих целей. Несмотря на некоторое количество работ по динамике движения одиночных частиц в потоке за УВ (см., например, [Voiko et al., 1983; Devals et al., 2003; Bordoloi, 2017]) и уже частично упоминавшиеся во введении исследования по динамике движения уединенных тел сложной формы (см. [Бойко, Поплавский, 2005; Nishino et al., 2009; Oshima et al., 2018]), можно отметить, что ситуация не сильно изменилась и до настоящего времени. Популярность данной тест приобрел после работы [Forger, Berger, 1999]. Затем тест о подъеме цилиндра многократно рассматривался в работах, посвященных разработке методов погруженной границы и моделированию взаимодействия движущегося газа с твердыми телами [Arienti et al., 2003; Shyue, 2006; Hu et al., 2006; Sambasivan, Udaykumar, 2009; Grétarsson et al., 2011; Tan, Shu, 2011; Monasse et al., 2012; Pasquariello et al., 2016; Qiu et al., 2016; Xu et al., 2017; Das et al., 2017; Dakin et al., 2018; Brahmachary et al., 2018; Сидоренко, Уткин, 2018; Афендииков, Никитин, 2020].

Постановка задачи следующая. В расчетной области в форме прямоугольника 1.0×0.2 , заполненной покоящимся идеальным газом с показателем адиабаты $\gamma = 1.4$ при давлении 1.0 и плотности 1.4, также покоится цилиндрическое тело с плотностью 10.77 и радиусом 0.05. Здесь и далее в рассмотренных тестах все параметры задачи безразмерные. На него набегают ударная волна с числом Маха 3.0. В начальный момент времени абсцисса и ордината центра цилиндра имеют значения 0.15 и 0.05, а абсцисса фронта УВ — 0.08 (см. рис. 5, а). На всех границах прямоугольной расчетной области, кроме левой, задаются условия непротекания газа, а на левой — условия втекания с параметрами за УВ. Расчет проводился на сетке 2000×400 ячеек с коэффициентом запаса CFL = 0.2.

Пространственные распределения плотности в моменты времени 0.16 и 0.3 приведены на рис. 5, б, в. В большинстве перечисленных выше статей динамика движения цилиндра контролируется именно в данные моменты времени. Структура течения включает в себя лидирующую прошедшую волну, отраженную волну, распространяющуюся против набегающего потока, а также систему поперечных волн. На рис. 6 представлено количественное сравнение динамики изменения абсциссы и ординаты центра цилиндра в расчете автора и в некоторых других работах.

В различных работах использовались различные единицы измерения и количественно постановки теста и результаты расчетов отличаются. Однако в конечном итоге всегда оказывалось, что с точностью до выбранных единиц измерения рассматривается одна и та же постановка, описанная выше. Графики абсцисс для всех приведенных источников очень близки, за исключением [Monasse et al., 2012], и потому не представляют большого интереса для обсуждения. Относительный разброс графиков ординат после момента времени 0.15 гораздо более

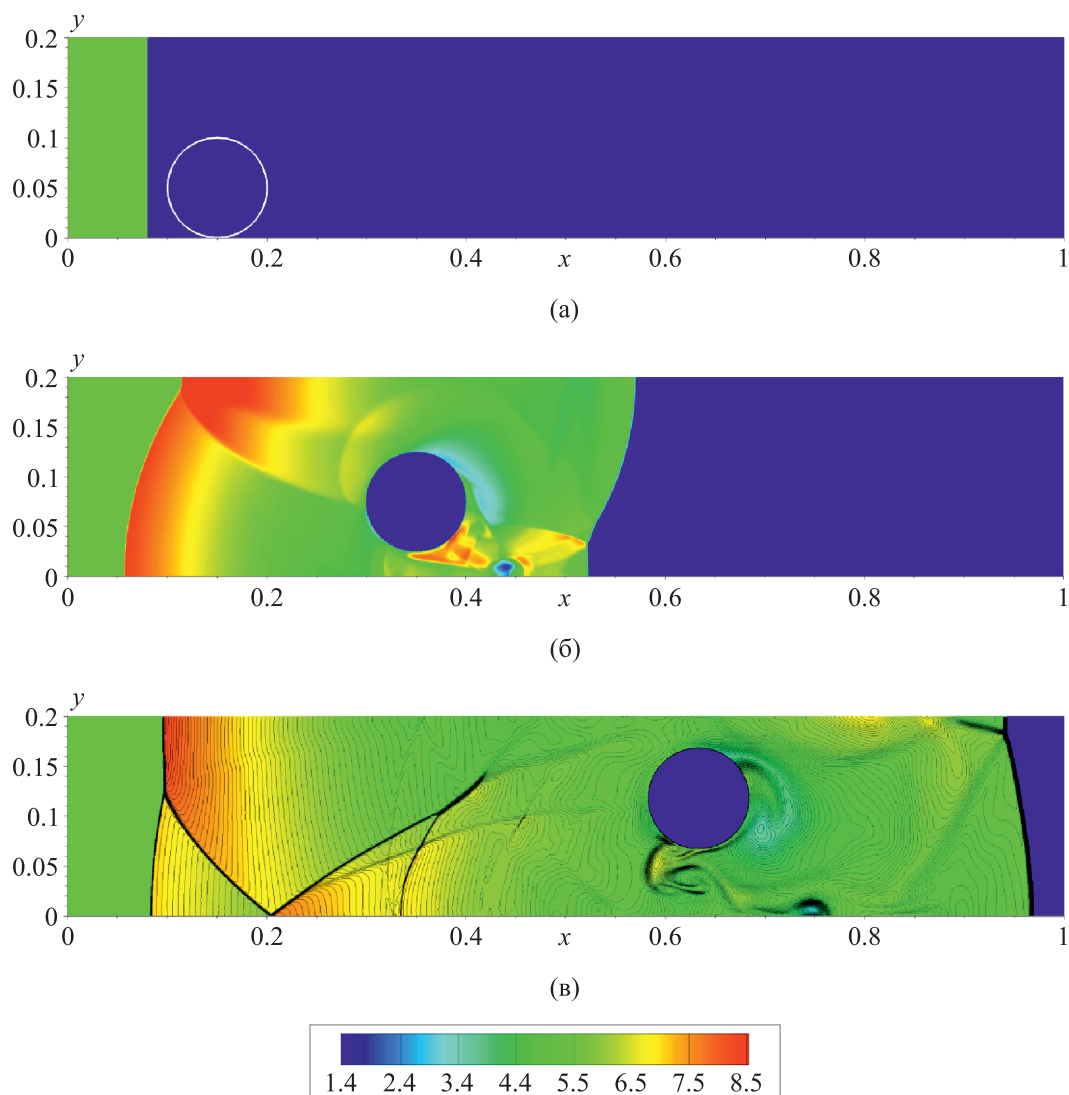


Рис. 5. Рассчитанные распределения плотности в задаче о подъеме цилиндра за УВ в последовательные моменты времени: (а) 0, (б) 0.16, (в) 0.3. Координаты, плотность и моменты времени — в безразмерных единицах

значительный. В [Forrer, Berger, 1999; Monasse et al., 2012] интенсивность подъема максимальна. В отличие от других работ до момента времени 0.3 в обоих случаях цилиндр достигает верхней границы области, на что также обращается внимание в [Афендииков, Никитин, 2020]. Минимальная интенсивность подъема получена в [Sambasivan, Udaykumar, 2009]. Отметим, что во всех работах, кроме [Das et al., 2017], решались уравнения Эйлера. В [Das et al., 2017], помимо уравнений Эйлера, решались также уравнения Навье–Стокса. Различия в динамике движения цилиндра вдоль оси абсцисс между вязким и невязким расчетами минимальны. На верхнем рис. 6 представлена кривая только для «вязкого» случая. В то же время использование модели вязкого газа привело к заметной меньшей высоте подъема цилиндра.

Качественный сравнительный анализ полей течения в различных работах показывает, что ударно-волновые конфигурации, в частности положение и форма фронтов отраженной и прошедшей волн, воспроизводятся практически идентично во всех работах. При этом детали течения вблизи цилиндра, такие как размер, форма, момент образования вихревых структур (см. рис. 5, в), отличаются, что, вероятно, и приводит к отличию в динамике движения цилиндра. Обсуждение особенностей течения, а не просто интегральной динамики движения тела,

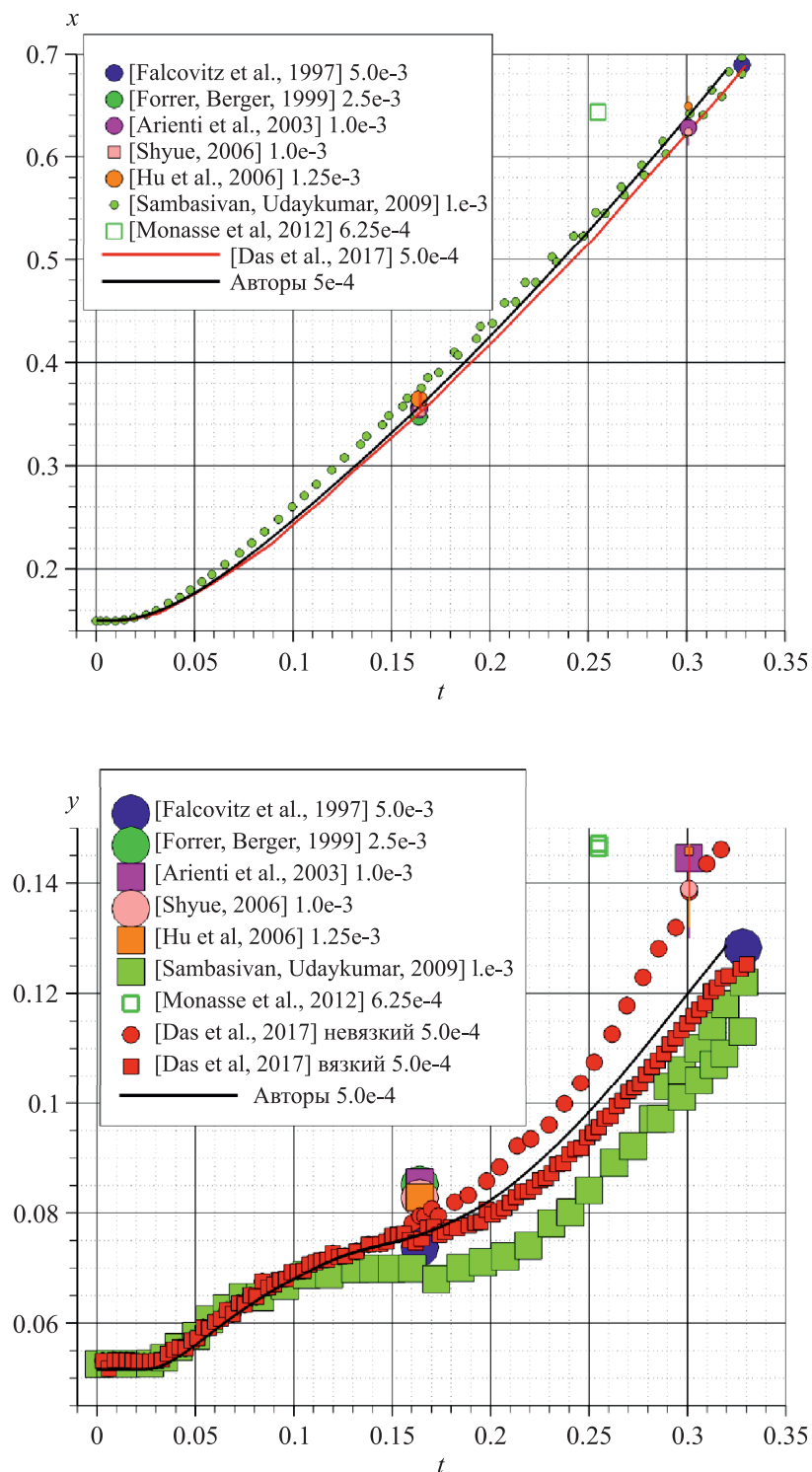


Рис. 6. Динамика изменения абсциссы и ординаты центра цилиндра в расчете авторов и в других работах. Число в легенде — размер ячейки расчетной сетки. Абсолютная погрешность при оцифровке положения центра цилиндра из статей составляла около 0.015, этой величине примерно равен характерный размер больших маркеров. Маленькие маркеры поставлены по точным данным, представленным в статьях. Множественные данные из одного источника, например салатные маркеры [Sambasivan, Udaykumar, 2009] или вертикальные цветные линии, соответствуют различным модификациям одной методики. Координаты и ось времени — в безразмерных единицах

началось с работы [Hu et al., 2006]. В [Hu et al., 2006] обращают внимание на наличие выраженного вихря под цилиндром в поздние моменты времени в расчете [Forrer, Berger, 1999], который также присутствует в нашем расчете (см. рис. 5, *в*). При этом в расчетах [Hu et al., 2006] он отсутствует, даже в расчетах на грубых сетках. Также данный вихрь отсутствует в [Arienti et al., 2003; Shyue, 2006]. В качестве возможного объяснения, которое дается в [Hu et al., 2006], — численный метод, используемый в [Forrer, Berger, 1999], “space-time splitting scheme”, который, вероятно, в конечном итоге характеризуется некоторой специфической численной диссипацией. Однако анализ более поздних работ показывает, что образование вихря происходит при использовании и других методик (см. как минимум [Sambasivan, Udaykumar, 2009; Monasse et al., 2012; Pasquariello et al., 2016; Das et al., 2017]). В [Monasse et al., 2012] образование вихря объясняется неустойчивостью Кельвина–Гельмгольца.

Важный фактор, который также может влиять на динамику подъема и который практически не обсуждается, — это возможное наличие определенного количества ячеек между цилиндром и нижней границей области в начальный момент времени. Ненулевой зазор может вводиться, чтоб избежать вырождения ячеек при идеальном контакте тела и нижней границы. Во избежание трудностей с определением параметров газа в ячейках, близких к точке контакта цилиндра и нижней стенке, в нашем расчете начальная ордината центра цилиндра также была увеличена на 3 шага сетки.

5. Динамика движения тела сложной формы за ударной волной

Перейдем наконец к результатам расчетов динамики движения тел более сложной формы, чем круговой цилиндр. По аналогии с задачей о подъеме кругового цилиндра за УВ авторами в [Ben-Artzi, Falcovitz, 2003; Du, Li, 2020] была рассмотрена задача о подъеме цилиндра с эллиптическим основанием. Расчетная область представляет собой прямоугольник 100×20 . В начальный момент времени часть расчетной области с абсциссой больше 8.0, соответствующей начальной координате фронта УВ, заполнена покоящимся идеальным газом с показателем адиабаты $\gamma = 1.4$, давлением $p_0 = 0.1$ и плотностью $\rho_0 = 1.3$. Параметры газа в остальной части расчетной области определяются из соотношений Ренкина–Гюгонио за УВ, движущейся вправо, с числом Маха 3.0.

Постановка граничных условий аналогична рассмотренному выше тесту о подъеме кругового цилиндра. В расчетной области покоится эллиптическое тело с центром в точке с координатами (15, 3), см. рис. 7, *а*. Эллипс ориентирован большей осью $2a = 12.5$ вдоль оси x , меньшей осью $2b = 5$ вдоль оси y . Эллипс аппроксимируется замкнутой ломаной с вершинами

$$(x_i, y_i) = \left(15.0 + a \cdot \cos\left(\frac{2\pi i}{120}\right), 3.0 + b \cdot \sin\left(\frac{2\pi i}{120}\right) \right), \quad i = 1, 2, \dots, 120.$$

Плотность материала тела равна $\rho_b = 13$. Расчет проводился на сетке 1600×320 ячеек.

Рис. 7 дает представление о сформировавшейся ударно-волновой картине течения, в целом напоминающей тест о подъеме кругового цилиндра (см. рис. 5). Количественная динамика движения эллипса в сравнении с данными из [Ben-Artzi, Falcovitz, 2003] приведена на рис. 8. Динамика поступательного движения центра масс тела находится в очень хорошем соответствии с [Ben-Artzi, Falcovitz, 2003]. Динамика вращательного движения в терминах угла поворота тела до некоторого момента времени около 40 единиц такая же, однако затем наблюдается расхождение. В данном тесте для сопоставления с [Ben-Artzi, Falcovitz, 2003] угол поворота тела φ определялся как угол между большей осью эллипса и отрицательным направлением оси абсцисс. В предыдущем разделе большое внимание было уделено задаче о подъеме кругового цилиндра, в том числе потому, что для тела в форме хотя бы эллипса данные в литературе практически отсутствуют. Разброс расчетных данных для кругового цилиндра, качественный

характер данного разброса (расхождение траекторий для ординаты центра цилиндра после некоторого момента времени, когда, вероятно, начинают сказываться эффекты, связанные со схемной вязкостью методов) позволяют считать полученное соответствие разумным. Расхождения в динамике вращения, вероятно, обусловлены особенностями используемой численной методики и методики из [Ben-Artzi, Falcovitz, 2003].

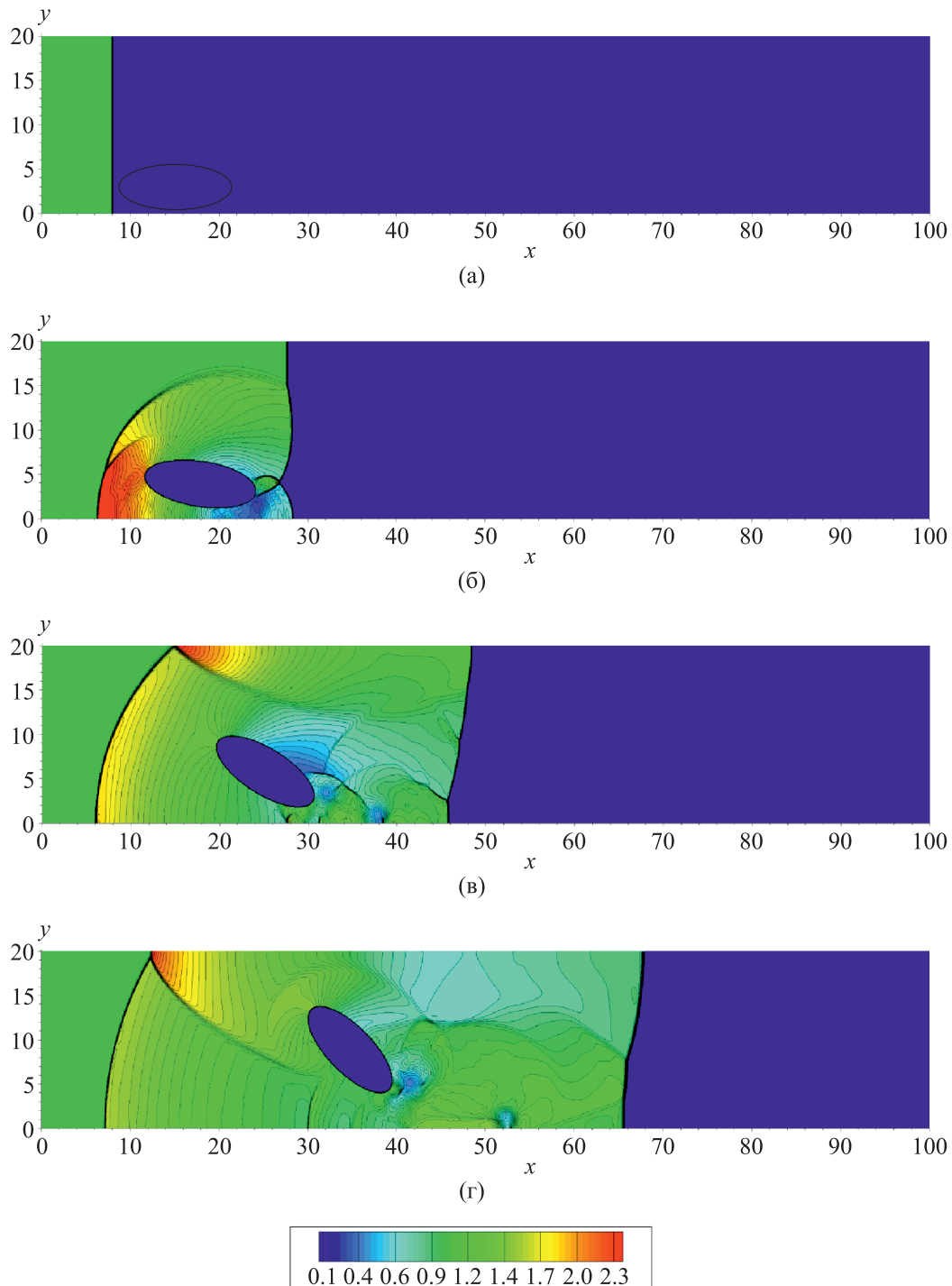


Рис. 7. Рассчитанные распределения давления в задаче о подъеме эллипса за УВ в последовательные моменты времени: (а) 0, (б) 20, (в) 40, (г) 60. Координаты, давление и моменты времени — в безразмерных единицах

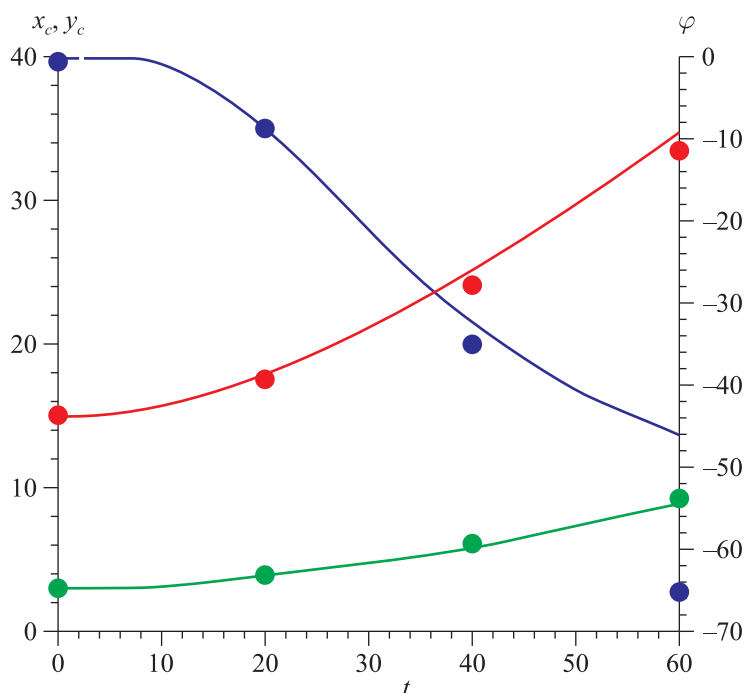


Рис. 8. Абсцисса центра масс x_c в безразмерных единицах (красный цвет), ордината центра масса y_c в безразмерных единицах (зеленый цвет) и угол поворота φ (синий цвет, в градусах) эллипса в зависимости от времени (в безразмерных единицах). Сплошные линии — расчет авторов, точки — расчет из [Ben-Artzi, Falcovitz, 2003]

В [Du, Li, 2020] была рассмотрена аналогичная задача о движении прямоугольника. Постановка задачи полностью соответствовала описанной выше для эллипса. Разница состояла в том, что вместо эллипса в области находился прямоугольник со сторонами длиной $a = 3$ и $b = 6$, изначально ориентированный таким образом, что угол между его длинной стороной и отрицательным направлением оси x составлял 45° (см. рис. 9, *a*). Координаты центра прямоугольника в начальный момент времени имели значения $(15, 6)$. В расчете [Du, Li, 2020] использовано ошибочное значение для момента инерции прямоугольника относительно оси, проходящей через его центр масс:

$$J = \frac{1}{3}m(a^2 + b^2). \quad (22)$$

Правильное значение отличается множителем: вместо $1/3$ должен быть множитель $1/12$. Для прямого сопоставления с расчетными данными [Du, Li, 2020] в нашем расчете мы взяли момент инерции, рассчитанный по формуле (22), а не по формуле (8), которая дает корректное значение¹. Результаты расчета представлены на рис. 9 и рис. 10. Отметим лучшее качественное и количественное соответствие по углу поворота тела в сравнении с результатами из [Du, Li, 2020], чем это было для эллипса и данными из [Ben-Artzi, Falcovitz, 2003].

Задача о движении прямоугольника также была исследована на различных сетках, чтобы оценить эффект сеточной сходимости результатов моделирования. Помимо сетки 1600×320 , для которой представлены результаты на рис. 9 и рис. 10, были также проведены расчеты на сетках 800×160 и 3200×640 . На рис. 11 представлены пространственные распределения давления в один и тот же момент времени 60 единиц в этих трех расчетах. Визуально наблюдается очевидная сеточная сходимость в описании «невязких» ударно-волновых структур — уменьшение степени их численного «размазывания» и локализация областей повышенного давления за скачками.

¹ Авторы данной статьи связались с авторами статьи [Du, Li, 2020], которые после проверки подтвердили, что действительно использовали ошибочное значение момента инерции прямоугольника в своем расчете.

В то же время вихревые структуры за телом вниз по потоку при измельчении сетки ожидаемо ведут себя хаотично. Это в свою очередь аналогичным образом сказывается на характеристиках движения тела. В качестве примера на рис. 12 представлена ордината центра масс прямоугольника в зависимости от времени в трех расчетах. Максимальное относительное отклонение полученных результатов от расчета [Du, Li, 2020] составляет около 13 % в момент времени 60 единиц. Результаты, представленные в § 4 для кругового цилиндра, дают основание относиться к данным [Du, Li, 2020] не как к эталону, а как к одной из возможных траекторий в пучке траекторий, которые будут получаться при использовании различных методов погруженной границы. При этом разумным представляется и количественный разброс данных. Рассмотрим рис. 6 для ординаты центра кругового цилиндра. В промежуточный момент времени 0.16 минимальное значение ординаты составляет около 0.07 в расчете [Sambasivan, Udaykumar, 2009], максимальное — около 0.085 в расчете [Fotger, Berger, 1999]. Относительная разница составляет около 20 %.

Явно выделить какие-либо тенденции по виду кривых для различных сеток на рис. 12 не представляется возможным. Однако еще со времен исследований С. К. Годунова и В. С. Рябенского известно, что при наличии в поле течения разрывов при изучении сходимости предпочтительнее пользоваться метриками, основанными на интегралах по пространственным

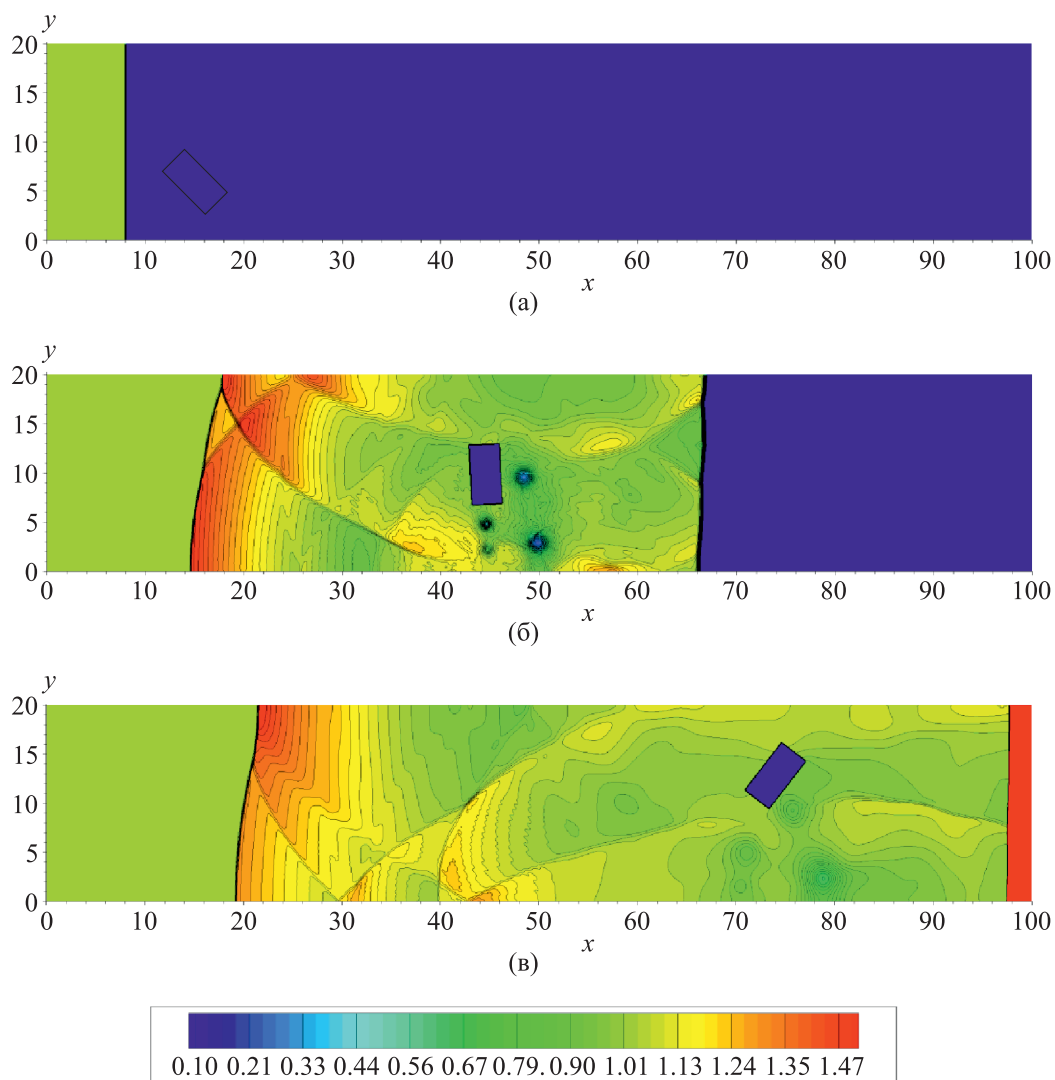


Рис. 9. Рассчитанные распределения давления в задаче о подъеме прямоугольника за УВ в последовательные моменты времени: (а) 0, (б) 60, (в) 100. Координаты, давление и моменты времени — в безразмерных единицах

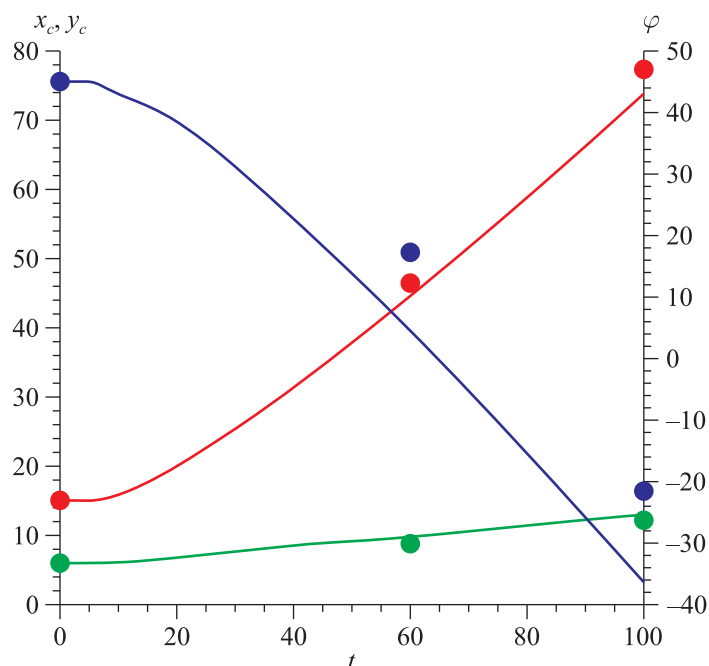


Рис. 10. Абсцисса центра масс x_c в безразмерных единицах (красный цвет), ордината центра масса y_c в безразмерных единицах (зеленый цвет) и угол поворота φ (синий цвет, в градусах) прямоугольника в зависимости от времени (в безразмерных единицах). Сплошные линии — расчет авторов, точки — расчет из [Du, Li, 2020]

координатам от величин, управляемых законами сохранения [Годунов, Рябенский, 1977]. Для методов погруженной границы, которые, как правило, не являются строго консервативными, в качестве подобной метрики часто выбирают относительную погрешность выполнения закона сохранения суммарной массы газа в расчетной области. Применительно к рассматриваемому классу задач, по-видимому, впервые это было сделано в статье [Forrer, Berger, 1999].

Точное значение массы газа в расчетной области в произвольный момент времени t , вычисленное аналитически, определяется формулой

$$M(t) = M_0 + \dot{m}t,$$

где M_0 — масса газа в начальный момент времени ($t = 0$).

Через \dot{m} обозначена скорость приращения массы за счет втекания газа через левую границу расчетной области:

$$\dot{m} = \rho_b u_b h_d = 73.104,$$

где $\rho_b = 5.014$ — плотность газа за УВ, $u_b = 0.729$ — скорость газа за УВ, распространяющейся по газу с параметрами $p_0 = 0.1$, $\rho_0 = 1.3$, $h_d = 20$ — высота левой границы расчетной области, с числом Маха 3.0. Значение массы газа в расчетной области в момент времени t , полученное из расчета, определяется формулой

$$M_{\text{calc}}(t) = \sum_{(i,j) \in \text{inner}} \rho_{i,j}^n \cdot h^2,$$

где суммирование ведется по всем внутренним ячейкам. Относительная погрешность суммарной массы газа в расчетной области определяется как

$$\varepsilon(t) = \left| 1 - M_{\text{calc}}(t) / M(t) \right|.$$

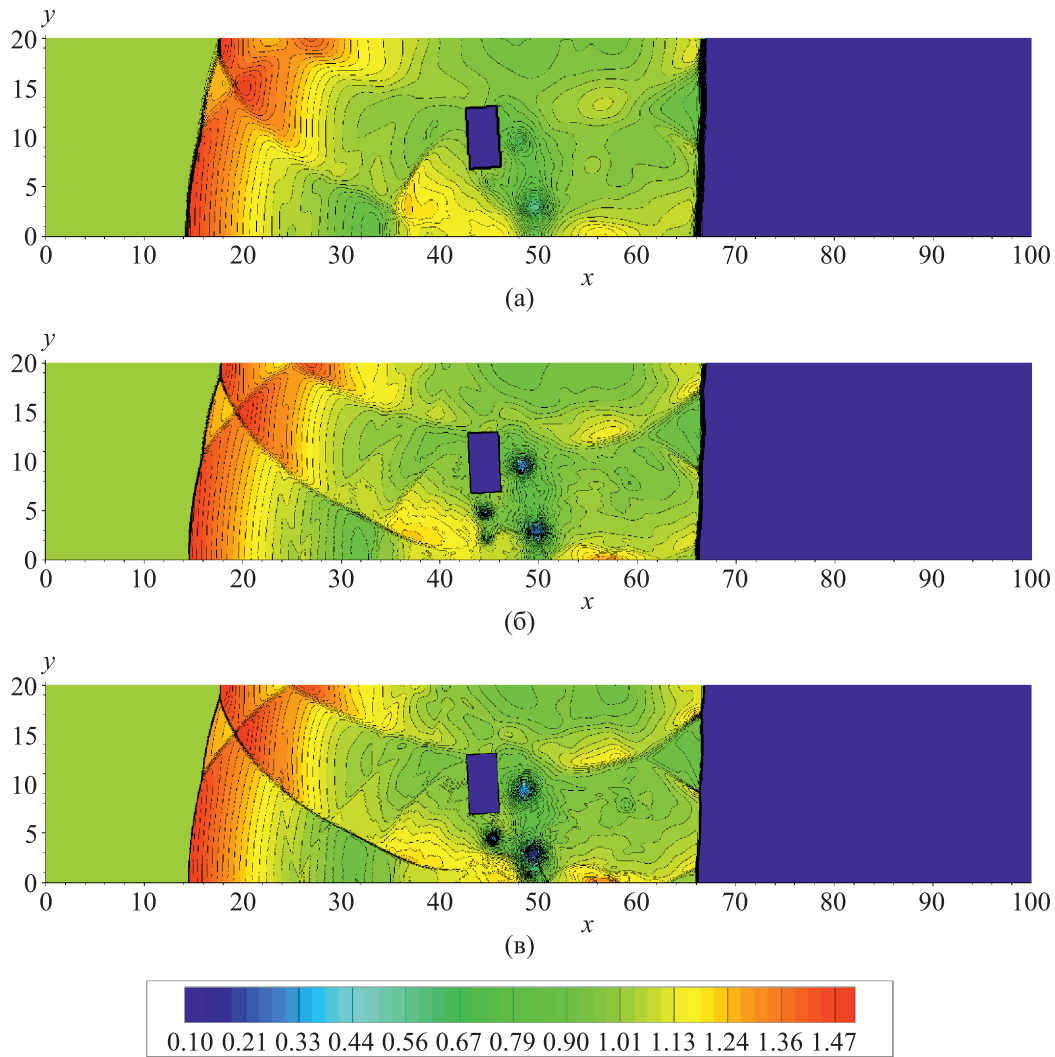


Рис. 11. Распределения давления в задаче о подъеме прямоугольника за УВ в момент времени 60 в расчетах на сетках: (а) 800×160 , (б) 1600×320 , (в) 3200×640 . Координаты, давление и момент времени — в безразмерных единицах

На рис. 13 построен график зависимости $\varepsilon(t)$. Например, $\varepsilon(100)$ в последний рассчитанный момент времени уменьшается линейно при уменьшении размера расчетной ячейки в два и в четыре раза:

$$\varepsilon(100)_{800 \times 160} \approx 1.27 \cdot 10^{-3}, \quad \varepsilon(100)_{1600 \times 320} \approx 8.0 \cdot 10^{-4}, \quad \varepsilon(100)_{3200 \times 640} \approx 3.8 \cdot 10^{-4}.$$

Аналогичные свойства демонстрируют вычислительные алгоритмы в статьях [Arienti et al., 2003; Shyue, 2006].

6. Заключение

Задача исследования динамики движения тел несферической формы в потоке является очень сложной. Существуют единичные экспериментальные и численные исследования данного вопроса. При этом вполне возможно, что именно эти малоизученные эффекты являются определяющими или, по крайней мере, важными в таком процессе, как диспергирование частиц из слоя за проходящей ударной волной. В данной работе мы предложили вычислительный

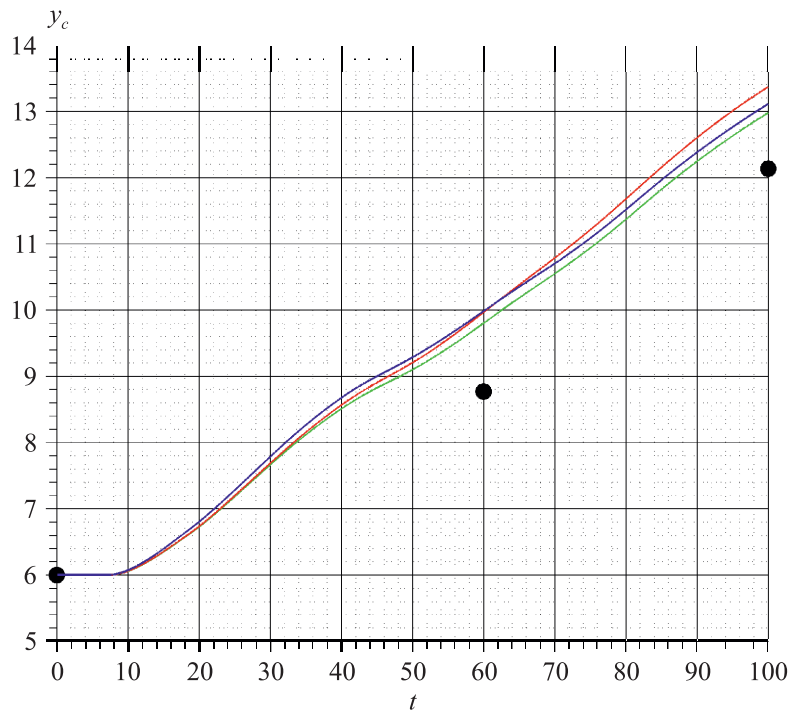


Рис. 12. Ордината центра масс тела в задаче о подъеме прямоугольника за УВ в зависимости от времени. Все в безразмерных единицах. Расчеты на сетках 800×160 (красная линия), 1600×320 (зеленая линия), 3200×640 (синяя линия). Точки — расчетные данные из [Du, Li, 2020]

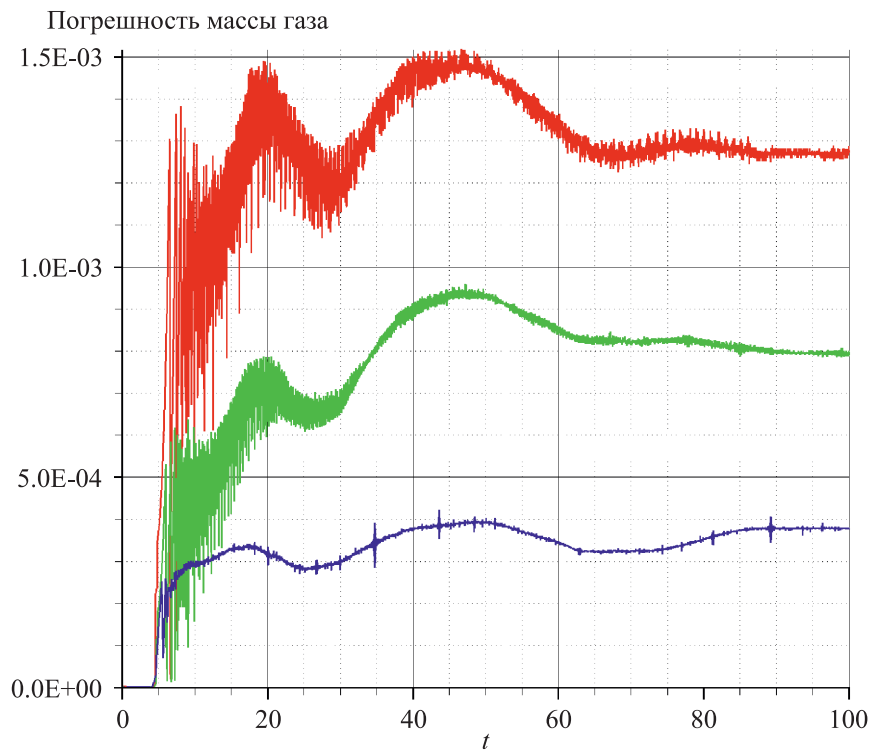


Рис. 13. Относительная погрешность выполнения закона сохранения массы газа в расчетной области. Все в безразмерных единицах. Расчеты на сетках 800×160 (красная линия), 1600×320 (зеленая линия), 3200×640 (синяя линия)

алгоритм на основе метода декартовых сеток, который способен описывать динамику поступательного и вращательного движения тел с кусочно-линейной границей в двумерной постановке. Алгоритм относительно прост в реализации. Он не требует решения задачи вычислительной геометрии о нахождении формы или площади усеченных ячеек, которые получаются при пересечении регулярных квадратных ячеек криволинейными границами подвижных тел. Это важное требование в контексте прямого моделирования взаимодействия ударной волны с пылевыми слоями, когда требуется рассматривать как минимум сотни частиц [Сидоренко, Уткин, 2020]. С другой стороны, как показывают тесты о подъеме круга, эллипса и прямоугольника за проходящей ударной волной, предложенный алгоритм не уступает в точности большому количеству других известных численных методов из семейства методов погруженной границы. На задаче о подъеме круга результаты по динамике координат центра масс лежат в пучке множества возможных траекторий, которые можно найти в литературе.

Вместе с тем, поскольку математическая модель основывается на решении уравнений Эйлера, нельзя не отметить, что начиная с некоторого момента времени после начала взаимодействия, когда начинают сказываться эффекты схемной вязкости, результаты расчета динамики движения тел по различным методикам могут существенно отличаться. Это касается вращательного движения в большей степени, чем поступательного. Можно ожидать, что при наличии в модели физической вязкости при достаточном сеточном разрешении результаты моделирования динамики движения тел будут меньше зависеть от численного метода. Кроме того, вязкие эффекты, безусловно, могут оказывать существенное влияние на динамику вращательного движения тел [Dennis et al., 1980]. Реализация метода декартовых сеток для случая вязкой модели газа является предметом дальнейших исследований. В этой связи привлекательными представляются идеи и подходы из недавней работы [Seshadri, De, 2020]. Другим направлением развития результатов является обобщение трехмерного метода декартовых сеток [Elesin et al., 2021] на случай тел сложной формы с учетом их вращения. Наконец, отметим, что в данной работе мы не затрагивали вопрос моделирования взаимодействия тел сложной формы друг с другом в потоке, а также вопрос взаимодействия тел со стенками. При этом модель взаимодействия частиц является важным фактором при рассмотрении коллективной динамики движения частиц в слое [Сидоренко, Уткин, 2020]. Разработка подобной модели и соответствующего вычислительного алгоритма также представляет безусловный интерес. Тенденции к исследованию последнего вопроса очень четко прослеживаются в современной литературе [Quintero et al., 2021].

Список литературы (References)

- Афенди́ков А. Л., Никитин В. С.* Численное моделирование на адаптивных сетках свободного движения системы тел в сверхзвуковом потоке газа // Математическое моделирование. — 2020. — Т. 32, № 12. — С. 55–64.
- Afendikov A. L., Nikitin V. S.* Chislennoe modelirovanie na adaptivnykh setkakh svobodnogo dvizheniya sistemy tel v sverkhzvukovom potoke gaza [Numerical simulation of supersonic flows around systems of free bodies] // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2020. — Vol. 32, No. 12. — P. 55–64 (in Russian).
- Бойко В. М., Поплавский С. В.* Аэродинамическое сопротивление частиц несферической формы в потоке за ударной волной // Физика горения и взрыва. — 2005. — Т. 41, № 1. — С. 81–88.
- Boiko V. M., Poplavskii S. V.* Drag of nonspherical particles in a flow behind a shock wave // Combustion, Explosion and Shock Waves. — 2005. — Vol. 41, No. 1. — P. 71–77. (Original Russian paper: *Boiko V. M., Poplavskii S. V.* Aerodinamicheskoe soprotivlenie chastits nesfericheskoi formy v potoke za udarnoi volnoi // Fizika goreniya i vzryva. — 2005. — Vol. 41, No. 1. — P. 81–88.)
- Брагин М. Д., Рогов Б. В.* Бикомпактные схемы для задач газовой динамики: обобщение на сложные расчетные области методом свободной границы // Компьютерные исследования и моделирование. — 2020. — Т. 12, № 3. — С. 487–504.
- Bragin M. D., Rogov V. B.* Bikompaktnye skhemy dlya zadach gazovoi dinamiki: obobshchenie na slozhnye raschetnye oblasti metodom svobodnoi granitsy [Bicompact schemes for gas dynamics problems: introducing complex domains using the free boundary method] // Computer Research and Modeling. — 2020. — Vol. 12, No. 3. — P. 487–504 (in Russian).

- Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. — М.: Наука, 1976.
Godunov S. K., Zabrodin A. V., Ivanov M. Ya., Kraiko A. N., Prokopov G. P. Chislennoe reshenie mnogomernykh zadach gazovoi dinamiki [Numerical solution of the multidimensional gas dynamics problems]. — Moscow: Nauka, 1976 (in Russian).
- Годунов С. К., Рябенский В. С. Разностные схемы. Введение в теорию. — М.: Наука, 1977.
Godunov S. K., Ryaben'kii V. S. Raznostnye skhemy. Vvedenie v teoriyu [Difference schemes. Introduction to the theory]. — Moscow: Nauka, 1977 (in Russian).
- Колган В. П. Применение принципа минимальных значений производной к построению конечно-разностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики // Ученые записки ЦАГИ. — 1972. — Т. 3, № 6. — С. 68–77.
Kolgan V. P. Primenenie printsipa minimal'nykh znachenii proizvodnoi k postroeniyu konechno-raznostnykh skhem dlya rascheta razryvnykh reshenii gazovoi dinamiki [Application of the principle of minimizing the derivative to the construction of finite-difference schemes for computing discontinuous solutions of gas dynamics] // *Uchenye zapiski TsAGI*. — 1972. — Vol. 3, No. 6. — P. 68–7 (in Russian).
- Лукашенко В. Т., Максимов Ф. А. Моделирование полета осколков метеорного тела с учетом вращения // Компьютерные исследования и моделирование. — 2019. — Т. 11, № 4. — С. 593–612.
Lukashenko V. T., Maksimov F. A. Modelirovanie poleta oskolkov meteornogo tela s uchedom vrashcheniya [Modeling the flight of meteoroid fragments with accounting for rotation] // *Computer Research and Modeling*. — 2019. — Vol. 11, No. 4. — P. 593–612 (in Russian).
- Лукашенко В. Т., Максимов Ф. А. Исследование аэродинамического взаимодействия фрагментов метеорного тела // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. — 2019. — Т. 20, № 1.
Lukashenko V. T., Maksimov F. A. Issledovanie aerodinamicheskogo vzaimodeistviya fragmentov meteornogo tela [The study of aerodynamic interactions between meteoroid fragments] // *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*. — 2019. — Vol. 20, No. 1 (in Russian).
- Меньшов И. С., Корнев М. А. Метод свободной границы для численного решения уравнений газовой динамики в областях с изменяющейся геометрией // Математическое моделирование. — 2014. — Т. 26, № 5. — С. 99–112.
Menshov I. S., Kornev M. A. Free-boundary method for the numerical solution of gas-dynamic equations in domains with varying geometry // *Mathematical Models and Computer Simulations*. — 2014. — Vol. 6, No. 6. — P. 612–621. (Original Russian paper: *Men'shov I. S., Kornev M. A.* Metod svobodnoi granitsy dlya chislenного resheniya uravnenii gazovoi dinamiki v oblastiakh s izmenyayushcheysya geometriey // *Matematicheskoe modelirovanie*. — 2014. — Vol. 26, No 5. — P. 99–112.)
- Сидоренко Д. А., Уткин П. С. Численное моделирование релаксации тела за проходящей ударной волной // Математическое моделирование. — 2018. — Т. 30, № 11. — С. 91–104.
Sidorenko D. A., Utkin P. S. Numerical modeling of the relaxation of a body behind the transmitted shock wave // *Mathematical Models and Computer Simulations*. — 2019. — Vol. 11, No. 4. — P. 509–517. (Original Russian paper: *Sidorenko D. A., Utkin P. S.* Chislennoe modelirovanie relaksatsii tela za prokhodyashchei udarnoi volnoi // *Matematicheskoe modelirovanie*. — 2018. — Vol. 30, No. 11. — P. 91–104.)
- Сидоренко Д. А., Уткин П. С. Численное моделирование взаимодействия проходящей ударной волны со слоем частиц методом декартовых сеток // Горение и взрыв. — 2020. — Т. 13, № 2. — С. 19–31.
Sidorenko D. A., Utkin P. S. Chislennoe modelirovanie vzaimodeistviya prokhodyashchei udarnoi volny so sloem chas-tits metodom dekartovykh setok [Numerical simulation of the interaction of a sliding shock wave with a layer of particles using Cartesian grid method] // *Gorenie i Vzryv* [Combustion and Explosion]. — 2019. — Vol. 13, No. 24. — P. 19–31 (in Russian).
- Arienti M., Hung P., Morano E., Shepherd J. E. A level set approach to Eulerian–Lagrangian coupling // *Journal of Computational Physics*. — 2003. — Vol. 185. — P. 213–251.
- Ben-Artzi M., Falcovitz J. Generalized Riemann Problems in Computational Fluid Dynamics. — Cambridge University Press, 2003.
- Bennett W. P., Nikiforakis N., Klein R. A moving boundary flux stabilization method for Cartesian cut-cell grids using directional operator splitting // *Journal of Computational Physics*. — 2018. — Vol. 368. — P. 333–358.

- Boiko V. M., Fedorov A. V., Fomin V. M., Papyrin A. N., Soloukhin R. I.* Ignition of small particles behind shock waves // *Shock Waves, Explosions and Detonations. Progress in Astronautics and Aeronautics. AIAA.* — 1983. — Vol. 87. — P. 71–87.
- Bordoloi A. D., Martinez A. A., Prestridge K.* Relaxation drag history of shock accelerated micro-particles // *Journal of Fluid Mechanics.* — 2017. — Vol. 823. — Paper R4.
- Bourke P.* Calculating the area and centroid of a polygon [Electronic resource]. — URL: <http://paulbourke.net/geometry/polygonmesh/> (accessed: 15.02.2021).
- Brahmachary S., Natarajan G., Kulkarni V., Sahoo N.* A sharp-interface immersed boundary framework for simulations of high-speed inviscid compressible flows // *International Journal for Numerical Methods in Fluids.* — 2018. — Vol. 86 — P. 770–791.
- Chertock A., Karni S., Kurganov A.* Interface tracking method for compressible multifluids // *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis.* — 2008. — Vol. 42. — P. 991–1019.
- Chertock A., Kurganov A.* A simple Eulerian finite-volume method for compressible fluids in domains with moving boundaries // *Communications in Mathematical Sciences.* — 2008. — Vol. 6, No. 3. — P. 531–556.
- Dakin G., Després B., Jaouen S.* Inverse Lax–Wendroff boundary treatment for compressible Lagrange-remap hydrodynamics on Cartesian grids // *Journal of Computational Physics.* — 2018. — Vol. 353 — P. 228–257.
- Das P., Sen O., Jacobs G., Udaykumar H. S.* A sharp interface Cartesian grid method for viscous simulation of shocked particle-laden flows // *International Journal of Computational Fluid Dynamics.* — 2017. — Vol. 3, Iss. 6–8. — P. 269–291.
- Davis S. F.* An interface tracking method for hyperbolic systems of conservation laws // *Applied Numerical Mathematics.* — 1992. — Vol. 10. — P. 447–472.
- Devals C., Jourdan G., Estivalezes J.-L., Meshkov E. E., Houas L.* Shock tube spherical particle acceleration study for drag coefficient determination // *Shock Waves.* — 2003. — Vol. 12. — P. 325–331.
- Dennis S. C. R., Singh S. N., Ingham D. B.* The steady flow due to a rotating sphere at low and moderate Reynolds numbers // *Journal of Fluid Mechanics.* — 1980. — Vol. 101. — P. 257–279.
- Du Z., Li J.* Accelerated piston problem and high order moving boundary tracking method for compressible fluid flows // *SIAM Journal of Scientific Computing.* — 2020. — Vol. 42, No. 3. — P. A1558–A1581.
- Elesin V. V., Sidorenko D. A., Utkin P. S.* Three-dimensional Cartesian grid method for the simulations of flows with shock waves in the domains with varying boundaries // *International Journal of Computational Methods.* — 2021. — Vol. 18, No. 4. — Paper 2050046. — 20 p.
- Falcovitz J., Alfandary G., Hanoch G.* A two-dimensional conservation laws scheme for compressible flows with moving boundaries // *Journal of Computational Physics.* — 1997. — Vol. 138. — P. 83–102.
- Forrer H., Berger M.* Flow simulations on Cartesian grids involving complex moving geometries // *Proceedings of 7th International Conference on Hyperbolic Problems: Theory, Numerics, Applications. Zurich, Switzerland, 1999.* — Vol. 1. — P. 315–324.
- Grétarsson J. T., Kwatra N., Fedkiw R.* Numerically stable fluid–structure interactions between compressible flow and solid structures // *Journal of Computational Physics.* — 2011. — Vol. 230, Iss. 8. — P. 3062–3084.
- Hu X. Y., Khoo B. C., Adams N. A., Huang F. L.* A conservative interface method for compressible flows // *Journal of Computational Physics.* — 2006. — Vol. 219, Iss. 2. — P. 553–578.
- Jiang M., Liu Z.* A boundary thickening-based direct forcing immersed boundary method for fully resolved simulation of particle-laden flows // *Journal of Computational Physics.* — 2019. — Vol. 390. — P. 203–231.
- Mittal R., Iaccarino G.* Immersed boundary methods // *Annual Review of Fluid Mechanics.* — 2005. — Vol. 37. — P. 239–261.

- Monasse L., Daru V., Mariotti C., Piperno S.* A conservative coupling algorithm between a compressible flow and a rigid body using an embedded boundary method // *Journal of Computational Physics*. — 2012. — Vol. 231. — P. 2977–2994.
- Nishino A., Sakamura Y., Nakayama K.* Numerical simulation of shock-induced motion of flying debris // *Proceedings of Conference of Hokoriku–Shinetsu Branch of the Japan Society of Mechanical Engineers*. — 2009. — Vol. 46. — P. 519–520.
- Oshima M., Nakayama K., Sakamura Y.* Shock wave interaction with a solid body floating in the air / K. Kontis (eds.). *Shock Wave Interactions*. — Springer, Cham, 2018. — P. 73–82.
- Pasquariello V., Hammerl G., Orley F., Hickel S., Danowaki C., Popp A., Wall W. A., Adams N. A.* A cut-cell finite volume — finite element coupling approach for fluid–structure interaction in compressible flow // *Journal of Computational Physics*. — 2016. — Vol. 307. — P. 670–695.
- Patankar N. A., Ko T., Choi H. G., Joseph D. D.* A correlation for the lift-off of many particles in plane Poiseuille flows of Newtonian fluids // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2001. — Vol. 445. — P. 55–76.
- Qiu L., Lu W., Fedkiw R.* An adaptive discretization of compressible flow using a multitude of moving Cartesian grids // *Journal of Computational Physics*. — 2016. — Vol. 305. — P. 75–110.
- Quintero B., Lain S., Sommerfeld M.* Derivation and validation of a hard-body particle-wall collision model for non-spherical particles of arbitrary shape // *Powder Technology*. — 2021. — Vol. 380 — P. 526–538.
- Saito T., Saba M., Sun M., Takayama K.* The effect of an unsteady drag force on the structure of a non-equilibrium region behind a shock wave in a gas-particle mixture // *Shock Waves*. — 2007. — Vol. 17. — P. 255–262.
- Sambasivan S. K., Udaykumar H. S.* Ghost fluid method for strong shock interactions. Part 2: Immersed solid boundaries // *AIAA Journal*. — 2009. — Vol. 47. — P. 2923–2937.
- Schneiders L., Meinke M., Schroder W.* Direct particle-fluid simulation of Kolmogorov-length-scale size particles in decaying isotropic turbulence // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2017. — Vol. 819. — P. 188–227.
- Seshadri P. K., De A.* A novel sharp interface immersed boundary framework for viscous flow simulations at arbitrary Mach number involving complex and moving boundaries // *Computers & Fluids*. — 2020. — Vol. 206. — Paper 104579.
- Shyue K. M.* A moving-boundary tracking algorithm for inviscid compressible flow // *Proceedings of the 11th International Conference on Hyperbolic Problems: Theory, Numerics, Applications*. Lyon, France, July 17–21, 2006. — P. 989–996.
- Sidorenko D., Utkin P., Boiko V.* Dynamics of motion of a pair of particles in a supersonic flow // *Proceedings of 32nd International Symposium on Shock Waves*. Singapore, 14–19 July 2019. — Paper No. OR-15-0049. — P. 1753–1760.
- Steger J. L., Warming R. F.* Flux vector splitting of the inviscid gasdynamic equations with application to finite-difference methods // *Journal of Computational Physics*. — 1981. — Vol. 40, No. 2. — P. 263–293.
- Tan S., Shu C.-W.* A high order moving boundary treatment for compressible inviscid flows // *Journal of Computational Physics*. — 2011. — Vol. 230. — P. 6023–6036.
- Toro E. F.* *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. — 3rd Edition. — Springer, 2009.
- Xu M., Yang T., Wei M.* Implementation of immersed boundary method in WENO scheme to simulate shock-structure interaction // *Proceedings of the ASME 2017 Fluids Engineering Division Summer Meeting*. Waikoloa, Hawaii, USA, July 30 – August 3, 2017. — Paper FEDSM2017-69217.