**КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2021 Т. 13 № 3 С. 487–511**
DOI: 10.20537/2076-7633-2021-13-3-487-511

МОДЕЛИ В ФИЗИКЕ И ТЕХНОЛОГИИ

УДК: 531.51

Об устойчивости гравитационной системы многих тел

К. Э. Плохотников

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Россия, 119991, ГСП-1, г. Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

Финансовый университет при Правительстве РФ,
Россия, 125993, ГСП-3, г. Москва, Ленинградский просп., д. 49

E-mail: psygma@yandex.ru

*Получено 16.03.2021, после доработки — 25.04.2021.
Принято к публикации 29.04.2021.*

В работе под гравитационной системой понимается множество точечных тел, взаимодействующих согласно закону притяжения Ньютона и имеющих отрицательное значение полной энергии. Обсуждается вопрос об устойчивости (о неустойчивости) гравитационной системы общего положения путем прямого вычислительного эксперимента. Под гравитационной системой общего положения понимается система, у которой массы, начальные позиции и скорости тел выбираются случайными из заданных диапазонов. Для проведения вычислительного эксперимента разработан новый метод численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений на больших интервалах времени. Предложенный метод позволил, с одной стороны, обеспечить выполнение всех законов сохранения путем подходящей коррекции решений, с другой — использовать стандартные методы численного решения систем дифференциальных уравнений невысокого порядка аппроксимации. В рамках указанного метода траектория движения гравитационной системы в фазовом пространстве собирается из частей, длительность каждой из которых может быть макроскопической. Построенная траектория, вообще говоря, является разрывной, а точки стыковки отдельных кусков траектории выступают как точки ветвления. В связи с последним обстоятельством предложенный метод отчасти можно отнести к классу методов Монте-Карло. Общий вывод проведенной серии вычислительных экспериментов показал, что гравитационные системы общего положения с числом тел 3 и более, вообще говоря, неустойчивы. В рамках предложенного метода специально рассмотрены частные случаи равенства нулю момента импульса гравитационной системы с числом тел 3 и более, а также задача движения двух тел. Отдельно рассмотрен случай численного моделирования динамики во времени Солнечной системы. С позиций вычислительного эксперимента на базе аналитических методов, а также прямых численных методов высокого порядка аппроксимации (10 и выше) устойчивость Солнечной системы ранее продемонстрирована на интервале в пять и более миллиардов лет. В силу ограничений на имеющиеся вычислительные ресурсы устойчивость динамики планет Солнечной системы в рамках использования предлагаемого метода удалось подтвердить на срок десять миллионов лет. С помощью вычислительного эксперимента рассмотрен также один из возможных сценариев распада Солнечной системы.

Ключевые слова: численные методы, обыкновенные дифференциальные уравнения, метод Монте-Карло

© 2021 Константин Эдуардович Плохотников
Статья доступна по лицензии Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Unported License.
Чтобы получить текст лицензии, посетите веб-сайт http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/
или отправьте письмо в Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

COMPUTER RESEARCH AND MODELING
2021 VOL. 13 NO. 3 P. 487–511
DOI: 10.20537/2076-7633-2021-13-3-487-511

MODELS IN PHYSICS AND TECHNOLOGY

UDC: 531.51

On the stability of the gravitational system of many bodies

K. E. Plokhotnikov

M. V. Lomonosov Moscow State University,
1/2 Leninskie Gory, Moscow, GSP-1, 119991, Russia

Financial University under the Government of the Russian Federation,
49 Leningradsky Prospekt, Moscow, GSP-3, 125993, Russia

E-mail: psygma@yandex.ru

Received 16.03.2021, after completion — 25.04.2021.
Accepted for publication 29.04.2021.

In this paper, a gravitational system is understood as a set of point bodies that interact according to Newton's law of attraction and have a negative value of the total energy. The question of the stability (nonstability) of a gravitational system of general position is discussed by direct computational experiment. A gravitational system of general position is a system in which the masses, initial positions, and velocities of bodies are chosen randomly from given ranges. A new method for the numerical solution of ordinary differential equations at large time intervals has been developed for the computational experiment. The proposed method allowed, on the one hand, to ensure the fulfillment of all conservation laws by a suitable correction of solutions, on the other hand, to use standard methods for the numerical solution of systems of differential equations of low approximation order. Within the framework of this method, the trajectory of a gravitational system in phase space is assembled from parts, the duration of each of which can be macroscopic. The constructed trajectory, generally speaking, is discontinuous, and the points of joining of individual pieces of the trajectory act as branch points. In connection with the latter circumstance, the proposed method, in part, can be attributed to the class of Monte Carlo methods. The general conclusion of a series of computational experiments has shown that gravitational systems of general position with a number of bodies of 3 or more, generally speaking, are unstable. In the framework of the proposed method, special cases of zero-equal angular momentum of a gravitational system with a number of bodies of 3 or more, as well as the problem of motion of two bodies, are specially considered. The case of numerical modeling of the dynamics of the solar system in time is considered separately. From the standpoint of computational experiments based on analytical methods, as well as direct numerical methods of high-order approximation (10 and higher), the stability of the solar system was previously demonstrated at an interval of five billion years or more. Due to the limitations on the available computational resources, the stability of the dynamics of the planets of the solar system within the framework of the proposed method was confirmed for a period of ten million years. With the help of a computational experiment, one of the possible scenarios for the disintegration of the solar systems is also considered.

Keywords: numerical methods, ordinary differential equations, Monte Carlo method.

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2021, vol. 13, no. 3, pp. 487–511 (Russian).

© 2021 Konstantin E. Plokhotnikov
This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Unported License.
To view a copy of this license, visit http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/
or send a letter to Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

1. Введение

В работе исследуется вопрос об устойчивости гравитационной системы, состоящей из многих тел. Под гравитационной системой понимается совокупность тел, полная энергия которых отрицательна. Для целей исследования устойчивости разработан новый численный метод решения обыкновенных дифференциальных уравнений динамики многих тел, взаимодействующих согласно гравитационному закону Ньютона.

Задача устойчивости/неустойчивости гравитационной системы на примере изучения динамики Солнечной системы имеет давнюю историю, она ставилась в работах Ньютона, Лапласа, Эйлера, Лагранжа и ряда других исследователей. Если классические аналитические решения показывали устойчивость и почти периодичность движения, то численные и численно-аналитические решения демонстрировали хаотичность движения планет [Холшевников, Кузнецов, 2007]. Концепция динамического хаоса применительно к Солнечной системе [Sussman, Wisdom, 1992] позволила перейти к систематическому изучению феномена хаотического движения планет в долгопериодической и вековой перспективе [Laskar, 1996]. Обнаружилась неразрывная связь хаоса с динамикой не только планет Солнечной системы, но и прочих инфинитезимальных тел [Резонансы…, 2006]. Определилась специализация в изучении динамики планет и прочих тел Солнечной системы. С одной стороны, важная для практики задача разработки цифрового, максимально детерминированного образа поведения Солнечной системы в краткосрочной перспективе [Питьева и др., 2019], с другой стороны, изучение динамики на длительный срок, исчисляемый временем существования Солнечной системы, т. е. пять и более миллиардов лет [Zink et al., 2020].

Основной предпосылкой разработки нового численного метода явилось то обстоятельство, что традиционные численные методы решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений [Trenti, Hut, 2008] не могут быть использованы в расчетах на длительный отрезок времени, так как рано или поздно численное решение «разрушается» из-за несохранения прежде всего энергии гравитационной системы. Для преодоления указанной трудности в исследованиях сложились два пути. Первый путь основан на разработке методов численного решения систем дифференциальных уравнений высокого порядка аппроксимации (10 и более) [Aarseth, 2003; Rein, Spiege, 2015], что позволило, с одной стороны, изучить динамику на срок пять и более миллиардов лет, с другой — обеспечить приемлемое соблюдение закона сохранения энергии гравитационной системы на весь срок интегрирования. Второй путь связан с многократной коррекцией численных решений к соблюдению всех законов сохранения в течение периода численного расчета [Nacozy, 1971; Fukushima, 2003]. Как будет ясно из дальнейшего изложения, представленная работа может быть отнесена ко второму пути.

Далее по умолчанию тела гравитационной системы будут считаться непротяженными, т. е. точечными. Перейдем в безразмерную систему единиц. В качестве характерных значений массы, длины и времени возьмем массу Солнца, $M_{\odot} = 1.9855 \cdot 10^{30}$ кг, расстояние от Солнца до Нептуна, $L = 4.503 \cdot 10^{12}$ м, и время $T = \dfrac{L^{3/2}}{\gamma^{1/2} M_{\odot}^{1/2}} = 8.3008 \cdot 10^{8}$ с = 26.3217 лет, где гравитационная постоянная $\gamma = 6.674184 \cdot 10^{-11}$ м^{3}с$^{-2}$кг$^{-1}$. В этом случае характерная величина скорости составит значение V = 5.4248 км/с.

Запишем в безразмерной форме уравнения Ньютона, описывающие динамику гравитационной системы, состоящей из N точечных тел массой $m_1, \ldots, m_N$, тогда

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{v}_i, \\ \dot{\mathbf{v}}_i = -\sum\limits_{j=1,\, j\neq i}^{N} \dfrac{m_j}{r_{i,j}^3} \mathbf{r}_{i,j}, \end{cases} \tag{1}$$

где $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$, $\mathbf{v}_i = (v_{x,i}, v_{y,i}, v_{z,i})$ — позиции и скорости i-го тела, $r_{i,j} = \left|\mathbf{r}_{i,j}\right|$, $i, j = 1, \ldots, N$, точка над величинами обозначает производную по времени.

К решению системы уравнений (1) был применен один из стандартных решателей системы дифференциальных уравнений среды MATLAB на огромном отрезке времени $[0, 10^8]$ (в размерных единицах на срок $\approx 2.63 \cdot 10^9$ лет) на предмет изучения выполнения прежде всего закона сохранения энергии. Использовался решатель ode23, в котором реализован метод Рунге–Кутты порядка два–три в смысле работы [Bogacki, Shampino, 1989] с относительной и абсолютной точностью 10^{-3} и 10^{-6} соответственно. Для определенности считалось, что $N = 15$, $L = 1$, $V = 1$. Массы, начальные положения в пространстве и скорости выбирались равномерно случайными числами из областей $[0, 1]$, $[-L, L]^3$, $[-V, V]^3$ соответственно. Оказалось, что со временем полная энергия не сохраняется, имеет место заметный «дребезг», когда энергия резко уходит вниз, а затем становится положительной и выходит на некоторое плато. Отметим, что на столь огромных интервалах времени все остальные решатели среды MATLAB также не сохраняют энергию.

Перейдем в систему координат центра масс, которая имеет следующие положение и скорость: $\mathbf{R} = \frac{1}{M_\Sigma}\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i$, $\mathbf{V} = \frac{1}{M_\Sigma}\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i$, где $M_\Sigma = \sum_{i=1}^{N} m_i$, а $\mathbf{R} = \mathbf{V}t + \mathbf{R}_0$, t — время, $\mathbf{R}_0$ — некоторый фиксированный вектор. Для описания тел гравитационной системы введем новые координаты $\mathbf{q}_i$, $i = 1, ..., N$, и скорости $\mathbf{u}_i$, $i = 1, ..., N$, согласно замене переменных: $\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \mathbf{q}_i$, $\mathbf{v}_i = \mathbf{V} + \mathbf{u}_i$, $i = 1, \ldots, N$. После замены переменных система уравнений (1) перепишется в виде

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{u}_i, \\ \dot{\mathbf{u}}_i = -\sum\limits_{j=1, j\neq i}^{N} \dfrac{m_j}{q_{i,j}^3} \mathbf{q}_{i,j}, \end{cases} \tag{2}$$

где $\mathbf{q}_{i,j} = \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j$, $q_{i,j} = \left|\mathbf{q}_{i,j}\right|$, $i, j = 1, \ldots, N$. С учетом замены переменных при переходе в систему центра масс, а также закона сохранения импульса должны выполняться векторные равенства:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{q}_i = \mathbf{0}, \quad \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{u}_i = \mathbf{0}. \tag{3}$$

Помимо уравнений (3), должны выполняться законы сохранения момента импульса и энергии:

$$\mathbf{k}_0 = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{q}_i \times \mathbf{u}_i, \tag{4}$$

$$e_0 = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \mathbf{u}_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1, i\neq j}^{N} \frac{m_i m_j}{q_{i,j}}. \tag{5}$$

Идея численного решения системы уравнений (2), которая позволит преодолеть несохранение энергии при использовании стандартных решателей, состоит в комбинации специальной процедуры коррекции решений к законам сохранения и метода Монте-Карло.

Понятие полной консервативности применительно к разностным схемам уравнений в частных производных активно обсуждалось А. А. Самарским [Самарский, 1977]. Отметим, что построить конечно-разностную схему для системы уравнений (2), которая обеспечивает точное выполнение закона сохранения импульса и момента импульса, довольно легко. Обеспечить же точное выполнение закона сохранения энергии на конечно-разностном уровне не просто. Отметим так называемые симплектические схемы [Wisdom, Holman, 1991; Feng, Qin, 2010], которые при некоторых ограничениях обеспечивают полную консервативность, а также известное в небесной механике преобразование Кустаанхейма–Штифеля [Штифель, Шейфеле, 1975; Kozlov, 2007], которое позволяет по-новому представить и описать кеплеровские орбиты пары взаимодействующих тел.

Далее путем вычислительного эксперимента покажем, что гравитационная система общего положения с числом тел 3 и более, вообще говоря, неустойчива. Под общим положением будем понимать, что массы тел, их начальные позиции и скорости выбираются случайно из некоторых областей. Устойчивые гравитационные системы при специальном подборе масс, начальных положений и скоростей, как показывают известные решения Лагранжа в задаче трех тел и ряд других решений, существуют.

С учетом работы [Арнольд и др., 1985] возьмем следующее формальное определение устойчивости гравитационной системы. Гравитационная система устойчива, когда $0 < q_{i,j}(t) \le C$ для всех моментов времени, начиная с некоторого, т. е. при $t \ge t_0$, где $i \ne j$; $i, j = 1, \ldots, N$, C — некоторая неотрицательная константа, t_0 — начальный момент времени. Согласно теореме Якоби, если гравитационная система устойчива в указанном выше смысле, полная энергия отрицательна. Обратное, вообще говоря, неверно. Более того, даже если полная энергия отрицательна, гравитационная система общего положения при $N > 2$, вообще говоря, неустойчива. Для иллюстрации последнего утверждения рассмотрим процедуру генерации методом Монте-Карло точек фазового пространства, удовлетворяющих всем законам сохранения.

2. Алгоритм генерации точек фазового пространства

Алгоритм генерации точек фазового пространства размерности $6N$ приготовим в виде процедуры Монте-Карло. Предполагаемый алгоритм должен обеспечить выполнение всех законов сохранения в формате уравнений (3)–(5) и не содержать каких-либо ограничений, которые бы препятствовали генерации любых возможных точек гиперповерхности законов сохранения, имеющих размерность $6N - 10$.

Пусть путем случайного разыгрывания приготовлен набор из $2N$ трехмерных векторов $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_N, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_N\}$, взятых равномерно случайно из куба $[-1, 1]^3$. К данному набору векторов применим операцию перехода в систему центра масс, т. е.

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{a}_i - \frac{1}{M_\Sigma}\sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{a}_j, \quad \mathbf{B}_i = \mathbf{b}_i - \frac{1}{M_\Sigma}\sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{b}_j. \tag{6}$$

Далее положим, что

$$\mathbf{q}_i = (\lambda_x A_{x,i}, \lambda_y A_{y,i}, \lambda_z A_{z,i}), \quad \mathbf{u}_i = (\mu_x B_{x,i}, \mu_y B_{y,i}, \mu_z B_{z,i}), \tag{7}$$

где $i = 1, \ldots, N$; $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z, \mu_x, \mu_y, \mu_z$ — пока не определенные коэффициенты. Отметим, что представление искомого набора векторов в формате (6), (7) обеспечивает выполнение условий (3), включая закон сохранения импульса.

Подставим представление (7) в закон сохранения момента импульса (4), тогда

$$\mathbf{k}_0 = (c_{11}\lambda_y\mu_z - c_{12}\lambda_z\mu_y, c_{21}\lambda_z\mu_x - c_{22}\lambda_x\mu_z, c_{31}\lambda_x\mu_y - c_{32}\lambda_y\mu_x), \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned} c_{11} &= \sum_{i=1}^{N} m_i A_{y,i} B_{z,i}, \quad c_{12} = \sum_{i=1}^{N} m_i A_{z,i} B_{y,i}, \\ c_{21} &= \sum_{i=1}^{N} m_i A_{z,i} B_{x,i}, \quad c_{22} = \sum_{i=1}^{N} m_i A_{x,i} B_{z,i}, \\ c_{31} &= \sum_{i=1}^{N} m_i A_{x,i} B_{y,i}, \quad c_{32} = \sum_{i=1}^{N} m_i A_{y,i} B_{x,i}. \end{aligned} \tag{9}$$

Пусть теперь вектор момента импульса $\mathbf{k}_0$ считается заданным, тогда с учетом (8) можно записать систему трех уравнений вида

$$\begin{cases} c_{11}\lambda_y\mu_z - c_{12}\lambda_z\mu_y = k_{0,x}, \\ c_{21}\lambda_z\mu_x - c_{22}\lambda_x\mu_z = k_{0,y}, \\ c_{31}\lambda_x\mu_y - c_{32}\lambda_y\mu_x = k_{0,z}. \end{cases} \tag{10}$$

Решим линейную систему уравнений (10) относительно набора λ_x, λ_y, λ_z, она имеет единственное решение, когда детерминант системы (10) $\Delta = \mu_x\mu_y\mu_z(c_{11}c_{21}c_{31} - c_{12}c_{22}c_{32})$ отличен от нуля. С учетом (9) непосредственной проверкой можно убедиться, что выражение $c = c_{11}c_{21}c_{31} - c_{12}c_{22}c_{32} \equiv 0$, когда $N = 2$. Другими словами, задача двух тел стоит особняком и требует специального рассмотрения в рамках данного подхода. Кроме того, специального рассмотрения требует случай, когда момент импульса гравитационной системы равен нулю, т. е. $\mathbf{k}_0 = \mathbf{0}$.

Запишем решение линейной системы уравнений (10) относительно неизвестных λ_x, λ_y, λ_z, когда детерминант Δ отличен от нуля, тогда

$$\begin{aligned} \lambda_x &= \frac{\mu_x}{\Delta}(k_{0,x}\mu_x c_{21}c_{32} + k_{0,y}\mu_y c_{12}c_{32} + k_{0,z}\mu_z c_{11}c_{21}), \\ \lambda_y &= \frac{\mu_y}{\Delta}(k_{0,x}\mu_x c_{21}c_{31} + k_{0,y}\mu_y c_{12}c_{31} + k_{0,z}\mu_z c_{12}c_{22}), \\ \lambda_z &= \frac{\mu_z}{\Delta}(k_{0,x}\mu_x c_{22}c_{32} + k_{0,y}\mu_y c_{11}c_{31} + k_{0,z}\mu_z c_{11}c_{22}). \end{aligned} \tag{11}$$

Пусть $\mu_x = V\xi_x$, $\mu_y = V\xi_y$, $\mu_z = V\xi_z$, где ξ_x, ξ_y, ξ_z — равномерно случайные числа из отрезка [–1, 1], тогда

$$\begin{aligned} \lambda_x &= \frac{1}{V\xi_y\xi_z c}(k_{0,x}\xi_x c_{21}c_{32} + k_{0,y}\xi_y c_{12}c_{32} + k_{0,z}\xi_z c_{11}c_{21}) = \frac{p_x}{V}, \\ \lambda_y &= \frac{1}{V\xi_x\xi_z c}(k_{0,x}\xi_x c_{21}c_{31} + k_{0,y}\xi_y c_{12}c_{31} + k_{0,z}\xi_z c_{12}c_{22}) = \frac{p_y}{V}, \\ \lambda_z &= \frac{1}{V\xi_x\xi_y c}(k_{0,x}\xi_x c_{22}c_{32} + k_{0,y}\xi_y c_{11}c_{31} + k_{0,z}\xi_z c_{11}c_{22}) = \frac{p_z}{V}. \end{aligned} \tag{12}$$

С учетом (12) выразим точку фазового пространства, найденную методом Монте-Карло, через один-единственный неизвестный параметр V, а именно:

$$\mathbf{q}_i = \frac{1}{V}(p_x A_{x,i}, p_y A_{y,i}, p_z A_{z,i}), \qquad \mathbf{u}_i = V(\xi_x B_{x,i}, \xi_y B_{y,i}, \xi_z B_{z,i}),\ i = 1, \ldots, N. \tag{13}$$

Подставим координаты точки (13) в уравнение (5), определяющее полную энергию e_0 гравитационной системы, тогда

$$V^2\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i(\xi_x^2 B_{x,i}^2 + \xi_y^2 B_{y,i}^2 + \xi_z^2 B_{z,i}^2) - \frac{V}{2}\sum_{i,j=1,i\neq j}^{N}\frac{m_i m_j}{\sqrt{p_x^2 A_{x,i,j}^2 + p_y^2 A_{y,i,j}^2 + p_z^2 A_{z,i,j}^2}} - e_0 = 0. \tag{14}$$

Поскольку уравнение (14) относительно неизвестной характерной скорости V является квадратным, постольку при $D = e_{pot}^2 + 4e_{kin}e_0 \geq 0$ могут быть два вещественных решения $V_{1,2}$, т. е.

$$V_1 = \frac{-e_{pot} - \sqrt{D}}{2e_{kin}}, \qquad V_2 = \frac{-e_{pot} + \sqrt{D}}{2e_{kin}}, \tag{15}$$

где под $e_{kin} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i (\xi_x^2 B_{x,i}^2 + \xi_y^2 B_{y,i}^2 + \xi_z^2 B_{z,i}^2)$, $e_{pot} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1, i\neq j}^{N} \frac{m_i m_j}{\sqrt{p_x^2 A_{x,i,j}^2 + p_y^2 A_{y,i,j}^2 + p_z^2 A_{z,i,j}^2}}$ понимаются кинетическая и потенциальная энергии.

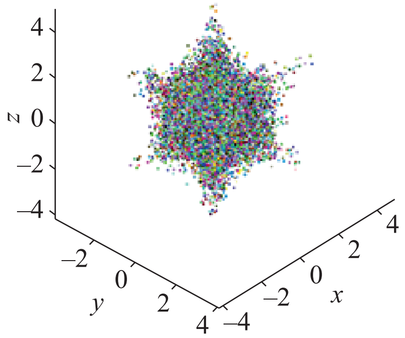
В итоге с учетом выполнения уравнения (15) построен алгоритм генерации методом Монте-Карло набора точек фазового пространства, которые лежат на гиперповерхности всех требуемых законов сохранения. Варьируя набор случайных величин ξ_x, ξ_y, ξ_z, получим искомые точки (13) в неограниченном количестве. Далее буквой M обозначим число экспериментов Монте-Карло.

Отметим, что фазовые точки, лежащие на гиперповерхности законов сохранения, являются одновременно точками некоторых траекторий-решений системы уравнений (2). Осталось связать подходящие пары фазовых точек в единую траекторию и получить конечно-разностное и точное решение одновременно [Дородницын, Капцов, 2013; Дородницын, 2001]. С некоторым упрощением и оговорками именно этот сценарий реализован в следующем разделе.

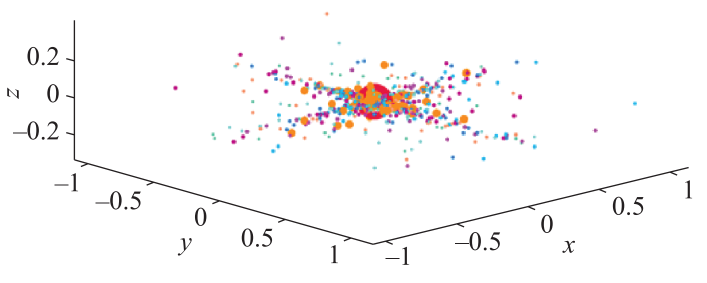
На рис. 1, *а* приведен типичный образец позиционирования тел гравитационной системы, когда $N = 100$, $M = 300$, $|\mathbf{k}_0| = 2.5$, $e_0 = -10^3$. Массы в гравитационной системе выбирались равномерно случайными из отрезка [0, 1], а характерная скорость V выбиралась равновероятно случайно из двух значений (15), т. е. $V = \{V_1, V_2\}$.

На рис. 1, *б* в системе центра масс приведен фрагмент позиционирования тел Солнечной системы, состоящей из Солнца и восьми планет. Позиции планет найдены с помощью процедуры генерации методом Монте-Карло (6)–(15) при заданных значениях момента импульса и энергии гравитационной системы. Среди прочего в расчете были использованы следующие значения констант: $N = 9$, $M = 100$, $k_0 = 6.4549 \cdot 10^{-4}$, $e_0 = -0.0034$, $V = \{V_1, V_2\}$. На рис. 1, *б* Солнце обозначено маркером в виде окружности, которая расположена в центре рисунка. На периферии наиболее крупным маркером в виде точки обозначен Юпитер. Иные планеты обозначены более мелкими точками. Скопление точек тел в пространстве отчетливо проявляет наличие плоскости, похожей на плоскость эклиптики Солнечной системы.

Отметим, что скопление точек на рис. 1, *а* не выглядит компактным, явно видны шесть отростков конической формы, потенциально уходящих на бесконечность. Это обстоятельство выступает в качестве иллюстрации того, что гравитационная система с числом тел больше 2, вообще говоря, неустойчива. Аналогичная картина с поправкой на квазидвумерность позиционирования тел Солнечной системы имеет место и для рис. 1, *б*.



(а)



(б)

Рис. 1. Типичные образцы позиционирования в пространстве: а) ста тел со случайной массой; б) Солнца и восьми планет Солнечной системы

Приведем еще два косвенных свидетельства неустойчивости гравитационной системы общего положения путем построения графиков зависимости нижней и верхней границ критерия устойчивости от энергии гравитационной системы e_0 и от числа Монте-Карло экспериментов M.

Перепишем критерий устойчивости гравитационной системы в следующем виде: $0 < q_{\min} \le q_{i,j} \le q_{\max}$, где $i \ne j$; $i, j = 1, \ldots, N$. Учитывая процедуру (6)–(15) генерации фазовых точек $(\mathbf{q}_1^{(\alpha)}, \mathbf{u}_1^{(\alpha)}, \ldots, \mathbf{q}_N^{(\alpha)}, \mathbf{u}_N^{(\alpha)})$, $\alpha = 1, \ldots, M$, построим графики зависимости значений величин $q_{\min} = \min\limits_{\alpha=1,\ldots,M; i<j} q_{i,j}^{(\alpha)}$, $q_{\max} = \max\limits_{\alpha=1,\ldots,M; i<j} q_{i,j}^{(\alpha)}$ от энергии гравитационной системы e_0.

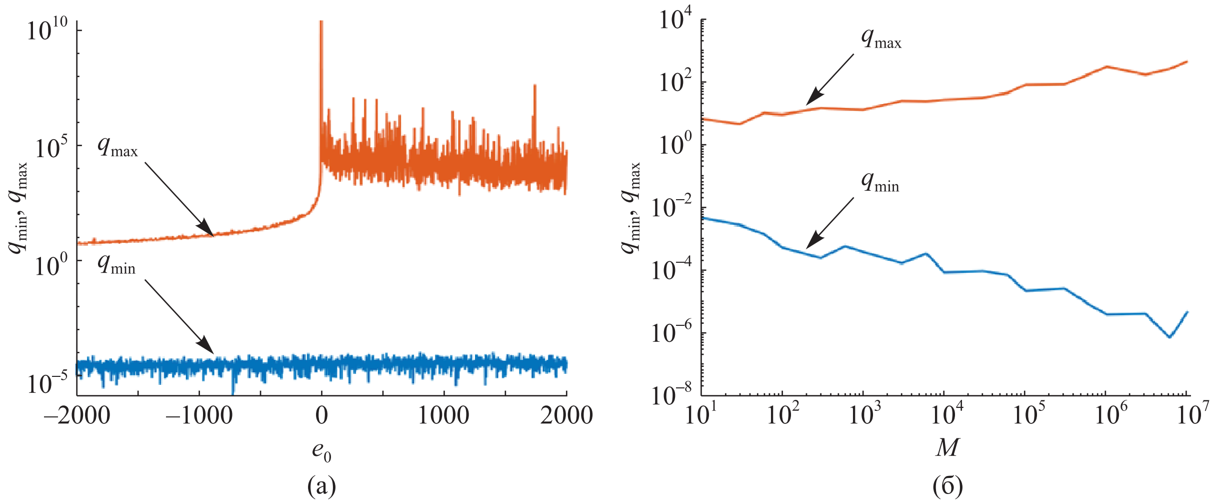


Рис. 2. Зависимости нижней ($q_{\min}$) и верхней ($q_{\max}$) границ критерия устойчивости: а) от энергии гравитационной системы e_0; б) от числа Монте-Карло экспериментов M

На рис. 2, *а* приведен типичный пример зависимостей $q_{\min}(e_0)$ и $q_{\max}(e_0)$. В расчете выбирались следующие значения параметров: $N = 10^2$, $M = 10^3$, $k_0 = 2.5$. Таким образом, если не принимать в расчет малые случайные флуктуации, то нижняя граница критерия устойчивости $q_{\min}(e_0)$ практически не зависит от энергии e_0 и от ее знака. Значение верхней границы критерия устойчивости $q_{\max}(e_0)$, а также ее вариабельность с учетом логарифмического масштаба заметно увеличились при переходе от отрицательных значений энергии e_0 к положительным значениям. С учетом теоремы Якоби об устойчивости гравитационной системы данное обстоятельство легко объяснимо.

На рис. 2, *б* приведены типичные графики зависимости нижней и верхней границ критерия устойчивости от числа Монте-Карло экспериментов M. Прочие значения параметров расчета выбирались следующими: $N = 10$, $e_0 = -10$, $k_0 = 0.5$. Видно, что нижняя граница критерия устойчивости квазимонотонно уменьшается, а верхняя граница, наоборот, квазимонотонно возрастает с ростом числа экспериментов Монте-Карло.

3. Построение траектории движения

Пусть с учетом (3) при заданном числе тел N в гравитационной системе построена конфигурация $(\mathbf{q}_1^{(0)}, \ldots, \mathbf{u}_N^{(0)})$, которую рассмотрим в качестве начальной. Указанная начальная конфигурация определяет момент импульса $\mathbf{k}_0$ и полную энергию e_0 гравитационной системы.

Используя один из стандартных численных алгоритмов, решим систему уравнений (2) на отрезке времени $[0, T_1]$, стартуя с начальных данных $(\mathbf{q}_1^{(0)}, \ldots, \mathbf{u}_N^{(0)})$. Пусть в момент времени

$t = T_1$ найдена конфигурация $(\mathbf{q}_1^{(1)},...,\mathbf{u}_N^{(1)})$, которая, вообще говоря, не удовлетворяет законам сохранения (3)–(5). Будем полагать, что конфигурация $(\mathbf{q}_1^{(1)},...,\mathbf{u}_N^{(1)})$ не слишком далеко отстоит от гиперповерхности законов сохранения. В каком смысле «не слишком далеко», станет понятно далее.

Рассмотрим процедуру проектирования произвольной конфигурации $(\mathbf{q}_1,...,\mathbf{u}_N)$ на гиперповерхность законов сохранения (3)–(5). Для удовлетворения условий (3) необходимо осуществить преобразование

$$\mathbf{q}_i \to \mathbf{q}_i - \frac{1}{M_\Sigma}\sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{q}_j, \quad \mathbf{u}_i \to \mathbf{u}_i - \frac{1}{M_\Sigma}\sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{u}_j, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{16}$$

Преобразование (16) обеспечивает возврат в систему координат центра масс гравитационной системы, когда верны равенства $\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{q}_i = \mathbf{0}$ и $\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{u}_i = \mathbf{0}$.

Для удовлетворения законам сохранения момента импульса и энергии (4), (5) рассмотрим следующее преобразование:

$$\mathbf{q}_i \to (H_x q_{x,i}, H_y q_{y,i}, H_z q_{z,i}), \quad \mathbf{u}_i \to (G_x u_{x,i}, G_y u_{y,i}, G_z u_{z,i}), \ i = 1, \ldots, N, \tag{17}$$

где параметры H_x, H_y, H_z, G_x, G_y, G_z пока не определены. Учитывая преобразование (17) в (4), (5), получим

$$\begin{gathered} c_{11}H_y G_z - c_{12}H_z G_y = k_{0,x}, \ \ c_{21}H_z G_x - c_{22}H_x G_z = k_{0,y}, \ \ c_{31}H_x G_y - c_{32}H_y G_x = k_{0,z}, \\ \frac{1}{2}c_{41}G_x^2 + \frac{1}{2}c_{42}G_y^2 + \frac{1}{2}c_{43}G_z^2 - \sum_{i<j}\frac{m_i m_j}{\sqrt{H_x^2 q_{x,i,j}^2 + H_y^2 q_{y,i,j}^2 + H_z^2 q_{z,i,j}^2}} = e_0, \end{gathered} \tag{18}$$

где

$$\begin{gathered} c_{11} = \sum_i m_i q_{y,i} u_{z,i}, \quad c_{12} = \sum_i m_i q_{z,i} u_{y,i}; \quad c_{21} = \sum_i m_i q_{z,i} u_{x,i}, \quad c_{22} = \sum_i m_i q_{x,i} u_{z,i}; \\ c_{31} = \sum_i m_i q_{x,i} u_{y,i}, \quad c_{32} = \sum_i m_i q_{y,i} u_{x,i}; \quad c_{41} = \sum_i m_i u_{x,i}^2, \quad c_{42} = \sum_i m_i u_{y,i}^2, \quad c_{43} = \sum_i m_i u_{z,i}^2. \end{gathered}$$

С учетом (18) оказывается, что для выполнения законов сохранения момента импульса и энергии необходимо найти решение системы четырех нелинейных алгебраических уравнений (18) относительно шести неизвестных: H_x, H_y, H_z, G_x, G_y, G_z.

Отметим, что процедура преобразования (16), (17) с целью обеспечения выполнения законов сохранения отчасти похожа на метод, первоначально предложенный в работе [Nacozy, 1971]. В указанной работе численные ошибки компенсировались путем коррекции позиций и скоростей всех тел гравитационной системы так, чтобы искомые законы сохранения имели место. В нашем случае выбор процедуры коррекции решений к законам сохранения вытекает из процедуры случайной генерации точек фазового пространства гиперповерхности законов сохранения и связан с перенормировкой позиций и скоростей тел гравитационной системы. На первом этапе согласно (16) осуществляется приведение позиций и скоростей каждого из тел к центру масс. На втором этапе согласно (17), (18) производится единая корректировка позиций и скоростей всех тел гравитационной системы к законам сохранения момента импульса и энергии. Дальнейшее развитие подхода [Nacozy, 1971] имело место в работе [Fukushima, 2003], где вводился единый для позиций и скоростей тел коэффициент, подбор которого осуществлялся путем решения соответствующего кубического уравнения для обеспечения выполнения закона сохранения полной энергии. В нашей модели предложенная выше процедура в части уравнений (17), (18) предполагает введение шести коэффициентов, обеспечивающих выполнение как закона сохранения момента импульса, так и энергии. При этом приходится решать не кубическое, а квадратное уравнение при подборе соответствующего коэффициента, обеспечивающего выполнение закона сохранения энергии гравитационной системы.

Решим систему уравнений (18), исходя из предположения, что точка фазового пространства $(\mathbf{q}_1,...,\mathbf{u}_N)$ незначительно отстоит от поверхности, на которой гравитационная система имеет заданные значения момента импульса и энергии. Данное обстоятельство означает, что параметры H_x, H_y, H_z, G_x, G_y, G_z мало отличаются от единицы, т. е. $H_x = 1 + h_x$, …, $G_z = 1 + g_z$, где $|h_x| \ll 1$, …, $|g_z| \ll 1$. Оставляя бесконечно малые по h_x, h_y, h_z, g_x, g_y, g_z первого порядка, получим

$$\begin{gathered} c_{11}(h_y + g_z) - c_{12}(h_z + g_y) = \Delta k_x, \quad c_{21}(h_z + g_x) - c_{22}(h_x + g_z) = \Delta k_y, \\ c_{31}(h_x + g_y) - c_{32}(h_y + g_x) = \Delta k_z, \quad c_{41}g_x + c_{42}g_y + c_{43}g_z + c_{44}h_x + c_{45}h_y + c_{46}h_z = \Delta e, \\ c_{44} = \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{q_{i.j}^3} q_{x,i,j}^2, \quad c_{45} = \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{q_{i.j}^3} q_{y,i,j}^2, \quad \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{q_{i.j}^3} q_{z,i,j}^2. \end{gathered} \tag{19}$$

В (19) величины Δk_x, Δk_y, Δk_z, Δe считаются малыми и характеризуют отклонение фазовой точки $(\mathbf{q}_1,...,\mathbf{u}_N)$ от гиперповерхности с заданными значениями момента импульса $\mathbf{k}_0$ и энергии e_0, при этом $\Delta k_x = k_{0,x} - c_{11} + c_{12}$, $\Delta k_y = k_{0,x} - c_{21} + c_{22}$, $\Delta k_z = k_{0,z} - c_{31} + c_{32}$;

$$\Delta e = e_0 - \frac{1}{2}c_{41} - \frac{1}{2}c_{42} - \frac{1}{2}c_{43} + \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{q_{i,j}}.$$

Решим линейную систему первых трех уравнений в (19) относительно набора неизвестных h_x, h_y, h_z. Это можно сделать, если определитель $c = c_{11}c_{21}c_{31} - c_{12}c_{22}c_{32} \neq 0$ отличен от нуля. Отметим, что определитель $c \equiv 0$, когда $N = 2$, т. е. в случае задачи двух тел. Таким образом, как и в случае генерации фазовых точек на заданной гиперповерхности законов сохранения, особыми случаями выступают задача двух тел, а также случай $\mathbf{k}_0 = \mathbf{0}$.

С учетом (19) набор неизвестных (h_x, h_y, h_z) выразим через набор (g_x, g_y, g_z). Последние три величины связаны одним уравнением вида $\alpha_1 g_x + \alpha_2 g_y + \alpha_3 g_z = \beta$, при этом величины α_1, α_2, α_3, β выражаются через известные; соответствующие формулы довольно громоздки и не приводятся. Для решения последнего уравнения разыграем три величины: ξ_1, ξ_2, ξ_3, взятые равномерно случайно из отрезка [–1, 1], и составим выражения

$$g_x = \frac{\xi_1 \beta}{\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \alpha_3\xi_3}, \quad g_y = \frac{\xi_2 \beta}{\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \alpha_3\xi_3}, \quad g_z = \frac{\xi_3 \beta}{\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \alpha_3\xi_3}. \tag{20}$$

Очевидно, что (20) является решением, далее находим набор (h_x, h_y, h_z) и, соответственно, строим фазовую точку $\{(1 + h_x)q_{x,1},...,(1 + g_z)u_{z,N}\}$, которая лежит на поверхности, определяемой заданными моментом импульса и энергией.

Отметим, что наличие случайных чисел в (20) делает процедуру коррекции фазовой точки к законам сохранения отчасти случайной. В этом случае саму процедуру коррекции можно отнести к разновидности методов Монте-Карло. При этом стохастичность вводится в динамику непосредственно, а не вытекает из самих уравнений вследствие так называемого динамического хаоса [Sussman, Wisdom, 1992], который, конечно же, присутствует в исходных уравнениях.

Вернемся теперь к построению траектории движения. Применим процедуру коррекции (16)–(20) к фазовой точке $(\mathbf{q}_1^{(1)},...,\mathbf{u}_N^{(1)})$, найденной на момент времени $t = T_1$; тогда получим новую фазовую точку $(\tilde{\mathbf{q}}_1^{(1)},...,\tilde{\mathbf{u}}_N^{(1)})$, которая лежит на поверхности, определяемой законами сохранения. Далее, рассматривая точку $(\tilde{\mathbf{q}}_1^{(1)},...,\tilde{\mathbf{u}}_N^{(1)})$ в качестве начальной, решаем численно исходную систему дифференциальных уравнений (2) на отрезке времени $[T_1, T_1+T_2]$. Полученное решение $(\mathbf{q}_1^{(2)},...,\mathbf{u}_N^{(2)})$ на момент времени $t = T_1+T_2$ корректируем до $(\tilde{\mathbf{q}}_1^{(2)},...,\tilde{\mathbf{u}}_N^{(2)})$ и т. д. Наконец, завершаем процесс развертывания траектории движения последним расчетом системы уравнений (2) на отрезке времени $[T_1+...+T_{n-1}, T_1+...+T_n]$, найденное решение $(\mathbf{q}_1^{(n)},...,\mathbf{u}_N^{(n)})$ корректируем до $(\tilde{\mathbf{q}}_1^{(n)},...,\tilde{\mathbf{u}}_N^{(n)})$. В итоге получаем численное решение системы уравнений (2) в виде цепочки

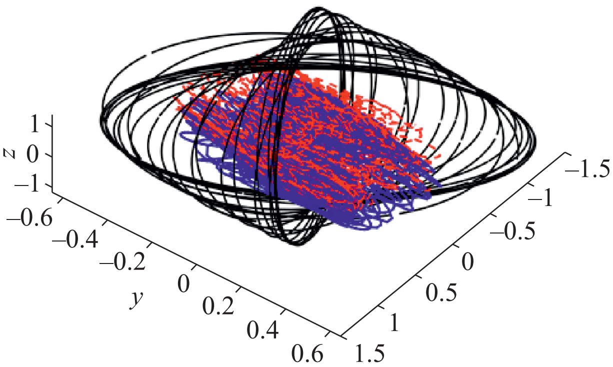
$$\begin{gathered}(\mathbf{q}_1^{(0)},...)\underset{[0,T_1]}{\rightarrow}(\mathbf{q}_1^{(1)},...)\Rightarrow(\tilde{\mathbf{q}}_1^{(1)},...)\underset{[T_1,T_1+T_2]}{\rightarrow}(\mathbf{q}_1^{(2)},...)\Rightarrow(\tilde{\mathbf{q}}_1^{(2)},...)\rightarrow... \\ \underset{[T_1+...+T_{n-1},T_1+...+T_n]}{\rightarrow}(\mathbf{q}_1^{(n)},...)\Rightarrow(\tilde{\mathbf{q}}_1^{(n)},...).\end{gathered} \tag{21}$$

Нахождение отрезков интегрирования $\{T_1,...,T_n\}$ системы уравнений (2) определяется согласно следующему алгоритму. Выбирается начальное значение $T_1 = T_{\max}$ интервала интегрирования, которое в дальнейшем от шага T_k к шагу T_{k+1} медленно растет, если $T_k < T_{\max}$. Если на *k*-м этапе корректировки решения к законам сохранения коэффициенты h_x, h_y, h_z, g_x, g_y, g_z по модулю превышают некоторое пороговое значение δ, то интервал T_k уменьшается, например, вдвое, а расчет проводится повторно, но на уменьшенном интервале времени.

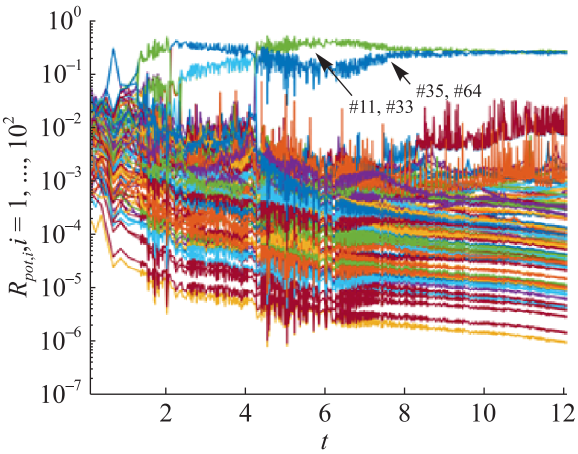
Отметим, что численный результат решения системы уравнений (2) не является отдельной детерминированной кривой в фазовом пространстве, так как моменты времени $t = T_1, T_1+T_2,...,T_1+...+T_n$, в которых осуществляется корректировка решения к законам сохранения, выступают в качестве точек ветвления решений. Таким образом, изложенная процедура сборки траектории движения генерирует, вообще говоря, ансамбль траекторий. Найденные траектории не являются также непрерывными, при этом размер скачков выступает в качестве управляемого параметра δ.

На рис. 3, *а* приведен вариант применения алгоритма (16)–(21) к расчету динамики гравитационной системы, состоящей из трех тел ($N = 3$). Данный пример намеренно подобран. Цель состояла в том, чтобы показать наличие нетривиальной динамики в течение заметного времени, в которой все три тела активно взаимодействуют, причем ни одно из тел не уходит на бесконечность. Среди прочего были выбраны следующие параметры: $n = 100$, $T_1 = 1$, $\delta = 0.025$. Массы тел, начальные позиции и скорости выбирались равномерно случайными из отрезка [0, 1] и из кубов $[-L, L]^3$ и $[-V, V]^3$ при $L = 1$ и $V = 1$. После завершения расчета оказалось $T_\Sigma = T_1 + ... + T_n = 228.26$, что составило заметное значение. На рис. 3, *а* одно из тел (траектория помечена сплошной линией) вращается вокруг другой пары тел (траектории помечены пунктиром и штрихпунктиром соответственно). Следует отметить, что статистика множества вычислительных экспериментов такова, что в большинстве решений одно из трех тел уходит на бесконечность.

Обычно в расчетах при заметном числе тел в гравитационной системе динамика развивается таким образом, что тела разбегаются со временем на бесконечность, при этом находятся одна или несколько пар тел, которые аккумулирует на себе ≈ 95 % всей потенциальной энергии. Так, на рис. 3, *б* приведена типичная динамика во времени долей $R_{pot,i}$, $i = 1,...,N$ вклада в потенциальную энергию каждого тела гравитационной системы. Данные величины подсчитывалась по формуле $R_{pot,i} = -\dfrac{m_i}{2e_{pot}} \sum_j \dfrac{m_j}{q_{i,j}}$, $e_{pot} = -\dfrac{1}{2} \sum_{i,j} \dfrac{m_i m_j}{q_{i,j}}$. Среди прочего считалось, что $N = 10^2$, $n = 1300$, $T_1 = 1$, $\delta = 0.025$. Массы тел, начальные позиции и скорости выбирались аналогично предыдущему расчету. На рис. 3, *б* отмечены две пары тел под номерами 11, 33 и 35, 64, которые поделили приблизительно поровну между собой ≈ 96 % потенциальной энергии.



(а)



(б)

Рис. 3. Пример динамики: а) гравитационной системы, состоящей из трех тел (траектории помечены сплошной, пунктиром и штрихпунктиром соответственно); б) долей вклада в потенциальную энергию каждого тела гравитационной системы, $N = 10^2$

4. Момент импульса гравитационной системы ноль

В разделе 2, где обсуждался алгоритм генерации методом Монте-Карло точек фазового пространства, лежащих на поверхности законов сохранения, были отмечены важные частные случаи, которые требуют специального рассмотрения. Одним из таких частных случаев является отсутствие у гравитационной системы с количеством тел 3 и более момента импульса, т. е. случай, когда $N > 2$, $\mathbf{k}_0 = \mathbf{0}$.

Система уравнений (10) в случае, когда $\mathbf{k}_0 = \mathbf{0}$, может быть разрешена относительно неизвестных λ_x, λ_y, λ_z шестью способами, т. е. имеется в общем случае шесть решений. Учитывая закон сохранения энергии (5), а также выбирая величины ξ_x, ξ_y, ξ_z, ξ равномерно случайными числами из отрезка [–1, 1], запишем:

1) $\mu_x = 0,\ \mu_y = V\xi_y,\ \mu_z = V\xi_z;\ \lambda_x = 0,\ \lambda_y = c_{12}\xi_y \dfrac{\xi}{|\xi|}\nu_1;\ \lambda_z = c_{11}\xi_z \dfrac{\xi}{|\xi|}\nu_1;$

$$\nu_1 = \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{\sqrt{c_{12}^2 \xi_y^2 A_{y,i,j}^2 + c_{11}^2 \xi_z^2 A_{z,i,j}^2}} \Bigg/ \left[V^2 \sum_i \frac{1}{2} m_i (\xi_y^2 B_{y,i}^2 + \xi_z^2 B_{z,i}^2) - e_0 \right];$$

2) $\mu_x = V\xi_x, \mu_y = 0, \mu_z = V\xi_z; \lambda_x = c_{21}\xi_x \dfrac{\xi}{|\xi|}\nu_2, \lambda_y = 0; \lambda_z = c_{22}\xi_z \dfrac{\xi}{|\xi|}\nu_2;$

$$\nu_2 = \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{\sqrt{c_{21}^2 \xi_x^2 A_{x,i,j}^2 + c_{22}^2 \xi_z^2 A_{z,i,j}^2}} \Bigg/ \left[V^2 \sum_i \frac{1}{2} m_i (\xi_x^2 B_{x,i}^2 + \xi_z^2 B_{z,i}^2) - e_0 \right];$$

3) $\mu_x = V\xi_x,\ \mu_y = V\xi_y,\ \mu_z = 0;\ \lambda_x = c_{32}\xi_x \dfrac{\xi}{|\xi|}\nu_3,\ \lambda_y = c_{31}\xi_y \dfrac{\xi}{|\xi|}\nu_3,\ \lambda_z = 0;$

$$\nu_3 = \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{\sqrt{c_{32}^2 \xi_x^2 A_{x,i,j}^2 + c_{31}^2 \xi_y^2 A_{y,i,j}^2}} \Bigg/ \left[V^2 \sum_i \frac{1}{2} m_i (\xi_x^2 B_{x,i}^2 + \xi_y^2 B_{y,i}^2) - e_0 \right];$$

где $c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}, c_{31}, c_{32}$ находятся по формулам (9);

4) $\mu_x = 0,\ \mu_y = 0,\ \mu_z = V\xi_z;\ \lambda_x = 0,\ \lambda_y = 0,\ \lambda_z = \dfrac{\xi}{|\xi|}\nu_4;$

$$\nu_4 = \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{|A_{z,i,j}|} \Bigg/ \left(V^2 \sum_i \frac{1}{2} m_i \xi_z^2 B_{z,i}^2 - e_0 \right);$$

5) $\mu_x = 0,\ \mu_y = V\xi_y,\ \mu_z = 0;\ \lambda_x = 0,\ \lambda_y = \dfrac{\xi}{|\xi|}\nu_5,\ \lambda_z = 0;$

$$\nu_5 = \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{|A_{y,i,j}|} \Bigg/ \left(V^2 \sum_i \frac{1}{2} m_i \xi_y^2 B_{y,i}^2 - e_0 \right);$$

6) $\mu_x = V\xi_x,\ \mu_y = 0,\ \mu_z = 0;\ \lambda_x = \dfrac{\xi}{|\xi|}\nu_6,\ \lambda_y = 0,\ \lambda_z = 0;$

$$\nu_6 = \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{|A_{x,i,j}|} \Bigg/ \left(V^2 \sum_i \frac{1}{2} m_i \xi_x^2 B_{x,i}^2 - e_0 \right).$$

В решениях, представленных выше, — один свободный параметр V, который, с одной стороны, определяет характерную скорость тел гравитационной системы, а с другой — может считаться произвольным. С учетом записанных выше решений определим искомую точку фазового пространства:

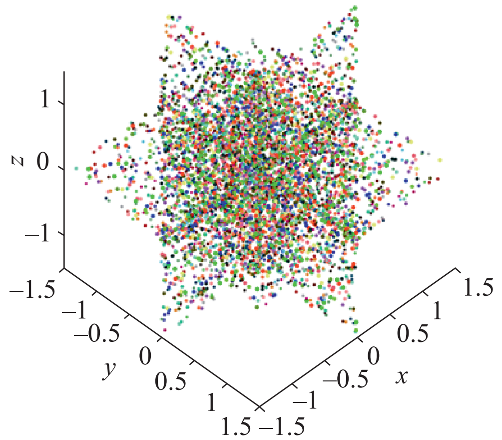
$$\mathbf{q}_i = (\lambda_x A_{x,i}, \lambda_y A_{y,i}, \lambda_z A_{z,i}), \qquad \mathbf{u}_i = (\mu_x B_{x,i}, \mu_y B_{y,i}, \mu_z B_{z,i}), \tag{22}$$

где величины $A_{x,i}$, $A_{y,i}$, $A_{z,i}$, $B_{x,i}$, $B_{y,i}$, $B_{z,i}$, $i = 1, \ldots, N$, получены согласно (6).

При получении набора точек фазового пространства (22), лежащих на гиперповерхности с заданным значением полной энергии e_0 и нулевым моментом импульса $\mathbf{k}_0 = \mathbf{0}$, комплект величин $\{\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z, \mu_x, \mu_y, \mu_z\}$ следует выбирать равновероятно из шести решений, представленных выше.

Точки фазового пространства (22), построенные на базе шести решений, в части пространственного позиционирования лежат либо на одной из трех координатных плоскостей, либо на одной из трех осей декартовой системы координат. Таким образом, наличие плоскости эклиптики в Солнечной системе можно связать с малостью момента импульса. На рис. 4, *а* приведен типичный формат позиционирования тел гравитационной системы в наборе статистических экспериментов при $\mathbf{k}_0 = \mathbf{0}$. Прочие параметры расчета выбирались следующими: $N = 25$, $M = 10^3$, $V = 1$, $e_0 = -50$. На рис. 4, *а* выделен фрагмент позиционирования тел в кубе $[-1.5, 1.5]^3$. При увеличении стороны указанного куба картина позиционирования точек станет похожей на формат, представленный на рис. 1, *а* для случая, когда $\mathbf{k}_0 \neq \mathbf{0}$. Таким образом, в обоих случаях, как при $\mathbf{k}_0 \neq \mathbf{0}$, так и при $\mathbf{k}_0 = \mathbf{0}$, скопление точек явно некомпактно, т. е. гравитационная система, вообще говоря, неустойчива.

Соберем траекторию движения тел гравитационной системы для одного из трех первых частных случаев. Рассмотрим решение под номером 3, когда динамика гравитационной системы происходит в плоскости (x, y). В этом случае считается, что $z = 0$. В итоге необходимо решать



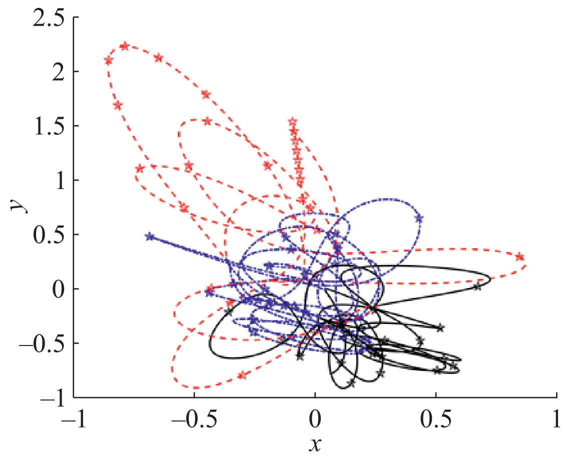


Рис. 4. Типичный формат позиционирования тел гравитационной системы в наборе статистических экспериментов при $\mathbf{k}_0 = \mathbf{0}$ (а); пример траекторий движения трех тел в плоскости с координатами x, y (траектории помечены сплошной, пунктиром и штрихпунктиром соответственно) (б)

следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} &\dot{q}_{x,i} = u_{x,i}, \quad \dot{q}_{y,i} = u_{y,i}; \\ &\dot{u}_{x,i} = -\sum_j \frac{m_j(q_{x,i} - q_{x,j})}{(q_{x,i,j}^2 + q_{y,i,j}^2)^{3/2}}; \ \dot{u}_{y,i} = -\sum_j \frac{m_j(q_{y,i} - q_{y,j})}{(q_{x,i,j}^2 + q_{y,i,j}^2)^{3/2}}; \end{aligned} \tag{23}$$

где $i = 1, \ldots, N$.

Перед построением траектории движения гравитационной системы, описываемой системой уравнений (23), определим начальную конфигурацию $q_{x,i}^{(0)}$, $q_{y,i}^{(0)}$, $u_{x,i}^{(0)}$, $u_{y,i}^{(0)}$, $i = 1, \ldots, N$. Учитывая условие $\mathbf{k}_0 = \mathbf{0}$ в системе уравнений (10), найдем

$$q_{x,i}^{(0)} = \lambda_x A_{x,i}, \ q_{y,i}^{(0)} = \lambda_y A_{y,i}; \quad u_{x,i}^{(0)} = V\xi_x B_{x,i}, \ u_{y,i}^{(0)} = V\xi_y B_{y,i}; \tag{24}$$

где

$$\lambda_x = c_{32}\xi_x \frac{\xi}{|\xi|}\nu_3, \quad \lambda_y = c_{31}\xi_y \frac{\xi}{|\xi|}\nu_3, \quad \xi_x, \xi_y, \xi \in [-1, 1].$$

Сборку траектории осуществим согласно процедуре (16)–(20). Из уравнений (18), с учетом (19), получим

$$\begin{cases} c_{31}h_x - c_{32}h_y - c_{32}g_x + c_{31}g_y = c_{32} - c_{31}, \\ c_{44}h_x + c_{45}h_y + c_{41}g_x + c_{42}g_y = \Delta e, \end{cases} \tag{25}$$

где

$$c_{44} = \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{(q_{x,i,j}^2 + q_{y,i,j}^2)^{3/2}} q_{x,i,j}^2, \quad c_{45} = \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{(q_{x,i,j}^2 + q_{y,i,j}^2)^{3/2}} q_{y,i,j}^2;$$

$$\Delta e = e_0 - \frac{1}{2}c_{41} - \frac{1}{2}c_{42} + \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{\sqrt{q_{x,i,j}^2 + q_{y,i,j}^2}}.$$

Положим в процедуре приведения найденного решения к заданным законам сохранения $(\mathbf{k}_0 = \mathbf{0}, e_0)$, что $h_x = 0$, $h_y = 0$. Подставляя последние равенства в (25) и решая полученную систему относительно неизвестных g_x, g_y, найдем

$$g_x = \frac{(c_{31} - c_{32})c_{42} + c_{31}\Delta e}{c_{31}c_{41} + c_{32}c_{42}}, \quad g_y = \frac{(c_{32} - c_{31})c_{41} + c_{32}\Delta e}{c_{31}c_{41} + c_{32}c_{42}}. \tag{26}$$

На рис. 4, *б* приведен пример траекторий движения на плоскости трех тел ($N = 3$), взаимодействующих согласно уравнениям (23)–(26). Пентаграммы на траекториях обозначают моменты, когда осуществлялась процедура коррекции движения к заданным законам сохранения. Прочие параметры расчета выбирались следующими: $\mathbf{k}_0 = \mathbf{0}$, $e_0 = -0.5$, $n = 25$, $T_1 = 1$, $\delta = 0.025$, $V = 1$. Траектории движения различаются начертанием: одна — сплошная, другая — пунктирная, а третья — штрихпунктирная. Общий интервал времени интегрирования системы уравнений (23), включая процедуры коррекции к законам сохранения, составил отрезок [0, 28.46].

Построим траектории движения тел гравитационной системы для одного из частных случаев № 4, № 5, № 6. Рассмотрим решение под номером 6, когда динамика гравитационной системы происходит на координатной линии x. В этом случае считается, что $y, z = 0$. В итоге необходимо решить следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= u_i, \\ \dot{u}_i &= -\sum_j \frac{m_j x_{i,j}}{|x_{i,j}|^3}, \end{aligned} \tag{27}$$

где $x_{i,j} = x_i - x_j$, $i, j = 1, \ldots, N$.

Определим начальную конфигурацию $x_i^{(0)}$, $u_i^{(0)}$, $i = 1, \ldots, N$; тогда, учитывая частное решение № 6, запишем

$$x_i^{(0)} = \frac{\xi}{|\xi|} \nu_6 A_{x,i}, \quad u_i^{(0)} = V \xi_x B_{x,i}; \quad \xi, \xi_x \in [-1, 1]. \tag{28}$$

При сборке траекторий по аналогии с (17) для обеспечения закона сохранения энергии будем следовать преобразованию $x_i \to H_x x_i$, $u_i \to G_x u_i$. В этом случае найдем

$$G_x^2 e_{kin} + \frac{1}{H_x} e_{pot} = e_0, \tag{29}$$

где $e_{kin} = \sum_i \frac{1}{2} m_i u_i^2$, $e_{pot} = -\sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{|x_{i,j}|}$.

Решая уравнение (29) относительно H_x, найдем

$$H_x = \frac{e_{pot}}{e_0 - G_x^2 e_{kin}}. \tag{30}$$

Выберем $G_x = 1$, тогда согласно (30) найдем $H_x = \dfrac{e_{pot}}{e_0 - e_{kin}}$. Корректировку интервала интегрирования T_k в сторону уменьшения осуществляем в том случае, когда имеет место неравенство $|H_x - 1| = \left| \dfrac{e_0 - e_{pot} - e_{kin}}{e_0 - e_{kin}} \right| > \delta$.

На рис. 5 приведены примеры расчетов динамики позиций тел гравитационной системы согласно алгоритму сборки траекторий (27)–(30) для двух случаев: когда $N = 3$ и $N = 7$. Прочие параметры выбирались следующими: $\delta = 0.025$, $V = 1$. Маркеры на графиках в виде пентаграмм отмечают моменты, в которых осуществлялась процедура возврата траектории к заданному значению полной энергии e_0.

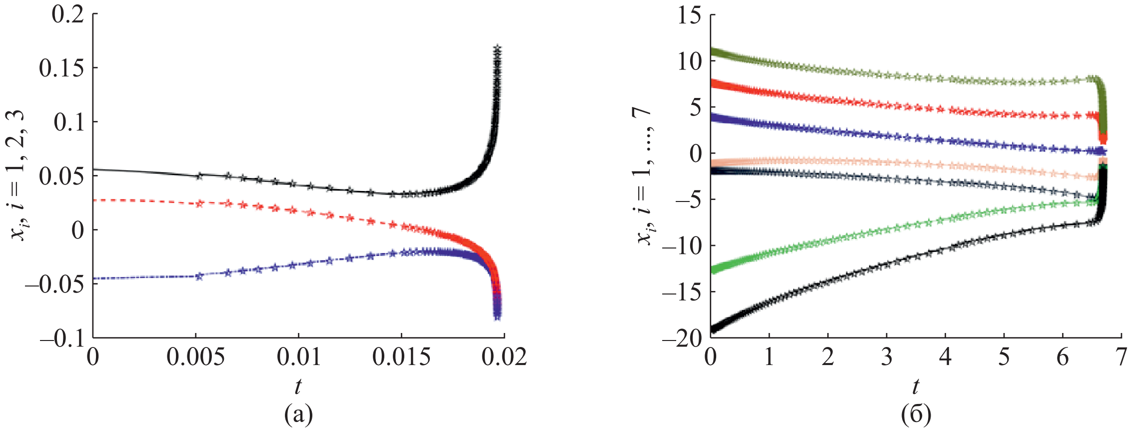


Рис. 5. Пример динамики позиций на координатной оси x: а) трех тел, $N = 3$, $e_0 = -1.5$; б) семи тел, $N = 7$, $e_0 = -1$

Формат динамики на рис. 5, *а* был специально подобран, чтобы продемонстрировать наличие сближения пары тел и уход третьего тела на бесконечность. Типичный формат динамики для большого числа тел показан на рис. 5, *б*. Для последнего случая характерно сближение тел гравитационной системы с одновременным их разгоном с учетом обеспечения закона сохранения энергии. Отметим, что режим данной динамики можно отнести к классу режимов с обострением, когда в некоторый конечный момент времени тела гравитационной системы упадут на общий центр, при этом их скорость станет равной бесконечности. Более обстоятельно этот режим рассмотрим ниже на примере задачи двух тел.

5. Задача двух тел

Сосредоточимся на частном случае, когда $N = 2$ и момент импульса пары тел отсутствует, т. е. $\mathbf{k}_0 = \mathbf{0}$. Решая систему уравнений (10), найдем

$$\lambda_x = \xi\mu_x c_{12} c_{32}, \quad \lambda_y = \xi\mu_y c_{12} c_{31}, \quad \lambda_z = \xi\mu_z c_{11} c_{31}, \tag{31}$$

где ξ — некоторый пока не определенный параметр.

Разыграем величины μ_x, μ_y, μ_z согласно представлению:

$$\mu_x = V\xi_x, \quad \mu_y = V\xi_y, \quad \mu_z = V\xi_z, \tag{32}$$

где ξ_x, ξ_y, ξ_z — равномерно случайные числа из отрезка $[-1, 1]$, V — характерный масштаб скорости.

После подстановки (32) в (31) получим

$$\lambda_x = V\xi\xi_x c_{12} c_{32}, \quad \lambda_y = V\xi\xi_y c_{12} c_{31}, \quad \lambda_z = V\xi\xi_z c_{11} c_{31}. \tag{33}$$

Учитывая (13), (14), уточним вид наборов векторов фазового пространства:

$$\mathbf{q}_i = V\xi\mathbf{q}'_i = V\xi(\xi_x c_{12} c_{32} A_{x,i}, \xi_y c_{12} c_{31} A_{y,i}, \xi_z c_{11} c_{31} A_{z,i}), \tag{34}$$

$$\mathbf{u}_i = V\mathbf{u}'_i = V(\xi_x B_{x,i}, \xi_y B_{y,i}, \xi_z B_{z,i}), \quad i = 1, 2. \tag{35}$$

Найдем неизвестную величину ξ, которую определим с помощью закона сохранения энергии (5), а именно: запишем уравнение

$$V^2\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{2}m_i\mathbf{u}_i'^2-\frac{1}{|\xi|}\frac{m_1m_2}{V\,|\,q_1'-q_2'\,|}-e_0=0. \tag{36}$$

Решая уравнение (36) относительно $|\xi|$, найдем

$$\nu=|\xi|=\frac{m_1m_2}{|\,q_1'-q_2'\,|}\Bigg/\left(V^2\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{2}m_i\mathbf{u}_i'^2-e_0\right). \tag{37}$$

С учетом (34), (35), (37) запишем процедуру Монте-Карло, которая порождает неограниченное количество точек фазового пространства, причем все они обладают заданными значениями момента импульса ($\mathbf{k}_0=\mathbf{0}$) и энергии (e_0), т. е.

$$\mathbf{q}_i=V\frac{\zeta}{|\,\zeta\,|}\nu\mathbf{q}_i',\quad \mathbf{u}_i=V\mathbf{u}_i',\quad i=1,2, \tag{38}$$

где ζ — равномерно случайное число из отрезка [–1, 1].

На рис. 6, *а* приведен пример позиционирования пары тел гравитационной системы, полученный методом Монте-Карло согласно процедуре (31)–(38). Точками и звездочками обозначены тела под номерами 1 и 2 соответственно. Были выбраны следующие значения прочих параметров: $M=10^3$, $e_0=-0.5$, $V=1$, $m_1\cong 0.41$, $m_2\cong 0.97$.

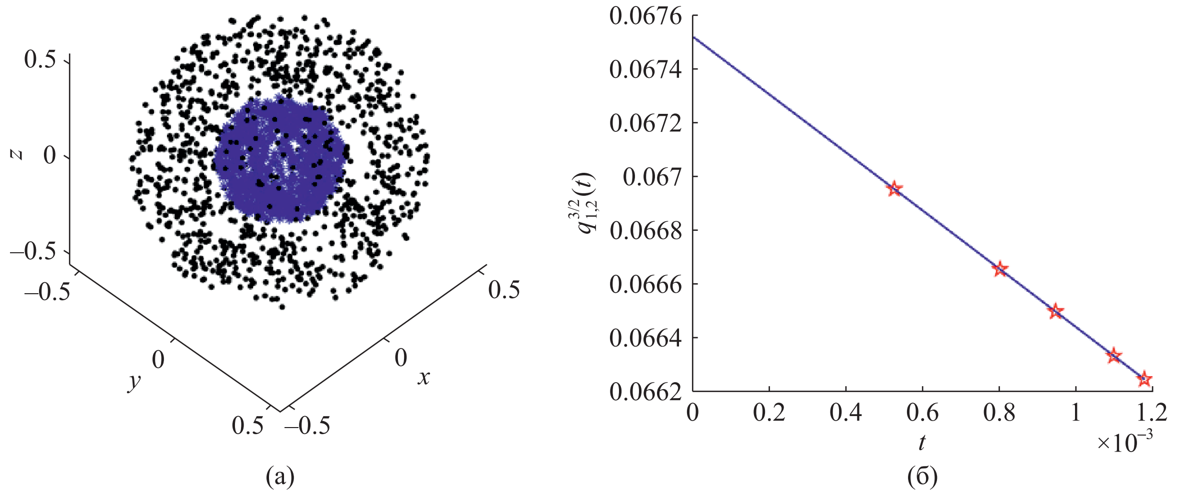


Рис. 6. Пример позиционирования пары тел в наборе статистических экспериментов при $\mathbf{k}_0=\mathbf{0}$ (точками и звездочками обозначены тела под номерами 1 и 2 соответственно) (а); типичный график динамики во времени расстояния между парой тел (б)

Согласно формулам (37), (38) позиции фазовых точек в конфигурационном пространстве не могут уйти на бесконечность. Иными словами, скопление точек на рис. 6, *а* имеет компактную форму, что указывает на устойчивый характер взаимодействия в гравитационной системе, состоящей из двух тел.

Найдем далее аналитическое решение задачи двух тел и сравним его с численным решением, построенном согласно процедуре сборки решения с учетом выполнения законов сохранения $\mathbf{k}_0=\mathbf{0}$ и e_0.

Из уравнений (2) при $N=2$ находим $\mathbf{q}_2=-\dfrac{m_1}{m_2}\mathbf{q}_1$, $\mathbf{u}_2=-\dfrac{m_1}{m_2}\mathbf{u}_1$. В этом случае момент импульса (3) для пары тел можно переписать в виде $\mathbf{k}_0=m_1\mathbf{q}_1\times\mathbf{u}_1+m_2\mathbf{q}_2\times\mathbf{u}_2=$

$= \left(m_1 + \dfrac{m_1^2}{m_2} \right) \mathbf{q}_1 \times \mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$. Последнее уравнение может быть удовлетворено, когда считается, что $\mathbf{u}_1 = \varphi \mathbf{q}_1$, где $\varphi = \varphi(t)$ — некоторая пока не определенная скалярная функция времени. Для определения функции $\varphi(t)$ запишем уравнения, подобные (2), для данного случая; тогда

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}}_1 = \mathbf{u}_1, \\ \dot{\mathbf{u}}_1 = -\dfrac{m_2}{(1 + m_1 / m_2)^2 q_1^3} \mathbf{q}_1. \end{cases} \tag{39}$$

Учтем в (39) представление $\mathbf{u}_1 = \varphi \mathbf{q}_1$, тогда после некоторых преобразований получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\ddot{\varphi} + 5\varphi\dot{\varphi} + 3\varphi^3 = 0. \tag{40}$$

Интересующее нас решение уравнения (40) легко находится, т. е. $\varphi = \varphi(t) = \left(\varphi_0^{-1} + \dfrac{3}{2} t \right)^{-1}$, где $\varphi(0) = \varphi_0$. Последнее выражение позволяет найти решение системы уравнений (39), а именно:

$$\mathbf{q}_1 = \left(1 + \frac{3}{2} \varphi_0 t \right)^{2/3} \mathbf{q}_{1,0}, \quad \mathbf{u}_1 = \left(1 + \frac{3}{2} \varphi_0 t \right)^{-1/3} \mathbf{q}_{1,0}, \tag{41}$$

где $\varphi_0 \neq 0$ и $\mathbf{q}_{1,0} = \mathbf{q}_1(0)$ — некоторый постоянный вектор. После подстановки (41) в (39) найдем $\varphi_0 = \pm \sqrt{\dfrac{2m_2}{(1 + m_1 / m_2)^2 q_{1,0}^3}}$. Наконец, при $\varphi_0 = 0$ решение (41) перепишется в виде

$$\mathbf{q}_1 = t^{2/3} \mathbf{q}_{1,0}, \quad \mathbf{u}_1 = \frac{2}{3} t^{-1/3} \mathbf{q}_{1,0}, \tag{42}$$

при этом $q_{1,0} = \dfrac{(9m_2)^{1/3}}{2^{1/3}(1 + m_1 / m_2)^{2/3}}$.

Определим вектор расстояния между парой тел $\mathbf{q}_{1,2} = \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 = \left(1 + \dfrac{m_1}{m_2} \right) \mathbf{q}_1$, тогда с учетом (41) найдем

$$q_{1,2} = \left| \mathbf{q}_{1,2} \right| = \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) \left(1 + \frac{3}{2} \varphi_0 t \right)^{2/3} \left| \mathbf{q}_{1,0} \right|. \tag{43}$$

Из физических соображений понятно, что в силу притяжения между парой тел они должны сближаться, т. е. расстояние $q_{1,2}$ между ними должно уменьшаться. С учетом (41) $q_{1,2} \to 0$, когда $\varphi_0 < 0$, а время возрастает, оставаясь меньше величины $t_f = -\dfrac{2}{3\varphi_0}$, т. е. $t < t_f$. Время t_f назовем временем фокусировки. Нулевое расстояние $q_{1,2} = 0$ между парой тел можно истолковать как их слипание.

Применим процедуру построения траектории (16)–(18) с учетом того, что рассматривается задача двух тел и $\mathbf{k}_0 = \mathbf{0}$. Пусть имеется некоторая конфигурация $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$; модифицируем ее так, чтобы имели место закон сохранения момента импульса, $\mathbf{k}_0 = \mathbf{0}$ и заданное значение полной энергии e_0. Для этого применим преобразование (17); тогда с учетом (33) можно записать

$$H_x = \frac{\xi}{|\xi|}\nu c_{12}c_{32}G_x, \quad H_y = \frac{\xi}{|\xi|}\nu c_{12}c_{31}G_y, \quad H_z = \frac{\xi}{|\xi|}\nu c_{11}c_{31}G_z, \tag{44}$$

где ξ — произвольное случайное число из отрезка [–1, 1], а

$$\nu = \frac{\dfrac{m_1 m_2}{\sqrt{G_x^2 c_{12}^2 c_{32}^2 q_{x,1,2}^2 + G_y^2 c_{12}^2 c_{31}^2 q_{y,1,2}^2 + G_z^2 c_{11}^2 c_{31}^2 q_{z,1,2}^2}}}{\left(G_x^2 \sum\limits_i \frac{1}{2} m_i u_{x,i}^2 + G_y^2 \sum\limits_i \frac{1}{2} m_i u_{y,i}^2 + G_z^2 \sum\limits_i \frac{1}{2} m_i u_{z,i}^2 - e_0\right)}.$$

Согласно (44), зная G_x, G_y, G_z, находим набор H_x, H_y, H_z. Поскольку никаких ограничений на G_x, G_y, G_z нет, положим, что $G_x = G_y = G_z = 1$. В этом случае отрезок интегрирования T_k корректируется в сторону уменьшения в случае, когда имеет место одно из трех неравенств: $|H_x - 1| > \delta$, $|H_y - 1| > \delta$, $|H_z - 1| > \delta$.

На рис. 6, *б* приведен типичный образец траектории, которая описывает динамику во времени расстояний между парой тел. По оси ординат на рис. 6, *б* отложено расстояние в степени 3/2, поскольку согласно аналитическому решению (43) величина $q_{1,2}^{3/2}$ является линейной функцией времени. Построенная траектория вполне соответствует прямой линии, т. е. полностью отвечает аналитическому решению (43). Остальные параметры вычислительного эксперимента были следующими: $e_0 = -0.5$, $V = 1$, $\delta = 0.025$. На рис. 6, *б* пентаграммами, как и выше, обозначены моменты, в которых осуществлялось приведение решения к выполнению законов сохранения.

Продолжим изучение задачи двух тел, когда $\mathbf{k}_0 \neq \mathbf{0}$. В этом случае формат расчетов (6)–(15) не подойдет. Введем относительные векторы положения $\mathbf{q} = \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2$ и скорости $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$; тогда положения и скорости каждого из тел, а также закон сохранения момента импульса и энергии запишутся в виде

$$\mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{q}}{(1 + m_1/m_2)}, \quad \mathbf{q}_2 = -\frac{\mathbf{q}}{(1 + m_2/m_1)}; \quad \mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{u}}{(1 + m_1/m_2)}, \quad \mathbf{u}_2 = -\frac{\mathbf{u}}{(1 + m_2/m_1)}; \tag{45}$$

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{q} \times \mathbf{u} = \mathbf{k}_0, \tag{46}$$

$$\frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}u^2 - \frac{m_1 m_2}{q} = e_0, \tag{47}$$

где $u = |\mathbf{u}|$, $q = |\mathbf{q}|$.

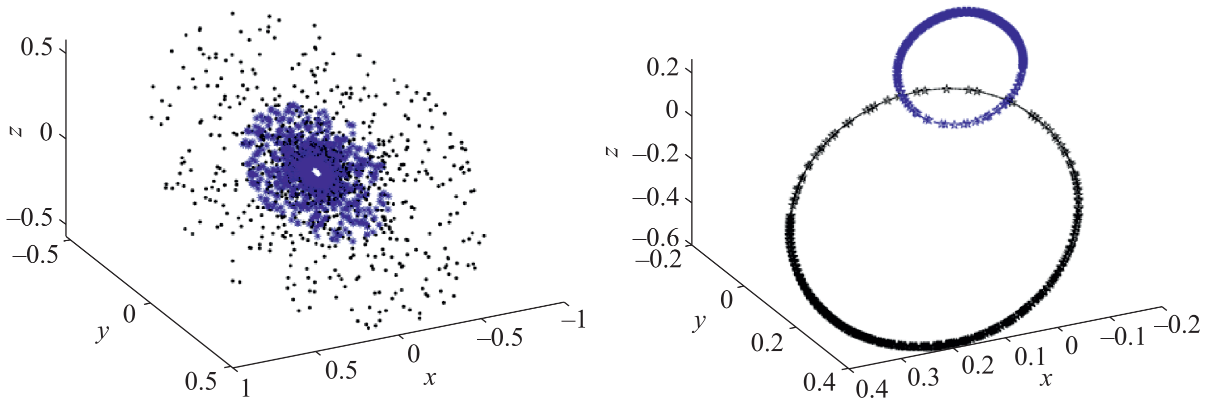
Момент импульса $\mathbf{k}_0$ и энергия e_0 в (46), (47) не могут рассматриваться произвольными независимо друг от друга. Так, из уравнения (46) находим ограничение № 1: $k_0 \le \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} qu$; из уравнения (47) вытекает ограничение № 2: $e_0 \ge -\frac{m_1 m_2}{q}$. Из ограничений № 1, № 2 вытекает ограничение № 3: $\frac{k_0 (m_1 + m_2)}{m_1 m_2 u} \le q \le \frac{m_1 m_2}{-e_0}$, которое в свою очередь с учетом (47) приводит к ограничению № 4 на возможные значения модуля относительной скорости вида

$\dfrac{m_1^2 m_2^2 - \sqrt{D}}{m_1 m_2 k_0} \le u \le \dfrac{m_1^2 m_2^2 + \sqrt{D}}{m_1 m_2 k_0}$. Последнее неравенство возможно только при ограничении № 5: $D = m_1^4 m_2^4 + 2 m_1 m_2 (m_1 + m_2) k_0^2 e_0 \ge 0$.

Введем пару векторов единичной длины: $\boldsymbol{\alpha} = \dfrac{\mathbf{q}}{q}$, $\boldsymbol{\beta} = \dfrac{\mathbf{u}}{u}$. Тогда складывается следующая схема построения точек фазового пространства с помощью метода Монте-Карло. Шаг № 1: выбираем вектор $\mathbf{k}_0$ и константу e_0 так, чтобы выполнялось неравенство $D = m_1^4 m_2^4 + 2 m_1 m_2 (m_1 + m_2) k_0^2 e_0 \ge 0$. Шаг № 2: выбираем модуль относительной скорости u равномерно случайно из отрезка $\left[\dfrac{m_1^2 m_2^2 - \sqrt{D}}{m_1 m_2 k_0}, \dfrac{m_1^2 m_2^2 + \sqrt{D}}{m_1 m_2 k_0}\right]$. Шаг № 3: из уравнения (47) находим модуль относительного расстояния $q = \dfrac{m_1 m_2}{\dfrac{1}{2}\dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} u^2 - e_0}$. Шаг № 4: орт $\boldsymbol{\alpha}$ выбирается случайным при выполнении условия его ортогональности вектору момента импульса, т. е. $(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{k}_0) = 0$. Шаг № 5: с учетом (46) находим угол θ между парой векторов $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$; он равен двум возможным значениям: $\theta = \arcsin \dfrac{(m_1 + m_2) k_0}{m_1 m_2 q u}$ и $\theta = \pi - \arcsin \dfrac{(m_1 + m_2) k_0}{m_1 m_2 q u}$. Шаг № 6: поворачиваем вектор $\boldsymbol{\alpha}$ относительно вектора момента импульса на один из пары углов (выбор одного из пары углов считается равновероятным), получается вектор $\boldsymbol{\beta}$. Шаг № 7: учитывая, что $\mathbf{q} = q\boldsymbol{\alpha}$, $\mathbf{u} = u\boldsymbol{\beta}$, по формулам (45) находим позиции и скорости каждого из двух тел.

На рис. 7, *а* приведен пример всевозможных положений в пространстве пары тел (первое и второе тела обозначены маркерами в виде звездочек и точек соответственно), взаимодействующих по закону Ньютона и имеющих заданные значения момента импульса и энергии $|\mathbf{k}_0| = 0.125$, $e_0 = -0.25$. На рис. 7, *а* вынесены результаты $M = 10^3$ статистических экспериментов позиционирования пары тел гравитационной системы, полученных в рамках процедуры, изложенной выше.

С учетом шага № 3 понятно, что относительное расстояние между парой тел не может стать неограниченным, т. е. фазовые точки в конфигурационном пространстве не могут уйти на бесконечность. Это в свою очередь означает, что скопление точек рис. 7, *а* компактно, а движение пары тел устойчиво.



(а) (б)

Рис. 7. Примеры: а) случайных положений пары тел гравитационной системы при заданных значениях момента импульса и энергии (первое и второе тела обозначены маркерами в виде звездочек и точек соответственно); б) построения траектории движения в пространстве пары тел гравитационной системы

Перейдем к иллюстрации работы представляемого алгоритма с помощью решения системы уравнений, описывающей движение пары тел в терминах относительных положений и скоростей. Тогда

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{u}, \quad \dot{\mathbf{u}} = -\frac{m_1 + m_2}{q^3}\mathbf{q}. \tag{48}$$

Система уравнений (48) допускает законы сохранения (46), (47), она может быть решена в рамках стандартных мероприятий [Ландау, Лившиц, 1973]. Они состоят из следующих шагов: 1) вводится система координат, в которой, скажем, ось аппликат направлена по вектору момента импульса; 2) в плоскости осей абсцисс и ординат для относительных положений и скоростей рассматривается полярная система координат; 3) выводится, например, уравнение, описывающее динамику расстояния q между парой тел в зависимости от времени; тогда

$$\dot{q} = \pm\frac{(m_1 + m_2)k_0}{m_1 m_2}\sqrt{(q_1^{-1} - q^{-1})(q^{-1} - q_2^{-1})}, \tag{49}$$

где $q_{1,2}^{-1} = \dfrac{m_1^2 m_2^2 \pm \sqrt{D}}{(m_1 + m_2)k_0^2}$. Два знака перед радикалом в правой части (49) означают наличие двух решений, которые «сшиваются» в точках поворота $q_{1,2}$, при этом решение q совершает колебания в пределах отрезка $[q_1, q_2]$ с периодом $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m_1^3 m_2^3}{8(m_1 + m_2)(-e_0)^3}}$.

В нашу задачу входит апробация численного метода решения системы уравнений (49) вместе с процедурой коррекции решения, обеспечивающей выполнение законов сохранения момента импульса (46) и энергии (47). Принимая во внимание (17), запишем следующее преобразование:

$$\mathbf{q} \to (H_x q_x, H_y q_y, H_z q_z), \qquad \mathbf{u} \to (G_x u_x, G_y u_y, G_z u_z). \tag{50}$$

Подберем неопределенные коэффициенты H_x, H_y, H_z, G_x, G_y, G_z так, чтобы выполнялись законы сохранения момента импульса и энергии, т. е. имели место уравнения

$$\begin{aligned}
&c_{11} H_y G_z - c_{12} H_z G_y = k_{0,x}, \\
&c_{21} H_z G_x - c_{22} H_x G_z = k_{0,y}, \\
&c_{31} H_x G_y - c_{32} H_y G_x = k_{0,z}, \\
&\frac{1}{2}c_{41} G_x^2 + \frac{1}{2}c_{42} G_y^2 + \frac{1}{2}c_{43} G_z^2 - \frac{m_1 m_2}{\sqrt{H_x^2 q_{x,1,2}^2 + H_y^2 q_{y,1,2}^2 + H_z^2 q_{z,1,2}^2}} = e_0,
\end{aligned} \tag{51}$$

где

$$c_{11} = \mu q_y u_z, \quad c_{12} = \mu q_z u_y, \quad c_{21} = \mu q_z u_x, \quad c_{22} = \mu q_x u_z, \quad c_{31} = \mu q_x u_y, \quad c_{32} = \mu q_y u_x,$$
$$c_{41} = \mu u_x^2, \quad c_{42} = \mu u_y^2, \quad c_{43} = \mu u_z^2,$$

$\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ — приведенная масса.

Решим нелинейную алгебраическую систему четырех уравнений (51) относительно шести неизвестных в линейном приближении. Положим, что $H_x = 1 + h_x$, $|h_x| \ll 1$, …, $G_x = 1 + g_x$, $|g_x| \ll 1$. Тогда в линейном приближении уравнения (51) могут быть переписаны в виде

$$
\begin{aligned}
& f_1 = c_{11}(h_y + g_z) - c_{12}(h_z + g_y) - \Delta k_x = 0, \\
& f_2 = c_{21}(h_z + g_x) - c_{22}(h_x + g_z) - \Delta k_y = 0, \\
& f_3 = c_{31}(h_x + g_y) - c_{32}(h_y + g_x) - \Delta k_z = 0, \\
& f_4 = c_{41} g_x + c_{42} g_y + c_{43} g_z + c_{44} h_x + c_{45} h_y + c_{46} h_z - \Delta e = 0,
\end{aligned}
\tag{52}
$$

где

$$
c_{44} = \frac{m_1 m_2}{q^3} q_x^2, \quad c_{45} = \frac{m_1 m_2}{q^3} q_y^2, \quad c_{46} = \frac{m_1 m_2}{q^3} q_z^2,
$$

$$
\Delta k_x = k_{0,x} - \mu(q_y u_z - q_z u_y), \quad \Delta k_y = k_{0,y} - \mu(q_z u_x - q_x u_z),
$$

$$
\Delta k_z = k_{0,z} - \mu(q_x u_y - q_y u_x), \quad \Delta e = e_0 - \frac{1}{2}\mu \mathbf{u}^2 + \frac{m_1 m_2}{q}.
$$

Недоопределенную линейную систему уравнений (52) относительно шести неизвестных $h_x, h_y, h_z, g_x, g_y, g_z$ решим путем минимизации функции вида

$$
\Phi(h_x, h_y, h_z, g_x, g_y, g_z) = \frac{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}{2\left(\Delta k_x^2 + \Delta k_y^2 + \Delta k_z^2\right)} + \frac{f_4^2}{2\Delta e^2}. \tag{53}
$$

Обычно процедура минимизации, например, методом градиентного спуска предполагает, что заданы начальные значения неизвестных $h_x^{(0)}, h_y^{(0)}, h_z^{(0)}, g_x^{(0)}, g_y^{(0)}, g_z^{(0)}$. Выберем последние равномерно случайными числами из интервала $[-\delta, \delta]$. Систему уравнений (48) решаем численно обычными методами на отрезке $[0, T_1]$. Если после применения процедуры (51)–(53) окажется, что нарушается хотя бы одно из шести неравенств: $|h_x| < \delta, \ldots, |g_z| < \delta,$ то интервал времени уменьшается и расчет осуществляется повторно с тех же самых начальных данных. Если все шесть неравенств остаются верными, производится корректировка решений уравнений (48) по формулам

$$
\mathbf{q} \to ((1+h_x)q_x, (1+h_y)q_y, (1+h_z)q_z), \quad \mathbf{u} \to ((1+g_x)u_x, (1+g_y)u_y, (1+g_z)u_z).
$$

Далее выбирается новый интервал интегрирования $[T_1, T_1 + T_2]$ и вся процедура повторяется. На этом изложение алгоритма решения системы уравнений (48) вместе с процедурой приведения решений к заданным значениям законов сохранения момента импульса $\mathbf{k}_0$ и энергии e_0 можно считать завершенным.

На рис. 7, *б* приведен пример построения траекторий движения в пространстве пары тел гравитационной системы с учетом процедуры (50)–(53) приведения решений к заданным значениям законов сохранения момента импульса $\mathbf{k}_0$ и энергии e_0. Выбирались следующие значения параметров: $k_0 = 0.125$, $e_0 = -0.25$, $T_1 = 1$, $\delta = 0.005$. Итоговый интервал интегрирования составил $[0, 646.55]$, при этом период колебаний, соответствующий аналитическому решению, имел значение $T = 2.67$. На рис. 7, *б* пентаграммами обозначены моменты, когда применялась процедура приведения решения к заданным значениям момента импульса и энергии. Всего было проведено $n = 500$ процедур.

6. Устойчивость Солнечной системы

Перейдем к обсуждению итогов моделирования динамики Солнечной системы. В качестве начальных положений и скоростей тел выбирались реальные данные, когда планеты (учитывался барицентр системы «Земля + Луна») двигаются в окрестности плоскости эклиптики, т. е. в трехмерной барицентрической системе координат. В работе ряда авторов [Simon et al., 2013] в приложении [Index of…] представлены эфемериды за длительный интервал времени. Для нашего расчета была выбрана эфемерида на дату юлианского календаря JD 2405730.5, что соответствует дате григорианского календаря 25.06.1874. Корректировка решений к законам сохранения осуществлялась согласно процедуре (16)–(20).

Типичный пример расположения орбит планет Солнечной системы приведен на рис. 8, *а* после расчета на срок $\approx 1.05 \cdot 10^7$ лет, т. е. более десяти миллионов лет. Орбиты планет нанесены исходя из последних $\approx 9.01 \cdot 10^4$ лет расчета. Точками на графиках траекторий планет обозначены моменты корректировки решений к законам сохранения. Прочие параметры расчета выбирались следующими: $T_1 = T_{\max} = 30$, $n = 12'984$, $\delta = 0.025$, относительная и абсолютная точности решателя системы дифференциальных уравнений составили $2 \cdot 10^{-7}$ и $2 \cdot 10^{-8}$ соответственно. На рис. 8, *б* приведены зависимости от времени расстояний от центра масс до Солнца и планет в течение всего отрезка времени расчета $[0, 1.05 \cdot 10^7]$ лет. Из графиков на рис. 8, *б* видно, что орбиты наиболее легких планет, т. е. Меркурия и Марса, со временем заметно варьируются, при этом вся система планет остается устойчивой.

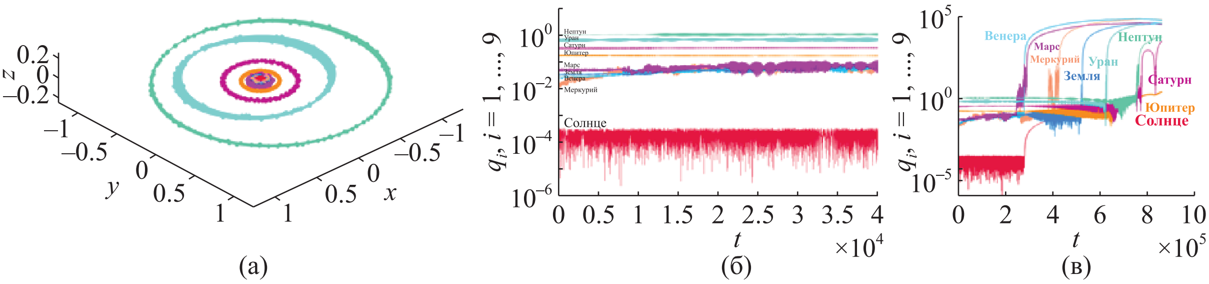


Рис. 8. Фрагмент динамики планет Солнечной системы (а); зависимость от времени расстояний от центра масс до Солнца и планет (б); динамика трансформации Солнечной системы (в)

Расчет динамики планет Солнечной системы с реальных начальных позиций, но с более грубыми относительной и абсолютной точностью 10^{-6} и 10^{-7} соответственно, показал, что заметная трансформация Солнечной системы началась спустя $\approx 6.5 \cdot 10^6$ лет. На рис. 8, *в* приведен итог трансформации, которая растянулась на срок $[0, 2.27 \cdot 10^7]$ лет, т. е. более двадцати миллионов лет. Сценарий трансформации Солнечной системы свелся к последовательности ухода планет из Солнечной системы: Венера $\to$ Марс $\to$ Меркурий $\to$ Земля $\to$ Уран $\to$ Нептун $\to$ Сатурн с последующим образованием двойной системы «Солнце + Юпитер». Прочие параметры расчета выбирались следующими: $T_1 = T_{\max} = 30$, $n = 29'500$, $\delta = 0.025$. Все возможные сценарии трансформации Солнечной системы условно можно поделить на три группы: 1) большинство планет покидают Солнечную систему, остается двойная система, состоящая из Солнца и одной из тяжелых планет; 2) две планеты падают друг на друга, либо одна из планет падает на Солнце; 3) смешанный вариант.

Отметим, что время начала заметной трансформации Солнечной системы можно значительно отодвинуть вперед во времени, если уменьшить значения абсолютной и относительной точностей используемой схемы расчета. Имеющиеся у автора вычислительные ресурсы не позволили применить изложенную выше схему расчета для относительной и абсолютной точностей много меньших значений $2 \cdot 10^{-7}$ и $2 \cdot 10^{-8}$ соответственно.

7. Заключение

В представленной работе на базе вычислительного эксперимента исследовался вопрос об устойчивости гравитационной системы, состоящей из многих тел. Для расчета систем дифференциальных уравнений на длительный срок разработан новый метод, он совместил в себе использование обычных численных методов решения дифференциальных уравнений, а также специально разработанную процедуру коррекции решений к заданным интегралам движения. Процедура коррекции, с одной стороны, делает метод консервативным, с другой — вводит случайную компоненту в расчеты. В итоге данный метод может быть отнесен к классу методов Монте-Карло, а вся схема расчета становится стохастико-детерминированной.

В работе построен генератор точек фазового пространства с гиперповерхности законов сохранения гравитационной системы. Путем вычислительного эксперимента показано, что область скопления точек фазового пространства в части конфигурационного пространства не является компактной, когда число тел гравитационной системы больше двух. Это означает, что гравитационная система общего положения (при $N > 2$), вообще говоря, неустойчива в том числе и тогда, когда общая энергия отрицательна. Под гравитационной системой общего положения понимается такая система, в которой массы, а также начальные положения и скорости тел являются случайными величинами, выбранными из некоторых фиксированных областей.

Изложенный в работе метод применен к расчету динамики Солнечной системы, исходя из реальных значений эфемерид. В силу ограниченности вычислительных ресурсов устойчивость Солнечной системы подтверждается результатами проведенного расчета на длительность порядка десяти миллионов лет. По истечении указанного срока структура Солнечной системы в целом, за исключением заметной перестройки орбит Меркурия и Марса, сохраняется. При более грубых значениях относительной и абсолютной точностей алгоритма расчета удалось проследить полный цикл трансформации Солнечной системы с выходом планет и финальным образованием пары «Солнце + Юпитер».

Список литературы

Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. фундам. направления. — 1985. — Т. 3. — С. 5–290.

Arnol'd V. I., Kozlov V. V., Neishtadt A. I. Matematicheskie aspekty klassicheskoj i nebesnoi mekhaniki [Mathematical aspects of classical and celestial mechanics] // Itogi nauki i tekhn. Ser. Sovrem. probl. mat. fundam. napravleniya [Results of science and technology. Ser. sovrem. probl. mat. fundam. directions]. — 1985. — Vol. 3. — P. 5–290 (in Russian).

Дородницын В. А. Групповые свойства разностных уравнений. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 240 с.

Dorodnitsyn V. A. Gruppovye svoistva raznostnykh uravnenij [Group properties of difference equations]. — Moscow: FIZMATLIT, 2001. — 240 p. (in Russian).

Дородницын В. А., Капцов Е. И. Дискретизация обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, обладающих симметриями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2013. — Т. 53, № 8. — С. 1329–1355.

Dorodnitsyn V. A., Kaptsov E. I. Discretization of second-order ordinary differential equations with symmetries // Comput. Math. Math. Phys. — 2013. — Vol. 53, No. 8. — P. 1153–1178. (Original Russian paper: *Dorodnitsyn V. A., Kaptsov E. I.* Diskretizatsiya obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii vtorogo poryadka, obladayushchikh simmetriyami // Zh. vychisl. matem. i matem. fiz. — 2013. — Vol. 53, No. 8. — P. 1329–1355.)

Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Механика. — М.: Наука, 1973. Т. 1. — 208 с.

Landau L. D., Lifshitz E. M. Mechanics. — Oxford: Butterworth-Heinemann, Third edition, 1976. — 170 p. (Russ. ed.: *Landau L. D., Livshits E. M.* Mekhanika. — Moscow: Nauka, 1973. Vol. 1. — 208 p.)

Питьева Е. В., Павлов Д. А., Питьев Н. П. Динамическая модель Солнечной системы в эфемеридах планет EPM // Труды ИПА РАН. — 2019. — Вып. 51. — С. 82–92.

Pit'eva E. V., Pavlov D. A., Pit'ev N. P. Dinamicheskaya model' Solnechnoi sistemy v efemeridakh planet EPM [Dynamic model of the Solar system in EPM planetary ephemerides] // Trudy IPA RAN [Proceedings of the IPA RAS]. — 2019. — Iss. 51. — P. 82–92 (in Russian).

Резонансы в небесной механике: сб. работ. — М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2006. — 316 с.

Rezonansy v nebesnoi mekhanike: sb. rabot [Resonances in celestial mechanics. Collection of works]. — Moscow–Izhevsk: Institut komp'yuternykh issledovanij, 2006. — 316 p. (in Russian).

Самарский А. А. Теория разностных схем. — М.: Главная ред. физ.-мат лит. изд-ва «Наука», 1977. — 656 с.

Samarskii A. A. Teoriya raznostnykh skhem [Theory of difference schemes]. — Moscow: Glavnaya red. fiz.-mat lit. izd-va “Nauka”, 1977. — 656 p. (in Russian).

Холшевников К. В., Кузнецов Э. Д. Обзор работ по орбитальной эволюции больших планет Солнечной системы // Астрономический вестник. — 2007. — Т. 41, № 4. — С. 291–329.

Kholshevnikov K. V., Kuznetsov E. D. Obzor rabot po orbital'noj evolyutsii bol'shikh planet Solnechnoj sistemy [Review of works on the orbital evolution of large planets of the solar system] // Astronomicheskii vestnik [Astronomical Bulletin]. — 2007. — Vol. 41, No. 4. — P. 291–329 (in Russian).

Штифель Е., Шейфеле Г. Линейная и регулярная небесная механика. — М.: Наука, 1975. — 304 с.

Stiefel E. L., Scheifele G. Linear and Regular Celestial Mechanics. — Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1971. — 306 p. (Russ. ed.: *Shtifel' E., Sheifele G.* Lineinaya i regulyarnaya nebesnaya mekhanika. — Moscow: Nauka, 1975. — 304 p.)

Aarseth S. J. Gravitational *N*-body simulations: tools and algorithms. — Cambridge University Press, 2003. — 413 p.

Bogacki P., Shampino L. F. A 3(2) Pair of Runge–Kutta Formulas // Appl. Math. Lett. — 1989. — Vol. 2, No. 4. — P. 321–325.

Feng K., Qin M. Symplectic Geometric Algorithms for Hamiltonian Systems. — Springer, 2010. — 675 p.

Fukushima T. Efficient Orbit Integration by Scaling for Kepler Energy Consistency // Astron. J. — 2003. — Vol. 126, No. 2. — P. 1097–1111.

Index of /pub/ephem/planets/vsop2013/ephemerides: https://ftp.imcce.fr/pub/ephem/planets/vsop2013/ephemerides/

Kozlov R. Conservative discretizations of the Kepler motion // J. Phys. A: Math. Theor. — 2007. — Vol. 40, No. 17. — P. 4529–4539.

Laskar J. Large scale chaos and marginal stability in the solar system // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. — 1996. — Vol. 64, Iss. 1-2. — P. 115–162.

Nacozy P. E. The Use of Integrals in Numerical Integrations of the *N*-Body Problem // Astrophys. Space Sci. — 1971. — Vol. 14. — P. 40–51.

Rein H., Spiege D. S. IAS15: a fast, adaptive, high-order integrator for gravitational dynamics, accurate to machine precision over a billion orbits // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 11 January 2015. — Vol. 446, Iss. 2. — P. 1424–1437.

Simon J.-L., Francou G., Fienga A., Manche H. New analytical planetary theories VSOP2013 and TOP2013 // Astronomy & Astrophysics. — 2013. — Vol. 557, No. A49. — P. 1–12.

Sussman G. J., Wisdom J. Chaotic Evolution of the Solar System // Science, New Series. — 1992. — Vol. 257, No. 5066. — P. 456–462.

Trenti M., Hut P. *N*-body simulations (gravitational) // Scholarpedia. — 2008. — Vol. 3 (5):3930. — DOI:10.4249/scholarpedia.3930.

Zink J. K., Batygin K., Adams F. C. The Great Inequality and the Dynamical Disintegration of the Outer Solar System // The Astronomical Journal. — 2020, November. — Vol. 160:232. 9 p.

Wisdom J., Holman V. Symplectic maps for the *N*-body problem // The Astronomical Journal. — 1991. — Vol. 102, No. 4. — P. 1528–1538.