КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2021 Т. 13 № 2 С. 365–379

DOI: 10.20537/2076-7633-2021-13-2-365-379

Ки&М

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРАФИКА В ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ ТРАНСПОРТНЫХ СИСТЕМАХ

УДК: 519.8

Поиск равновесий в двухстадийных моделях распределения транспортных потоков по сети

Е. В. Котлярова[1,a], А. В. Гасников[1, 2, 3,b], Е. В. Гасникова[1,c], Д. В. Ярмошик[1,d]

[1]Национальный исследовательский университет «Московский физико-технический институт», Россия, 141701, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9

[2]Институт проблем передачи информации РАН, Россия, 127051, г. Москва, Б. Каретный пер., д. 9

[3]Кавказский математический центр, Россия, 385000, г. Майкоп, ул. Первомайская, д. 208

E-mail: [a] kotlyarova.ev@phystech.edu, [b] gasnikov@yandex.ru, [c] egasnikov@yandex.ru, [d] yarmoshik.dv@phystech.edu

Получено 08.12.2020, после доработки — 29.12.2020.
Принято к публикации 15.01.2021.

В работе описывается двухстадийная модель равновесного распределения транспортных потоков. Модель состоит из двух блоков, где первый блок — модель расчета матрицы корреспонденций, а второй блок — модель равновесного распределения транспортных потоков по путям. Первая модель, используя матрицу транспортных затрат (затраты на перемещение из одного района в другой, в данном случае — время), рассчитывает матрицу корреспонденций, описывающую потребности в объемах передвижения из одного района в другой район. Для решения этой задачи предлагается использовать один из наиболее популярных в урбанистике способов расчета матрицы корреспонценций — энтропийную модель. Вторая модель на базе равновесного принципа Нэша–Вардропа (каждый водитель выбирает кратчайший для себя путь) описывает, как именно потребности в перемещениях, задаваемые матрицей корреспонденций, распределяются по возможным путям. Таким образом, зная способы распределения потоков по путям, можно рассчитать матрицу затрат. Равновесием в двухстадийной модели транспортных потоков называют неподвижную точку цепочки из этих двух моделей. Практически ранее отмеченную задачу поиска неподвижной точки решали методом простых итераций. К сожалению, на данный момент вопрос сходимости и оценки скорости сходимости для этого метода не изучен. Кроме того, при численной реализации алгоритма возникает множество проблем. В частности, при неудачном выборе точки старта возникают ситуации, в которых алгоритм требует вычисления экстремально больших чисел и превышает размер доступной памяти даже в самых современных вычислительных машинах. Поэтому в статье предложены способ сведения задачи поиска описанного равновесия к задаче выпуклой негладкой оптимизации и численный способ решения полученной задачи оптимизации. Для обоих методов решения задачи были проведены численные эксперименты. Авторами использовались данные для Владивостока (для этого была обработана информация из различных источников и собрана в новый пакет) и двух небольших городов США. Методом простой прогонки двух блоков сходимости добиться не удалось, тогда как вторая модель для того же набора данных продемонстрировала скорость сходимости $k^{-1.67}$.

Ключевые слова: модель расчета матрицы корреспонденций, многостадийная модель, модель равновесного распределения пототоков по путям

Авторы выражают благодарность проф. Ю. Е. Нестерову, к 65-летию которого приурочена данная статья, а также Мерузе Кубентаевой за постоянную помощь (консультации).
Авторы также выражают благодарность проф. Е. А. Нурминскому за предоставленные по г. Владивостоку данные.
Работа Е. В. Котляровой была выполнена в Сириусе (Сочи) в августе 2020 г. в рамках проектной студенческой смены «Оптимизация, управление и информация». Работа Е. В. Гасниковой была выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (госзадание) № 075-00337-20-03, проект № 0714-2020-0005. Работа А. В. Гасникова была поддержана грантом РФФИ 18-29-03071 мк.

COMPUTER RESEARCH AND MODELING
2021 VOL. 13 NO. 2 P. 365–379
DOI: 10.20537/2076-7633-2021-13-2-365-379

Ки&М

MODELING OF TRAFFIC IN INTELLIGENT TRANSPORTATION SYSTEMS

UDC: 519.8

Finding equilibrium in two-stage traffic assignment model

E. V. Kotliarova[1,a], A. V. Gasnikov[1, 2, 3,b], E. V. Gasnikova[1,c], D. V. Yarmoshik[1,d]

[1]National Research University Moscow Institute of Physics and Technology,
9 Institute lane, Dolgoprudny, 141701, Russia
[2]Institute for Information Transmission Problems RAS,
9 B. Karetny lane, Moscow, 127051, Russia
[3]Caucasus Mathematical Center,
208 Pervomaiskaia st., Maikop, 385000, Russia

E-mail: [a] kotlyarova.ev@phystech.edu, [b] gasnikov@yandex.ru, [c] egasnikov@yandex.ru,
[d] yarmoshik.dv@phystech.edu

Received 08.12.2020, after completion — 29.12.2020.
Accepted for publication 15.01.2021.

Authors describe a two-stage traffic assignment model. It contains of two blocks. The first block consists of a model for calculating a correspondence (demand) matrix, whereas the second block is a traffic assignment model. The first model calculates a matrix of correspondences using a matrix of transport costs (it characterizes the required volumes of movement from one area to another, it is time in this case). To solve this problem, authors propose to use one of the most popular methods of calculating the correspondence matrix in urban studies — the entropy model. The second model describes exactly how the needs for displacement specified by the correspondence matrix are distributed along the possible paths. Knowing the ways of the flows distribution along the paths, it is possible to calculate the cost matrix. Equilibrium in a two-stage model is a fixed point in the sequence of these two models. In practice the problem of finding a fixed point can be solved by the fixed-point iteration method. Unfortunately, at the moment the issue of convergence and estimations of the convergence rate for this method has not been studied quite thoroughly. In addition, the numerical implementation of the algorithm results in many problems. In particular, if the starting point is incorrect, situations may arise where the algorithm requires extremely large numbers to be computed and exceeds the available memory even on the most modern computers. Therefore the article proposes a method for reducing the problem of finding the equilibrium to the problem of the convex non-smooth optimization. Also a numerical method for solving the obtained optimization problem is proposed. Numerical experiments were carried out for both methods of solving the problem. The authors used data for Vladivostok (for this city information from various sources was processed and collected in a new dataset) and two smaller cities in the USA. It was not possible to achieve convergence by the method of fixed-point iteration, whereas the second model for the same dataset demonstrated convergence rate $k^{-1.67}$.

Keywords: correspondence matrix calculation model, multi stage model, equilibrium distribution model of traffic flow

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2021, vol. 13, no. 2, pp. 365–379 (Russian).

The authors are grateful to Prof. Yu. E. Nesterov, whose 65th anniversary this article is timed to and Meruza Kubentaeva for permanent help and advices.
The authors also thankful to Prof. E. A. Nurminsky for providing Vladivostok data.
The work of E. V. Kotliarova was done in Sirius center (Sochi) in August 2020 as part of the student school "Optimization, Control and Information". The work of E. V. Gasnikova was carried out with the support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (goszadaniye) No. 075-00337-20-03, project No. 0714-2020-0005. The work of A. V. Gasnikov was supported by the RFBR grant No. 18-29-03071 mk.

Введение

В данной статье описывается (с обоснованием) вариационный (экстремальный) принцип, сводящий поиск равновесного распределения транспортных потоков по сети к задаче выпуклой оптимизации. Под распределением потоков понимается: 1) расчет матрицы корреспонденций и 2) распределение потоков по путям при заданных корреспонденциях. Таким образом, речь идет о двухуровневой модели распределения. Многостадийные модели транспортных потоков являются одним из основных объектов изучения при долгосрочном транспортном планировании [Ortuzar, Willumsen, 2002; Гасников и др., 2013; Гасников, Гасникова, 2020]. С помощью таких моделей можно просчитывать долгосрочные последствия: введения в эксплутатацию различных инфраструктурных объектов, изменения дорожной сети и т. п.

Следуя работам [Гасников и др., 2014; Бабичева и др., 2015; Гасников, 2016], в статье выписывается задача выпуклой оптимизации, к которой сводится поиск равновесия в такой двухстадийной модели. Далее эта задача упрощается (путем перехода к двойственному представлению) и описывается численный способ решения возникающей в итоге (двойственной) задачи. Отличительными особенностями данной работы являются: 1) простой способ получения итоговой задачи оптимизации и способа ее решения; 2) проведенные численные эксперименты. За базу был взят код [Кубентаева, 2020], в котором рассматривалось только распределение потоков по путям при заданных корреспонденциях [Гасников, Кубентаева, 2018; Баймурзина и др., 2019; Kubentayeva, Gasnikov, 2020]. В качестве источника данных использовался ресурс [Stabler et al., 2020]. Также из разных источников были собраны данные по Владивостоку. Таким образом, в данной статье код [Кубентаева, 2020] был распространен на поиск равновесий в двухстадийных моделях, введенных в [Гасников и др., 2014; Бабичева и др., 2015; Гасников, 2016].

Основные определения и обозначения

Для простоты будем рассматривать замкнутую транспортную систему, описываемую графом $G = \langle V, E\rangle$, где V — множество вершин ($|V| = n$), а E — множество ребер ($|E| = m$). Будем обозначать ребра графа через $e \in E$. Для стандартной транспортной системы можно ожидать, что $m \simeq 3n$. Для больших мегаполисов (таких как Москва) $n \simeq 10^5$. Однако в данной работе мы будем рассматривать в основном примеры $n \lesssim 10^4$. Транспортный граф G считается известным.

Часть вершин $O \subseteq V$ (*origin*) является источниками корреспонденций, а часть — стоками корреспонденций $D \subseteq V$ (*destination*). Если говорить более точно, то вводится множество пар (источник, сток) корреспонденций $OD \subseteq V \bigotimes V$. Сами корреспонденции будем обозначать через d_{ij}, где $(i, j) \in OD$. Как правило, $|OD| \ll n^2$ [Гасников и др., 2014]. Не ограничивая общности, будем далее считать, что $\sum_{(i,j)\in OD} d_{ij} = 1$. Множество пар OD считается известным. Корреспонденции неизвестны! Однако известны (заданы) характеристики источников и стоков корреспонденций. То есть известны величины $\{l_i\}_{i\in O}$, $\{w_j\}_{j\in D}$:

$$\sum_{j:\ (i,j)\in OD} d_{ij} = l_i, \qquad \sum_{i:\ (i,j)\in OD} d_{ij} = w_j. \tag{1}$$

Заметим, что $\sum_{i\in O} l_i = \sum_{j\in D} w_j = 1$. Условие (1) будем также для краткости записывать в виде $d \in (l, w)$.

Обозначим через $\tau_e(f_e)$ функцию затрат (например, временных) на проезд по ребру (участку дороги) e, если поток автомобилей на этом участке f_e. Функции $\tau_e(f_e)$ считаются заданными, например, таким образом [Гасников и др., 2013; Patriksson, 2015; Гасников, Гасникова, 2020]:

$$\tau_e(f_e) = \bar{t}_e\left(1 + \kappa\left(\frac{f_e}{\bar{f}_e}\right)\right)^{\frac{1}{\mu}}, \tag{2}$$

где $\bar{t}_e$ — время прохождения ребра e, когда участок свободный (определяется разрешенной скоростью на данном участке), а $\bar{f}_e$ — пропускная способность ребра e (определяется полосностью: [пропускная способность] $\leq$ [число полос] $\times$ [2000 авт/ч] и характеристиками перекрестков). Считается, что эти характеристики известны [Stabler et al., 2020]. Параметр $\mu = 0.25$ — BPR-функции [Patriksson, 2015], но допускается и $\mu \to 0+$ — модель стабильной динамики [Nesterov, de Palma 2003; Гасников и др., 2013; Гасников и др., 2014; Гасников и др., 2016b; Гасников, 2016; Gasnikov et al., 2018; Гасников, Гасникова, 2020]. Параметр $\kappa > 0$ также считается заданным.

Полезно также ввести t_e — (временные) затраты на прохождения ребра e. Согласно вышенаписанному $t_e = \tau_e(f_e)$. По этим затратам $t = \{t_e\}_{e\in E}$ можно определить затраты на перемещение из источника i в сток j по кратчайшему пути: $T_{ij}(t) = \min_{p\in P_{ij}} \sum_{e\in E} \delta_{ep} t_e$, где p — путь (без самопересечений — циклов) на графе (набор ребер), P_{ij} — множество всевозможных путей на графе, стартующих из источника i и заканчивающихся в стоке j, $\delta_{ep} = 1$, если ребро e принадлежит пути p, и $\delta_{ep} = 1$ — если иначе.

В ряде выкладок далее также будет полезен вектор $x = \{x_p\}_{p\in P}$ — вектор распределения потоков по путям, где $P = \bigcup_{(i,j)\in OD} P_{ij}$. Заметим, что $f_e = \sum_p \delta_{ep} x_p$, или в матричном виде: $f = \Theta x$, где $\Theta = \|\delta_{ep}\|_{e\in E, p\in P}$.

Энтропийная модель расчета матрицы корреспонденций

Под энтропийной моделью расчета матрицы корреспонденций $d(T)$ понимается определенный способ вычисления набора корреспонденций $\{d_{ij}\}_{(i,j)\in OD}$ по известной матрице затрат $\{T_{ij}\}_{(i,j)\in OD}$. Этот способ заключается в решении задачи энтропийно-линейного программирования, которую можно понимать как энтропийно-регуляризованную транспортную задачу[1]:

$$\min_{d\in(l,w);d\geq 0} \sum_{(i,j)\in OD} d_{ij} T_{ij} + \gamma \sum_{(i,j)\in OD} d_{ij} \ln d_{ij}, \tag{3}$$

где параметр $\gamma > 0$ считается известным [Вильсон, 1978; Гасников, Гасникова, 2010; Гасников и др., 2013; Гасников и др., 2016c; Гасников, 2016; Гасников, Гасникова, 2020]. Относительно выбора этого параметра см. [Гасников и др., 2014; Гасников, Гасникова, 2020; Иванова и др., 2020].

Модели равновесного распределения транспортных потоков по путям

Матрица корреспонденций $\{d_{ij}\}_{(i,j)\in OD}$ порождает (вообще говоря, неоднозначно) некий вектор распределения потоков по путям x. Неоднозначность заключается в том, что балансовые ограничения, которые возникают на $x \in X(d)$:

$$x \geq 0: \quad \forall (i,j) \in OD \to \sum_{p\in P_{ij}} x_p = d_{ij},$$

как правило, не определяют вектор x однозначно. Вектор x в свою очередь порождает вектор потоков на ребрах, $f = \Theta x$, который в свою очередь порождает вектор (временных) затрат на ребрах $t(f) = \{\tau_e(f_e)\}_{e\in E}$. На основе последнего вектора уже можно рассчитать матрицу затрат на кратчайших путях: $T(t) = \{T_{ij}(t)\}_{(i,j)\in OD}$. Собственно, модель равновесного распределения потоков — это формализация *принципа Нэша–Вардропа* о том, что в равновесии каждый водитель выбирает для себя кратчайший путь [Гасников и др., 2013; Patriksson, 2015; Гасников, Гасникова,

[1] Вместо $d_{ij} \ln d_{ij}$ точнее было бы писать $d_{ij} \ln\left(d_{ij}/\left(\sum_{(i,j)\in OD} d_{ij}\right)\right)$ [Гасников и др., 2014], но $\sum_{(i,j)\in OD} d_{ij} = 1$, поэтому возможна упрощенная форма записи.

2020]. Другими словами, если для заданной корреспонденции $(i, j) \in OD$ известно, что (*условие комплементарности*)

$$x_{p'} > 0, \text{ где } p' \in P_{ij},$$
$$\text{то } T_{ij}(t) = \min_{p \in P_{ij}} \sum_{e \in E} \delta_{ep} t_e = \sum_{e \in E} \delta_{ep'} t_e.$$

Задача поиска равновесия сводится, таким образом, к поиску такого вектора $x \in X(d)$, который бы порождал такие затраты $T := T(t(f(x)))$, что выполняется условие комплементарности. В написанном выше виде искать равновесный вектор $x \in X(d)$ представляется сложной задачей, сводящейся к решению системы нелинейных уравнений. Однако в данном случае (рассматривается потенциальная игра загрузки) можно свести поиск равновесия к решению задачи выпуклой оптимизации[1]:

$$\min_{(f,x):\ f = \Theta x; x \in X(d)} \sum_{e \in E} \int_0^{f_e} \tau_e(z)\, dz. \tag{4}$$

Решение задачи дает модель вычисления вектора потока на ребрах при заданной матрице корреспонденций $f(d)$ [Гасников и др., 2013; Гасников и др., 2014; Patriksson, 2015; Гасников и др., 2016b; Гасников, Гасникова, 2020].

Двухстадийная модель

Выше были описаны две модели. В первой (расчет матрицы корреспонденций) на вход подается матрица затрат T, а на выходе получается матрица корреспонденций $d(T)$. Во второй модели, наоборот, на вход подается матрица корреспонденций $d(T)$, а на выходе рассчитывается матрица затрат $T(d) = T(t(f(d)))$.

Под равновесием в двухстадийной транспортной модели понимается такая пара (f, d), что [Ortuzar, Willumsen, 2002; Гасников и др., 2014; Бабичева и др., 2015; Гасников, 2016; Гасников, Гасникова, 2020]

$$d = d(T(t(f))), \qquad f = f(d), \tag{5}$$

то есть (f, d) — есть неподвижная точка описанных двух блоков моделей. Собственно, часто на практике так и ищут равновесие, последовательно (друг за другом) прогоняя описанные два блока [Ortuzar, Willumsen, 2002; Гасников и др., 2014]. Однако, насколько нам известно, нет никаких теоретических гарантий, что такая процедура (последовательная прогонка) будет сходиться к неподвижной точке. Собственно, описанные в следующих разделах численные эксперименты показывают, что на практике сходимость наблюдается далеко не всегда. Но даже если наблюдается сходимость, то непонятно, насколько эта сходимость может быть быстрой и лучший ли это способ (простая прогонка) численного решения (5). Далее, следуя [Гасников и др., 2014; Гасников и др., 2015a; Бабичева и др., 2015; Гасников, 2016; Гасников, Гасникова, 2020], предлагается эквивалентный способ перезаписи задачи (5) как задачи выпуклой оптимизации, которую можно уже решать оптимальными по скорости (глобально сходящимися) алгоритмами.

Теорема 1. *Задача поиска неподвижной точки* (5) *сводится к задаче выпуклой оптимизации*

$$\min_{(f,x,d):\ f = \Theta x; x \in X(d); d \in (l,w); d \geq 0} \sum_{e \in E} \int_0^{f_e} \tau_e(z)\, dz + \gamma \sum_{(i,j) \in OD} d_{ij} \ln d_{ij}. \tag{6}$$

[1] Подобно (3) можно искать не равновесия Нэша–Вардропа, а стохастическое равновесия. Это приводит к дополнительному энтропийному слагаемому в (4) [Гасников и др., 2013; Гасников и др., 2014; Гасников и др., 2015c; Баймурзина и др., 2019; Гасников, Гасникова, 2020].

Схема доказательства. Вернемся к формулировке задачи оптимизации (4) и заметим следующее важное свойство функционала задачи $\Psi(x) = \sum_{e\in E}\int_0^{f_e(x)}\tau_e(z)dz$: для всех $p\in P$

$$\frac{\partial\Psi(x)}{\partial x_p} = T_p(x),$$

где $T_p(x) = \sum_{e\in E}\delta_{ep}\tau_e(f_e(x))$ — затраты на пути p. Это и есть проявление того, что рассматривается потенциальная игра загрузки. Собственно, для (3) также можно выделить потенциал $\Phi(d) = \sum_{(i,j)\in OD} d_{ij}T_{ij}$, для которого

$$\frac{\partial\Phi(d)}{\partial d_{ij}} = T_{ij} \quad \text{для всех } (i,j)\in OD.$$

Если бы удалось найти такую функцию $\widetilde{\Phi}(d)$, для которой

$$\frac{\partial\widetilde{\Phi}(d)}{\partial d_{ij}} = T_{ij}(t(f(d))) \quad \text{для всех } (i,j)\in OD, \tag{7}$$

где $T_{ij}(t(f(d)))$ определяется из решения задачи (4), то решение задачи

$$\min_{d\in(l,w);d\geq 0}\widetilde{\Phi}(d) + \gamma\sum_{(i,j)\in OD} d_{ij}\ln d_{ij}$$

давало бы равновесную матрицу корреспонденций d, по которой можно было бы уже оценить и равновесный вектор потоков на ребрах $f = f(p)$ (см. (5)). Детали см. в [Гасников и др., 2014; Гасников и др., 2015а; Бабичева и др., 2015; Гасников, 2016; Гасников, Гасникова, 2020].

Таким образом, цель — найти потенциал $\widetilde{\Phi}(d)$, если, конечно, он существует. Покажем, что

$$\widetilde{\Phi}(d) = \min_{(f,x):\ f=\Theta x; x\in X(d)}\sum_{e\in E}\int_0^{f_e}\tau_e(z)\,dz$$

(см. формулу (4)).

Для этого введем (выпуклые) функции $\sigma_e(f_e) = \int_0^{f_e}\tau_e(z)dz$ и обозначим сопряженные к ним функции через $\sigma_e^*(t_e) = \max_{f_e\geq 0}\{f_et_e - \sigma_e(f_e)\}$. Тогда (детали см. в [Гасников и др., 2014; Гасников, 2016; Гасников, Гасникова, 2020])

$$\widetilde{\Phi}(d) = \min_{(f,x):\ f=\Theta x; x\in X(d)}\sum_{e\in E}\sigma_e(f_e) = \min_{(f,x):\ f=\Theta x; x\in X(d)}\sum_{e\in E}\max_{t_e\in\operatorname{dom}\sigma_e^*}\{f_et_e - \sigma_e^*(t_e)\} = \tag{8}$$

$$= \max_{t_e\in\operatorname{dom}\sigma_e^*, e\in E}\left\{\min_{(f,x):\ f=\Theta x; x\in X(d)}\sum_{e\in E} f_et_e\right\} - \sum_{e\in E}\sigma_e^*(t_e) = \max_{t_e\in\operatorname{dom}\sigma_e^*, e\in E}\sum_{(i,j)\in OD} d_{ij}T_{ij}(t) - \sum_{e\in E}\sigma_e^*(t_e).$$

Здесь $\operatorname{dom}\sigma_e^*$ означает область определения функции $\sigma_e^*(t_e)$. Из формулы (8) и формулы Демьянова–Данскина [Bertsekas, 2009; Гасников, 2021] следует (7).

Строго говоря, приведенные выше рассуждения еще не являются доказательством, поскольку апеллируют к понятию потенциала и использованию соответствующих теорем популяционной теории игр загрузки. Однако вместо того, чтобы приводить здесь эти соображения (подобно тому, как это было сделано, например, в работах [Sandholm, 2010; Гасников и др., 2013; Гасников и др., 2014; Гасников и др., 2015а; Гасников и др., 2016с; Dvurechensky et al., 2016; Гасников, Гасникова, 2020]), в этой статье мы ограничимся тем, что заметим, что выписанная задача (6), как задача оптимизации относительно d при «заморожоженных» (f, x), совпадает с задачей (3) и, наоборот, при «замороженном» d задача (6), как задача оптимизации относительно (f, x), совпадает с задачей (4). Таким образом, если удалось найти такую задачу, решение которой одновременно дает нужные нам связи переменных, описываемые формулой (5), то это и означает, что нам удалось свести поиск неподвижной точки сложного нелинейного отображения (которое не удается выписать аналитически) к явно выписанной задаче оптимизации (6). Отметим, что решение этой выпуклой задачи оптимизации по сложности сопоставимо с решением задачи (4), что будет пояснено в следующем разделе.

Переход к двойственной задаче

Как следует из схемы доказательства теоремы 1, задачу выпуклой оптимизации (6) можно переписать эквивалентным седловым образом, введя двойственные переменные $t = \{t_e\}_{e\in E}$,[1] которые имеют естественную интерпретацию вектора потоков на ребрах,

$$\min_{d\in(l,w);d\geq 0}\ \max_{t_e\in \mathrm{dom}\,\sigma_e^*, e\in E}\left\{\sum_{(i,j)\in OD} d_{ij}T_{ij}(t) - \sum_{e\in E}\sigma_e^*(t_e) + \gamma\sum_{(i,j)\in OD} d_{ij}\ln d_{ij}\right\}.$$

Последнюю задачу удобнее переписать в виде[2]

$$\max_{t_e\in \mathrm{dom}\,\sigma_e^*, e\in E}\ \min_{d\in(l,w);\sum_{(i,j)\in OD} d_{ij}=1;d\geq 0}\left\{\sum_{(i,j)\in OD} d_{ij}T_{ij}(t) + \gamma\sum_{(i,j)\in OD} d_{ij}\ln d_{ij}\right\} - \sum_{e\in E}\sigma_e^*(t_e).$$

Вспомогательную задачу минимизации можно представить через двойственную к ней:

$$\max_{t_e\in \mathrm{dom}\,\sigma_e^*, e\in E;(\lambda,\mu)} -\gamma\ln\left(\sum_{(i,j)\in OD}\exp\left(\frac{-T_{ij}(t)+\lambda_i+\mu_j}{\gamma}\right)\right) + \langle l,\lambda\rangle + \langle w,\mu\rangle - \sum_{e\in E}\sigma_e^*(t_e) =$$

$$= -\min_{t_e\in \mathrm{dom}\,\sigma_e^*, e\in E;(\lambda,\mu)} \gamma\ln\left(\sum_{(i,j)\in OD}\exp\left(\frac{-T_{ij}(t)+\lambda_i+\mu_j}{\gamma}\right)\right) - \langle l,\lambda\rangle - \langle w,\mu\rangle + \sum_{e\in E}\sigma_e^*(t_e).$$

Обратим внимание, что добавленное по d ограничение $\sum_{(i,j)\in OD} d_{ij} = 1$ тавтологично, поскольку следует из $d \in (l, w)$. Тем не менее удобнее его добавить, чтобы при взятии min получалась равномерно гладкая функция (типа softmax), а не сумма экспонент, имеющая неограниченные константы гладкости [Гасников и др., 2015b; Гасников, Гасникова, 2020]. Множители λ и μ являются двойственными множителями (множителями Лагранжа) к ограничениям $d \in (l, w)$ (см. (1)), которые заносятся в функционал (ограничения $\sum_{(i,j)\in OD} d_{ij} = 1$, $d \geq 0$, не заносятся в функционал). Заметим, что если (t, λ, μ) — решение задачи (1), то[3] $\left(t, \lambda + (C_\lambda, \ldots, C_\lambda)^T, \mu + (C_\mu, \ldots, C_\mu)^T\right)$ также будет решением задачи, т. е. решение задачи (1) не единственное [Гасников и др., 2015b]. Заметим также, что, зная (λ, μ), можно посчитать матрицу корреспонденций [Гасников и др., 2015b; Гасников и др., 2016a; Dvurechensky et al., 2020; Гасников, Гасникова, 2020]:

$$d_{ij}(\lambda,\mu) = \frac{\exp\left(\frac{-T_{ij}(t)+\lambda_i+\mu_j}{\gamma}\right)}{\sum\limits_{(k,l)\in OD}\exp\left(\frac{-T_{kl}(t)+\lambda_k+\mu_l}{\gamma}\right)}. \quad (9)$$

[1] Отметим, что, как уже отмечалось ранее, есть явная связь двойственных переменных с прямыми: $t_e = \tau_e(f_e)$, $e \in E$. При $\mu \to 0+$ (см. (2)) эта связь становится более хитрой (см. [Гасников и др., 2014; Гасников и др., 2016b; Gasnikov et al., 2018; Баймурзина и др., 2019; Kubentayeva, Gasnikov, 2020; Гасников, Гасникова, 2020]). Это же замечание имеет место и для формулы (10) далее.

[2] Это седловая задача. Отметим, что известные сейчас оптимальные методы решения выпукло-вогнутых седловых задач (см., например, [Гасников, 2021; Гасников и др., 2021] и цитированную там литературу) здесь не подходят, поскольку не получается эффективно проектироваться на ограничение $d \in (l, w)$. Поэтому далее это ограничение заносится в функционал с помощью принципа множителей Лагранжа.

[3] Здесь C_λ и C_μ — произвольные числа.

Для решения задачи выпуклой оптимизации (но, вообще говоря, негладкой, поскольку функции $T_{ij}(t)$ негладкие) можно использовать субградиентные методы. А именно, субградиент (далее обозначаем (супер-)субградиент таким же символом, как и градиент ∇) целевого функционала по t (стоящего под минимумом) (1) можно посчитать по формуле Демьянова–Данскина [Bertsekas, 2009; Гасников, 2021]:

$$\sum_{(i,j)\in OD} d_{ij}(\lambda,\mu)\nabla T_{ij}(t) + f = \sum_{(i,j)\in OD} d_{ij}(\lambda,\mu)\nabla T_{ij}(t) + \left(\{\tau_e^{-1}(t_e)\}_{e\in E}\right)^T, \tag{10}$$

где τ_e^{-1} — обратная функция к τ_e. Примечательно, что отличие формулы (10) от ее аналога, который можно получить, решая задачу (4) посредством перехода к двойственной задаче [Гасников и др., 2016b; Гасников, 2016; Gasnikov et al., 2018; Гасников, Гасникова, 2020; Kubentayeva, Gasnikov, 2020], только в том, что $d_{ij} = d_{ij}(\lambda,\mu)$, где (λ,μ) определяются из решения задачи

$$\min_{(\lambda,\mu)} D(t,\lambda,\mu) := \gamma \ln\left(\sum_{(i,j)\in OD} \exp\left(\frac{-T_{ij}(t) + \lambda_i + \mu_j}{\gamma}\right)\right) - \langle l,\lambda\rangle - \langle w,\mu\rangle. \tag{11}$$

Важное наблюдение, сделанное в работах [Гасников, 2015; Бабичева и др., 2015; Гасников и др., 2015b; Гасников, 2016; Гасников, Гасникова, 2020], заключается в том, что решать задачу (1) выгоднее не как задачу оптимизации по переменным (t,λ,μ), а как задачу только по переменной t, в то время как переменные (λ,μ) лишь используются для подсчета субградиента целевого функционала по формуле (10) с $d_{ij}(\lambda,\mu)$, рассчитываемым по формуле (9), в которой

$$(\lambda,\mu) := (\lambda(t),\mu(t)) \in \operatorname*{argmin}_{(\lambda,\mu)} D(t,\lambda,\mu) \tag{12}$$

определяются как решение задачи (11). Заметим, что сложность вычисления $\nabla T_{ij}(t)$ оптимальным алгоритмом Дейкстры (детали см., например, в [Гасников и др., 2016b; Gasnikov et al., 2018; Гасников, Гасникова, 2020]) будет сопоставима со сложностью вычисления (с нужной точностью) матрицы $d_{ij}(\lambda(t),\mu(t))$ [Dvurechensky et al., 2018; Peyre, Cuturi, 2019; Guminov et al., 2019; Stonyakin et al., 2020; Tupitsa et al., 2020; Гасников, 2021]. Таким образом, получается, что сложность вычисления субградиента для двойственной задачи к (4) и для задачи (1) сопоставима. При этом свойства гладкости (определяющие скорость сходимости используемых методов) целевого функционала в задаче (1) при переходе от оптимизации в пространстве (t,λ,μ) к оптимизации по переменной t могут только улучшиться [Гасников и др., 2015b; Гасников, Гасникова, 2020] (во всяком случае, не ухудшиться).

Вычислительные эксперименты

Итак, в качестве задачи оптимизации предлагается решать задачу

$$\min_{t_e\in \operatorname{dom}\sigma_e^*, e\in E} F(t) := D(t,\lambda(t),\mu(t)) + \sum_{e\in E}\sigma_e^*(t_e). \tag{13}$$

При этом, согласно (10),

$$\nabla F(t) = \sum_{(i,j)\in OD} d_{ij}(\lambda(t),\mu(t))\nabla T_{ij}(t) + \left(\{\tau_e^{-1}(t_e)\}_{e\in E}\right)^T,$$

где $d_{ij}(\lambda(t),\mu(t))$ определяется формулами (9), (11), (12). В качестве способа решения задачи (13) предлагается использовать универсальный ускоренный градиентный метод, адаптивно настраивающийся на гладкость задачи [Nesterov, 2015; Гасников и др., 2015b; Гасников и др., 2015a;

Gasnikov et al., 2018; Баймурзина и др., 2019; Kamzolov et al., 2020; Nesterov et al., 2020; Гасников, Гасникова, 2020]. В худшем случае можно ожидать такой $F(t^k) - F(t_*) \simeq O(k^{-1/2})$ скорости сходимости, где t_* — решение задачи (13) (эта скорость сходимости в общем случае не улучшаема для данного класса задач, см., например, [Гасников, 2021] и цитированную там литературу), однако, как следует из результатов [Баймурзина и др., 2019], на практике можно ожидать $F(t^k) - F(t_*) \simeq O(k^{-1})$. Поскольку оптимальное значение целевого функционала $F(t_*)$ типично недоступно, то в качестве критерия оценки скорости сходимости в экспериментах планируется использовать величину, оценивающую «зазор двойственности» $\Delta(t^k, B_k) = \max_{t\in B_k \cap \text{ dom } \sigma^*}\langle \nabla F(t^k), t^k - t\rangle$ (здесь для простоты считаем, что $\text{dom } \sigma_e^* \equiv \text{ dom } \sigma^*$). Заметим, что, с одной стороны, $F(t^k) - F(t_*) \leq \Delta(t^k, B_k)$, если $t_* \in B_k$, а с другой стороны, оценки скорости сходимости (в том числе отмеченные выше) получены в действительности для зазора двойственности, поскольку универсальный ускоренный градиентный метод является прямо-двойственным методом [Nesterov, 2015; Гасников и др., 2015b; Гасников и др., 2015a; Gasnikov et al., 2018; Баймурзина и др., 2019; Kamzolov et al., 2020; Nesterov et al., 2020; Гасников, Гасникова, 2020; Гасников, 2021]. В численных экспериментах, базируясь на результатах о локализации последовательности, генерируемой методами типа (ускоренного) градиентного спуска [Gasnikov et al., 2018; Гасников, 2021], в качестве множества B_k выбирают евклидов шар с центром в точке t_k и радиусом, равным $2\|t^0 - t^k\|_2$.

Для решения вспомогательной задачи (12) можно использовать алгоритм Синхорна [Dvurechensky et al., 2018; Peyre, Cuturi, 2019], который в транспортной литературе чаще называют методом балансировки или методом Брэгмана(–Шелейховского) [Вильсон, 1978; Гасников и др., 2013]. Можно использовать и ускоренные варианты этого метода [Guminov et al., 2019; Tupitsa et al., 2020]. Важной особенностью этой линейки методов (альтернативных направлений) является высокая (линейная) скорость сходимости при немалых значениях $\gamma > 0$. К сожалению, точной теории, насколько нам известно, этого режима сходимости еще нет, однако есть подтверждающие отмеченное наблюдение численные эксперименты и некоторые объяснения, почему такая сходимость может быть [Kroshnin et al., 2019; Stonyakin et al., 2020]. Стоит отметить, что использование данного подхода предполагает, что для всех $i \in O$, $j \in D$ выполняется: l_i, $w_j > 0$ и $T_{ij} < \infty$. В общем случае $OD \neq O \otimes D$ и какие-то $T_{ij} = \infty$ (что означает невозможность добраться из района i в район j), так же как возможны районы, которые являются только жилыми (рабочими) районами, что приводит к $l_i = 0$ ($w_j = 0$). Последнюю проблему можно решать чисто техническим образом (см., например, [Dvurechensky et al., 2018; Kroshnin et al., 2019]), перераспределяя немного (в зависимости от желаемой точности решения задачи) с больших компонент этих векторов на нулевые, сохраняя нормировку. Проблему $T_{ij} = \infty$ также можно решать, искусственно вводя пути из i в j, приписывая им большие (но конечные) затраты (все это можно и содержательно проинтерпретировать). Для решения задачи (13) использовался вариант ускоренного универсального градиентного метода Нестерова [Nesterov, 2015], построенный на базе ускоренного (быстрого) градиентного метода подобных треугольников [Гасников, Нестеров, 2018]. Код метода (и его адаптация к задаче (13)) был взят из [Баймурзина и др., 2019; Кубентаева, 2020; Kubentayeva, Gasnikov, 2020]. В качестве точки старта метода выбиралось значение $t^0 = \bar{t}$ (см. (2)). В качестве источника данных (G, O, D, OD, l, w, Θ, $\bar{t}$, $\overline{f}$, γ, κ, μ) выбирались различные небольшие города (например, Су-Фолс [Sioux Falls]) с ресурса [Stabler et al., 2020]. Проводилось два типа экспериментов. В первом подходе использовался метод простой (прямой) прогонки двух блоков (расчет матрицы корреспонденций алгоритмом Синхорна, затем вычисление равновесного распределения потоков по путям универсальным ускоренным методом подобных треугольников в реализации [Баймурзина и др., 2019; Кубентаева, 2020; Kubentayeva, Gasnikov, 2020], потом пересчет матрицы затрат и снова вычисление матрицы корреспонденций и т. д.). Второй подход базировался на сочетании универсального ускоренного метода подобных треугольников в реализации [Баймурзина и др., 2019; Кубентаева, 2020; Kubentayeva, Gasnikov,

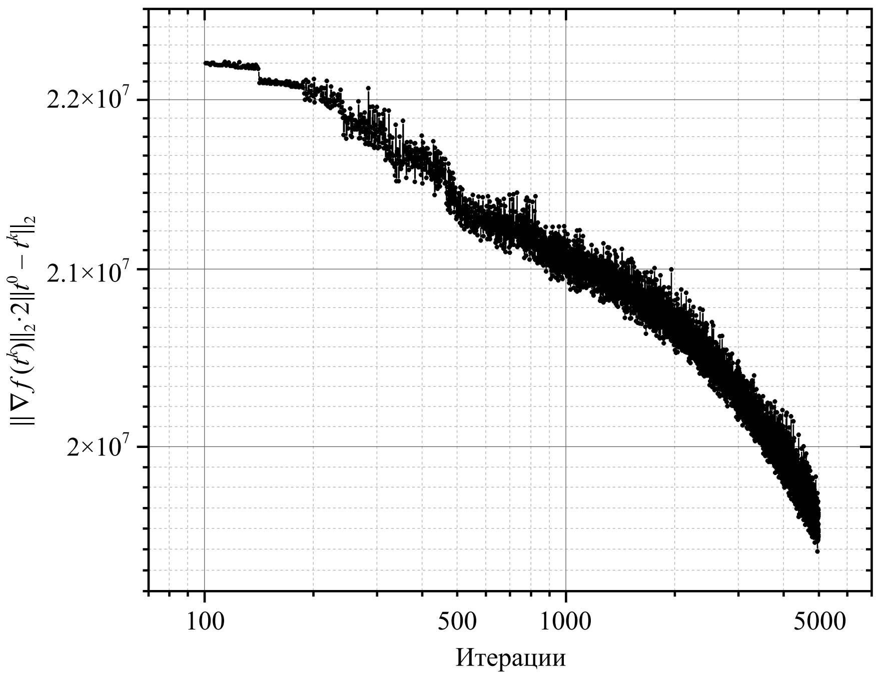

Рис. 1. Результаты вычислительного эксперимента по предложенному новому подходу для города Су-Фолс. По оси абсцисс указаны итерации, по оси ординат — величина, оценивающая «зазор двойственности» $\Delta(t^k, B_k) = \max_{t\in B_k \cap\, \mathrm{dom}\, \sigma^*} \langle \nabla F(t^k), t^k - t\rangle$

2020] с алгоритмом Синхорна, для расчета матрицы корреспонденций так, как было описано выше в этой статье. На пример небольшого города Су-Фолс [Sioux Falls] по модели Бэкмана с $\mu = 0.25$ не удалось добиться сходимости первого подхода. Результаты вычислительного эксперимента по второй модели приведены на рис. 1.

Из графика видно, что

$$F(t^k) - F(t_*) \leq \Delta(t^k, B_k) \simeq O(k^{-1.67}),$$

что почти соответствует скорости сходимости в гладком случае $\sim k^{-2}$ [Гасников, 2021]. Подчеркнем, что рассматриваемая задача (13) существенно негладкая, поэтому наблюдаемый результат можно интерпретировать таким образом, что негладкость задачи при правильном взгляде на нее (сквозь призму универсальных методов, настраивающихся на гладкость) не играет существенной роли в сложности ее численного решения.

Более подробно результаты экспериментов можно посмотреть по ссылке [Котлярова, Ярмошик, 2020].

Также был произведен расчет двухстадийной модели для транспортной сети Владивостока. Дорожный граф и данные о расположении мест жительства были предоставлены Е. А. Нурминским, а данные об адресах и количествах рабочих мест по ним были собраны с ресурса [Министерство труда и социальной политики Приморского края, 2020]. Адреса для последующей обработки были преобразованы в географические координаты с помощью сервиса [ДаДата]. Для выбора источников и стоков корреспонденций и определения их характеристик (l, w) город был разбит на районы сеткой переменного размера и в каждом районе выбрано по одной вершине-источнику и вершине-стоку корреспонденций. Размеры ячеек выбирались так, чтобы в каждом районе число людей, въезжающих и выезжающих из него, было достаточно небольшим. На рис. 2 изображены дорожный граф центральной части Владивостока и его разбиение на районы. Код и результаты моделирования размещены в репозитории [Котлярова, Ярмошик, 2020].

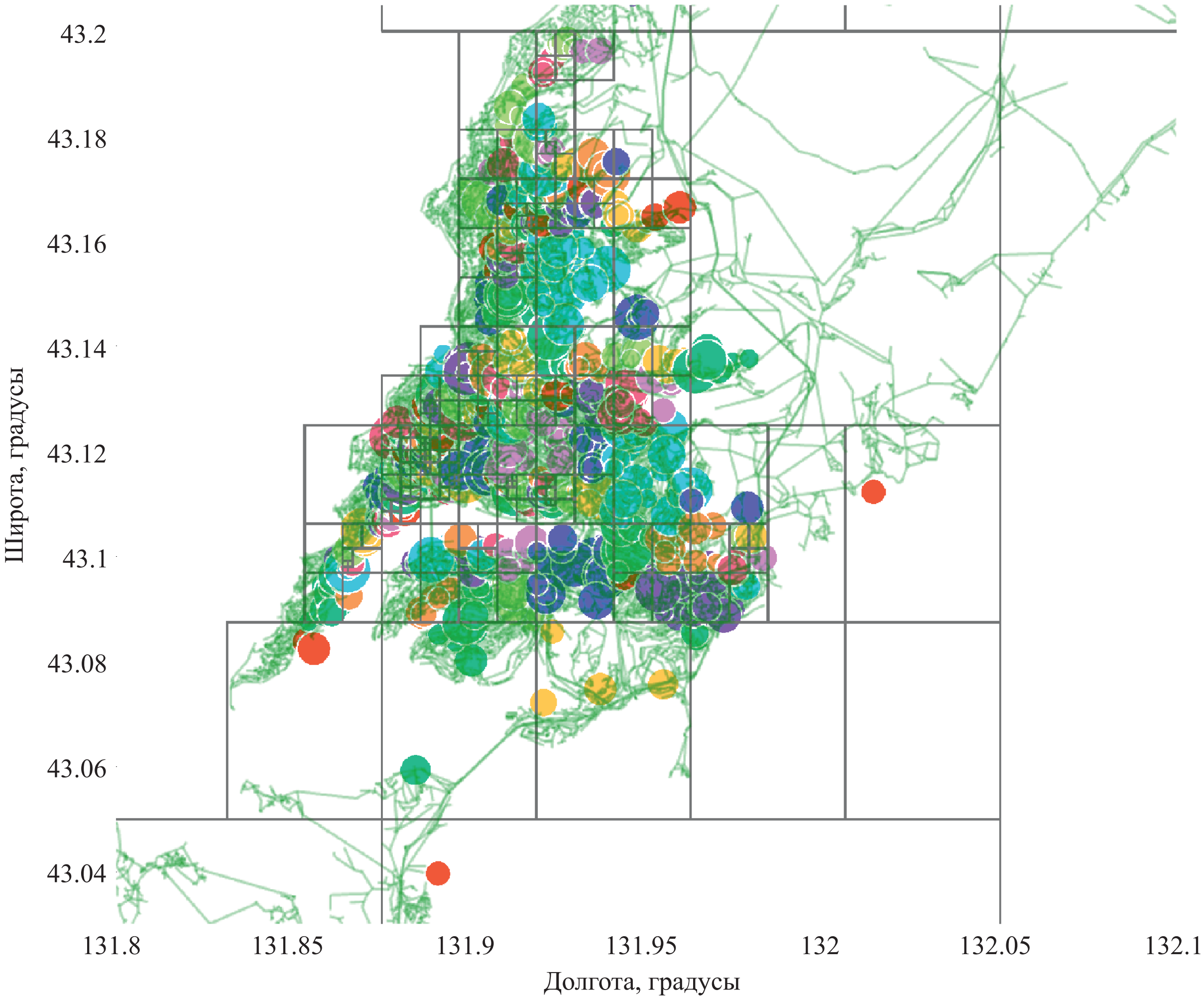

Рис. 2. Транспортная сеть Владивостока. Серые линии — сетка разбиения на районы. Заполненные цветом круги — предприятия, где радиус соответствует логарифму числа рабочих мест, а цвет — принадлежности району

Заключение

В статье были предложены и научно обоснованы способ сведения задачи поиска равновесного распределения транспортных потоков к задаче выпуклой негладкой оптимизации и численный способ решения полученной задачи оптимизации. И хотя ранее теория уже была описана в работах [Гасников и др., 2014; Гасников и др., 2015а; Бабичева и др., 2015; Гасников, 2016; Гасников, Гасникова, 2020], о практической реализации и численных экспериментах с данным подходом авторам ничего неизвестно. Собственно, вычислительным аспектам в данной статье было уделено большое внимание. Важная работа была проделана в области приведения теории из указанных выше источников к общим обозначениям и сбору ее в одном месте. Отметим, что также большим вкладом является создание первого пакета данных для транспортного моделирования Владивостока, что открывает возможности для новых численных экспериментов и решения задач долгосрочного планирования города. Например, полученный комплекс программ может отвечать на следующие вопросы: какой из проектов дорожного строительства оптимален, как изменится транспортная ситуация, если построить в этом месте торговый центр (жилой район, стадион), и т. п.

Список литературы (References)

Вильсон А. Дж. Энтропийные методы моделирования сложных систем. — М.: Наука, 1978.

Wilson A. G. Entropiinye metody modelirovaniya slozhnykh sistem [Entropy in urban and regional modeling]. — Moscow: Nauka, 1978 (in Russian).

Бабичева Т. С. и др. Двухстадийная модель равновесного распределения транспортных потоков // Труды Московского физико-технического института. — 2015. — Т. 7, № 3 (27). — С. 31–34.

Babicheva T. S. et al. Dvuhstadijnaya model' ravnovesnogo raspredeleniya transportnyh potokov [Two-stage model of equilibrium distributions of traffic flows] // Trudy Moskovskogo fiziko-tekhnicheskogo instituta. — 2015. — Vol. 7, No. 3 (27). — P. 31–34 (in Russian).

Баймурзина Д. Р. и др. Универсальный метод поиска равновесий и стохастических равновесий в транспортных сетях // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2019. — Т. 59, № 1. — С. 21–36.

Bajmurzina D. R. et al. Universal'nyj metod poiska ravnovesij i stohasticheskih ravnovesij v transportnyh setyah [Universal method of searching for equilibria and stochastic equilibria in transportation networks] // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2019. — Vol. 59, No. 1. — P. 21–36 (in Russian).

Гасников А. В. Об эффективной вычислимости конкурентных равновесий в транспортно-экономических моделях // Математическое моделирование. — 2015. — Т. 27, № 12. — С. 121–136.

Gasnikov A. V. Ob effektivnoj vychislimosti konkurentnyh ravnovesij v transportno-ekonomicheskih modelyah. [Reduction of searching competetive equillibrium to the minimax problem in application to different network problems] // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2015. — Vol. 27, No. 12. — P. 121–136 (in Russian).

Гасников А. В. Эффективные численные методы поиска равновесий в больших транспортных сетях: диссертация на соискание степени д. ф.-м. н. по специальности 05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы, комплексы программ. — М.: МФТИ, 2016. — 487 с.

Gasnikov A. V. Effektivnye chislennye metody poiska ravnovesii v bol'shikh transportnykh setyakh: dissertatsiya na soiskanie stepeni d. f.-m. n. po spetsial'nosti 05.13.18 — Matematicheskoe modelirovanie, chislennye metody, kompleksy programm [Efficient numerical methods for searching equillibriums in large transport networks: dissertation for the Doctor of Physics and Mathematics degree, n. specialty 05.13.18 — Mathematical modeling, numerical methods, program complexes]. — Moscow: MFTI, 2016. — 487 p. (in Russian).

Гасников А. В. Современные численные методы оптимизации. Метод универсального градиентного спуска. — М.: МЦНМО, 2021.

Gasnikov A. V. Sovremennye chislennye metody optimizatsii. Metod universal'nogo gradientnogo spuska [Modern numerical optimization methods. The universal gradient descent method]. — Moscow: MCCME, 2021 (in Russian).

Гасников А. В., Кленов С. Л., Нурминский Е. А., Холодов Я. А., Шамрай Н. Б. Введение в математическое моделирование транспортных потоков / под ред. А. В. Гасникова, с приложениями М. Л. Бланка, К. В. Воронцова и Ю. В. Чеховича, Е. В. Гасниковой, А. А. Замятина и В. А. Малышева, А. В. Колесникова, Ю. Е. Нестерова и С. В. Шпирко, А. М. Райгородского, с предисловием руководителя Департамента транспорта г. Москвы М. С. Ликсутова. — М.: МЦНМО, 2013. — 427 с., 2-е изд.

Gasnikov A. V. et al. Vvedenie v matematicheskoe modelirovanie transportnykh potokov [Introduction to the mathematical modeling of traffic flows] / eds. A. V. Gasnikov with applications by M. L. Blank, K. V. Vorontsov and Yu. V. Chekhovich, E. V. Gasnikova, A. A. Zamyatin and V. A. Malyshev, A. V. Kolesnikov, Yu. E. Nesterov and S. V. Shpirko, A. M. Raigorodsky, with a foreword by the head of the Moscow Department of Transport M. S. Liksutov. — Moscow: MCCME, 2013. — 427 p. (in Russian).

Гасников А. В. и др. О трехстадийной версии модели стационарной динамики транспортных потоков // Математическое моделирование. — 2014. — Т. 26, № 6. — С. 34–70.

Gasnikov A. V. et al. O trekhstadijnoj versii modeli stacionarnoj dinamiki transportnyh potokov [On the three-stage version of stable dynamic model] // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2014. — Vol. 26, No. 6. — P. 34–70 (in Russian).

Гасников А. В. и др. О связи моделей дискретного выбора с разномасштабными по времени популяционными играми загрузок // Труды Московского физико-технического института. — 2015а. — Т. 7, № 4 (28). — С. 129–142.

Gasnikov A. V. et al. O svyazi modelej diskretnogo vybora s raznomasshtabnymi po vremeni populyacionnymi igrami zagruzok [Searching of equilibriums in hierarchical congestion population games] // Trudy Moskovskogo fiziko-tekhnicheskogo instituta. — 2015a. — Vol. 7, No. 4 (28). — P. 129–142 (in Russian).

Гасников А. В. и др. Поиск равновесий в многостадийных транспортных моделях // Труды Московского физико-технического института. — 2015b. — Т. 7, № 4 (28). — С. 143–155.

Gasnikov A. V. et al. Poisk ravnovesij v mnogostadijnyh transportnyh modelyah [Searching equilibria in multi-stage transport models] // Trudy Moskovskogo fiziko-tekhnicheskogo instituta. — 2015b. — Vol. 7, No. 4 (28). — P. 143–155 (in Russian).

Гасников А. В. и др. Поиск стохастических равновесий в транспортных моделях равновесного распределения потоков // Труды Московского физико-технического института. — 2015c. — Т. 7, № 4 (28). — С. 143–155.

Gasnikov A. V. et al. Poisk stohasticheskih ravnovesij v transportnyh modelyah ravnovesnogo raspredeleniya potokov [Search for the stochastic equilibria in the transport models of equilibrium flow distribution] // Trudy Moskovskogo fiziko-tekhnicheskogo instituta. — 2015c. — Vol. 7, No. 4 (28). — P. 143–155 (in Russian).

Гасников А. В. и др. Об эффективных численных методах решения задач энтропийно-линейного программирования // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2016a. — Т. 56, № 4. — С. 523–534.

Gasnikov A. V. et al. Ob effektivnyh chislennyh metodah resheniya zadach entropijno-linejnogo programmirovaniya [Efficient numerical methods for entropy-linear programming problems] // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2016a. — Vol. 56, No. 4. — P. 523–534 (in Russian).

Гасников А. В. и др. Численные методы поиска равновесного распределения потоков в модели Бэкмана и в модели стабильной динамики // Математическое моделирование. — 2016b. — Т. 28, № 10. — С. 40–64.

Gasnikov A. V. et al. Chislennye metody poiska ravnovesnogo raspredeleniya potokov v modeli Bekmana i v modeli stabil'noj dinamiki [Numerical methods for the problem of traffic flow equilibrium in the Beckmann and the stable dynamic models] // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2016b. — Vol. 28, No. 10. — P. 40–64 (in Russian).

Гасников А. В. и др. Эволюционные выводы энтропийной модели расчета матрицы корреспонденций // Математическое моделирование. — 2016c. — Т. 28, № 4. — С. 111–124.

Gasnikov A. V., Gasnikova E. V., Mendel' M. A., Chepurchenko K. V. Evolyutsionnye vyvody entropiinoi modeli rascheta matritsy korrespondentsii [Evolutionary interpretations of entropy model for correspondence matrix calculation] // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2016c. — Vol. 28, No. 4. — P. 111–124 (in Russian).

Гасников А. В. и др. Ускоренный метаалгоритм для задач выпуклой оптимизации // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2021. — Т. 61, № 1.

Gasnikov A. V. et al. Uskorennyj metaalgoritm dlya zadach vypukloj optimizacii [Accelerated meta-algorithm for convex optimization] // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2021. — T. 61, No. 1 (in Russian).

Гасников А. В., Гасникова Е. В. О возможной динамике в модели расчета матрицы корреспонденций (А. Дж. Вильсона) // Труды Московского физико-технического института. — 2010. — Т. 2, № 4. — С. 45–52.

Gasnikov A. V., Gasnikova E. V. O vozmozhnoj dinamike v modeli rascheta matricy korrespondencij (A. Dzh. Vil'sona) [On the possible dynamics in the model for calculating the matrix of correspondences (A. J. Wilson)] // Trudy Moskovskogo fiziko-tekhnicheskogo instituta. — 2010. — Vol. 2, No. 4. — P. 45–52 (in Russian).

Гасников А. В., Гасникова Е. В. Модели равновесного распределения потоков в больших сетях. — М.: МФТИ, 2020. — 204 с.

Gasnikov A. V., Gasnikova E. V. Modeli ravnovesnogo raspredeleniya potokov v bol'shikh setyakh [Traffic assignment models. Numerical aspects]. — Moscow: MFTI, 2020. — 204 p. (in Russian).

Гасников А. В., Кубентаева М. Б. Поиск стохастических равновесий в транспортных сетях с помощью универсального прямо-двойственного градиентного метода // Компьютерные исследования и моделирование. — 2018. — Т. 10, № 3. — С. 335–345.

Gasnikov A. V., Kubentaeva M. B. Poisk stohasticheskih ravnovesij v transportnyh setyah s pomoshch'yu universal'nogo pryamo-dvojstvennogo gradientnogo metoda [Searching stochastic equilibria in transport networks by universal primal-dual gradient method] // Computer Research and Modeling. — 2018. — Vol. 10, No. 3. — P. 335–345 (in Russian).

Гасников А. В., Нестеров Ю. Е. Универсальный метод для задач стохастической композитной оптимизации // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2018. — Т. 58, № 1. — С. 51–68.

Gasnikov A. V., Nesterov Yu. E Universal'nyj metod dlya zadach stohasticheskoj kompozitnoj optimizacii [Universal method for stochastic composite optimization problems] // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2018. — Vol. 58, No. 1. — P. 51–68 (in Russian).

ДаДата [Электронный ресурс]. — URL: https://dadata.ru/api/geocode/ (дата обращения: 16.02.2021).

Dadata [Electronic resource]. — URL: https://dadata.ru/api/geocode/ (accessed: 16.02.2021) (in Russian).

Иванова А. С. и др. Калибровка параметров модели расчета матрицы корреспонденций для г. Москвы // COMPUTER. — 2020. — Т. 12, № 5. — С. 961–978.
Ivanova A. C. et al. Kalibrovka parametrov modeli rascheta matricy korrespondencij dlya g. Moskvy [Calibration of model parameters for calculating correspondence matrix for Moscow] // COMPUTER. — 2020. — Vol. 12, No. 5. — P. 961–978 (in Russian).

Кубентаева М. Б. GitHub [Электронный ресурс]. — URL: https://github.com/MeruzaKub/TransportNet (дата обращения: 16.02.2021).
Kubentaeva M. B. GitHub [Electronic resource]. — URL: https://github.com/MeruzaKub/TransportNet (accessed: 16.02.2021).

Котлярова Е. В., Ярмошик Д. В. GitHub [Электронный ресурс]. — URL: https://github.com/tamamolis/TransportNet (дата обращения: 16.02.2021).
Kotliarova E. V., Yarmoshik D. V. GitHub [Electronic resource]. — URL: https://github.com/tamamolis/TransportNet (accessed: 16.02.2021).

Реестр работодателей // Интерактивный портал Министерства труда и социальной политики Приморского края [Электронный ресурс]. — URL: https://soctrud.primorsky.ru/employer/ (дата обращения: 16.02.2021).
Reestr rabotodatelei [Employers register] // Interactive Portal of Ministry of Labour and Social Policy of Primorski Krai [Electronic resource]. — URL: https://soctrud.primorsky.ru/employer/ (accessed: 16.02.2021) (in Russian).

Bertsekas D. P. Convex optimization theory. — Belmont: Athena Scientific, 2009.

Gasnikov A. V., Gasnikova E. V., Nesterov Yu. E. Dual methods for finding equilibriums in mixed models of flow distribution in large transportation networks // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2018. — Vol. 58, No. 9. — P. 1395–1403.

Guminov S. et al. Accelerated alternating minimization // arXiv preprint arXiv:1906.03622. — 2019.

Dvurechensky P. et al. Primal-dual method for searching equilibrium in hierarchical congestion population games // arXiv preprint arXiv:1606.08988. — 2016.

Dvurechensky P., Gasnikov A., Kroshnin A. Computational optimal transport: Complexity by accelerated gradient descent is better than by Sinkhorn's algorithm // arXiv preprint arXiv:1802.04367. — 2018.

Dvurechensky P. et al. A stable alternative to Sinkhorn's algorithm for regularized optimal transport // International Conference on Mathematical Optimization Theory and Operations Research. — Springer, Cham, 2020. — P. 406–423.

Kamzolov D., Dvurechensky P., Gasnikov A. Universal intermediate gradient method for convex problems with inexact oracle // Optimization Methods and Software. — 2020. — P. 1–28.

Kroshnin A. et al. On the complexity of approximating Wasserstein barycenters // International conference on machine learning. — PMLR, 2019. — P. 3530–3540.

Kubentayeva M., Gasnikov A. Finding equilibria in the traffic assignment problem with primal-dual gradient methods for Stable Dynamics model and Beckmann model // arXiv preprint arXiv:2008.02418. — 2020.

Nesterov Yu. Universal gradient methods for convex optimization problems // Mathematical Programming. — 2015. — Vol. 152, No. 1-2. — P. 381–404.

Nesterov Yu. et al. Primal–dual accelerated gradient methods with small-dimensional relaxation oracle // Optimization Methods and Software. — 2020. — P. 1–38.

Nesterov Yu., de Palma A. Stationary dynamic solutions in congested transportation networks: summary and perspectives // Networks and spatial economics. — 2003. — Vol. 3, No. 3. — P. 371–395.

Ortuzar J. D., Willumsen L. G. Modelling transport. — West Sussex, England: John Wiley and Sons, 2002.

Patriksson M. The traffic assignment problem: models and methods. — Courier Dover Publications, 2015.

Peyre G., Cuturi M. Computational Optimal Transport: With Applications to Data Science // Foundations and Trends® in Machine Learning. — 2019. — Vol. 11, No. 5-6. — P. 355–607.

Sioux Falls [Electronic resource]. — URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Sioux_Falls,_South_Dakota (accessed: 16.02.2021).

Sandholm W. Population games and evolutionary dynamics. — MIT press, 2010.

Stabler B., Bar-Gera H., Sall E. Transportation Networks for Research Core Team. Transportation Networks for Research. Accessed Month, Day, Year [Electronic resource]. — URL: https://github.com/bstabler/TransportationNetworks (accessed: 16.02.2021).

Stonyakin F. S. et al. Gradient methods for problems with inexact model of the objective // International Conference on Mathematical Optimization Theory and Operations Research. — Springer, Cham, 2019. — P. 97–114.

Tupitsa N. et al. Strongly convex optimization for the dual formulation of optimal transport // International Conference on Mathematical Optimization Theory and Operations Research. — Springer, Cham, 2020. — P. 192–204.