

УДК: 51–7+519.172.1+537.52

Моделирование инициации молнии на базе динамического графа

А. А. Булатов^{1,a}, А. А. Сысоев^{1,2,b}, Д. И. Иудин^{1,2,3,c}

¹Институт прикладной физики Российской академии наук,
Россия, 603950, г. Нижний Новгород, БОКС 120, ул. Ульянова, д. 46

²Приволжский исследовательский медицинский университет,
Россия, 603104, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 70

³Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
Россия, 101000, г. Москва, ул. Мясницкая, д. 20

E-mail: ^a bulatov@ipfran.ru, ^b zaratustrann@yandex.ru, ^c iudin@ipfran.ru

Получено 13.08.2020, после доработки — 31.10.2020.

Принято к публикации 04.01.2021.

Несмотря на многочисленные достижения современной науки, до сих пор остается нераскрытой проблема зарождения молниевых разрядов в безэлектродном грозовом облаке, максимальная напряженность электрического поля в котором примерно на порядок меньше диэлектрической прочности воздуха. Хотя не вызывает сомнений тот факт, что развитие разряда начинается с появления в облаке положительных стримеров, развитие которых становится возможным при примерно вдвое меньших значениях электрического поля по сравнению с отрицательными, на настоящий момент остается неизученным вопрос о том, каким образом холодные слабопроводящие стримерные системы объединяются в горячий хорошо проводящий лидерный канал, способный к самостоятельному распространению за счет эффективной поляризации в относительно слабом внешнем поле. В данной работе представлена самоорганизующаяся транспортная модель, реализованная на примере формирования фрактального древа электрического разряда в грозовом облаке и направленная на численное моделирование процесса начальной стадии развития молниевых разрядов. Среди инновационных особенностей нашего подхода, отсутствующих в других численных моделях развития молнии, можно выделить отсутствие привязки элементов проводящей структуры графа к узлам пространственной решетки, высокое пространственно-временное разрешение и учет временной эволюции электрических параметров транспортных каналов. Кроме того, модель учитывает известную из многочисленных экспериментов асимметрию полей развития положительных и отрицательных стримеров. В рамках используемого подхода результирующий хорошо проводящий лидерный канал формируется за счет коллективного эффекта объединения токов десятков тысяч взаимодействующих между собой стримеров, каждый из которых изначально обладает пренебрежимо малой проводимостью и температурой, не отличающейся от температуры окружающей среды. Модельное биполярное древо представляет собой направленный граф (имеет положительную и отрицательную части) и имеет морфологические и электродинамические характеристики, промежуточные между лабораторной длинной искрой и развитой молнией. Модель имеет универсальный характер, что при необходимости позволяет использовать ее в рамках других задач, связанных с исследованием транспортных (в широком смысле слова) сетей.

Ключевые слова: коллективная динамика, дискретная транспортная модель, прикладная теория графов, фракталы, электрический разряд, молния

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 19-17-00183.

UDC: 51–7+519.172.1+537.52

Simulation of lightning initiation on the basis of dynamical graph

A. A. Bulatov^{1,a}, A. A. Syssoev^{1,2,b}, D. I. Iudin^{1,2,3,c}

¹The Federal research center Institute of Applied Physics of the Russian Academy of Sciences,
46 Ul'yanov st., Nizhny Novgorod, 603950, Russia

²Privolzhsky Research Medical University,
70 Gagarin ave., Nizhny Novgorod, 603104, Russia

³National Research University «Higher School of Economics»,
20 Myasnitskaya st., Moscow, 101000, Russia

E-mail: ^a bulatov@ipfran.ru, ^b zaratustrann@yandex.ru, ^c iudin@ipfran.ru

Received 13.08.2020, after completion — 31.10.2020.

Accepted for publication 04.01.2021.

Despite numerous achievements of modern science the problem of lightning initiation in an electrodeless thundercloud, the maximum electric field strength inside which is approximately an order of magnitude lower than the dielectric strength of air, remains unsolved. Although there is no doubt that discharge activity begins with the appearance of positive streamers, which can develop under approximately half the threshold electric field as compared to negative ones, it remains unexplored how cold weakly conducting streamer systems unite in a joint hot well-conducting leader channel capable of self-propagation due to effective polarization in a relatively small external field. In this study, we present a self-organizing transport model which is applied to the case of electric discharge tree formation in a thundercloud. So, the model is aimed at numerical simulation of the initial stage of lightning discharge development. Among the innovative features of the model are the absence of grid spacing, high spatiotemporal resolution, and consideration of temporal evolution of electrical parameters of transport channels. The model takes into account the widely known asymmetry between threshold fields needed for positive and negative streamers development. In our model, the resulting well-conducting leader channel forms due to collective effect of combining the currents of tens of thousands of interacting streamer channels each of which initially has negligible conductivity and temperature that does not differ from the ambient one. The model bipolar tree is a directed graph (it has both positive and negative parts). It has morphological and electrodynamic characteristics which are intermediate between laboratory long spark and developed lightning. The model has universal character which allows to use it in other tasks related to the study of transport (in the broad sense of the word) networks.

Keywords: collective dynamics, discrete transport model, applied graph theory, fractals, electric discharge, lightning

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2021, vol. 13, no. 1, pp. 125–147 (Russian).

This work was supported by the Russian Science Foundation (project 19-17-00183).

Введение

Несмотря на многолетние исследования электрического пробоя в воздухе, до сих пор не создана теория, позволяющая количественно описать, а в некоторых случаях даже качественно объяснить динамику некоторых наблюдаемых в лабораторных и природных условиях разрядных явлений. Не известно, в частности, каким образом происходит зарождение молнии в облаке и какие физические механизмы отвечают за распространение различных типов молниевых разрядов [Dwyer, Uman 2014]. Недостаточная степень изученности атмосферных разрядов обусловлена не только большим количеством процессов, сопровождающих пробой, но и чрезвычайно сложным стохастическим характером их развития.

Так, например, даже в самых упрощенных физических постановках описание стримерного процесса, играющего важнейшую роль в физике искрового разряда, приводит к столь сложным уравнениям, что решить их можно только численными методами [Базелян, Райзер, 2001], возможности которых ограничены уровнем развития ЭВМ. На данный момент создание первопринципной статистической модели, описывающей судьбу отдельного электрона и всех поколений вторичных частиц, в которой каждый раз рождается и формируется стример со своей уникальной «судьбой», находится далеко за гранью возможностей вычислительной техники [Базелян, Райзер, 1997]. Тем более это касается описания стримерной короны лидера. Дело в том, что в стримерной зоне даже лабораторного лидера с током порядка 1 А одновременно присутствует, по данным электронно-оптических разверток и осциллограмм тока, не менее 10^3 – 10^4 [Базелян и др., 1975], а по данным сравнения тока одиночного стримера с полным током, стекающим с электрода (см. [Базелян, Райзер, 2001] и ссылки там), — более ста тысяч стримеров. Для типичного лидера молнии с током порядка 100 А стоит ожидать еще большего количества одновременно развивающихся стримеров.

Дело осложняется еще больше, если принять во внимание ветвления, которые свойственны всем разрядным структурам, начиная с элементарных составляющих. Так, например, искровой разряд, которому в данной работе уделяется особое внимание, начинает ветвиться уже на уровне стримеров [Montijn et al., 2006; Luque, Ebert, 2011]. Это говорит о том, что классический подход может быть применен только к отдельным каналам разрядной структуры, не имеющим ветвлений, но никак не ко всей системе в целом.

Искровой разряд является ярким примером самоорганизующейся критичности. Идея самоорганизующейся критичности состоит в том, что поведение системы из множества взаимодействующих элементов с резко меняющейся динамикой может быть спонтанным. Как известно, динамика таких систем тесно связана с появлением фрактальных диссипативных структур в их конфигурационном пространстве. Заметим, что фрактальность является общим свойством разрядных процессов. Явление искривления и ветвления канала пробоя в любой среде имеет универсальный характер. Физически это связано с наличием нелинейности в системе. Известно, что нелинейность в динамических системах может привести к стохастической неустойчивости, имеющей фрактальную природу [Заславский, Сагдеев, 1988]. Более того, все известные характерные формы разрядных структур (кустообразные, древовидные, линейные и т. д.), а также переходы между ними в ходе эволюции успешно описываются с помощью понятий фрактальной геометрии, фрактальных размерностей и критических показателей [Дульзон и др., 1999; Rioussset et al., 2007; Iudin et al., 2017; Syssoev et al., 2020].

Из всего вышеизложенного следует, что описание динамики атмосферного разряда, с учетом взаимного влияния его отдельных элементов, требует особого подхода. В качестве альтернативы традиционному описанию на основе решения системы дифференциальных уравнений можно предложить создание физически обоснованной феноменологической модели на базе сети

стохастических клеточных автоматов, содержащей ограниченное число параметров, варьирование которых позволяет описать широкий круг наблюдаемых явлений (см., например, [Кухта и др., 1995; Петров, Петрова, 1995; Дульзон и др., 1999; Иудин, Давыденко, 2015; Давыденко, Иудин, 2016; Iudin et al., 2017; Syssoev et al., 2020]). В данной работе представлена подобная модель, примененная к симуляции начальной стадии развития молнии в облаке.

В настоящее время не вызывает сомнений тот факт, что зарождению молнии предшествует появление в грозовом облаке системы положительных стримеров [Иудин, 2017; Petersen et al., 2008]. Вместе с тем до сих пор нет единого мнения о том, каким образом стримерная активность приводит к формированию молниевых разрядов. Насколько известно авторам, не существует также численных моделей, способных воспроизвести процесс возникновения достаточно длинного для поддержания собственного развития хорошо проводящего лидерного канала в грозовом облаке, максимальная напряженность электрического поля в котором примерно на порядок ниже поля пробоя воздуха [Marshall et al., 1995].

Настоящая работа является инновационным развитием модельного подхода [Iudin et al., 2017], в котором изложены базовые принципы стохастического развития древа молниевых разрядов как саморазвивающегося направленного динамического графа с нелинейными связями. К ключевым особенностям модели [Iudin et al., 2017] можно отнести динамическое вероятностное ветвление, двунаправленное распространение, возможность одновременного роста и (или) распада нескольких периферийных ветвей разряда, временную эволюцию проводимости, продольного электрического поля и тока разрядных каналов, а также наличие вероятностного порогового поля роста разрядных каналов. Из представленного в работе [Iudin et al., 2017] обзора существующих моделей молниевых разрядов следует, что в подавляющем большинстве из них отсутствуют как привязка событий к физической шкале времени и, соответственно, временная эволюция параметров разрядных каналов, так и хорошо известная асимметрия развития разрядов положительной и отрицательной полярности. Важно также отметить, что пространственное разрешение большинства существующих моделей молниевых разрядов (см., например, [Mansell et al., 2002; Mansell et al., 2010; Rioussset et al., 2007; Wang et al., 2016; Iudin et al., 2017]) составляет несколько сотен метров, что не позволяет корректно описать происходящий на гораздо более мелких масштабах процесс формирования «зародыша» молнии.

В данной работе решен целый ряд актуальных для моделей развития молниевых разрядов проблем. Во-первых, в предложенной модели впервые отсутствует привязка вершин проводящих связей к узлам пространственной решетки, то есть направление роста разрядного канала не имеет принципиальных ограничений, свойственных остальным подобным моделям. Используемый подход не ограничивает ни минимальное расстояние между близко расположенными разрядными каналами, ни число связей, растущих из одной вершины. Во-вторых, в данной модели используется относительно малая 30-сантиметровая длина связи, что позволяет говорить о высоком пространственно-временном разрешении. В-третьих, в настоящей модели учитывается асимметрия полей развития положительных и отрицательных стримеров. В-четвертых, в модели реализован самосогласованный механизм эволюции температуры (проводимости) канала, необходимый для описания его преобразования из стримерной формы в лидерную. Данные свойства модели позволили успешно воспроизвести основные особенности коллективной динамики множества одновременно развивающихся стримерных разрядов, которая, как это следует из результатов моделирования, является принципиальной основой формирования билидерного канала молниевых лидера в грозовом облаке.

Для удобства читателя в конце работы приведен словарь основных задействованных в модели физических терминов.

Описание модели

Постановка задачи

В данной работе формирование «зародыша» молнии происходит в области однородного крупномасштабного электрического поля с размерами порядка сотен метров. Предполагается, что исходная точка, из которой начинает развиваться разряд, находится на высоте 6 км над уровнем моря, что совпадает с типичной высотой инициации молнии [Karunarathna et al., 2017]. Напряженность однородного вертикально ориентированного электрического поля \vec{E}_{ext} , в котором формируется разряд, составляет 2.7 кВ/см, что на уровне максимальных измеренных в грозовом облаке значений [Marshall et al., 1995; Dwyer, Uman 2014]. Характерный временной шаг модели составляет 10^{-11} – 10^{-9} с.

Ключевым компонентом модели является граф, симулирующий разветвленную электрическую цепь разряда. Предполагается, что данный граф вложен в трехмерное пространство, повторяя собой геометрию электрической цепи. Ребрам и вершинам графа ставится в соответствие ряд динамических переменных и физических параметров. Вершины являются емкостными элементами, а ребра — резистивными. Пример фрагмента графа приведен на рис. 1.

С точки зрения электродинамики вершины считаются проводящими сферами с радиусом $R = 3$ см, а ребра — цилиндрами длиной $L_0 = 30$ см и радиусом $r = 1.4$ мм. Таким образом, система представляет собой совокупность идеально проводящих сфер, соединенных проводниками с конечными проводимостями, благодаря чему модель учитывает распределенную емкость проводников. Индуктивности проводников считаются пренебрежимо малыми.

В качестве динамических переменных модели выступают заряды вершин графа q_k , где k — номер вершины, а также проводимости $G_{j,k}$ и температуры $T_{j,k}$ ребер, где k и j — номера соединяемых ими вершин. Динамические переменные и заданная величина внешнего поля \vec{E}_{ext} определяют потенциал в произвольной точке пространства $\varphi(\vec{r})$, потенциалы на вершинах φ_k и распределения нормальной компоненты электрического поля $E_{\perp k}(\theta, \xi)$ по поверхности каждой вершины, где θ и ξ — зенитный и азимутальные углы на вершине-сфере соответственно. Данные величины определяют токи ребер $I_{j,k}$ и мощность джоулева энерговыделения $P_{j,k}$ в них.

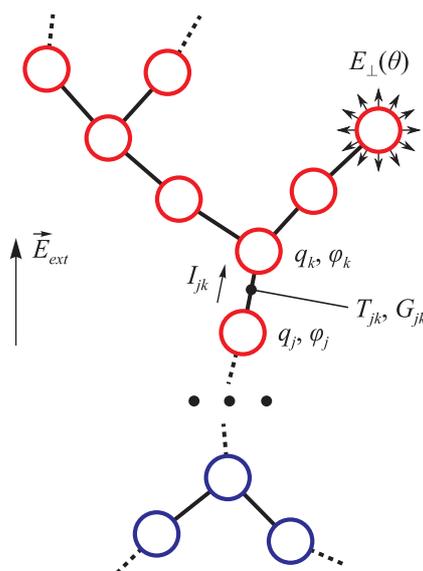


Рис. 1. Представление разрядного дерева в виде трехмерного графа. Потенциалы вершин φ_k , распределения полей $E_{\perp k}(\theta, \xi)$ по их поверхностям и токи ребер $I_{j,k}$ определяются зарядами вершин q_k , проводимостями $G_{j,k}$ и температурами $T_{j,k}$ ребер, которые являются динамическими переменными модели

Динамика развития разряда определяется двумя процессами. Первый из них — это эволюция динамических переменных. Она включает в себя перераспределение заряда в рамках разветвленного проводника, помещенного во внешнее электрическое поле, а также изменение проводимости и температуры каналов. Второй процесс связан с бифуркациями — изменениями структуры графа в результате возникновения и исчезновения новых ребер и вершин.

Эволюция динамических переменных

Кратко эволюцию динамических переменных можно описать следующим образом. Изменение зарядов, сосредоточенных в вершинах графа, происходит за счет токов, протекающих по его ребрам. Протекающий через ребро ток определяется разностью потенциалов на его концах и его проводимостью и описывается законом Ома. Проводимость ребра регулируется его температурой, рост которой происходит под действием протекающего по ребру тока и описывается законом Джоуля – Ленца. Рассмотрим уравнения для этих величин более подробно.

В электростатическом приближении для нахождения электрического поля в любой точке пространства с радиус-вектором \vec{r} используются соотношения

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} + \varphi_{ext}(\vec{r}), \quad (1)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} + \nabla\varphi_{ext}(\vec{r}), \quad (2)$$

где $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м — диэлектрическая проницаемость вакуума, N — количество вершин графа, \vec{r}_i и q_i — радиус-вектор и заряд вершины с индексом i , $\varphi_{ext}(\vec{r})$ — потенциал, создаваемый внешним электрическим полем \vec{E}_{ext} . Потенциал вершины i , представляющей собой идеально проводящую сферу радиусом R , можно представить как

$$\varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{R} + \varphi_{ext}(\vec{r}). \quad (3)$$

Эволюция заряда вершины с индексом i описывается уравнением непрерывности:

$$\dot{q}_i = \sum_{j=1}^{N_i} I_j, \quad (4)$$

где N_i — кратность вершины с номером i , а I_j — ориентированные токи, втекающие в вершину i или вытекающие из нее по примыкающим к данной вершине ребрам. Ток, текущий по ребру j , определяется его проводимостью и разностью потенциалов на его концах:

$$I_j = G \frac{\pi r^2}{L} (\varphi_{j1} - \varphi_{j2}), \quad (5)$$

где r и L — радиус и длина ребра, φ_{j1} и φ_{j2} — потенциалы соединяемых ребром вершин.

В процессе развития разряда происходит увеличение температуры сосредоточенного в нем воздуха. Если температура канала превышает характерный порог $T^* = 3000$ К, в нем развивается ионизационно-перегревная неустойчивость, приводящая к резкому росту проводимости [Базелян, Райзер, 2001, с. 71]. Эволюцию температуры газа в объеме ребра k можно описать как

$$\frac{dT_k}{dt} = \frac{1}{\pi L_k R_k^2 \rho c} I_k (\varphi_{k1} - \varphi_{k2}), \quad (6)$$

где $c = 1$ кДж/(кг · К) и $\rho = 0.63$ кг/м³ — удельная теплоемкость и плотность воздуха на высоте 6 км над уровнем моря соответственно.

Эволюция проводимости ребра k и параметризация процесса развития ионизационно-перегревной неустойчивости описываются следующим образом:

$$G_k = [1 - \alpha(T_k)]G_k^I + \alpha(T_k)G_k^{II}, \tag{7}$$

$$\frac{dG_k^I}{dt} = \left[\eta \left(\frac{\varphi_{k1} - \varphi_{k2}}{L_k} \right)^2 - \beta \right] G_k^I, \tag{8}$$

где G_k^I – характерная проводимость канала до развития неустойчивости с начальным значением $G_0 = 10^{-10}$ См/м, а $G_k^{II} = 10$ См/м – проводимость канала после ее развития. Коэффициент $\alpha(T)$ представляет собой сглаженную степ-функцию, описывающую скачкообразный переход от стримерной проводимости к лидерной, происходящий при приближении температуры канала к пороговому значению $T^* = 3000$ К:

$$\alpha(T) = \begin{cases} 0, & T < T^* - 50 \text{ К}, \\ 0.5 + \sin \left[\frac{\pi}{2} \frac{T - T^*}{100 \text{ К}} \right], & 2950 \text{ К} \leq T \leq 3050 \text{ К}, \\ 1, & T > T^* + 50 \text{ К}. \end{cases} \tag{9}$$

Уравнение (8) описывает эволюцию проводимости до начала развития ионизационно-перегревной неустойчивости. Параметры $\eta = 4.3 \cdot 10^{-5}$ (В/м)⁻²с⁻¹ и $\beta = 2.5 \cdot 10^6$ с⁻¹ отвечают за рост температуры канала в результате выделения джоулева тепла и ее диссипацию соответственно.

Использованные в расчетах параметры приведены в таблице 1.

Таблица 1. Расчетные параметры модели

Параметр	Значение
Внешнее электрическое поле, E_{ext}	$2.7 \cdot 10^5$ В/м
Радиус вершины, R	3 см
Радиус ребра, r	1.4 мм
Длина ребра, L_0	30 см
Плотность воздуха, ρ	0.63 кг/м ³
Удельная теплоемкость воздуха, c	10^3 Дж/(кг · К)
Начальная проводимость ребра, G_0	10^{-10} См/м
Проводимость ребра после перегревной неустойчивости, G_k^{II}	10 См/м
Постоянная роста проводимости, η	$4.3 \cdot 10^{-5}$ (В/м) ⁻² с ⁻¹
Постоянная релаксации проводимости, β	$2.5 \cdot 10^6$ с ⁻¹
Пороговая температура перегревной неустойчивости, T^*	$3 \cdot 10^3$ К
Пороговое поле роста положительных стримеров, E^+	$0.5 \cdot 10^6$ В/м
Пороговое поле роста отрицательных стримеров, E^-	$1.0 \cdot 10^6$ В/м
Пороговое поле появления канала между парой уже существующих вершин, E^*	$3 \cdot 10^5$ В/м

Динамика изменения структуры графа

В момент времени $t = 0$ граф представляет собой пару вершин, соединенных ребром, направленным вдоль внешнего поля E_{ext} .

В модель заложено три различных способа изменения структуры графа.

1. Возникновение новой вершины одновременно с ребром, соединяющим ее с уже существующим графом. Соответствует образованию новых стримерных связей при приращении разрядной структуры.

2. Возникновение ребра между парой уже существующих вершин. Соответствует электрическому пробое воздуха между двумя проводниками.
3. Исчезновение существующих ребер. Происходит при диссипации их проводимостей при недостаточном электрическом поле и соответствует отмиранию разрядных каналов.

Исчезновение вершин графа моделью не предусмотрено. При распаде ребер вершины становятся уединенными, сохраняя сосредоточенный на них заряд.

Рассмотрим каждый из описанных процессов более подробно.

Возникновение новых ребер и вершин

С физической точки зрения вершины графа представляют собой проводящие сферы во внешнем электрическом поле. С ростом нормальной компоненты электрического поля на поверхности сфер появляется вероятность возникновения новой стримерной связи. При этом вероятность появления стримерного разряда с малого элемента поверхности сферического проводника площади dS за малый интервал времени dt описывается следующим выражением:

$$P_s(E_{\perp}, dS, dt) = f(E_{\perp})dS dt, \quad (10)$$

где E_{\perp} — нормальная компонента электрического поля, $f(E_{\perp})$ — зависящая от поля вероятность возникновения стримера в единицу времени с единицы площади поверхности проводника. Функция $f(E_{\perp})$ определяется свойствами газовой среды. Для стримерного разряда в воздухе представленная на рис. 2 функция $f(E_{\perp})$ зависит от направления электрического поля на поверхности электрода. В данной работе используется следующий вид функции $f(E_{\perp})$:

$$f(E_{\perp}) = \begin{cases} \left(E_{\perp} - 0.5 \frac{\text{МВ}}{\text{м}}\right) \cdot 25 (\text{МВ} \cdot \text{м} \cdot \text{с})^{-1}, & E_{\perp} \geq 0.5 \frac{\text{МВ}}{\text{м}}, \\ 0, & -1.0 \frac{\text{МВ}}{\text{м}} < E_{\perp} < 0.5 \frac{\text{МВ}}{\text{м}}, \\ \left(-E_{\perp} - 1 \frac{\text{МВ}}{\text{м}}\right) \cdot 25 (\text{МВ} \cdot \text{м} \cdot \text{с})^{-1}, & E_{\perp} \leq -1.0 \frac{\text{МВ}}{\text{м}}. \end{cases} \quad (11)$$

Таким образом, модель учитывает впервые использованную в работе [Syssoev et al., 2020] асимметрию критических (пороговых) полей развития стримеров положительной и отрицательной полярностей, превышение которых делает появление новой связи возможным. При этом отрицательные стримеры, в соответствии с многочисленными экспериментами [Базелян, Райзер, 1997], имеют вдвое большие пороговые поля. Рост положительных и отрицательных стримерных

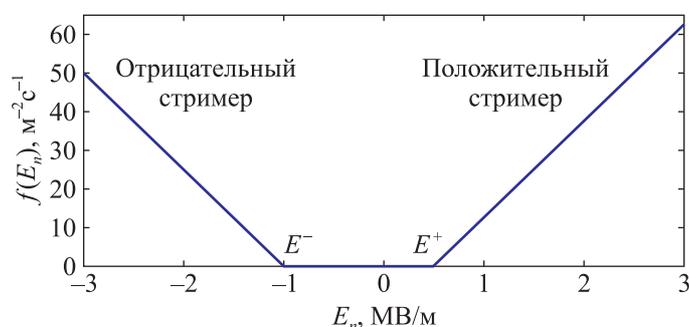


Рис. 2. Зависимость вероятности возникновения новой связи (пучок однонаправленных стримеров) с единицы площади за единицу времени от нормальной компоненты электрического поля E_{\perp} на поверхности идеально проводящей вершины с учетом полярности разряда

связей происходит по направлению и против направления вектора электрического поля соответственно. Заметим, что функция $f(E_{\perp})$ не является плотностью вероятности и поэтому не нормирована на единицу. Ее физический смысл — количество возникающих стримерных разрядов на 1 м^2 за 1 с при заданном поле E_{\perp} .

Распределение электрического поля на поверхности сферы во внешнем поле \vec{E}_0 описывается следующим выражением:

$$E_{\perp}(\theta) = 3|\vec{E}_0| \cos \theta + E_1, \quad (12)$$

где \vec{E}_0 — внешнее по отношению к рассматриваемой сфере поле, создаваемое постоянным вертикальным полем \vec{E}_{ext} и зарядами, сосредоточенными на всех прочих вершинах графа, θ — угловая координата точки на сфере относительно направления внешнего поля \vec{E}_0 , E_1 — собственное поле сферы, которое при величине ее заряда q_i и радиусе R может быть найдено как

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{R^2}. \quad (13)$$

Из (10) и (12) следует распределение вероятностей возникновения стримера с поверхности сферы по углу θ :

$$dP(\theta < \theta_0) = \frac{2\pi R^2}{3E_0} \int_{3E_0 \cos \theta_0 + E_1}^{3E_0 + E_1} f(E_{\perp}) dE_{\perp} dt. \quad (14)$$

В обозначении dP присутствует дифференциал, поскольку вероятность по-прежнему записывается для дифференциально малого промежутка времени dt . Максимальное значение dP достигается при $\theta_0 = \pi$, когда собственное \vec{E}_1 и внешнее \vec{E}_0 поля складываются по абсолютной величине:

$$dP_{\max}(\theta < \pi) = \frac{2\pi R^2}{3E_0} (F(3E_0 + E_1) - F(-3E_0 + E_1)) dt, \quad (15)$$

где $F(x)$ является неопределенным интегралом функции $f(x)$.

Перепишем формулы (14) и (15) для конечного модельного шага по времени Δt :

$$\Delta P(\theta < \theta_0)[\Delta t] = \frac{2\pi R^2}{3E_0} (F(3E_0 + E_1) - F(3E_0 \cos \theta_0 + E_1)) \Delta t, \quad (16)$$

$$\Delta P_{\max}[\Delta t] = \frac{2\pi R^2}{3E_0} (F(3E_0 + E_1) - F(-3E_0 + E_1)) \Delta t. \quad (17)$$

Для моделирования процесса образования новых ребер графа применяется метод Монте-Карло. Для конечного, но достаточно малого модельного шага по времени Δt генерируется равномерно распределенное случайное число $\zeta \in [0; 1)$. Если величина $\zeta > \Delta P_{\max}[\Delta t]$, то за промежуток Δt новое ребро не образуется. Если $\zeta \leq \Delta P_{\max}[\Delta t]$, то направление нового ребра определяется корнем уравнения

$$F(3E_0 \cos \theta + E_1) = F(3E_0 + E_1) - \frac{3E_0}{2\pi R^2} \frac{\zeta}{\Delta t}. \quad (18)$$

Направление ребра по углу φ выбирается равномерно из промежутка $[0, 2\pi)$. Длина добавляемого ребра всегда одинакова и равна $L_0 = 30 \text{ см}$.

Условием корректности выбранного метода генерации случайного события является малость временного шага Δt :

$$\frac{dP_{\max}}{dt} \cdot \Delta t \ll 1. \quad (19)$$

При выполнении данного условия количество сгенерированных событий роста графа в единицу времени и, как следствие, скорость роста моделируемого разряда не зависят от шага по времени Δt . Другими словами, количество ребер, добавляемых за одну секунду, определяется только радиусом сферических вершин, величиной поля и видом функции $f(E_{\perp})$ из соотношения (11).

Возникновение новых ребер между уже существующими вершинами

Условием добавления к графу нового ребра между парой уже существующих вершин i и j является превышение полей между вершинами порога $E^* = 3 \cdot 10^5$ В/м:

$$\frac{|\varphi_i - \varphi_j|}{L_{i,j}} > E^*, \quad (20)$$

где $L_{i,j}$ — расстояние между вершинами с индексами i и j . Дополнительным условием является то, что вершины должны быть расположены достаточно близко друг к другу:

$$L_{i,j} < 3L_0. \quad (21)$$

Исчезновение ребер

Отмирание ребра графа с индексом k происходит при падении его проводимости ниже критического значения. Условие удаления ребра выглядит следующим образом:

$$G_k < 0.95G_0, \quad (22)$$

где $G_0 = 10^{-10}$ См/м — начальная проводимость канала (см. соотношение (8)).

При отмирании проводящих ребер графа соединяемые ими вершины могут оказаться отделенными от разрядной структуры. Впоследствии они могут снова оказаться «подключенными» к разряду при выполнении условий (20) и (21) либо же оставаться изолированными, внося вклад в пространственный заряд. Диссипация заряда за время моделирования (порядка 1–2 мс) считается пренебрежимо малой. За счет наличия изолированных вершин, окружающих разрядный канал, модель воспроизводит чехол заряда лидера.

Результаты

При помощи разработанной модели в данной работе была воспроизведена начальная стадия развития молниевго разряда с учетом процесса коллективного взаимодействия множества стримерных каналов, в результате которого происходит нагрев и рост проводимости определенного фрагмента цепи, превращающегося в канал «молодой» молнии.

Модель охватывает промежуток времени от возникновения первых стримерных пучков до устойчивого развития биполярного лидера. При $t = 0$ разряд представляет собой две электронейтральные вершины, соединенные ребром, ориентированным вдоль внешнего поля. В результате поляризации во внешнем поле происходит разделение заряда и рост поля в окрестности вершин исходной связи, что в конце концов приводит к образованию новых вершин и ребер.

На начальном этапе развития моделируемого разряда ребра быстро угасают и не успевают нагреться до температур, существенно превышающих температуру окружающей среды. Однако периодически они образуют связанные цепочки длиной порядка 1 м. Подобная ситуация показана на рис. 3, соответствующем моменту времени $t = 293$ мкс. При этом разрядный граф состоит всего из 46 вершин.

Далее, в ходе роста разрядного графа заряд на его верхней и нижней оконечностях увеличивается, благодаря чему возникает все большее количество новых вершин и ребер. Связные цепи становятся устойчивыми и по мере протекания тока их температура возрастает. Данный процесс показан на рис. 4. Количество вершин растет с 372 при $t = 284$ мкс до 11 217 к моменту $t = 625$ мкс.

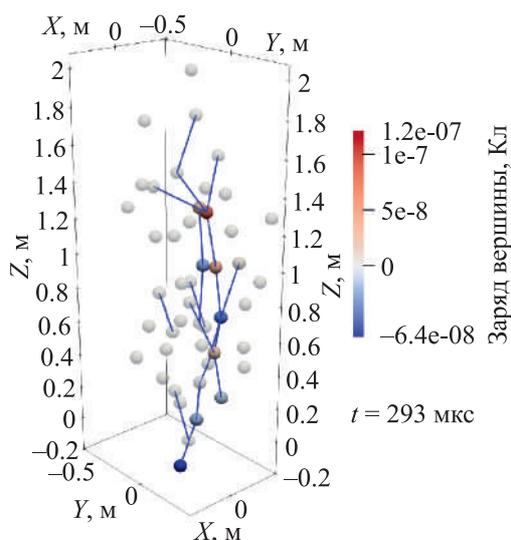


Рис. 3. Моделируемый разряд на начальном этапе развития ($t = 293$ мкс от начала моделирования). Заряженные вершины обозначены сферами

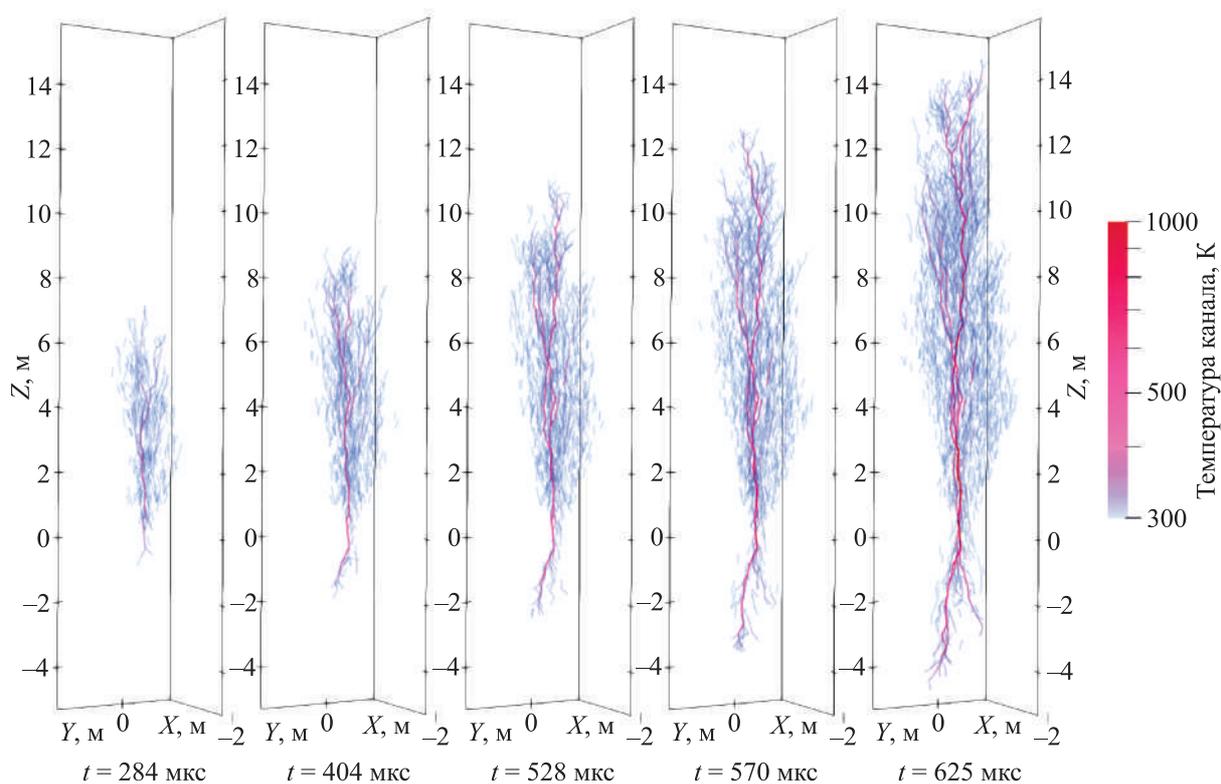


Рис. 4. Самоорганизация и нагрев связанных цепей на долидерной стадии развития разряда

С течением времени температура канала доходит до критического значения, при котором развивается ионизационно-перегревная неустойчивость, параметризованная выражениями (8) и (9). При этом резкий рост проводимости наиболее нагретых ребер способствует увеличению скорости нагрева (роста проводимости) соседних. В конце концов начинается распространение устойчивого биполярного лидера со скоростью примерно 200 км/с. Данный процесс приведен на рис. 5. К моменту времени $t = 940$ мкс количество вершин графа достигает 483 тысяч.

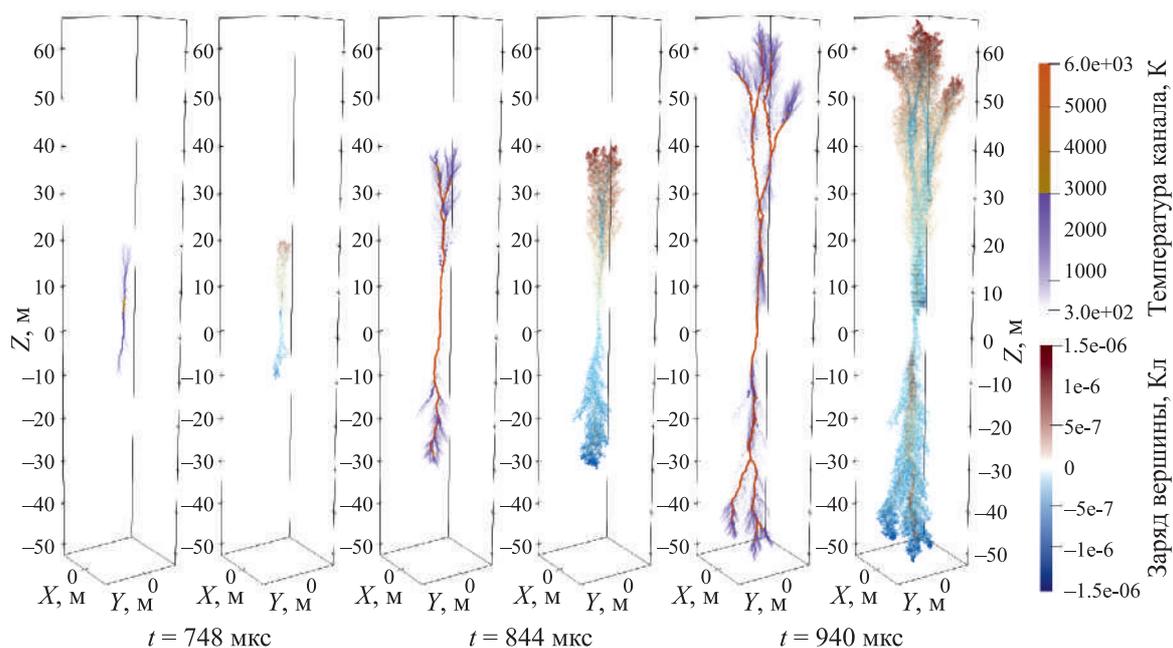


Рис. 5. Визуализация лидерной стадии развития разряда, на которой происходит распространение биполярного лидера молнии. На рисунке приведены парные изображения для структур проводников (слева) и зарядов (справа)

На рис. 5 приведена временная динамика моделируемого молниевых канала после возникновения стримерно-лидерного перехода. На левых частях парных рисунков показаны проводящие структуры, на правых — распределение заряда в пространстве. Начиная с момента времени $t = 927$ мкс биполярный лидер стремительно развивается двунаправленным образом: его положительная часть распространяется вверх, а отрицательная — вниз, причем головки обоих лидеров продвигаются с примерно одинаковой скоростью порядка 210 км/с. К моменту времени $t = 1116$ мкс число вершин модельного графа возрастает до 484 тысяч.

На рис. 6 показаны структура проводников и распределение заряда на конце положительной части биполярного лидера молнии в момент времени $t = 940$ мкс. Для простоты восприятия на данном и прочих рисунках отсутствуют холодные стримерные каналы и узлы, имеющие близкий к нулю заряд.

На рис. 7 приведена осциллограмма тока в канале зарождающегося лидера молнии. График построен не с начала моделирования, а с момента времени $t = 251$ мкс, поскольку до него ток имеет прерывистый характер, так как еще не сформировалась устойчивая проводящая структура. К моменту времени $t = 984$ мкс отдельные пучки стримеров начинают образовывать связную цепочку. По мере развития коллективного канала ток стабилизируется и постепенно нарастает. Увеличение тока на порядок в момент времени $t = 750$ мкс соответствует стримерно-лидерному переходу — возникновению молниевых лидера. Дальнейшее изменение тока связано с эволюцией лидера.

На рис. 8 показана погонная плотность заряда вдоль вертикальной оси. Значение погонного заряда λ на высоте z вычисляется по формуле

$$\lambda(z) = \sum_{z_i \in [z, z + \Delta z)} q_i / \Delta z, \quad (23)$$

где q_i и z_i — заряд и z -координата вершины i , а $\Delta z = 60$ см.

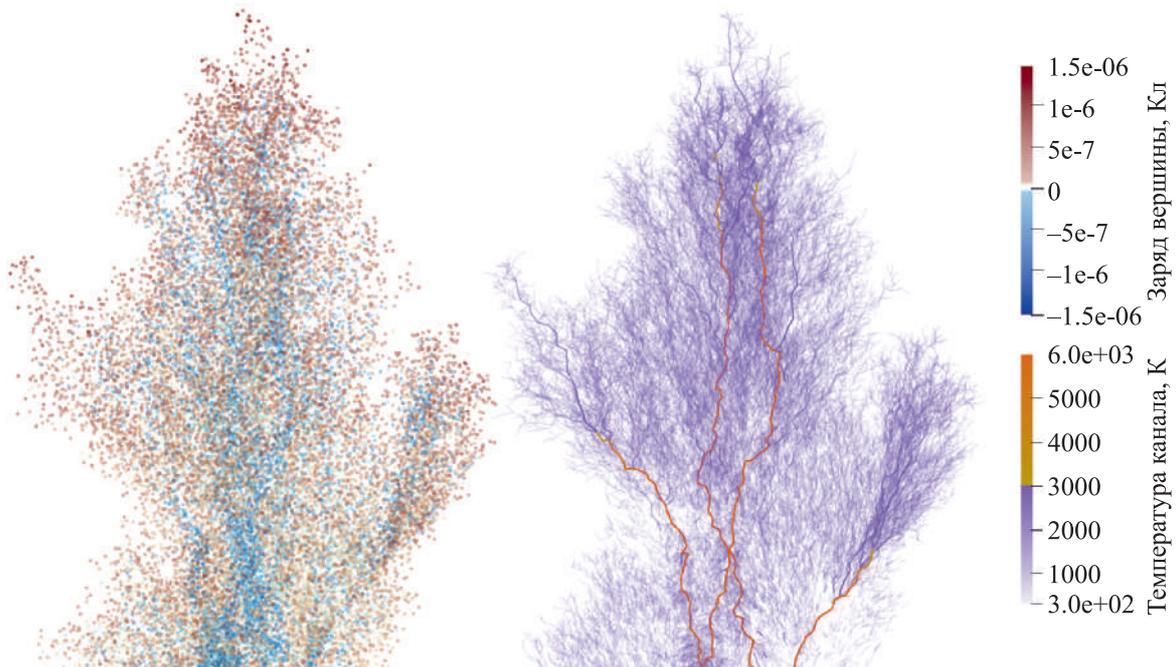


Рис. 6. Увеличенный фрагмент конца положительной части лидера, визуализирующий структуру проводящих связей и распределение пространственного заряда в момент времени $t = 940$ мкс от начала моделирования

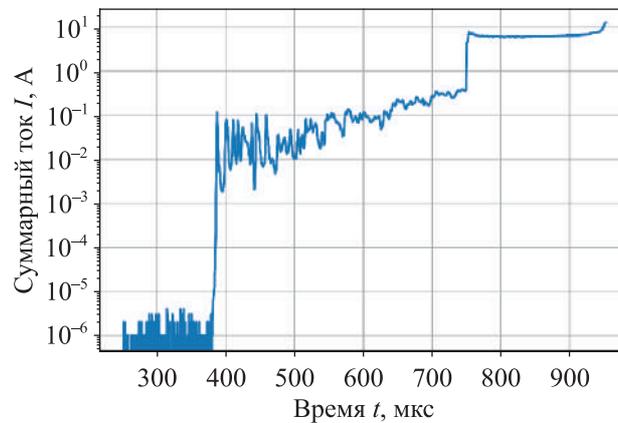


Рис. 7. Осциллограмма тока в канале зарождающегося лидера молнии

На рис. 9 приведена зависимость общего количества вершин модельного графа от времени. На этапе сформированного лидерного канала данную зависимость можно считать экспоненциальной. К концу моделирования граф содержит 483 933 вершины.

Обсуждение

В данной модели возникающая связь ассоциируется с однонаправленным пучком стримеров одинаковой полярности. Это вынужденное приближение связано с тем, что стримерная зона даже слаботочного лабораторного лидера с током порядка 1 А содержит более сотни тысяч одновременно развивающихся стримеров [Базелян, Райзер, 2001, с. 77], не говоря уже о лидере молнии, ток которого может достигать многих сотен ампер [Rakov, Uman, 2003, с. 7], что делает

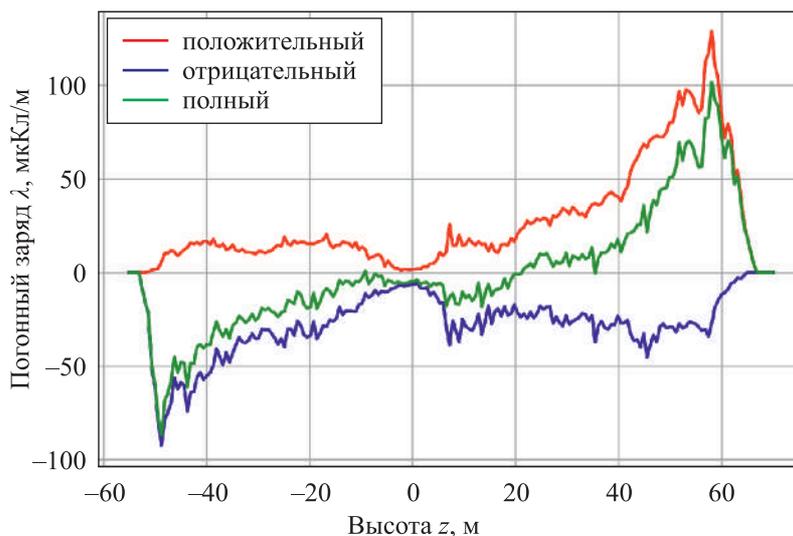


Рис. 8. Зависимость погонного заряда канала молнии от вертикальной координаты в момент времени $t = 940$ мкс от начала моделирования

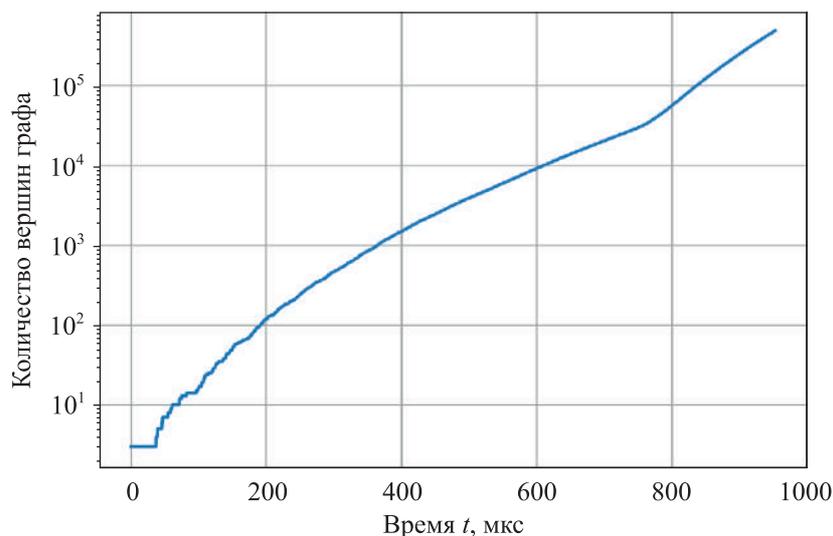


Рис. 9. Зависимость количества вершин графа от времени

моделирование отдельных стримеров невозможно. Конкретный выбор значений физических величин, характеризующих параметры стримерного пучка, определяется как имеющимися в литературе данными, так и степенью соответствия модельного разряда реальному. Так, например, радиусы модельных ребер и вершин, составляющие 1.4 мм и 3 см соответственно, физически обоснованы в том смысле, что по крайней мере превышают минимальное значение радиуса стримерного канала в воздухе, при нормальных условиях составляющее порядка 10^{-4} м (см. недавний обзор [Nijdam et al., 2020] и ссылки там). Стоит отметить, что определение радиуса стримера — самая трудная задача из всех «геометрических» измерений [Базелян, Райзер, 1997, с. 170–171]. Радиус канала может увеличиваться за счет ионизационного расширения, во много раз превышая исходную величину. Измеряемый в экспериментах «световой» радиус стримера дает лишь самые общие представления о размерах заполненной электронами области и почти ничего не говорит о распределении плотности электронов по сечению канала. Прямые измерения радиуса стри-

мера в воздухе (электроотрицательном газе) осложняются тем, что требуемые для получения стримеров высокие напряжения не позволяют поместить регистрирующую аппаратуру достаточно близко к разряду. Верхняя граница радиуса стримера, по-видимому, неизвестна. Выбор относительно малой длины модельной связи $L_0 = 30$ см обусловлен стремлением как можно более детально описать процесс объединения множества стримеров в единый лидерный канал и, строго говоря, не нуждается в специальном обосновании, так как длина стримерного канала может быть любой: стример способен расти до тех пор, пока внешнее электрическое поле в области его головки не падает ниже порогового значения [Базелян, Райзер, 1997, с. 172].

Важно отметить, что с точки зрения вычислений важны не значения каждого из параметров в отдельности, а их комбинации. Так, например, текущие по разрядному дереву токи (5) определяются произведением проводимости связи на квадрат ее радиуса, а из формулы (14) следует, что вероятность возникновения новой связи зависит не только от пороговых полей E^+ и E^- , но и от радиуса вершины R . Таким образом, можно утверждать, что указанные в таблице 1 значения проводимостей G_0 и G_k^{II} определены с точностью до выбора радиуса канала r , а величины пороговых полей E^+ и E^- имеют смысл только при указании конкретного радиуса вершины R и только в рамках предположения о ее бесконечной проводимости. В связи с наличием данной неопределенности существенным критерием правильности выбора модельных параметров становятся конечные результаты расчетов, которые, как это следует из дальнейшего текста, вполне соответствуют реальности.

Стоит отметить, что электрические параметры модельного лидера ставят его в промежуточное положение между лабораторной длинной искрой и «зрелым» лидером молнии. Так, проводимость лидерного канала, составляющая порядка 10 См/м (предельно возможное в модели значение), превышает типичную проводимость лабораторного положительного лидера, равную 1 См/м [Райзер, 2009], но на три порядка меньше проводимости дугового разряда молнии (порядка 10^4 См/м [Rakov, Uman, 2003]). То же самое можно сказать о токе лидерного канала, составляющем порядка 10 А (см. рис. 7), в то время как типичные токи лабораторного и молниевых лидеров равны 1 А [Райзер, 2009] и 100 А [Rakov, Uman, 2003] соответственно. Погонная плотность чехла заряда, в среднем составляющая несколько десятков мкКл/м (см. рис. 8), также оказывается существенно меньше соответствующей величины для лидера молнии, по некоторым оценкам составляющей 700 – 1000 мкКл/м (см. [Rakov, Uman, 2003] и ссылки там). С физической точки зрения приведенные характеристики модельного лидера выглядят вполне естественно, так как в данной работе мы воспроизводим процесс формирования лидера молнии в облаке.

Представленная в работе транспортная самоорганизующаяся модель, реализованная на примере начальной стадии развития молнии в облаке, корректно воспроизводит ряд коллективных эффектов, явным образом не заложенных в исходный алгоритм. Во-первых, модель детально описывает процесс образования чехла лидерного канала, являющегося источником импульса тока молнии на наиболее мощной по энергетике стадии возвратного удара. Во-вторых, скорости распространения положительной и отрицательной частей модельного разряда на стадии лидера примерно совпадают и составляют около 210 км/с, что хорошо согласуется с данными натурных наблюдений [van der Velde, Montanya, 2013].

Из рисунков 5 и 6 видно, что каналы положительной и отрицательной частей биполярного лидера окружены отрицательным и положительным цилиндрическими слоями заряда соответственно. Подобный эффект наблюдался в модели [Luque, Ebert, 2014], посвященной изучению коллективной динамики растущей с плоского электрода системы положительных стримеров. Заметим, что в той же работе обосновывается физичность процесса установления проводящих связей между разрядными каналами одной и той же стримерной системы, возникающих, если заряды в паре близко расположенных узлов разрядной структуры в процессе развития разряда приобретают разные знаки. В нашей модели процесс возникновения ребер между парой уже существующих вершин происходит похожим образом.

Заключение

В данной работе на основе теории графов и теории перколяций была построена мелко-масштабная транспортная модель, примененная к моделированию начальной стадии развития молнии в облаке. Среди прогрессивных особенностей модели можно выделить отсутствие пространственной решетки, учет асимметрии развития положительных и отрицательных стримеров и рассмотрение временной эволюции параметров разрядных каналов. С помощью разработанной модели было показано, что прогретый хорошо проводящий канал лидера молнии в воздухе формируется за счет объединения токов десятков тысяч стримерных каналов и имеет электрические характеристики, которые можно назвать промежуточными между лабораторным и развитым молниевым разрядами. Морфология и электрические параметры разрядного древа зарождающегося модельного лидера молнии хорошо согласуются с современными представлениями о развитии молниевых разрядов.

Список литературы (References)

- Базелян Э. М., Горин Б. Н., Левитов В. И. Некоторые задачи исследования лидерного пробоя в воздухе // Изв. АН СССР: Энергетика и транспорт. — 1975. — № 5. — С. 30–38.
Bazelyan E. M., Gorin B. N., Levitov V. I. Nekotorye zadachi issledovaniya lidernogo proboya v vozdukh [Some tasks of studying leader breakdown in the air] // *Izv. AN SSSR: Energetika i transport.* — 1975. — No. 5. — P. 30–38 (in Russian).
- Базелян Э. М., Райзер Ю. П. Искровой разряд. — М.: МФТИ, 1997. — 320 с.
Bazelyan E. M., Raizer Yu. P. Spark Discharge. — CRC Press, 1998. — 312 p. (Russ. ed.: *Bazelyan E. M., Raizer Yu. P. Iskrovoi razryad.* — Moscow: MFTI, 1997. — 320 p.)
- Базелян Э. М., Райзер Ю. П. Физика молнии и молниезащиты. — М.: Физматлит, 2001. — 320 с.
Bazelyan E. M., Raizer Yu. P. Lightning Physics and Lightning Protection. — CRC Press, 2000. — 325 p. (Russ. ed.: *Bazelyan E. M., Raizer Yu. P. Fizika molnii i molniezashchity.* — Moscow: Fizmatlit, 2001. — 320 p.)
- Давыденко С. С., Иудин Д. И. Фрактальная модель компактного внутриоблачного разряда. II. Особенности электромагнитного излучения // Известия вузов. Радиофизика. — 2016. — Т. 59, № 7. — С. 620–637.
Davydenko S. S., Iudin D. I. Fractal model of a compact intracloud discharge: II. Specific features of electromagnetic emission // *Radiophysics and Quantum Electronics.* — 2016. — Vol. 59, No. 7. — P. 560–575. — DOI: 10.1007/s11141-016-9723-5. (Original Russian paper: *Davydenko S. S., Iudin D. I. Fraktal'naya model' kompaktnogo vnutrioblachnogo razryada. II. Osobennosti elektromagnitnogo izlucheniya* // *Izvestiya VUZ. Radiofizika.* — 2016. — Vol. 59, No. 7. — P. 620–637.)
- Дульзон А. А., Лопатин В. В., Носков М. Д., Плешков О. И. Моделирование развития ступенчатого лидера молнии // Журнал технической физики. — 1999. — Т. 69, № 4. — С. 48–53.
Dul'zon A. A., Lopatin V. V., Noskov M. D., Pleshkov O. I. Modeling the development of the stepped leader of a lightning discharge // *Technical Physics.* — 1999. — Vol. 44, No. 4. — P. 394–398. — DOI: 10.1134/1.1259308. (Original Russian paper: *Dulzon A. A., Lopatin V. V., Noskov M. D., Pleshkov O. I. Modelirovaniye razvitiya stupenchatogo lidera molnii* // *Zh. Tekh. Fiz.* — 1999. — Vol. 69, No. 4. — P. 48–53.)
- Заславский Г. М., Сагдеев Р. З. Введение в нелинейную физику: от маятника до турбулентности и хаоса. — М.: Наука, 1988. — 368 с.
Zaslavsky G. M., Sagdeev R. Z. Vvedenie v nelineinuyu fiziku: ot mayatnika do turbulentnosti i khaosa [Introduction to Nonlinear Physics: From the Pendulum to Turbulence and Chaos]. — Moscow: Nauka, 1988. — 368 p. (in Russian).
- Иудин Д. И., Давыденко С. С. Фрактальная модель компактного внутриоблачного разряда. I. Особенности строения и эволюции // Известия вузов. Радиофизика. — 2015. — Т. 58, № 7. — С. 530–551.
Iudin D. I., Davydenko S. S. Fractal Model of a Compact Intracloud Discharge. I. Features of the Structure and Evolution // *Radiophysics and Quantum Electronics.* — 2015. — Vol. 58, No. 7. — P. 477–496. — DOI: 10.1007/s11141-015-9621-2. (Original Russian paper: *Iudin D. I., Davydenko S. S. Fraktal'naya model' kompaktnogo vnutrioblachnogo razryada. I. Osobennosti stroeniya i evolyutsii* // *Izvestiya VUZ. Radiofizika.* — 2015. — Vol. 58, No. 7. — P. 530–551.)

- Иудин Д. И.* Зарождение молниевых разрядов как индуцированный шумом кинетический переход // Известия вузов. Радиофизика. — 2017. — Т. 60, № 5. — С. 418–441.
Iudin D. I. Lightning-Discharge Initiation as a Noise-Induced Kinetic Transition. // Radiophysics and Quantum Electronics. — 2017. — Vol. 60, No. 5. — P. 374–394. — DOI: 10.1007/s11141-017-9807-x. (Original Russian paper: *Iudin D. I.* Zarozhdeniye molniyevogo razryada kak indutsirovannyuy shumom kineticheskiy perekhod // Izvestiya VUZ. Radiofizika. — 2017. — Т. 60, № 5. — P. 418–441.)
- Кухта В. Р., Лопатин В. В., Носков М. Д.* Применение фрактальной модели к описанию развития разряда в конденсированных диэлектриках // Журнал технической физики. — 1995. — Т. 65, № 2. — С. 63–75.
Kuchta V. R., Lopatin V. V., Noskov M. D. Primeneniye fraktal'noi modeli k opisaniyu razvitiya razryada v kondensirovannykh dielektrikakh [Application of fractal model to the description of discharge development in condensed dielectrics] // Zh. Tekh. Fiz. — 1995. — Vol. 65, No. 2. — P. 63–75 (in Russian).
- Петров Н. И., Петрова Г. Н.* Математическое моделирование траектории лидерного разряда и молниепоражаемости изолированных и заземленных объектов // Журнал технической физики. — 1995. — Т. 65, № 5. — С. 41–58.
Petrov N. I., Petrova G. N. Mathematical modeling of the trajectory of a leader discharge and the vulnerability to lightning of isolated and grounded objects // Technical Physics. — 1995. — Vol. 40, No. 5. — P. 427–436. (Original Russian paper: *Petrov N. I., Petrova G. N.* Matematicheskoe modelirovaniye traektorii lidernogo razryada i molnieporazhaemosti izolirovannykh i zazemlennykh ob'ektov // Zh. Tekh. Fiz. — 1995. — Vol. 65, No. 5. — P. 41–58.)
- Райзер Ю. П.* Физика газового разряда. — Долгопрудный: Издательский Дом «Интеллект», 2009. — 736 с.
Raizer Yu. P. Fizika gazovogo razryada [Gas discharge physics]. — Dolgoprudnyi: Izdatel'skii Dom «Intellekt», 2009. — 736 p. (in Russian).
- Репозиторий исходного кода транспортной модели [Электронный ресурс]: <https://github.com/DAlexis/self-organizing-transport-model> (дата обращения: 11.08.2019).
Transport model source code repository [Electronic resource]: <https://github.com/DAlexis/self-organizing-transport-model> (accessed: 11.08.2019).
- Репозиторий исходного кода восьмеричного дерева [Электронный ресурс]: <https://github.com/DAlexis/octree-cpp> (дата обращения: 11.08.2019).
Octal tree source code repository [Electronic resource]: <https://github.com/DAlexis/octree-cpp> (accessed: 11.08.2019).
- Barnes J., Hut P.* A hierarchical $O(N \log N)$ force-calculation algorithm // Nature. — 1986. — Vol. 324, No. 4. — P. 446–449. — DOI: 10.1038/324446a0
- Bentley J. L.* Multidimensional binary search trees used for associative searching // Communications of the ACM. — 1975. — Vol. 18, No. 9. — P. 509–517. — DOI: 10.1145/361002.361007
- Dwyer J. R., Uman M. A.* The physics of lightning // Physics Reports. — 2014. — Vol. 534, No. 4. — P. 147–241. — DOI: 10.1016/j.physrep.2013.09.004
- Iudin D. I., Rakov V. A., Mareev E. A., Syssoev A. A., Davydenko S. S.* Advanced numerical model of lightning development: Application to studying the role of LPCR in determining lightning type // Journal of Geophysical Research: Atmospheres. — 2017. — Vol. 122, No. 12. — P. 6416–6430. — DOI: 10.1002/2016jd026261
- Karunarathna N., Marshall T. C., Karunarathne S., Stolzenburg M.* Initiation locations of lightning flashes relative to radar reflectivity in four small Florida thunderstorms // Journal of Geophysical Research: Atmospheres. — 2017. — Vol. 122, No. 12. — P. 6565–6591. — DOI: 10.1002/2017JD026566
- Luque A., Ebert U.* Electron density fluctuations accelerate the branching of positive streamer discharges in air // Phys. Rev. E. — 2011. — Vol. 84, No. 4. — P. 046411. — DOI: 10.1103/PhysRevE.84.046411
- Luque A., Ebert U.* Growing discharge trees with self-consistent charge transport: the collective dynamics of streamers // New Journal of Physics. — 2014. — Vol. 16, No. 1. — P. 013039. — DOI: 10.1088/1367-2630/16/1/013039

- Mansell E. R., MacGorman D. R., Ziegler C. L., Straka J. M.* Simulated three-dimensional branched lightning in a numerical thunderstorm model // *Journal of Geophysical Research: Atmospheres*. — 2002. — Vol. 107, No. D9. — P. ACL 2–1–ACL 2–12. — DOI: 10.1029/2000jd000244
- Matsumoto M., Nishimura T.* Mersenne twister // *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation*. — 1998. — Vol. 8, No. 1. — P. 3–30. — DOI: 10.1145/272991.272995
- Mansell E. R., Ziegler C. L., Bruning E. C.* Simulated Electrification of a Small Thunderstorm with Two-Moment Bulk Microphysics // *Journal of the Atmospheric Sciences*. — 2010. — Vol. 67, No. 1. — P. 171–194. — DOI: 10.1175/2009jas2965.1
- Marshall T. C., McCarthy M. P., Rust W. D.* Electric field magnitudes and lightning initiation in thunderstorms // *Journal of Geophysical Research*. — 1995. — Vol. 100, No. D4. — P. 7097–7103. — DOI: 10.1029/95JD00020
- Montijn C., Ebert U., Hundsdoerfer W.* Numerical convergence of the branching time of negative streamers // *Phys. Rev. E*. — 2006. — Vol. 73, No. 6. — P. 065401. — DOI: 10.1103/PhysRevE.73.065401
- Nijdam S., Teunissen J., Ebert U.* The physics of streamer discharge phenomena // *Plasma Sources Sci. Technol.* — 2020. — ISSN. 1361–6595. — DOI: 10.1088/1361-6595/abaa05
- Petersen D., Bailey M., Beasley W. H., Hallett J.* A brief review of the problem of lightning initiation and a hypothesis of initial lightning leader formation // *Journal of Geophysical Research*. — 2008. — Vol. 113, No. D17. — P. D17205. — DOI: 10.1029/2007JD009036
- Rakov V. A., Uman M. A.* *Lightning: Physics and effects*. — Cambridge: University Press, 2003. — 687 p.
- Riousset J. A., Pasko V. P., Krehbiel P. R., Thomas R. J., Rison W.* Three-dimensional fractal modeling of intracloud lightning discharge in a New Mexico thunderstorm and comparison with lightning mapping observations // *Journal of Geophysical Research*. — 2007. — Vol. 112, No. D15. — DOI: 10.1029/2006jd007621
- Sysoev A. A., Iudin D. I., Bulatov A. A., Rakov V. A.* Numerical simulation of stepping and branching processes in negative lightning leaders // *Journal of Geophysical Research: Atmospheres*. — 2020. — Vol. 125, No. 7. — P. e2019JD031360. — DOI: 10.1029/2019JD031360
- van der Velde O., Montanya J.* Asymmetries in bidirectional leader development of lightning flashes // *Journal of Geophysical Research: Atmospheres*. — 2013. — Vol. 118, No. 24. — P. 13504–13519. — DOI: 10.1002/2013jd020257
- Wang H., Guo F., Zhao T., Qin M., Zhang L.* A numerical study of the positive cloud-to-ground flash from the forward flank of normal polarity thunderstorm // *Atmospheric Research*. — 2016. — Vol. 169 — P. 183–190. — DOI: 10.1016/j.atmosres.2015.10.011

Приложение 1. Особенности численного счета

В ходе построения модели был разработан специальный программный пакет. Для интегрирования уравнений по времени применяется явный классический метод Рунге–Кутты четвертого порядка с автоматическим выбором шага по времени. Для ускорения расчета электрических полей и нахождения ближайших вершин по аналогии с подходом Барнса–Хата [Barnes, Hut, 1986] для решения гравитационной задачи N тел применяется восьмеричное разбиение пространства [Bentley, 1975]. Обсудим более подробно алгоритм, методы оптимизации и особенности программной реализации модели.

Алгоритм модели

Рассмотрим n -й шаг модели по времени. Пусть величина предыдущего временного шага составляет Δt_{n-1} . Тогда порядок действий при переходе от временного слоя $(n-1)$ к слою n таков.

1. Выполняется интегрирование динамических переменных, ассоциированных с вершинами и ребрами графа, по схеме Рунге–Кутты четвертого порядка с текущим шагом по времени Δt :
 - (a) шаг по времени принимается равным $\Delta t_n = \Delta t_{n-1}$;
 - (b) вычисляются электрические поля и потенциалы во всех вершинах графа;
 - (c) вычисляются приращения $\{\Delta\psi_i\}$ всех динамических переменных $\{\psi_i\}$ за время Δt_n методом Рунге–Кутты:
 - (i) вычисляются правые части дифференциальных уравнений для всех динамических переменных для подшага метода Рунге–Кутты,
 - (ii) выполняется подшаг,
 - (iii) действия повторяются для всех подшагов;
 - (d) оцениваются относительные приращения динамических переменных; при недостаточной или избыточной точности модифицируется Δt_n ; при недостаточной точности найденные приращения динамических переменных отбрасываются, расчет нового временного слоя перезапускается с п. 1; метод оценки приращений приведен ниже.
2. Проводится расчет вероятностей и параметров бифуркаций системы в соответствии с введенными правилами:
 - (a) генерация новых вершин и ребер графа производится методом Монте-Карло в соответствии с (18). Для решения уравнения (18) функция $F(\theta)$ предварительно табулируется. Для нахождения F^{-1} применяется бинарный поиск;
 - (b) осуществляется поиск и удаление ребер с проводимостью ниже порогового значения;
 - (c) проводится нахождение и соединение пар вершин, среднее поле между которыми превосходит критическое значение E^* .
3. Производится вывод текущего состояния модели в файлы, если прошло достаточно модельного времени от момента предыдущего сохранения. Если требуется, осуществляется визуализация системы через графический интерфейс.

Выбор шага по времени

Рассмотрим более подробно алгоритм выбора шага по времени Δt .

На основе текущего значения Δt_n вычисляются приращения $\{\Delta\psi_i\}$ для всех динамических переменных из множества $\{\psi_i\}$. Рассмотрим только такие переменные $\{\tilde{\psi}_i\} \subset \{\psi_i\}$, модуль которых уменьшается: $\tilde{\psi}_i \cdot \Delta\tilde{\psi}_i < 0$. Для каждой динамической переменной из $\{\tilde{\psi}_i\}$ вычисляется $\tilde{\omega}_i = \Delta\tilde{\psi}_i / \tilde{\psi}_i$ — относительное изменение ее модуля. Пусть $\tilde{\omega}^* = \max(\omega_i)$ — максимальное по всем динамическим переменным из $\{\tilde{\psi}_i\}$. Переход к новому временному слою с шагом Δt считается приемлемым, если $\tilde{\omega}^* \in [\omega_{\min}, \omega_{\max}]$, где $\omega_{\min} = 0.05$ и $\omega_{\max} = 0.3$.

В случае если $\tilde{\omega}^* > \omega_{\max}$, переход к новому временному слою считается недостаточно точным и его результаты отбрасываются, а шаг по времени Δt уменьшается на 40 %, после чего вычисления повторяются. Если $\tilde{\omega}^*$ по-прежнему велика, процедура повторяется до тех пор, пока обозначенный выше критерий не будет выполнен. В случае $\tilde{\omega}^* < \omega_{\min}$ шаг по времени считается избыточно точным. При этом результаты расчета сохраняются, однако следующий шаг Δt увеличивается на 50 %.

Данному подходу можно дать следующую физическую интерпретацию. Если в качестве динамической переменной $\tilde{\psi}_i$ выступает заряд на некоторой вершине графа q_i , то условие $\Delta q_i/q_i < \omega_{\max}$ означает, что за шаг по времени Δt вершина разряжается не более чем на ω_{\max} от своего заряда, что означает малость Δt по сравнению с характерным временем RC -цепи, образуемой данной вершиной и подключенными к ней ребрами-сопротивлениями.

Использование такого подхода позволяет как избежать потери точности при моделировании системы, так и ускорить численные расчеты в ситуациях, когда в системе отсутствуют достаточно быстрые процессы. Для подбора значений ω_{\min} и ω_{\max} была проведена серия тестовых запусков модели с идентичными начальными условиями и различными начальными значениями генератора случайных чисел. Таким образом, каждый раз получалась новая реализация разрядного графа. Суммарный электрический заряд моделируемой цепи должен сохраняться, и начальное его значение есть 0. Для максимального расчетного времени (1.5 мс) было определено отклонение полного электрического заряда от нуля относительно суммарного положительного заряда:

$$\varepsilon Q = \frac{|\sum Q_i|}{\sum_{Q_i > 0} Q_i}.$$

Приемлемым было принято значение $\varepsilon Q = 1\%$, которое достигается при выбранных ω_{\min} и ω_{\max} .

Генерация случайных чисел

В качестве генератора случайных чисел используется вихрь Мерсена [Matsumoto, Nishimura, 1998]. Выбрана его реализация, доступная в стандартной библиотеке языка C++ под именем `std::mt19937`. Согласно спецификации алгоритма МТ19937 длина неповторяющейся последовательности для данной версии алгоритма составляет $2^{19937} - 1$. Таким образом, для любого практически достижимого количества вершин, умноженного на любое практически достижимое число шагов алгоритма по времени, последовательность можно считать незацикленной.

Оптимизация вычислений

Вычисление электрического поля прямым суммированием по формуле (1) имеет сложность $O(N^2)$ для каждого подшага численной схемы, где N — число вершин графа. Количество новообразованных вершин графа на этапе распространения лидера молнии для оценки можно считать постоянным в единицу времени. Тогда соотношение между модельным временем $t_{\text{мод}}$ и временем вычислений $t_{\text{выч}}$ имеет асимптотику

$$t_{\text{мод}} \propto t_{\text{выч}}^{1/3}.$$

Пробные расчеты с использованием формулы (1) оказались слишком медленными. Модель не успевала воспроизводить нужные эффекты за приемлемое счетное время.

В связи с этим для оптимизации расчетов электрического поля был применен подход Барнса–Хата [Barnes, Hut, 1986] — построение восьмеричного дерева (частный случай k -дерева [Bentley, 1975] для трехмерного пространства). В основе алгоритма лежит идея разбиения рабочей области пространства на 8 кубов, каждый из которых в свою очередь также разбивается на 8 подкубов (и так далее). Отдельно рассматриваются положительные и отрицательные заряды. Для каждого куба известны заряд и центр «масс» всех содержащихся в нем вершин.

Сложность построения восьмеричного дерева с N листьями составляет $O(N \log N)$. Если дерево построено, сложность нахождения вершины, ближайшей к произвольной точке с радиус-вектором \vec{r} , составляет $O(\log N)$. Сложность нахождения всех вершин, лежащих на расстоянии, меньшем заданного, от некоторой точки, также имеет сложность $O(\log N)$ с учетом того, что плотность расположения вершин в пространстве ограничена из физических соображений.

Электрическое поле $\vec{E}(\vec{r})$ в произвольной точке \vec{r} вычисляется приближенно. При этом вводится дополнительная функция $S(d)$. Для кубов, находящихся от точки \vec{r} на расстоянии, большем d , и имеющих линейный размер не более S , производится замена всех содержащихся внутри зарядов на суммарный заряд, сосредоточенный в центре «масс». Функция $S(d)$ является кусочно-линейной:

$$S(d) = \max(0, \kappa(d - d_0)),$$

где $\kappa = 0.5$ и $d_0 = 0.3$ м. Таким образом, поле вычисляется точно только от зарядов, находящихся не далее, чем d_0 . Для остальных зарядов вычисления тем менее точны, чем более они удалены от рассматриваемой точки \vec{r} . При учете того, что максимальная плотность расположения вершин ограничена из физических соображений, сложность расчета полей для всех вершин графа составляет $O(N \log N)$. Данный подход позволяет произвольно регулировать соотношение между скоростью и точностью вычислений поля. Благодаря применению восьмеричного разбиения пространства суммарная сложность одного послойного перехода модели также составляет $O(N \log N)$.

Программный код

Исходный код программного пакета, разработанного для численного расчета транспортной самоорганизующейся модели, находится в свободном доступе в репозитории на ресурсе GitHub [Репозиторий исходного кода транспортной модели, 2017] под лицензией GNU GPL версии 3. В основе пакета лежит принцип модульности: часть, отвечающая за динамику развития графа, и физическая часть задачи, включающая законы эволюции динамических переменных и возникновения бифуркаций, разностную схему, подсистему вывода и другие компоненты, независимы друг от друга. Такой подход позволяет при необходимости легко модифицировать физические принципы, лежащие в основе модели, независимо тестировать отдельные компоненты и использовать их в других проектах.

Программный пакет написан на языке C++ в соответствии с принципами объектно-ориентированного программирования. Приблизительный объем кода составляет 15 тысяч строк. При разработке программного пакета использованы исключительно инструменты и библиотеки с открытым исходным кодом. Таким образом, проект может быть свободно применен другими научными коллективами.

Для организации параллельных вычислений применена библиотека Intel TBB. Вывод трехмерной структуры графа реализован в формате vtk при помощи библиотеки libVTK. Графический интерфейс, применяемый для начальной отладки модели, реализован на Qt. Тестирование отдельных компонентов выполнено с использованием GTest. Для решения некоторых технических задач применен Boost. Сборка проекта осуществляется при помощи CMake. Разработка и запуск модели производились на ОС Linux, однако при необходимости проект может быть портирован на Windows благодаря применению CMake. Для визуализации расчетов применен программный пакет с открытым исходным кодом ParaView. Некоторые вспомогательные вычисления и построения выполнены на языке Python.

Модуль, отвечающий за построение восьмеричного дерева, выполнен в виде отдельного репозитория, также доступного на GitHub [Репозиторий исходного кода восьмеричного дерева, 2017]. Данный модуль может быть применен для ряда аналогичных расчетов. Он предоставляет класс восьмеричного дерева и класс его элемента. Класс дерева позволяет находить ближайшие к произвольной точке элементы и элементы, лежащие в ее определенной окрестности, и вычислять произвольные потенциалы с произвольной зависимостью масштаба усреднения от расстояния.

Приведенный в качестве примера расчет был выполнен в течение трех суток на вычислительном сервере с 32 процессорными ядрами на базе четырех процессоров Intel Xeon E5-4620 v2 @ 2.60 GHz. Приложение использовало 2 Гб оперативной памяти.

Приложение 2. Словарь основных физических терминов

Определение 1.

Грозное облако — облако, внутри которого можно выделить слои заряда различного знака. В простейшем случае выделяют основные положительный и отрицательный слои, расположенные на высотах, приблизительно равных 10 и 6.5 км соответственно, и заключающие в себе суммарные заряды порядка нескольких десятков кулон. Слои заряда грозного облака создают крупномасштабное электрическое поле, в котором развивается молниевый разряд.

Определение 2.

Молния — электрический разряд в атмосфере, разряжающий слои заряда грозного облака. Около 25 % молниевых разрядов доходят до земли и при контакте с ней порождают мощный импульс тока возвратного удара с пиковой амплитудой около 30 кА, за счет которого сосредоточенный вдоль канала заряд стекает в землю. В результате протекания по каналу столь высокого тока его температура поднимается до 30 тысяч К, что порождает ударную звуковую волну, называемую громом.

Определение 3.

Стримерный разряд (стример) — одна из форм газового разряда, существующая в виде волны ионизации. Структурно стример состоит из сильно локализованной в пространстве заряженной головки и слабоионизованного «хвоста», проводимость которого быстро падает во времени. Полярность стримера определяется знаком заряда его головки. Положительные стримеры распространяются по направлению электрического поля, отрицательные — против него. Характерные поля роста для отрицательных стримеров примерно вдвое больше, чем для положительных.

Определение 4.

Лидерный разряд (лидер) — одна из форм газового разряда, состоящего из горячего хорошо проводящего лидерного канала, оканчивающегося лидерной головкой, испускающей многочисленные стримеры, формирующие стримерную зону лидера, называемую также стримерной короной. Типичный лабораторный лидер развивается с высоковольтного электрода и имеет ток и проводимость порядка 1 А и 1 См/м соответственно. Развитый молниевый лидер характеризуется током в районе 100 А, проводимостью порядка 10^4 См/м и низким продольным электрическим полем канала около 10^4 В/м, что позволяет отнести его к дуговой форме разряда. Стримерная зона молниевго лидера содержит огромное количество одновременно развивающихся стримеров.

Определение 5.

Стримерно-лидерный переход — процесс образования нового участка лидерного канала, происходящий в области его головки за счет объединения токов множества испускаемых ею стримеров в общий ток в достаточно узком канале. Существенную роль в увеличении температуры (проводимости) формирующегося участка лидерного канала играет распределенный вокруг него заряд чехла, большая электрическая емкость которого обеспечивает высокий уровень энерговыведения в канале.

Определение 6.

Ионизационно-перегревная неустойчивость — последовательность процессов, приводящая к концентрации тока зарождающегося участка лидера в узком канале. В основе неустойчивости лежит резкая зависимость частоты ионизации электронным ударом от приведенного поля, то есть от отношения электрического поля к концентрации молекул газа. Если в каком-то месте

канала плотность тока становится больше, в нем повышаются плотность мощности энерговыделения и, соответственно, температура. Это, в свою очередь, приводит к локальному падению плотности газа и росту приведенного поля. Возникающее вследствие этого повышение частоты ионизации обеспечивает увеличение концентрации электронов, что означает рост проводимости и дальнейшее увеличение плотности тока в рассматриваемом участке канала. По мере развития данного процесса скорость роста исходного возмущения все время растет, что позволяет говорить о его взрывообразном характере.

Определение 7.

Биполярный лидер — лидерный разряд, содержащий одновременно развивающиеся положительную и отрицательную части, растущие по направлению и против направления электрического поля соответственно.

Определение 8.

Чехол лидерного канала — пространственный заряд, окружающий лидерный канал, источниками которого являются отмершие каналы его стримерной зоны и радиальные коронные разряды, возникающие с боковой поверхности лидерного канала. После заземления нисходящего лидера молнии сосредоточенный в его чехле заряд стекает в землю, формируя импульс тока возвратного удара с пиковой амплитудой порядка 30 кА.

Определение 9.

Дуговой разряд — одна из форм газового разряда, характеризующаяся высокими значениями температуры и проводимости и малым продольным электрическим полем канала.

