

УДК: 519.63

Параллельная реализация решения сопряженной задачи определения внутрибаллистических характеристик двигателей на твердом топливе

А. Е. Кирюшкин^а, Л. Л. Миньков^б

Национальный исследовательский Томский государственный университет,
Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 36

E-mail: ^а sashakir94@mail.ru, ^б lminkov@ftf.tsu.ru

Получено 08.10.2020, после доработки — 26.01.2021.

Принято к публикации 26.01.2021.

Представлена физико-математическая постановка сопряженной геометрической и газодинамической задачи моделирования внутрикамерных процессов и расчета основных внутрибаллистических характеристик ракетных двигателей на твердом топливе в осесимметричном приближении. Изложены основополагающие методики и численный алгоритм решения задачи. Отслеживание горячей поверхности топлива осуществлено неявным образом с помощью метода уровней на декартовой структурированной вычислительной сетке. Для расчета параметров течения использованы двумерные уравнения газовой динамики. Ввиду несогласованности границ области с узлами вычислительной сетки, в численных расчетах учтено наличие фиктивных точек, лежащих вне рассматриваемой области, но рядом с границей. Для задания значений параметров течения в фиктивных точках применена обратная процедура Лакса – Вендроффа, заключающаяся в построении экстраполяционного полинома, который учитывает как текущее распределение параметров, так и условия на границе. Численное решение полученной системы уравнений основано на использовании WENO-схем пятого и третьего порядка для дискретной аппроксимации по пространственной координате уравнений метода уровней и газовой динамики соответственно и применении методов Рунге – Кутты, обладающих свойством уменьшения полной вариации, для решения полученных полудискретных уравнений. Изложенный численный алгоритм распараллелен с использованием технологии CUDA и в дальнейшем оптимизирован с учетом особенностей архитектуры графических процессоров.

Программный комплекс использован при расчетах внутрибаллистических характеристик бесоплового двигателя на твердом топливе в течение основного времени работы. На основе полученных численных результатов обсуждается эффективность распараллеливания с использованием технологии CUDA и применения рассмотренных оптимизаций. Показано, что применяемая методика распараллеливания приводит к значительному ускорению по сравнению с использованием центральных процессоров. Представлены распределения основных параметров течения продуктов сгорания в различные промежутки времени. Произведено сравнение полученных результатов квазиодномерного подхода и разработанной численной методики.

Ключевые слова: газовая динамика, ракетные двигатели на твердом топливе, внутренняя баллистика, параллельные вычисления

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-31-90033.

UDC: 519.63

Parallel implementation of numerical algorithm of solving coupled internal ballistics modelling problem for solid rocket motors

A. E. Kiryushkin^a, L. L. Minkov^b

Tomsk State University,
36 Lenin ave., Tomsk, 634050, Russia

E-mail: ^a sashakir94@mail.ru, ^b lminkov@ftf.tsu.ru

Received 08.10.2020, after completion – 26.01.2021.

Accepted for publication 26.01.2021.

We present a physico-mathematical statement of coupled geometrical and gas dynamics problem of intrachamber processes simulation and calculation of main internal ballistics characteristics of solid rocket motors in axisymmetric approximation. Method and numerical algorithm of solving the problem are described in this paper. We track the propellant burning surface using the level set method. This method allows us to implicitly represent the surface on a fixed Cartesian grid as zero-level of some function. Two-dimensional gas-dynamics equations describe a flow of combustion products in a solid rocket motor. Due to inconsistency of domain boundaries and nodes of computational grid, presence of ghost points lying outside the computational domain is taken into account. For setting the values of flow parameters in ghost points, we use the inverse Lax–Wendroff procedure. We discretize spatial derivatives of level set and gas-dynamics equations with standard WENO schemes of fifth and third-order respectively and time derivatives using total variation diminishing Runge–Kutta methods. We parallelize the presented numerical algorithm using CUDA technology and further optimize it with regard to peculiarities of graphics processors architecture.

Created software package is used for calculating internal ballistics characteristics of nozzleless solid rocket motor during main firing phase. On the base of obtained numerical results, we discuss efficiency of parallelization using CUDA technology and applying considered optimizations. It has been shown that implemented parallelization technique leads to a significant acceleration in comparison with central processes. Distributions of key parameters of combustion products flow in different periods of time have been presented in this paper. We make a comparison of obtained results between quasideimensional approach and developed numerical technique.

Keywords: gas dynamics, solid rocket motors, internal ballistics, parallel computing

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2021, vol. 13, no. 1, pp. 47–65 (Russian).

The reported study was funded by RFBR, project number 20-31-90033.

1. Введение

Как правило, современные ракетные двигатели на твердом топливе (РДТТ) имеют заряды сложной формы, характеризующиеся трехмерной либо осесимметричной геометрией. К типичным формам зарядов можно отнести: (а) заряды, имеющие канал в форме звезды; (б) заряды, имеющие наклонную кольцевую щель; (в) заряды, содержащие свободные объемы для конструктивных элементов, и проч. [Алиев и др., 2007]. Течение газов внутри камеры сгорания может носить сложный характер: возможно наличие пульсаций давления, образование вихревых структур и застойных зон. Сложная, изменяющаяся во времени геометрия приводит к газодинамической неустойчивости потока, возможному срыву течения и последующему интенсивному образованию крупномасштабных вихревых структур [Глазунов и др., 2017; Сухинин, Ахмадеев, 1993].

Экспериментальное исследование процессов, происходящих в РДТТ, связано с определенными трудностями ввиду их скоротечности, высоких температур и давлений. В связи с этим использование методов математического моделирования является важнейшим компонентом исследований подобных процессов. Моделирование сопряженной задачи отслеживания поверхности горящего топлива и определения параметров течения в РДТТ затруднительно в реализации ввиду нелинейной взаимозависимости геометрической и газодинамической задач, возможных топологических изменений поверхности, а также вычислительной трудоемкости.

Несмотря на сложную природу явлений, происходящих в камере сгорания, на данный момент в открытых источниках преобладают работы, учитывающие сложную геометрию заряда, но предполагающие либо нульмерность [Lorente, 2013; Ki et al., 2017; Tshokotsha, 2016], либо одномерность течения продуктов сгорания [Милехин и др., 2013; Cavallini, 2009; Sullwald, 2014]. Нульмерный подход предполагает постоянное значение параметров течения (давления, температуры, плотности и так далее) во всем объеме камеры сгорания, прост в реализации, вычислительно эффективен, но ввиду малой точности полученных результатов используется в основном на начальных этапах проектирования. Квазиодномерное приближение позволяет учесть как распределение параметров течения вдоль канала, так и, возможно, эффект эрозионного горения, однако осредненные характеристики по сечению канала не всегда могут физически адекватно описывать течение газа, как это имеет место, например, с возвратным течением при резком расширении канала, образованием вихрей, застойных зон и прочими эффектами, которые не могут быть учтены в одномерном приближении. В дополнение стоит сказать, что для некоторых типов зарядов и форм высокоэнергетических устройств может быть проблематично применить квазиодномерный подход ввиду геометрических особенностей и должны быть использованы специальные методики, индивидуальные для каждой формы [Милехин и др., 2013].

В работах [Kostyushin et al., 2019; Terzic et al., 2012] выполнено моделирование сопряженной задачи с учетом многомерного распределения параметров течения, однако описанные подходы могут быть применены только для зарядов простой цилиндрической формы. Исследование процессов в РДТТ с произвольной геометрией заряда с помощью данных методов может быть достаточно проблематично.

Реализация традиционного подхода с применением подвижной вычислительной сетки, несмотря на потенциальную простоту для осесимметричных зарядов, сопряжена с трудностями для трехмерных задач ввиду возможных топологических изменений поверхности, а также ухудшения качества вычислительной сетки [Oh et al., 2020]. Даже в двумерном случае разгар угла, когда точке в начальный момент соответствует часть окружности в последующие моменты, может представлять нетривиальную задачу.

Применение классических подходов и алгоритмов расчета характеристик, используемых при проектировании традиционных РДТТ, имеющих сопловую часть, в случае бессопловых РДТТ оказывается в значительной степени неприемлемым. Вдоль горящего канала заряда реализуются области дозвукового, звукового и сверхзвукового течения продуктов сгорания, что

приводит к возникновению повышенных перепадов давления по длине канала. На ускорение сверхзвукового потока в выходном раструбе канала заряда влияют массовый приход с горячей поверхности, изменяющийся геометрический контур раструба и, как возможное следствие, образующиеся скачки уплотнения, в результате чего могут возникать дополнительные потери удельного импульса тяги [Милехин и др., 2013].

Целью данной работы является создание численной модели, которая, с одной стороны, позволяла бы учитывать многомерность течения продуктов сгорания, с другой — была бы лишена недостатков традиционного многомерного подхода, а также позволяла бы получить времена расчета, пригодные для начальной стадии проектирования РДТТ, когда рассматривается множество различных конфигураций.

В данной работе для решения геометрической составляющей задачи будет использован метод уровней, который определяет границу области как нулевой уровень некоторой функции. Для удобства выбирают такую функцию, модуль градиента которой равен единице в каждой точке. Подобное представление имеет ряд нужных свойств, например: в каждом узле мы знаем нормаль, расстояние до ближайшей точки на поверхности, кривизну и другие полезные характеристики поверхности. Алгоритмы отслеживания произвольной подвижной поверхности, представленной таким образом, достаточно просты в реализации [Osher, Fedkiw, 2003].

Так как в общем случае вычислительная сетка не совпадает с границей области (ввиду представления границы области неявным образом), то необходима специальная обработка так называемых фиктивных точек вычислительной сетки, которые находятся вне рассматриваемой области, но рядом с границей. Для задания значений параметров течения в таких точках будет использован обратный метод Лакса – Вендроффа [Tan, Shu, 2010], который заключается в построении экстраполяционного полинома с использованием информации о входящих и выходящих характеристиках и заданных граничных условиях. Использование данного метода позволяет получить значения параметров в фиктивных точках с произвольным порядком точности [Tan, Shu, 2010].

Детали численного алгоритма решения сопряженной задачи описаны в работах [Кирюшкин, Миньков, 2017; Kiryushkin, Minkov, 2017]. Ввиду вычислительной трудоемкости алгоритма времена работы последовательной реализации оказываются чрезмерно большими. В связи с этим в данной работе рассмотрены распараллеливание данного алгоритма с использованием технологии CUDA и дальнейшая оптимизация с учетом особенностей архитектуры графических процессоров. Разработанная распараллеленная реализация алгоритма использована при решении и анализе сопряженной задачи для бесоплового РДТТ.

2. Физико-математическая постановка задачи

Будем рассматривать бесопловый РДТТ, изображенный на рис. 1. Область состоит из объема камеры сгорания, ограниченного линиями 1–4, объема твердого топлива, расположенного между линиями 4 и 5, и заштрихованного металлического вкладыша.

В начальный момент времени происходит зажигание и дальнейшее горение поверхности твердого топлива. Образующиеся продукты сгорания вытекают через выходное сечение. Двигатель продолжает функционировать, пока топливо не догорит до внутренней линии (5) металлического вкладыша. Для упрощения математического описания физических процессов в камере сгорания бесоплового РДТТ использовались следующие допущения:

- 1) течение продуктов сгорания обладает осевой симметрией;
- 2) зажигание всей поверхности топлива от воспламенителя происходит мгновенно и одновременно в начальный момент времени;

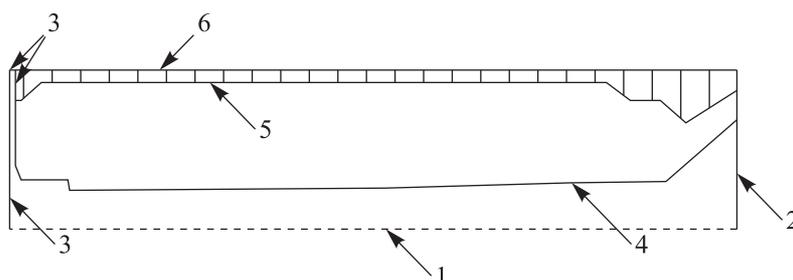


Рис. 1. Схема бесоплового РДТТ: 1 — ось симметрии; 2 — выходное сечение; 3 — стенки; 4 — начальное положение горячей поверхности; 5, 6 — граница металлического вкладыша

- 3) не учитывается эрозионный эффект горения топлива;
- 4) массовая скорость горения зависит по степенному закону от давления: $\rho u_n = m_t p^\nu$;
- 5) продукты сгорания представляют собой однофазную газообразную среду;
- 6) образовавшийся газ считается невязким и идеальным в термодинамическом смысле.

Течение продуктов сгорания будет подчиняться уравнениям Эйлера, записанным в осесимметричной форме:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = -\frac{\rho v}{y}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} + \frac{\partial \rho uv}{\partial y} = -\frac{\rho uv}{y}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho uv}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2 + p)}{\partial y} = -\frac{\rho v^2}{y}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial \rho u H}{\partial x} + \frac{\partial \rho v H}{\partial y} = -\frac{\rho v H}{y}, \quad (4)$$

где ρ , p , u , v — плотность, давление, осевая и радиальная составляющие скорости соответственно, $E = c_v T + 0.5(u^2 + v^2)$ — полная энергия, $H = E + \frac{p}{\rho}$ — полная энтальпия, а c_v — удельная теплоемкость при постоянном объеме. Система уравнений (1)–(4) замыкается уравнением состояния идеального газа:

$$p = \rho RT, \quad (5)$$

где $R = c_p - c_v = \frac{(k-1)}{k} c_p$ — газовая постоянная, c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении, а k — показатель адиабаты.

Уравнения (1)–(5) дополняются начальными условиями:

$$(p(0, x, y), \rho(0, x, y), u(0, x, y), v(0, x, y)) = (p_0, \rho_0, 0, 0), \quad (6)$$

где p_0 и ρ_0 — значения давления и плотности соответственно в начальный момент времени. На оси симметрии задаются следующие условия:

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad v = 0. \quad (7)$$

На твердых стенках задается условие непротекания:

$$u_n = 0. \quad (8)$$

На границе горящего топлива задаются граничные условия [Ерохин, 1991; Соркин, 1983]:

– массовый приход:

$$\rho u_n = m_t p^v; \quad (9)$$

– равенство нулю тангенциальной составляющей вектора скорости:

$$u_\tau = 0; \quad (10)$$

– постоянное значение полной энтальпии продуктов сгорания:

$$H = H_0; \quad (11)$$

– геометрическое условие линейной скорости горения:

$$u_b = \frac{m_t p^v}{\rho_p}. \quad (12)$$

На выходном сечении в случае дозвукового истечения задается постоянное значение давления

$$p = p^*; \quad (13)$$

не ставится никаких граничных условий в случае достижения сверхзвуковой скорости продуктами сгорания.

Уравнения (1)–(5) вместе с начальными условиями (6) и граничными условиями (7)–(13) обезразмериваются с использованием в качестве характерных следующих масштабных величин:

- $u_m = \sqrt{\frac{k-1}{k}} H_0$ – масштаб скорости;
- $p_m = \left(\frac{S_b m_t u_m}{\Gamma(k) F_{cr}} \right)^{\frac{1}{1-\nu}}$ – масштаб давления в соответствии с формулой Бори [Ерохин, 1991], где S_b – начальная площадь горячей поверхности, F_{cr} – площадь критического сечения, а $\Gamma(k) = \sqrt{k \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}}}$ – газодинамический комплекс;
- $\rho_m = \frac{p_m}{u_m^2}$ – масштаб плотности;
- $x_m = 1$ м – масштаб длины;
- $t_m = \frac{x_m}{u_m}$ – масштаб времени.

Дальнейшие результаты приводятся для безразмерных величин.

3. Методы решения

Расчетная область и вычислительная сетка схематично изображены на рис. 2.

Как видно, узлы вычислительной сетки не совпадают с границами области, а линии сетки произвольным образом пересекают ее. Геометрия расчетной области определяется с помощью функции $\phi(x, y)$, задаваемой на такой сетке, где нулевому уровню данной функции будет соответствовать граница рассматриваемой области. Пример такой функции изображен на рис. 3.

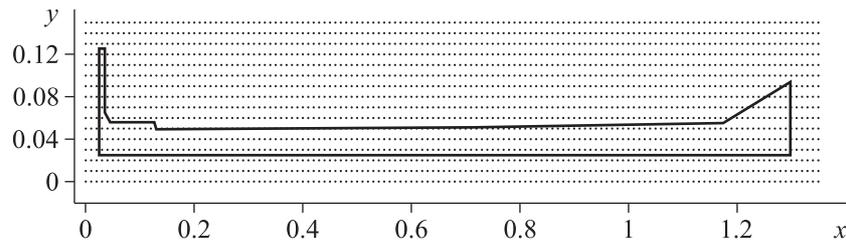


Рис. 2. Схематичное изображение вычислительной сетки и расчетной области

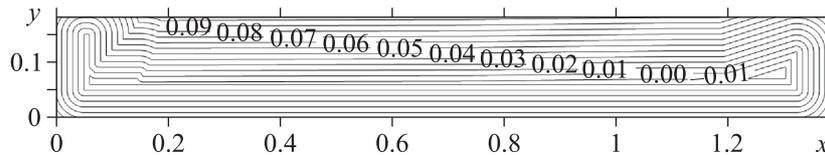


Рис. 3. Изолинии функции уровня для расчетной области

Как можно заметить, положительным значениям функции соответствуют точки, лежащие вне рассматриваемой области, в то время как отрицательным — лежащие внутри. Для изменяющейся со временем области функция уровня будет также иметь зависимость от времени: $\phi = \phi(t, x, y)$. Для всех точек (x, y) , для которых в момент времени t выполняется условие $\phi(t, x, y) = 0$, при условии $x = x(t)$, $y = y(t)$, получим $\frac{d\phi(t, x, y)}{dt} = 0$, где под $\frac{d}{dt}$ понимается субстанциональная производная, откуда получаем дифференциальное уравнение, описывающее изменение во времени подвижной границы:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = 0, \quad (14)$$

где $\frac{\partial x}{\partial t} = u_{xb}$, $\frac{\partial y}{\partial t} = u_{yb}$ — составляющие вектора скорости подвижной поверхности. Рассматриваемая в данной работе сопряженная задача для границ горящего топлива позволяет переписать уравнение (14) в более удобной форме:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u_{nb} \left| \frac{\partial \phi}{\partial n} \right| = 0. \quad (15)$$

Уравнение (15) является разновидностью уравнений Гамильтона–Якоби, которые имеют схожие особенности с уравнениями гиперболического типа. Единственность решения данного уравнения обеспечивается заданием начального условия:

$$\phi(0, x, y) = \phi_0(x, y). \quad (16)$$

К тому же в каждой точке должна быть определена нормальная скорость движения, которая в нашем случае определяется как

$$u_{nb}|_{\phi(t,x,y)=0} = \begin{cases} u_b, \phi(t, x, y) \in \Sigma(t), \\ 0, \phi(t, x, y) \notin \Sigma(t), \end{cases} \quad (17)$$

где $\Sigma(t)$ — поверхность горящего топлива в момент времени t , а u_b — линейная скорость горения, которая определяется с помощью (12).

Запишем полудискретную схему для уравнений газовой динамики (1)–(5) в векторной форме:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{U}_{i,j}) = -\frac{(\mathbf{F}_x)_{i+1/2,j} - (\mathbf{F}_x)_{i-1/2,j}}{h_x} - \frac{(\mathbf{F}_y)_{i,j+1/2} - (\mathbf{F}_y)_{i,j-1/2}}{h_y} + \mathbf{S}_{i,j}, \quad (18)$$

где $\mathbf{U} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho E)^T$, $\mathbf{F}_x = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, \rho uH)^T$, $\mathbf{F}_y = (\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, \rho vH)^T$, $\mathbf{S} = \left(-\frac{\rho v}{y}, -\frac{\rho uv}{y}, -\frac{\rho v^2}{y}, -\frac{\rho vH}{y}\right)^T$, $U_{i,j}, S_{i,j}$ — значения параметров в узле (i, j) вычислительной сетки, а $(\mathbf{F}_x)_{i+1/2,j}, (\mathbf{F}_y)_{i,j+1/2}$ — величины потоков, вычисленные между узлами (i, j) и $(i + 1, j)$ для первого и узлами (i, j) и $(i, j + 1)$ для второго потоков соответственно.

Для дискретизации уравнений (18) по времени используется многошаговая схема Рунге–Кутты, обладающая свойством уменьшения полной вариации, [Gottlieb, Shu, 1998; Shu, 1988], а численные значения потоков $(\mathbf{F}_x)_{i+1/2,j}, (\mathbf{F}_y)_{i,j+1/2}$ находятся с помощью WENO-реконструкции [Harten et al., 1987]. Уравнение (14) аппроксимируется с третьим порядком точности по времени и пятым порядком точности по пространству, как это описано в [Osher, Fedkiw, 2003]. Полудискретные уравнения (18) рассматриваются для узлов, в которых значение функции уровня $\phi_{i,j}$ меньше нуля, то есть только внутри вычислительной области.

В общем случае для вычисления значений потоков $(\mathbf{F}_x)_{i+1/2,j}$ и $(\mathbf{F}_y)_{i,j+1/2}$ используется шаблон, который, помимо узла (i, j) , также включает в себя l узлов слева и r узлов справа для потока \mathbf{F}_x и b узлов снизу и t узлов сверху для потока \mathbf{F}_y . При расчете потоков рядом с границей часть узлов шаблона может выходить за расчетную область (такие узлы будем называть фиктивными). Значения в таких точках вычисляются с помощью обратной процедуры Лакса–Вендроффа, которая позволяет рассчитывать значения параметров в фиктивных узлах с произвольным порядком точности [Tan, Shu, 2010], учитывая как распределение параметров внутри области, так и граничные условия. Особенности применения данной процедуры для задач внутренней баллистики РДГТ в подробностях описаны в [Кирюшкин, Миньков, 2017; Kiryushkin, Minkov, 2017]. Одна из важных особенностей численной схемы, которую стоит отметить, — это ее неконсервативность, как это показано в [Ding et al., 2020].

Так как характерная линейная скорость горения топлива u_b много меньше характерной скорости течения продуктов сгорания u ($u_b/u \approx 10^{-4}$), то необязательно после каждого шага интегрирования уравнений газовой динамики (18) интегрировать уравнение поверхности (15). В данной работе используется следующий алгоритм для численного алгоритма решения сопряженной задачи внутренней баллистики:

- 1) выбирается некий шаг интегрирования Δt , который много больше допустимого шага интегрирования уравнений газовой динамики, но меньше максимально возможного шага интегрирования уравнения подвижной поверхности;
- 2) в течение времени Δt численно решается система уравнений газовой динамики, где на каждом шаге:
 - (а) вычисляются значения в фиктивных узлах,
 - (б) из условий устойчивости находится шаг интегрирования по времени,
 - (в) рассчитываются новые значения параметров течения для узлов, лежащих внутри рассматриваемой области;
- 3) интегрируется уравнение подвижной поверхности на шаг по времени, равный Δt , с учетом текущих значений параметров течения.

Шаги 1–3 повторяются, пока все топливо в РДТТ не сгорит. После интегрирования поверхности узлы, которые ранее лежали вне области, могут попасть внутрь области. Для таких узлов оставляют значения, присвоенные им при использовании обратной процедуры Лакса–Вендроффа на шаге 2.

4. Параллельная реализация

Из описанного алгоритма решения и того факта, что линейная скорость горения много меньше характерной скорости течения продуктов сгорания, следует, что нам приходится интегрировать уравнения газовой динамики на времена, много большие характерных для данных уравнений, что приводит к большой вычислительной трудоемкости. Решение такой задачи даже в одномерном приближении может занимать 2–3 часа на центральных процессорах современных компьютеров [Милехин и др., 2013]. Для ускорения расчетов описанный последовательный алгоритм был распараллелен с использованием технологии CUDA [Cheng et al., 2014]. Так как решение геометрической задачи требует намного меньше вычислительных ресурсов, чем решение системы уравнений газовой динамики, то далее мы будем рассматривать параллельную реализацию и оптимизацию, связанную с решением этой системы уравнений. Из описания алгоритма следует, что основное вычислительное время расходуется на (а) применение обратной процедуры Лакса–Вендроффа для вычисления значений в фиктивных узлах, (б) нахождение шага интегрирования Δt уравнений газовой динамики, (в) расчет значений параметров течения на новом временном слое. Обычно быстрая процедура нахождения шага по времени может стать узким местом при расчетах на графических ускорителях ввиду того, что, во-первых, ускорение для параллельной реализации операции редукции не столь велико по сравнению с последовательной реализацией для рассматриваемого количества узлов, а во-вторых, при выполнении данной операции требуется копирование данных с графического на центральный процессор, которое обладает высокой задержкой. Решение уравнений гидродинамики на графических ускорителях достаточно широко распространено для структурированных криволинейных вычислительных сеток [He et al., 2013; Kestener et al., 2010]. В работах [Меньшов, Корнев, 2014; Меньшов, Павлухин, 2016] рассматривается алгоритм решения уравнений газовой динамики на декартовых сетках для произвольных областей, основанный на методе погруженной границы, и его распараллеливание для многопроцессорных гибридных систем. Также встречаются работы, которые рассматривают ускорение решения уравнений Навье–Стокса на неструктурированных сетках [Волков и др., 2013]. Однако распараллеливание численных алгоритмов, использующих обратную процедуру Лакса–Вендроффа, авторами в открытой литературе встречено не было.

Отличие рассматриваемого алгоритма от алгоритмов в работах [He et al., 2013; Kestener et al., 2010] заключается в том, что, во-первых, требуется нетривиальная процедура вычисления значений в фиктивных точках и, во-вторых, не в каждом узле необходимо производить вычисления. Данные особенности дают дополнительное пространство для оптимизаций. В данной работе используется WENO-схема третьего порядка точности, а расчет потоков осуществляется при помощи расщепления Лакса–Фридрихса [Thomas, 1995], однако рассматриваемые оптимизации применимы для произвольной схемы дискретизации и расчета потоков.

Для оптимизации быстродействия использовалась видеокарта NVIDIA GTX 1050 Ti, а для расчетов — более производительная NVIDIA GTX 1080. Если не сказано иного, то время исполнения в следующих подпараграфах указано для NVIDIA GTX 1050 Ti. В настоящей работе при запуске ядер на CUDA вычислительная область разбивается на блоки размером (32, 16), где для каждой нити вычисляются уникальные идентификаторы (i, j) , соответствующие индексам узла вдоль осей x и y , если явно не указан другой метод разбиения. Для оптимизации производительности использовалась сетка (2800, 390) узлов.

4.1. Параллельная реализация обратной процедуры Лакса – Вендроффа

Приведем изначальную параллельную реализацию в алгоритме 1. Исполнение такого ядра в среднем занимает приблизительно 1000 мкс.

Алгоритм 1. Обратная процедура Лакса – Вендроффа

```

Вычисление идентификатора  $(i, j)$ , уникального для каждой нити;
if узел  $(i, j)$  фиктивный then
    | Вычисление значений компонент нормали  $(n_x, n_y)$ ;
    | Вычисление ближайшей точки на поверхности  $(x_s, y_s)$  с использованием  $(n_x, n_y)$ ;
    | Вычисление граничного условия с использованием  $(x_s, y_s)$ ;
    | Вычисление ближайшего к  $(x_s, y_s)$  узла внутри области  $(i_{cl}, j_{cl})$ ;
    | Вычисление фиктивного значения в узле  $(i, j)$  с использованием  $(i_{cl}, j_{cl})$ ;

```

Обсудим недостатки данной реализации. В действительности полезные вычисления происходят только на последнем шаге алгоритма, а на всех предыдущих шагах подготавливаются вспомогательные данные для расчета значений в фиктивном узле. Профилирование кода ядра показывает, что основное время работы ядра уходит на расчет компонент нормали, так как их вычисление требует как обращения к глобальной памяти, так и порядка 100 операций над числами с плавающей точкой. Для расчета компонент нормали используется WENO-аппроксимация пятого порядка точности, что требует шаблона длиной 6 узлов как вдоль оси x , так и вдоль оси y . При загрузке данных шаблона для вычисления n_y к тому же отсутствует локальность памяти, и для получения каждого значения загружается целая кеш-линия. Следующая проблема — это нахождение ближайшего узла, так как данная операция тоже требует множественного обращения к глобальной памяти. Ввиду того, что при интегрировании уравнений газовой динамики геометрия считается неизменной, значение компонент нормали, ближайшей точки на поверхности, ближайшего узла внутри области, а также граничного условия можно вычислить заранее и в дальнейшем использовать эти значения в алгоритме 1. Подобный подход позволяет сократить среднее время выполнения ядра с 1000 мкс до 350 мкс. Дальнейшее профилирование показывает, что новым узким местом алгоритма является определение того, является ли узел (i, j) фиктивным. Это объясняется тем, что если у нас всего $N_x \cdot N_y$ вычислительных узлов, где N_x — количество узлов вдоль оси x , а N_y — вдоль оси y , то количество фиктивных узлов имеет порядок $O(N_x + N_y)$, так как мы рассматриваем узлы вблизи линии поверхности, длина которой также имеет порядок $O(N_x + N_y)$. Отсюда вытекает идея оптимизации, которая заключается в первоначальном подсчете всех фиктивных узлов для текущей геометрии. Таким образом, для вычисления значений в фиктивных узлах нам потребуется создать 4 вспомогательных одномерных массива длиной $O(N_x + N_y)$: первый будет содержать отображение фиктивных узлов на ближайшие узлы внутри области, второй — компоненты нормали, третий — ближайшие точки, а четвертый — граничные условия. Стоит отметить, что в данном случае ввиду одномерности массивов параметры запуска ядра (размер блока и грида) также будут одномерными. Вышеописанная оптимизация позволяет сократить время расчета до 30 мкс, что более чем в 10 раз быстрее предыдущей реализации. Такое ускорение обеспечивается тем, что мы загружаем асимптотически меньше данных из глобальной памяти.

4.2. Параллельная реализация вычисления шага интегрирования

Для вычисления шага интегрирования используется алгоритм параллельной редукции из библиотеки Thrust [Thrust GPU-accelerated library]. Так как функция *reduce* из настоящей библиотеки возвращает вычисленную величину шага по значению, то, помимо времени самого ядра,

стоит учитывать время передачи данных с графического процесса на центральный. Использование средств профилировщика показывает, что приблизительно 600 мкс тратится на исполнение ядра редукции, а также 400 мкс на передачу данных. Так как мы используем библиотечную функцию, то у нас нет такого простора в оптимизации, как с самописными ядрами. В добавление к этому широкое использование данной библиотеки обществом инженеров и программистов дает основание полагать, что данная реализации близка к оптимальной. Однако такие большие времена исполнения непозволительны для вычисления шага по времени еще ввиду того факта, что при переходе на более производительную видеокарту время передачи данных с нее на центральный процессор останется неизменным. Путь к оптимизации определения шага по времени был найден из тех соображений, что параметры течения меняются значительно только на начальном этапе работы двигателя. Таким образом, был выбран следующий порядок действий: на первых M итерациях мы вычисляем шаг интегрирования для каждой итерации, а затем шаг по времени вычисляется лишь один раз в K итераций. В данной работе задавалось $M \sim 1000$, а $K \sim 100$, что позволило сократить среднее время расчета одного шага по времени с 1000 мкс до 10 мкс.

4.3. Параллельная реализация расчета газодинамических параметров

Приведем изначальную параллельную реализацию расчета газодинамических параметров в алгоритме 2. Исполнение такого ядра в среднем занимает приблизительно 2000 мкс.

Алгоритм 2. Расчет газодинамических параметров

Вычисление идентификатора (i, j) , уникального для каждой нити;
 Загрузка значений $\phi_{i,j}$ в разделяемую память;
 Загрузка параметров течения $U_{i,j}$ для внутренних и фиктивных узлов в разделяемую память;
 Синхронизация внутри блока;
 Вычисление потоков $(F_x)_{i+1/2,j}$ и $(F_y)_{i,j+1/2}$;
 Синхронизация внутри блока;
 Расчет значения параметров в узле (i, j) на следующем временном слое;

Так как численная схема требует в общем случае l узлов слева и r узлов справа для вычисления значения потока F_x и b узлов снизу и t узлов сверху для вычисления значения потока F_y , то для блока с размерами (n, m) следует загружать $(n + l + r, m + b + t)$ элементов. Шаблон загрузки, используемый в настоящей реализации, схематично приведен на рис. 4 для $l = r = b = t = 2$ и $n = m = 6$. Такой шаблон предполагает, что нити с индексами $tid_x < l$ и $tid_y < b$, помимо элемента в узле (i, j) , загружают также элементы из узлов $(i - l, j)$ и $(i, j - b)$, а нити с индексами $tid_x \geq n - r$ и $tid_y \geq m - t$ также выполняют загрузку элементов $(i + r, j)$ и $(i, j + t)$ соответственно. Здесь под tid_x и tid_y понимаются локальные индексы нитей в блоке, а под i и j — глобальные.

В настоящей работе для аппроксимации потоков используется WENO-схема третьего порядка точности, а расчет потоков осуществляется при помощи расщепления Лакса – Фридрихса [Thomas, 1995]. В изначальном варианте алгоритма после загрузки функции уровня в локальную память, если узел был внутренним или фиктивным, сразу производилась загрузка параметров течения. Такой подход, ввиду того, что часть нитей должны загружать несколько узлов, обладает сильной взаимозависимостью инструкций загрузки, поэтому для увеличения пропускной способности инструкций в следующей версии алгоритма сначала загружались все значения функции уровня, и только после этого происходила загрузка газодинамических параметров. В добавление к этому в функции нахождения потоков было уменьшено количество используемых регистров и минимизировано количество операций деления. Также математические операции, которые до этого проводились над структурой float4, были заменены на манипуляции с числами

с плавающей точкой, чтобы избежать излишнего копирования. Описанные оптимизации позволили сократить время исполнения ядра с 2000 мкс до 1700 мкс.

При вычислении потоков используется такой же шаблон, как и при загрузке данных на рис. 4. В случае расчета дополнительных потоков вдоль оси y вычисление выполняется нитями из одного варпа (минимальная единица исполнения в архитектуре CUDA, равная 32 нитям), в то время как вычисление потоков вдоль оси x производится только одной нитью из каждого варпа, что приводит к простаиванию вычислительных ресурсов. Для увеличения производительности расчет потоков вдоль оси x производился нитями из одного варпа, а размерность блока была уменьшена с (32, 16) до (32, 8), что способствовало увеличению количества доступных варпов для планировщика. Размерность выделяемой разделяемой памяти была изменена, чтобы избежать сериализации доступа к ней. После проделанных улучшений средняя продолжительность работы ядра составила 1500 мкс.

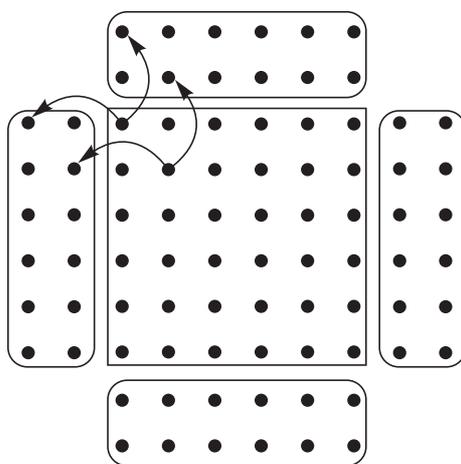


Рис. 4. Схематичное изображение загрузки данных в разделяемую память

Последняя, и наиболее ключевая, идея оптимизации следует из наблюдения, что ввиду специфики представления границы, у нас имеются блоки, для которых вычисления не должны производиться ни для одного узла, изображенные на рис. 5. Несмотря на то что никаких вычислений для таких блоков не производится, мы должны сначала загрузить данные о функции уровня, чтобы это понять. Так как подобных блоков может быть достаточно много, то значительное время тратится ввиду большой задержки доступа к глобальной памяти. Чтобы минимизировать время, которое расходуется на обработку таких блоков, используется константная память, которая для каждого блока хранит либо 1, либо 0 — в зависимости от того, имеется ли хотя бы один внутренний узел для блока. Использование константной памяти значительно уменьшает задержку, и после применения данной оптимизации время исполнения составило 800 мкс.

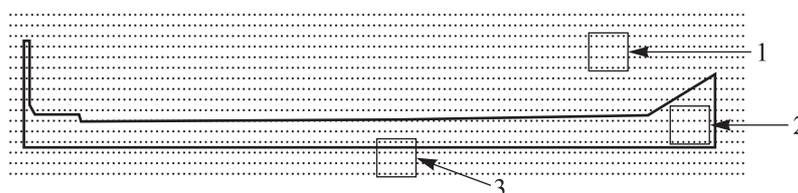


Рис. 5. Схематичное изображение блоков при выполнении CUDA-ядра для рассматриваемой области: 1 — все узлы блока вне области, 2 — все узлы блока внутри области, 3 — часть узлов блока внутри, а часть снаружи

4.4. Результаты оптимизаций

Произведенные оптимизации уменьшили время исполнения одного шага интегрирования с 4000 мкс до 840 мкс на видеокарте NVIDIA GTX 1050TI. На видеокарте NVIDIA GTX 1080 один шаг интегрирования составил 250 мкс, а достигнутая производительность — 2.250 терафлопс для начальной конфигурации и до 3 терафлопс в течение работы двигателя.

Описанные оптимизации могут быть обобщены на произвольные численные методики, использующие понятия фиктивных узлов, а также неявное задание вычислительной области на декартовой сетке.

5. Результаты и обсуждение

Дальнейшие расчеты приводились при следующих значениях параметров: $\nu = 0.41$, $m_t = 9.6446 \cdot 10^{-2}$ кг/(м² · с · Па ^{ν}), $H_0 = 5.31$ МДж/кг, $R = 336.59$ Дж/(кг · К), $\rho_p = 1700$ кг/м³, $k = 1.23$, $p^* = p_0 = 101325$ Па, $\rho_0 = 1.3$ кг/м³, $F_{cr} = 1.89 \cdot 10^{-3}$ м², $S_b = 0.236$ м². Для данных значений параметров масштабные величины равны: $p_m = 16.84$ МПа, $u_m = 996.45$ м/с, $\rho_m = 16.96$ кг/м³. Вычислительная сетка для всех приведенных результатов расчетов имеет одинаковые значения шагов по пространству вдоль двух координатных осей: $h^* = h_x = h_y$.

Для проверки аппроксимационной сходимости проанализируем изменения зависимостей тяги, площади горячей поверхности, усредненной скорости газа на выходном сечении и максимального давления от времени при измельчении шага по пространству h^* . Полученные результаты представлены на рис. 6. Шаг Δt , с которым интегрировалось уравнение подвижной поверхности, во всех случаях был постоянным и равен 2.5. Результаты на графиках приведены с шагом

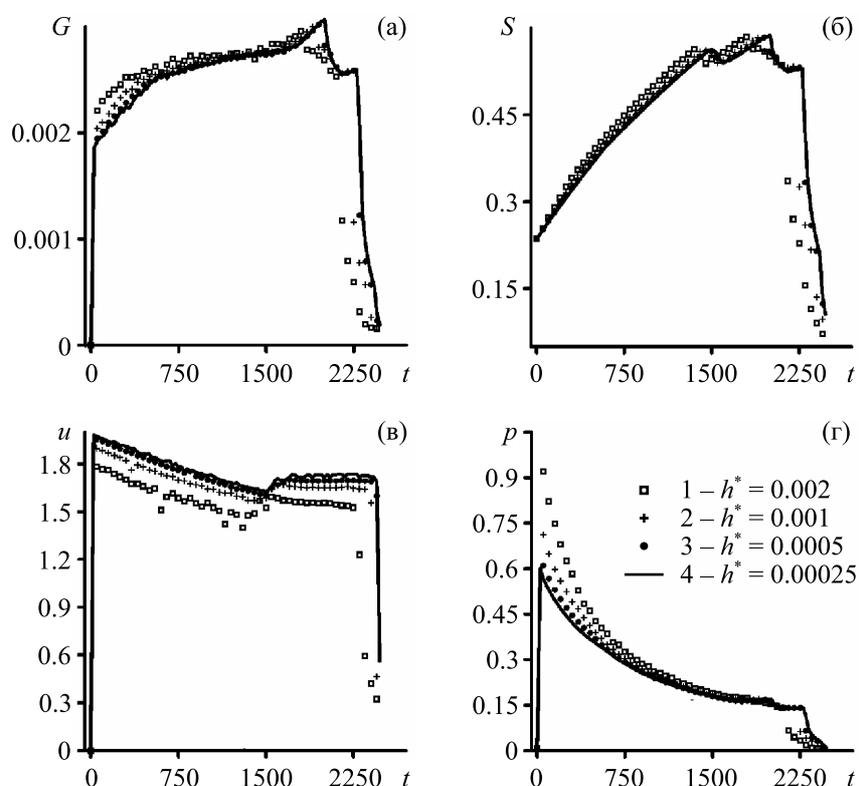


Рис. 6. Влияние шага по пространству h^* на зависимости (а) тяги, (б) площади горячей поверхности, (в) усредненной скорости на выходном сечении, (г) максимального давления от времени

по времени $\Delta t_{res} = 50$. Теоретические оценки выхода РДТТ на квазистационарный режим дают время $t_{qst} \approx 15$. На представленных графиках выход на квазистационарный режим отвечает второй точкой, соответствующей времени $t = 50$, что не противоречит теоретической оценке. Из приведенных результатов видно, что изменения между графиками для $h^* = 0.0005$ и $h^* = 0.00025$ незначительны для всех четырех приведенных зависимостей. Дальнейшие расчеты производились для шага $h^* = 0.0005$, что соответствует вычислительной сетке с размерностью (2800, 390) узлов. Расхождение результатов для более крупных шагов можно объяснить тем, что численный алгоритм расчета не обладает свойством консервативности ввиду особенностей вычисления значений в фиктивных узлах. Время полного расчета для бесоплового РДТТ с вычислительной сеткой (2800, 390) узлов составляет 2 часа для графического ускорителя NVIDIA GTX 1080.

Из представленных зависимостей видно, что, несмотря на монотонное падение максимального давления в камере сгорания с течением времени, тяга ракетного двигателя растет в первые три четверти времени работы РДТТ. Спад давления обусловлен постоянным увеличением критического сечения ввиду прогара топлива. Увеличение критического сечения повышает массовый расход, что в совокупности с увеличением площади горячей поверхности обеспечивает рост тяги двигателя.

Как видно из графиков, приведенных на рис. 6, время полной работы двигателя составляет приблизительно $t \approx 2400$. На рис. 7 представлено изменение с течением времени горячей поверхности твердого топлива бесоплового РДТТ с шагом по времени $\Delta t = 300$. Видно, что скорость горения существенно меняется вдоль оси канала. Небольшим изменениям положения горячей поверхности рядом с выходным сечением соответствуют значительные толщины прогара твердого топлива рядом с торцом двигателя. Расстояния между линиями уровня поверхности горения уменьшаются с течением времени, что согласуется с уменьшением максимального давления в камере сгорания.

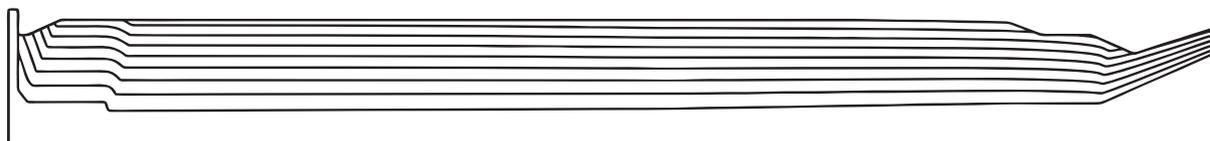


Рис. 7. Изменение во времени горячей поверхности

На рис. 8 представлено распределение давления, температуры и числа Маха в начальный, промежуточный и заключительный моменты времени. Из представленных результатов видно, что с течением времени градиент давления уменьшается. Для $t = 100$ абсолютная разница давлений возле торцевой поверхности и критического сечения $p_{end} - p_{crit} \approx 0.35$, а их отношение $p_{end}/p_{crit} \approx 3$; для $t = 1100$ $p_{end} - p_{crit} \approx 0.12$ и $p_{end}/p_{crit} \approx 2$; а для $t = 2100$ $p_{end} - p_{crit} \approx 0.08$ и $p_{end}/p_{crit} \approx 2$ соответственно. Как видно, отношение давлений даже для заключительной конфигурации остается достаточно большим. Для дозвуковой области течения распределение давления носит одномерный характер во все моменты времени.

Из рис. 8, б видно, что в начальный момент времени при $t = 100$ имеется непрогретый участок между торцевой стенкой и забронированной поверхностью топлива. Также имеется достаточно большой градиент температуры в сверхзвуковой части двигателя. В промежуточный и заключительный моменты времени распределение температуры в дозвуковой части РДТТ носит почти равномерный характер.

Из данных, представленных на рис. 8, в, можно сделать вывод, что, во-первых, в окрестности поверхности топлива имеется слой с небольшими скоростями движения газа даже в сверхзвуковой части потока. Во-вторых, распределение чисел Маха носит сложный неоднородный

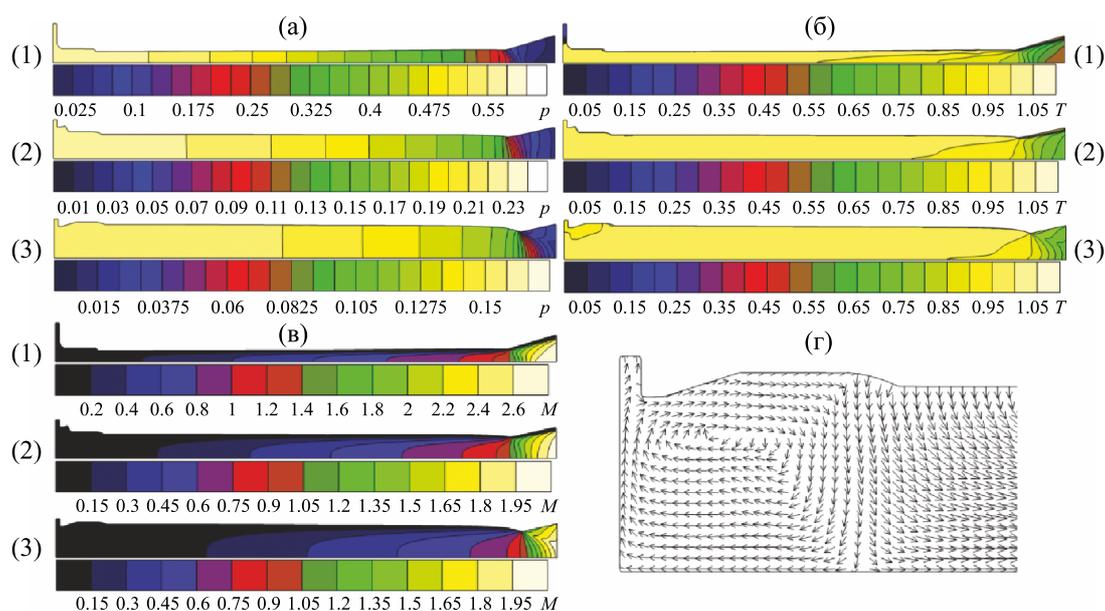


Рис. 8. Распределение (а) давления, (б) температуры, (в) числа Маха в моменты времени (1) $t = 100$, (2) $t = 1100$, (3) $t = 2100$ и распределение (г) вектора скорости в торцевой области РДТТ в момент времени $t = 2100$

характер на протяжении всего времени работы РДТТ. В-третьих, из рис. 8, г видно, что в заключительные моменты времени образуется застойная зона возле торцевой части ракетного двигателя.

В целом из полученных результатов можно сделать вывод, что распределение давления и температуры хорошо подчиняется одномерному приближению в дозвуковой части потока, однако распределение всех параметров в сверхзвуковой зоне имеет выраженный двумерный характер. Числа Маха в сечении сверхзвуковой части изменяются от нуля рядом с поверхностью твердого топлива до значений больше единицы ближе к оси симметрии. Ясно, что при одномерном осреднении в сверхзвуковой части терялось бы много информации о свойствах потока, и это могло бы давать существенную ошибку при расчетах. Также в заключительные моменты времени возле торцевой поверхности двигателя имеется застойная зона с вихревым течением, что в общем случае проблематично достоверно описать с помощью квазиодномерного приближения.

Чтобы определить влияние учета многомерности течения, сравним полученные результаты с расчетами, использующими квазиодномерный подход. Система уравнений, описывающая течение продуктов сгорания в проточных трактах РДТТ, с начальными и граничными условиями в квазиодномерном приближении подробно описана в работах [Ерохин, 1991; Соркин, 1983]. Реализация данного подхода при таком же шаге по пространству приблизительно в 30 раз быстрее по сравнению с двумерным подходом при реализации на GPU с использованием вышеописанных оптимизаций.

На рис. 9 приведены зависимости тяги и максимального давления от времени для квазиодномерного и двумерного подходов. В данном случае шаг интегрирования подвижной поверхности для квазиодномерного подхода также задавался равным 2.5. За счет меньших значений давления для квазиодномерного приближения расчетное время работы двигателя приблизительно на 7% больше по сравнению с двумерным приближением. В общем случае относительная погрешность как для максимального давления, так и для тяги составила приблизительно 20% в метрике L_2 .

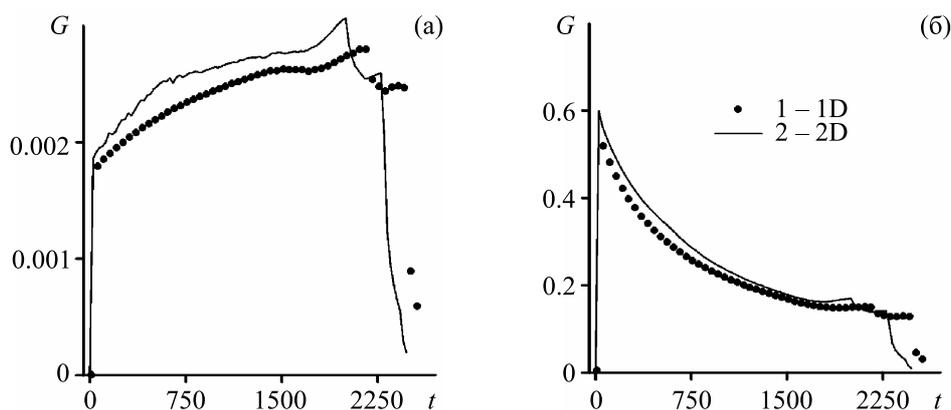


Рис. 9. Сравнение зависимостей (а) тяги и (б) максимального давления от времени для (1) квазиодномерного и (2) двумерного подходов

6. Заключение

В данной работе рассматривалась сопряженная задача определения положения горячей поверхности твердого топлива совместно с определением параметров течения продуктов сгорания в РДТТ на всем участке его работы. Для данной задачи был разработан численный алгоритм, который учитывает как сложную геометрию заряда, так и многомерность газодинамического течения.

Было описано распараллеливание данного алгоритма на графических ускорителях с использованием технологии CUDA. В дальнейшем имеющаяся параллельная реализация была оптимизирована с учетом как особенностей архитектуры графических ускорителей, так и специфики рассматриваемого численного алгоритма. Итоговая производительность составила 3 терафлопса для видеокарты NVIDIA GTX 1080.

В качестве примера была решена задача для бесоплового ракетного двигателя, обладающего осевой симметрией. Было приведено изменение со временем горячей поверхности для данного двигателя, из чего видно, что скорость горения существенно изменяется вдоль оси канала. Также представлены распределения основных параметров течения в начальный, промежуточный и заключительный моменты времени. Показано, что значения температуры слабо меняются, а распределение давления носит одномерный характер в дозвуковой части течения. В сверхзвуковой части распределения всех параметров носят выраженный двумерный характер. В заключительные моменты времени рядом с торцевой поверхностью РДТТ происходит образование застойной зоны.

В общем случае учет многомерности газодинамического течения позволяет более детально, по сравнению с нульмерными и квазиодномерными моделями, описать картину течения в камере сгорания бесоплового ракетного двигателя. Это показывают результаты сравнения с квазиодномерной математической моделью, где относительная разница в расчетах достигает порядка 20%. Несмотря на то что использование квазиодномерного подхода требует на порядок меньше вычислительных ресурсов, распараллеливание разработанного алгоритма с помощью CUDA позволяет получать времена исполнения программы, пригодные для начальной стадии проектирования, когда различные конфигурации РДТТ должны быть рассмотрены и исследованы.

Преимущество данного подхода по сравнению с классическим многомерным подходом, когда применяется подвижная неструктурированная вычислительная сетка, заключается в простоте параллелизации ввиду использования декартовой сетки. Также данный подход достаточно просто обобщить при переходе к РДТТ, имеющим заряды трехмерной формы.

Список литературы (References)

- Алиев А. В., Амарантов Г. Н., Ахмадеев В. Ф.* Внутренняя баллистика РДТТ / под ред. А. М. Липанова и Ю. М. Милехина. — М.: Машиностроение, 2007. — 502 с.
Aliev A. V., Amarantov G. N., Akhmadeev V. F. Vnutrennyaya ballistika RDTT [Internal ballistics of SRM] / pod red. A. M. Lipanova i Yu. M. Milekhina. — Moscow: Mashinostroenie, 2007. — 502 p. (in Russian).
- Волков К. Н., Емельянов В. Н., Смирнов П. Г., Тетерина И. В., Карпенко А. Г.* Реализация метода конечных объемов и расчет течений вязкого сжимаемого газа на графических процессорах // Вычислительные методы и программирование. — 2013. — № 14. — С. 183–194.
Volkov K. N., Emel'yanov V. N., Smirnov P. G., Teterina I. V., Karpenko A. G. Realizatsiya metoda konechnykh ob'emov i raschet techenii vyazkogo szhimaемого gaza na graficheskikh protsessorakh [Implementation of finite volume method and computation of viscous compressible gas flows on graphical processor units] // Numerical Methods and Programming. — 2013. — No. 14. — P. 183–194 (in Russian).
- Глазунов А. А., Еремин И. В., Жильцов К. Н. и др.* Численное исследование определения величин пульсаций давления и собственных акустических частот в камерах сгорания с наполнителем сложной формы // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. — 2017. — № 53. — С. 59–72.
Glazunov A. A., Eremin I. V., Zhil'tsov K. N. et al. Chislennoe issledovanie opredeleniya velichin pul'satsii davleniya i sobstvennykh akusticheskikh chastot v kamerakh sgoraniya s napolnitelem slozhnoi formy [Numerical investigation of the pressure pulsation magnitude and natural aeroacoustic frequencies in the combustion chambers with a charge of a complex shape] // Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics. — 2017. — No. 53. — P. 59–72 (in Russian).
- Ерохин Б. Т.* Теория внутрикамерных процессов и проектирование РДТТ. — М.: Машиностроение, 1991. — 560 с.
Erokhin B. T. Teoriya vnutrikamernykh protsessov i proektirovanie RDTT [Theory of intrachamber processes and design of SRM]. — Moscow: Mashinostroenie, 1991. — 560 p. (in Russian).
- Кирюшкин А. Е., Миньков Л. Л.* Численное решение задачи внутренней баллистики РДТТ на всем участке работы для зарядов сложной формы // Актуальные проблемы ракетно-космической техники: сборник материалов конференции. — 2017. — Т. 2. — С. 55–64.
Kiryushkin A. E., Min'kov L. L. Chislennoe reshenie zadachi vnutrennei ballistiki RDTT na vsem uchastke raboty dlya zaryadov slozhnoi formy [Numerical solution of SRM internal ballistics problem during main firing phase for filler with complex shapes] // Aktual'nye problemy raketno-kosmicheskoi tekhniki: sbornik materialov konferentsii. — 2017. — Vol. 2. — P. 55–64 (in Russian).
- Меньшов И. С., Корнев М. А.* Метод свободной границы для численного решения уравнений газовой динамики в областях с изменяющейся геометрией // Математическое моделирование. — 2014. — Т. 26, № 5. — С. 99–112.
Men'shov I. S., Kornev M. A. Metod svobodnoi granitsy dlya chislennoego resheniya uravnenii gazovoi dinamiki v oblastyakh s izmenyayushcheisya geometriei [Method of free boundary for numerical solution of gas-dynamics equations in time-varying domains] // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2014. — Vol. 26, No. 5. — P. 99–112 (in Russian).
- Меньшов И. С., Павлухин П. В.* Эффективный параллельный метод сквозного счета задач аэродинамики на несвязных декартовых сетках // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2016. — Т. 56, № 9. — С. 1677–1691.
Men'shov I. S., Pavlukhin P. V. Effektivnyi parallel'nyi metod skvoznogo scheta zadach aerodinamiki na nesvyaznykh dekartovykh setkakh [Effective parallel shock-capturing method for aerodynamics problems on unconnected Cartesian grids] // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2016. — Vol. 56, No. 9. — P. 1677–1691 (in Russian).
- Милехин Ю. М., Ключников А. Н., Попов В. С.* Сопряженная задача моделирования внутрибаллистических характеристик бесопловых РДТТ // Физика горения и взрыва. — 2013. — Т. 49, № 5. — С. 77–85.
Milekhin Yu. M., Klyuchnikov A. N., Popov V. S. Sopryazhennaya zadacha modelirovaniya vnutriballisticheskikh kharakteristik bessoplovykh RDTT [Coupled problem of simulation internal ballistics characteristics for nozzleless SRM] // Fizika goreniya i vzryva. — 2013. — Vol. 49, No. 5. — P. 77–85 (in Russian).
- Соркин Р. Е.* Теория внутрикамерных процессов в ракетных системах на твердом топливе. Внутренняя баллистика. — М.: Наука, 1983. — 288 с.
Sorkin R. E. Teoriya vnutrikamernykh protsessov v raketnykh sistemakh na tverdom toplive. Vnutrennyaya ballistika [Theory of intrachamber processes in solid rocket systems]. — Moscow: Nauka, 1983. — 288 p. (in Russian).

- Сухинин С. В., Ахмадеев В. Ф.* Гидродинамические источники колебаний в камерах сгорания // Физика горения и взрыва. — 1993. — Т. 29, № 6. — С. 38–46.
Sukhinin S. V., Akhmadeev V. F. Hidrodinamicheskie istochniki kolebanii v kamerakh sgoraniya [Hydrodynamic oscillation sources in combustion chambers] // Fizika goreniya i vzryva. — 1993. — Vol. 29, No. 6. — P. 38–46 (in Russian).
- Cavallini E.* Modeling and Numerical Simulation of Solid Rocket Motors Internal Ballistics // PhD thesis. — 2009. — 203 p. URL: <https://core.ac.uk/download/pdf/74323997.pdf> (accessed: 03.07.2020).
- Cheng J., Grossman M., McKercher T.* Professional CUDA C Programming. — Wiley, 2014. — 528 p.
- Ding S., Shu C.-W., Zhang M.* On the conservation of finite difference WENO schemes in non-rectangular domains using the inverse Lax–Wendroff boundary treatments // J. Computational Physics. — 2020. — Vol. 415. — P. 1–40.
- Gottlieb S., Shu C.-W.* Total Variation Diminishing Runge-Kutta Schemes // Mathematics of Computation. — 1998. — Vol. 67. — P. 73–85.
- Harten A., Engquist B., Osher S., Chakravarthy S. R.* Uniformly high-order accurate non-oscillatory schemes // J. Computational Physics. — 1987. — Vol. 71, No. 2. — P. 231–303.
- He X., Wang Z., Liu T.* Solving Two-Dimensional Euler Equations on GPU // Procedia Engineering. — 2013. — Vol. 61. — P. 57–62.
- Kestener P., Chateau F., Teysier R.* Accelerating Euler Equations Numerical Solver on Graphics Processing Units // Conference: Algorithms and Architectures for Parallel Processing. — 2010. — P. 281–288.
- Ki W., Ko T., Kim S., Yoon W.* 3D grain burnback analysis using the partial interface tracking method // Aerospace Science and Technology. — 2017. — Vol. 6. — P. 58–67.
- Kiryushkin A. E., Minkov L. L.* Solution of internal ballistic problem for SRM with grain of complex shape during main firing phase // Journal of Physics: Conference series. — 2017. — Vol. 894, No. 1. — P. 1–7.
- Kostyushin K. V., Eremin I. V., Kagenov A. M. et al.* Method of gas flows calculation in solid propellant rocket engines taking into account the combustion of solid fuel charge // Journal of Physics: Conference series. — 2019. — Vol. 597. — P. 1–6.
- Lorente A. P.* Study of Grain Burnback and Performance of Solid Rocket Motors // PhD Thesis. — 2013. — 137 p. — URL: https://upcommons.upc.edu/bitstream/handle/2099.1/17700/Memoria_Arnau_Pons_Lorente.pdf (accessed: 03.07.2020).
- Oh S.-H., Lee H. J., Roh T.-S.* Development of a hybrid method in a 3-D numerical burn-back analysis for solid propellant grains // Aerospace Science and Technology. — 2020. — Vol. 106. — P. 1–12.
- Osher S., Fedkiw R.* Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces. — Springer, 2003. — 273 p.
- Shu C.-W.* Total-variation-diminishing time discretizations // SIAM J. Sci. Stat. Comput. — 1988. — Vol. 9. — P. 1073–1084.
- Sullwald W.* Grain regression analysis // Master's thesis. — 2014. — 182 p. — URL: https://scholar.sun.ac.za/bitstream/handle/10019.1/86526/sullwald_grain_2014.pdf (accessed: 03.07.2020).
- Tan S., Shu C.-W.* Inverse Lax-Wendroff Procedure for Numerical Boundary Conditions of Conservation Laws // Journal of Computational Physics. — 2010. — Vol. 229, No. 26. — P. 8144–8166.
- Terzic J., Zecevic B., Serdarevic-Kadic S., Catovic A.* Numerical simulation of internal ballistics parameters of solid propellant rocket motors // Conference: New Trends in Research of Energetic Materials. — 2012. — Vol. 2. — P. 881–892.

Thomas J.W. Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods // Springer. — 1995. — Vol. 22. — 437 p.

Thrust GPU-accelerated library — <http://thrust.github.io/>

Tshokotsha M.H. Internal Ballistic Modelling of Solid Rocket Motors Using Level Set Methods for Simulating Grain Burnback // Master's thesis. — 2016. — 125 p. — URL: <https://pdfs.semanticscholar.org/d0c7/5902ebacf32fc3c60e57158a9e040b9154f8.pdf> (accessed: 03.07.2020).

