

УДК: 519.6:531.33

Многомерный узловой метод характеристик для гиперболических систем

В. С. Суров

Южно-Уральский государственный университет (Национальный исследовательский университет),
Россия, 454080, г. Челябинск, проспект Ленина, д. 76

E-mail: surovvictor@gmail.com

Получено 16.12.2019, после доработки — 27.01.2021.

Принято к публикации 02.02.2021.

Предложен многомерный узловой метод характеристик, предназначенный для интегрирования гиперболических систем, базирующийся на расщеплении исходной системы уравнений на ряд одномерных подсистем, для расчета которых использован одномерный узловой метод характеристик. Приведены расчетные формулы, детально описана методика вычислений применительно к односкоростной модели гетерогенной среды при наличии сил гравитации. Представленный метод применим и к другим гиперболическим системам уравнений. С помощью этого явного, неконсервативного, первого порядка точности метода рассчитан ряд тестовых задач и показано, что в рамках предлагаемого подхода за счет привлечения дополнительных точек в шаблон схемы возможно проведение вычислений с числами Куранта, превышающими единицу. Так, в расчете обтекания трехмерной ступеньки потоком гетерогенной смеси число Куранта равнялось 1.2. В случае применения метода Годунова при решении этой же задачи максимальное число Куранта, при котором возможен устойчивый счет, имеет значение 0.13×10^{-2} . Еще одна особенность многомерного метода характеристик связана со слабой зависимостью временного шага от размерности задачи, что существенно расширяет возможности этого подхода. С использованием этого метода рассчитан ряд задач, которые ранее считались «тяжелыми» для таких численных методов, как методы Годунова, Куранта–Изаксона–Рис, что связано с тем, что в нем наиболее полно использованы преимущества характеристического представления интегрируемой системы уравнений.

Ключевые слова: гиперболическая модель среды, гиперболические системы, многомерный узловой метод характеристик

UDC: 519.6:531.33

Multidimensional nodal method of characteristics for hyperbolic systems

V. S. Surov

South Ural State University (National Research University),
76 Lenin prospect, Chelyabinsk, 454080, Russia

E-mail: surovvictor@gmail.com

Received 16.12.2019, after completion – 27.01.2021.

Accepted for publication 02.02.2021.

Disclosed is a multidimensional nodal method of characteristics, designed to integrate hyperbolic systems, based on splitting the initial system of equations into a number of one-dimensional subsystems, for which a one-dimensional nodal method of characteristics is used. Calculation formulas are given, the calculation method is described in detail in relation to a single-speed model of a heterogeneous medium in the presence of gravity forces. The presented method is applicable to other hyperbolic systems of equations. Using this explicit, non-conservative, first-order accuracy of the method, a number of test tasks are calculated and it is shown that in the framework of the proposed approach, by attracting additional points in the circuit template, it is possible to carry out calculations with Courant numbers exceeding one. So, in the calculation of the flow of the three-dimensional step by the flow of a heterogeneous mixture, the Courant number was 1.2. If Godunov's method is used to solve the same problem, the maximum number of Courant, at which a stable account is possible, is 0.13×10^{-2} . Another feature of the multidimensional method of characteristics is the weak dependence of the time step on the dimension of the problem, which significantly expands the possibilities of this approach. Using this method, a number of problems were calculated that were previously considered "heavy" for the numerical methods of Godunov, Courant–Isaacson–Rees, which is due to the fact that it most fully uses the advantages of the characteristic representation of the system of equations.

Keywords: hyperbolic model of the medium, hyperbolic systems, multidimensional node characteristic method

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2021, vol. 13, no. 1, pp. 19–32 (Russian).

1. Введение

Метод характеристик (МХ) широко используется в вычислительной практике при численном решении задач из различных предметных областей, таких как газодинамика [Marcum, Hoffman, 1985; Parpia et al., 1988], электромагнетизм [Sánchez-Alegría et al., 2019], динамика популяций [Pilon, Viskanta, 2003] и др., которые описываются гиперболическими системами уравнений. Суть МХ состоит в переходе от дифференциальных уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям, которые записываются вдоль характеристических направлений [Русанов, 1963]. В литературе известны различные варианты МХ, используемые при численном интегрировании гиперболических систем уравнений для случая, когда число независимых переменных равно двум. Это классический одномерный МХ, основанный на процедуре Массо [Березин, Жидков, 1962], одномерный сеточно-характеристический метод (ОСХМ) [Магомедов, Холодов, 1969], одномерный узловый метод характеристик (ОУМХ) [Суоров, 2010]. В ОУМХ, в отличие от методики расчета из работы [Гидаспов, Северина, 2015], ударные скачки и контактные разрывы рассчитывались «сквозным» образом и в вычислениях специально не выделялись. Если же число независимых переменных в системе уравнений больше двух, то использование МХ существенно усложняется. Общий алгоритм МХ для этого случая описан в монографии [Sauer, 1966], а его практическое использование приведено, например, в работе [Sauerwein, 1967]. Заметим, что этот подход ввиду сложности реализации не получил широкого распространения. Другие схемы многомерного МХ приведены в работе [Магомедов, 1966], а также в монографии [Магомедов, Холодов, 1988]. В настоящей работе, в отличие от ранее используемых схем, представлен иной вариант многомерного МХ, основанный на расщеплении исходной системы уравнений по пространственным направлениям на ряд одномерных подсистем с их последующим интегрированием с помощью ОУМХ. В предлагаемом алгоритме вычислений, в отличие от известного метода дробных шагов [Яненко, 1967], дробные временные шаги не используются. Примененный способ расщепления по направлениям аналогичен подходу, описанному в работах [Nakamura et al., 2001; Иванов, Хохлов, 2018]. Отметим также, что при использовании МУМХ общее количество арифметических операций больше, чем в случае применения конечно-разностных или конечно-объемных методик, однако время счета задачи за счет большего временного шага зачастую оказывается существенно меньше. Кроме того, программная реализация МУМХ гораздо проще, чем у ряда конечно-объемных методик, поскольку отсутствует необходимость построения сеток, накрывающих расчетную область, с последующим решением задач Римана на гранях смежных ячеек, как, например, в методе Годунова [Суоров, 2016], что особенно актуально для трехмерных задач. Применение многомерного узлового метода характеристик (МУМХ) проиллюстрируем на примере модели односкоростной бинарной смеси идеального газа со второй несжимаемой фракцией, предназначенной для описания, например, запыленного газа или вспененной жидкости [Суоров, 2002]. Уравнения этой модели смеси имеют вид

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} &= 0, & \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (p + \rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial \rho uv}{\partial y} + \frac{\partial \rho uw}{\partial z} &= \rho g_x, \\
 \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho uv}{\partial x} + \frac{\partial (p + \rho v^2)}{\partial y} + \frac{\partial \rho vw}{\partial z} &= \rho g_y, \\
 \frac{\partial \rho w}{\partial t} + \frac{\partial \rho wu}{\partial x} + \frac{\partial \rho wv}{\partial y} + \frac{\partial (p + \rho w^2)}{\partial z} &= \rho g_z, \\
 \frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial (p + \rho e)u}{\partial x} + \frac{\partial (p + \rho e)v}{\partial y} + \frac{\partial (p + \rho e)w}{\partial z} &= \rho g_x u + \rho g_y v + \rho g_z w, \\
 \frac{\partial \alpha_s}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_s u}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_s v}{\partial y} + \frac{\partial \alpha_s w}{\partial z} &= 0,
 \end{aligned} \tag{1}$$

где p — давление; u, v, w и g_x, g_y, g_z — компоненты векторов скорости и плотности массовых сил в направлении осей Ox, Oy и Oz ; $\rho = (1 - \alpha_s)\rho_g^0 + \alpha_s\rho_s^0$ — плотность смеси; ρ_i^0 — истинная плотность i -й фракции ($i = g, s$); α_s — объемная доля дисперсной (несжимаемой) фракции; $e = \varepsilon + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$ — удельная полная энергия смеси; $\varepsilon = \frac{1}{\rho} \left[\frac{(1 - \alpha_s)p}{\gamma - 1} + \alpha_s\rho_s^0\varepsilon_s \right]$ — удельная внутренняя энергия смеси ($\varepsilon_s = \text{const}$, т. е. полагаем, что температура жидкой фракции в процессе движения смеси не меняется); γ — показатель адиабаты газовой составляющей.

2. Алгоритм МУМХ

Опишем подробнее процедуру МУМХ. После ряда преобразований система (1) приводится к квазилинейному виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \rho \frac{\partial p}{\partial x} &= g_x, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \rho \frac{\partial p}{\partial y} &= g_y, \quad \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \rho \frac{\partial p}{\partial z} = g_z, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} + \rho c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= 0, \\ \frac{\partial \alpha_s}{\partial t} + u \frac{\partial \alpha_s}{\partial x} + v \frac{\partial \alpha_s}{\partial y} + w \frac{\partial \alpha_s}{\partial z} + \alpha_s \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho(1 - \alpha_s)}}$ — скорость звука в смеси. Рассмотрим малый временной интервал, а именно шаг интегрирования по времени для системы (2). Изменения параметров, которые они претерпевают за этот малый промежуток времени, можно найти, суммируя локальные изменения, которые происходят по отдельным координатным направлениям. Иными словами, для нахождения приближенного решения системы (2) за указанный промежуток времени сначала решается подсистема

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \frac{\partial p}{\partial x} = g_x, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} &= g_y, \quad \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} = g_z, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial \alpha_s}{\partial t} + u \frac{\partial \alpha_s}{\partial x} + \alpha_s \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

получающаяся из (2), в которой оставлены только слагаемые, изменяющие параметры течения в направлении оси Ox . После интегрирования (3), базирываясь на найденном распределении определяющих переменных, решаем следующую подсистему:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g_x, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= g_y, \quad \frac{\partial w}{\partial t} + v \frac{\partial w}{\partial y} = g_z, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial y} + \rho c^2 \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial \alpha_s}{\partial t} + v \frac{\partial \alpha_s}{\partial y} + \alpha_s \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

в которой учитываются изменения только вдоль координатного направления Oy . И наконец, для подсчета изменений вдоль Oz необходимо проинтегрировать подсистему

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, & \frac{\partial u}{\partial t} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= g_x, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= g_y, & \frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= g_z, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + w \frac{\partial p}{\partial z} + \rho c^2 \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, & \frac{\partial \alpha_s}{\partial t} + w \frac{\partial \alpha_s}{\partial z} + \alpha_s \frac{\partial w}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Характеристическое уравнение подсистемы (3) имеет только действительные корни: $\lambda_1 = u - c$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = u$, $\lambda_6 = u + c$. Соотношения совместности вдоль характеристических направлений $dx/dt = u + c$ могут быть получены из уравнения

$$\begin{vmatrix} \lambda - u & -\rho & 0 & 0 & 0 & -u \frac{d\rho}{dt} - \rho \frac{du}{dt} \\ 0 & \lambda - u & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & g_x - u \frac{du}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} \\ 0 & 0 & \lambda - u & 0 & 0 & g_y - u \frac{dv}{dt} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - u & 0 & g_z - u \frac{dw}{dt} \\ 0 & -\rho c^2 & 0 & 0 & \lambda - u & -u \frac{dp}{dt} - \rho c^2 \frac{du}{dt} \\ 0 & -\alpha_s & 0 & 0 & 0 & -u \frac{d\alpha_s}{dt} - \alpha_s \frac{du}{dt} \end{vmatrix} = 0.$$

Вычисляя определитель, получим соотношения

$$\rho c du \pm dp = \frac{\rho c g_x}{u \pm c} dt, \quad (6)$$

справедливые на характеристических направлениях $\lambda = u \pm c$. Вдоль траекторной характеристики $\lambda = u$ выполняются равенства

$$dp = c^2 d\rho, \quad dv = g_y dt, \quad dw = g_z dt, \quad \rho d\alpha_s = \alpha_s dp, \quad (7)$$

которые непосредственно следуют из подсистемы (3). Аналогичные соотношения имеют место и для подсистем (4) и (5).

На основании вышеизложенного при переходе с t^n временного шага на $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ процесс вычислений разбивается на серию из нескольких промежуточных тактов, на каждом из которых узлы расчетной области сначала перебираются вдоль оси Ox и в них по процедуре ОУМХ определяются значения параметров смеси $(\bar{p}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{\rho}, \bar{\alpha}_s)$, затем с использованием величин первого промежуточного такта перебором узлов расчетной области вдоль оси Oy рассчитываются следующие промежуточные значения $(\hat{p}, \hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{\rho}, \hat{\alpha}_s)$ и, наконец, определяются значения $(p, u, v, w, \rho, \alpha_s)^{n+1}$ путем применения процедуры ОУМХ в направлении оси Oz .

3. Одномерный алгоритм УМХ

Опишем процедуру ОУМХ, например, для первого промежуточного такта. На остальных тактах вычисления проводятся аналогично. Для решения поставленной задачи достаточно определить значения искомых величин в узле (x_k, t^{n+1}) по их известным значениям в узлах, находящихся на n -м временном слое. Используется следующий итерационный процесс.

Предполагается, что на «нулевой» итерации ($\sigma = 0$) искомые переменные в точке (x_k, t^{n+1}) совпадают с их значениями в точке (x_k, t^n) . В этом случае характеристические направления $dx/dt = u$, $dx/dt = u \pm c$ аппроксимируются выражениями

$$x_k - x_C^{(\sigma)} = u^{(\sigma)} \Delta t, \quad x_k - x_L^{(\sigma)} = (u^{(\sigma)} + c^{(\sigma)}) \Delta t, \quad x_k - x_R^{(\sigma)} = (u^{(\sigma)} - c^{(\sigma)}) \Delta t,$$

где $\Delta t = t^{n+1} - t^n$. Точки пересечения полученных характеристик с прямой $t = t^n$ определяются соотношениями (рис. 1)

$$x_L^{(\sigma)} = x_k - (u^{(\sigma)} + c^{(\sigma)}) \Delta t, \quad x_C^{(\sigma)} = x_k - u^{(\sigma)} \Delta t, \quad x_R^{(\sigma)} = x_k - (u^{(\sigma)} - c^{(\sigma)}) \Delta t. \quad (8)$$

Параметры $(\tilde{p}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{\rho}, \tilde{\alpha}_s)^{(0)}$ в найденных точках $(x_L, x_C, x_R)^{(0)}$ находятся линейной интерполяцией по данным из двух ближайших к ним узлов по их известным значениям в узловых точках (x_{k-1}, x_k, x_{k+1}) , если $x_L, x_R \in [x_{k-1}, x_{k+1}]$. Если же точки x_L, x_C, x_R располагаются вне этого отрезка, то значения параметров в них находятся интерполяцией по данным из ближайших к ним узлов. Отметим, что благодаря этому и возникает возможность проведения расчетов при числах Куранта, превышающих единицу, как в известных схемах Бима – Уорминга или Фромма.

Перепишем соотношения (6)–(7) в конечноразностном виде:

$$\begin{aligned} (\rho c)_L^{(\sigma)} (\tilde{u}^{(\sigma+1)}(x_k, t^{n+1}) - u^{(\sigma)}(x_L, t^n)) + \tilde{p}^{(\sigma+1)}(x_k, t^{n+1}) - p^{(\sigma)}(x_L, t^n) &= \left(\frac{\rho c}{u + c} \right)_L^{(\sigma)} g_x \Delta t, \\ \tilde{p}^{(\sigma+1)}(x_k, t^{n+1}) - p^{(\sigma)}(x_L, t^n) &= (c^2)_C^{(\sigma)} (\tilde{\rho}^{(\sigma+1)}(x_k, t^{n+1}) - \rho^{(\sigma)}(x_C, t^n)), \\ \tilde{v}^{(\sigma+1)}(x_k, t^{n+1}) &= v^{(\sigma)}(x_C, t^n) + g_y \Delta t, \quad \tilde{w}^{(\sigma+1)}(x_k, t^{n+1}) = w^{(\sigma)}(x_C, t^n) + g_z \Delta t, \\ \tilde{\alpha}_s^{(\sigma+1)}(x_k, t^{n+1}) - \alpha_s^{(\sigma)}(x_k, t^n) &= \left(\frac{\alpha_s}{\rho} \right)_C^{(\sigma)} (\tilde{\rho}^{(\sigma+1)}(x_k, t^{n+1}) - \rho^{(\sigma)}(x_C, t^n)), \\ (\rho c)_R^{(\sigma)} (\tilde{u}^{(\sigma+1)}(x_k, t^{n+1}) - u^{(\sigma)}(x_R, t^n)) - \tilde{p}^{(\sigma+1)}(x_k, t^{n+1}) - p^{(\sigma)}(x_R, t^n) &= \left(\frac{\rho c}{u - c} \right)_R^{(\sigma)} g_x \Delta t. \end{aligned} \quad (9)$$

Решая систему (9) при $\sigma = 0$ относительно переменных $(\tilde{p}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{\rho}, \tilde{\alpha}_s)^{(1)}$, найдем уточненные значения искомых функций в точке (x_k, t^{n+1}) . Затем по этим данным из выражений (8)

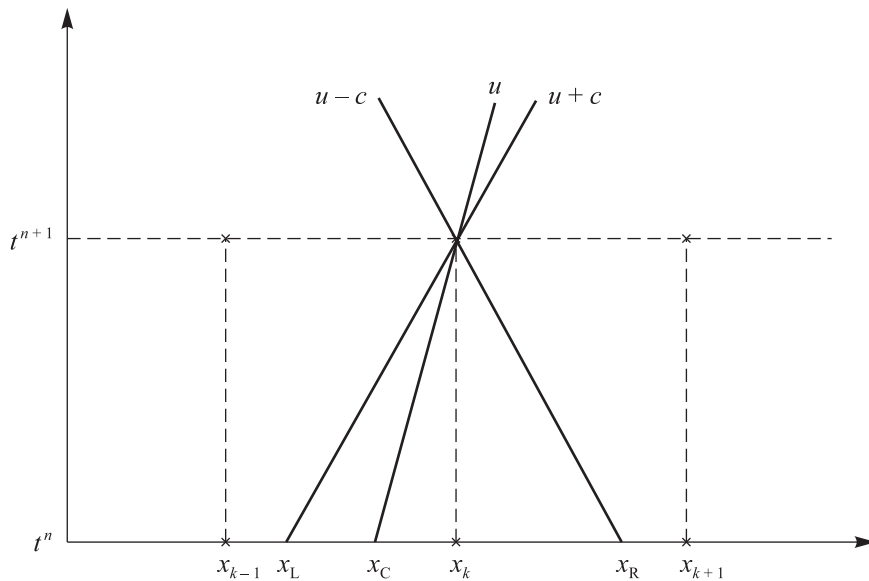


Рис. 1. Расчетная схема для УМХ

вычисляются новые координаты $(x_L, x_C, x_R)^{(1)}$, которые в свою очередь используются для определения $(\bar{p}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{\rho}, \bar{\alpha}_s)^{(2)}$ из (9), где необходимо положить $\sigma = 1$. Описанный итерационный процесс продолжается вплоть до сходимости (при невязке 10^{-7} требуется, как правило, 5–7 итераций).

При решении рассмотренных в работе задач использовались два типа граничных условий: «непротекания» на вертикальных или горизонтальных поверхностях (криволинейные границы не рассматривались), а также «мягкие», моделирующие свободное втекание–вытекание среды из расчетной области. Первые конструируются достаточно просто: в направлении, ортогональном к границе, применяется общий итерационный алгоритм, в расчетных формулах которого обнуляется нормальная к границе компонента скорости. Например, для случая вертикальной твердой стенки, поскольку на ней компонента скорости $u_k = 0$, соотношения (8) приводятся к виду

$$\begin{aligned} \bar{p}^{(\sigma+1)}(x_k, t^{n+1}) - p^{(\sigma)}(x_L, t^n) - (\rho u c)_L^{(\sigma)} &= \left(\frac{\rho c}{u + c} \right)_L^{(\sigma)} g_x \Delta t, \\ \bar{p}^{(\sigma+1)}(x_k, t^{n+1}) - p^{(\sigma)}(x_L, t^n) &= (c^2)_C^{(\sigma)} (\bar{\rho}^{(\sigma+1)}(x_k, t^{n+1}) - \rho^{(\sigma)}(x_C, t^n)), \\ \bar{v}^{(\sigma+1)}(x_k, t^{n+1}) &= v^{(\sigma)}(x_C, t^n) + g_y \Delta t, \quad \bar{w}^{(\sigma+1)}(x_k, t^{n+1}) = w^{(\sigma)}(x_C, t^n) + g_z \Delta t, \\ \bar{\alpha}_s^{(\sigma+1)}(x_k, t^{n+1}) - \alpha_s^{(\sigma)}(x_k, t^n) &= \left(\frac{\alpha_s}{\rho} \right)_C^{(\sigma)} (\bar{\rho}^{(\sigma+1)}(x_k, t^{n+1}) - \rho^{(\sigma)}(x_C, t^n)). \end{aligned}$$

Аналогично вычисляются значения параметров смеси и на других непроницаемых стенках. Второй тип граничных условий базируется на широко используемом в вычислительной практике способе, основанном на экстраполяции.

4. Результаты численного моделирования

С использованием описанного алгоритма МУМХ решена одномерная задача Римана (с помощью многомерного кода) в газожидкостной смеси с $\rho_s^0 = 1000 \text{ кг/м}^3$, параметры которой до распада следующие: слева от диафрагмы ($x < 25$) $p_{0L} = 0.5 \text{ МПа}$, $u_{0L} = 0$, $\alpha_{s0L} = 0.5$, $\theta_{0L} = 320 \text{ К}$; справа от нее ($x > 25$) $p_{0R} = 0.1 \text{ МПа}$, $u_{0R} = 0$, $\alpha_{s0R} = 0.2$, $\theta_{0R} = 300 \text{ К}$. В момент времени $t = 0$ диафрагма мгновенно удаляется, при этом реализуется режим течения с ударной волной, движущейся вправо, и волной разрежения, перемещающейся влево.

На рис. 2 приведены распределения $p(x)/p_0$, $u(x)$, $\rho(x)$, $\alpha_s(x)$, полученные к моменту времени $t = 0,5 \text{ с}$ на сетке из 1000 узловых точек с использованием МУМХ. На этом же графике показаны соответствующие зависимости, рассчитанные с помощью численного метода Куранта – Иаксона – Рис (КИР) [Куликовский и др., 2012], выполненные на такой же сетке и с тем же временным шагом:

$$\frac{\mathbf{U}_i^{n+1} - \mathbf{U}_i^n}{\Delta t} + A_i^n \frac{\mathbf{U}_{i+1/2}^n - \mathbf{U}_{i-1/2}^n}{\Delta x} = 0,$$

где

$$\mathbf{U}_{m+1/2}^n = \frac{1}{2} (\mathbf{U}_m^n + \mathbf{U}_{m+1}^n) + \frac{1}{2} (\Omega^{-1} [\text{sign}(\Lambda)] \Omega)^n (\mathbf{U}_m^n - \mathbf{U}_{m+1}^n), \quad m = i, i - 1.$$

Здесь

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ p \\ \alpha_s \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 \\ 0 & u & \frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & \rho c^2 & u & 0 \\ 0 & \alpha_s - 1 & 0 & u \end{pmatrix}.$$

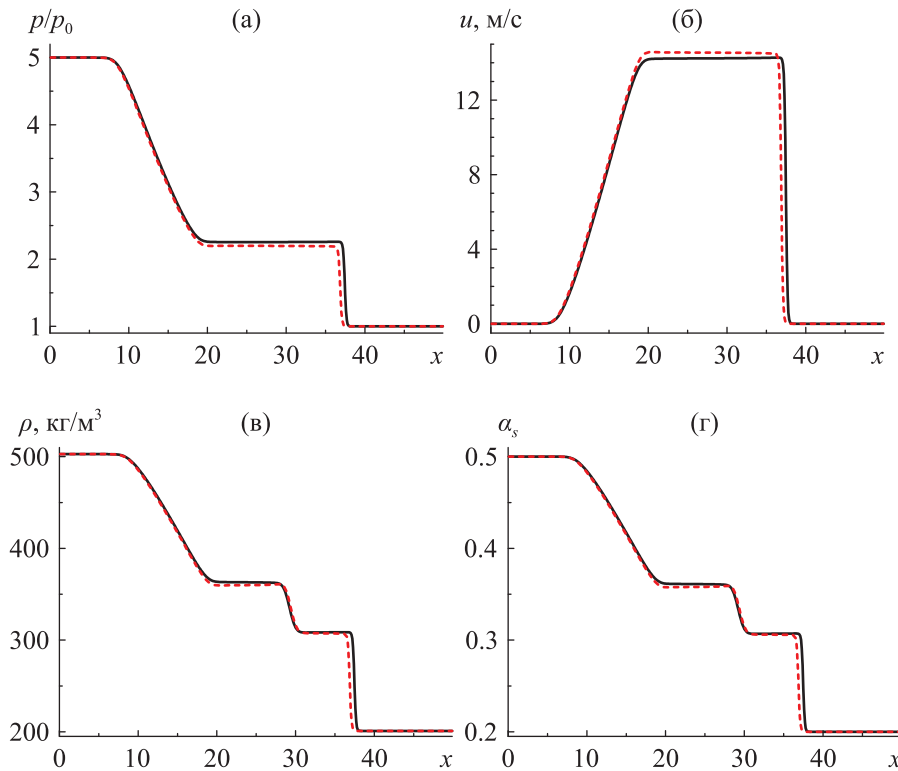


Рис. 2. Зависимости параметров смеси к моменту времени $t = 0.5$ с, полученные МУМХ (сплошные кривые) и методом КИР (штриховые)

Матрицы Ω , Λ , Ω^{-1} определяются в соответствии с выражениями

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\rho c & 1 & 0 \\ -c^2 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\rho} & 0 & 0 & \frac{1}{1-\alpha_s} \\ 0 & \rho c & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} u-c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u+c \end{pmatrix},$$

$$\Omega^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2c^2} & -\frac{1}{c^2} & 0 & \frac{1}{2c^2} \\ -\frac{1}{2\rho c} & 0 & 0 & \frac{1}{2\rho c} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{\alpha_s-1}{2\rho c^2} & \frac{1-\alpha_s}{\rho c^2} & 1-\alpha_s & \frac{\alpha_s-1}{2\rho c^2} \end{pmatrix}.$$

Отметим, что при использовании МУМХ при некоторой потере точности в вычислениях временной шаг может на порядок превышать допустимый в методе КИР, который, как известно, не может превышать значения, определяемого критерием Куранта ($Co < 1$). Этот факт ранее отмечался в работе [Surov, 2014].

В качестве иллюстрации расчета двумерного течения в рамках многожидкостной гидродинамики [Суоров, 2013] рассмотрено взаимодействие плоской воздушной ударной волны (УВ), распространяющейся по невозмущенному воздуху ($\gamma = 1.4$, $p_0 = 0.1$ МПа, $\theta_0 = 293$ К, $\alpha_s = 10^{-8}$), с неподвижным приповерхностным слоем запыленного газа ($\alpha_s = 6 \times 10^{-3}$, $\rho_s^0 = 1000$ кг/м³), начальное положение которого приведено на рис. 3, а. Давление, скорость и плотность воздуха

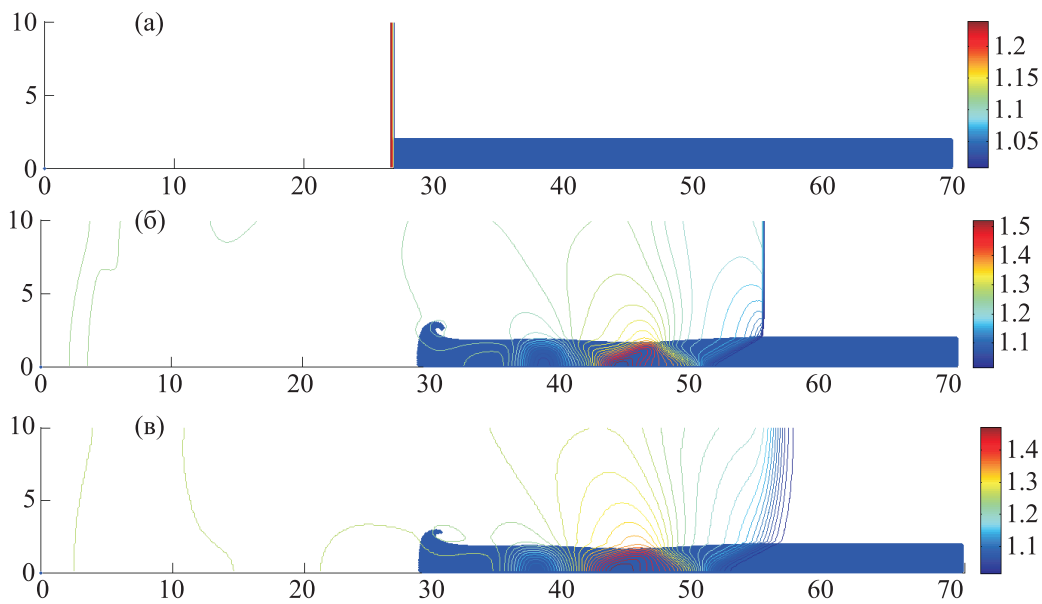


Рис. 3. Распределение давления p/p_0 при взаимодействии воздушной УВ с приповерхностным газожидкостным слоем к моментам времени $t = 0$ (а) и 80 мс, рассчитанные с использованием МУМХ (б) и методом Годунова (в)

за фронтом воздушной УВ рассчитывались из соотношений

$$p_{sh} = \frac{p_0}{\gamma + 1} [1 + \gamma(2M^2 - 1)], \quad u_{sh} = \frac{2c_0}{\gamma + 1} \left(M - \frac{1}{M} \right), \quad \rho_{gsh}^0 = \frac{\rho_{g0}^0(\gamma + 1)}{\gamma - 1 + \frac{2}{M^2}},$$

где c_0 и $M = D/c_0$ — скорость звука в невозмущенном газе и число Маха (D — скорость перемещения фронта УВ) соответственно. Гравитационные силы не учитывались, т. е. полагалось, что $g_x = g_y = 0$. Для визуализации газожидкостного слоя использовался метод маркеров [Surov, 2001], для чего в область, занятую дисперсной средой, помещались невесомые маркеры, перемещающиеся с локальной скоростью смеси, которые в процессе вычислений не участвуют, а используются лишь для целей визуализации деформации дисперсного слоя.

На рис. 3, б представлена форма деформированного слоя, а также изобары для УВ с числом Маха 1.1, полученные к моменту времени $t = 80$ мс с использованием описанного выше алгоритма МУМХ. Параметры составляющих смесь фракций те же, что и в предыдущем примере. Вычисления проводились на сетке из 700×100 узлов. Шаг по времени полагался неизменным во все время расчета и равнялся $\Delta t = 2.77 \times 10^{-4}$ с, что соответствует числу Куранта $Co = 0.99$, рассчитанному по параметрам невозмущенного газа за фронтом ударного скачка. Для сравнения на рис. 3, в приведены результаты вычислений этой же задачи на той же сетке к тому же моменту времени, но выполненные с использованием метода Годунова [Суров, 2016], при этом для устойчивого счета временной шаг оказался более чем на порядок меньше, чем в случае применения МУМХ ($\Delta t = 0.2 \times 10^{-4}$ с, $Co = 0.07$). Общие временные затраты при решении этой задачи для метода Годунова на порядок больше, чем в случае использования МУМХ. Из представленных данных видно, что ударные скачки, рассчитанные методом Годунова, «размываются» существенно сильнее.

Заметим, что при решении газодинамических задач, в отличие от расчетов течений гетерогенных сред, метод Годунова требует меньших временных затрат по сравнению с МУМХ. Для иллюстрации этого были проведены расчеты задачи с наклонным падением воздушной УВ

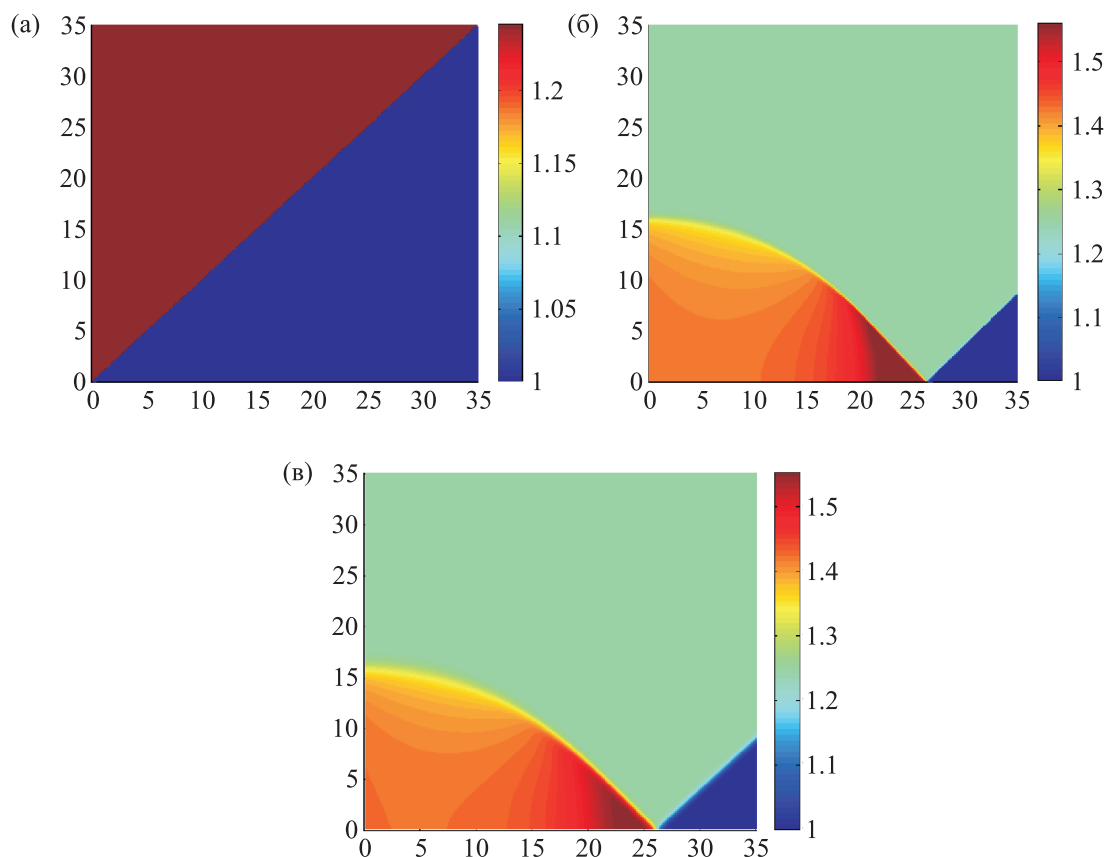


Рис. 4. Распределение давления p/p_0 при наклонном падении воздушной УВ на твердую стенку к моментам времени $t = 0$ (а) и 80 мс, рассчитанное с использованием МУМХ (б) и методом Годунова (в)

с теми же параметрами, что и в предыдущем примере на нижнюю твердую стенку. Координатные оси Ox и Oy имеют горизонтальное и вертикальное направления. Начальное распределение давления (p/p_0) приведено на рис. 4, а. На рис. 4, б и рис. 4, в приведены данные по относительному давлению, полученные к моменту времени $t = 48$ мс с использованием методов МУМХ и Годунова [Суков, 2016] соответственно. Расчеты по обоим методам выполнены на сетке из 500×500 узлов. Оказалось, что общее время счета этой задачи в случае применения МУМХ (с числом Куранта 0.8) в полтора раза больше, чем при использовании метода Годунова (с числом $Co = 0.4$: это максимальное значение, при котором возможен устойчивый счет), несмотря на меньшее — почти в два раза — число временных шагов. Отметим также, что ударные скачки в случае применения МУМХ менее размыты, что видно из сравнения данных на рис. 4, б и рис. 4, в.

В качестве следующего примера рассмотрена задача о растекании столба жидкости ($\alpha_s = 0.98$, $\rho_s^0 = 1000$ кг/м³), находящегося в поле массовых сил ($g_x = 0$, $g_y = -9.8$ м/с²), начальное положение и форма которого на момент времени $t = 0$ приведены на рис. 5, а. Во всем расчетном пространстве на момент времени $t = 0$ полагалось: $p_0 = 0.1$ МПа, $u = v = 0$. Рассматриваемый жидкий столб располагается в воздухе при нормальных условиях, где полагалось $\alpha_s = 10^{-8}$. Расчеты выполнены на равномерной сетке из 500×70 узлов. Временной шаг во все время расчета полагался постоянным и равным $\Delta t = 2.5 \times 10^{-4}$ с.

На рис. 5, б–в приведена форма растекающегося столба на моменты времени 0.25 и 0.75 с. Отметим, что рассчитать эту задачу с использованием метода Годунова не удастся.

Опыт использования МУМХ при решении разнообразных задач показал, что зачастую только с помощью этого метода за приемлемое время возможно рассчитать то или иное течение

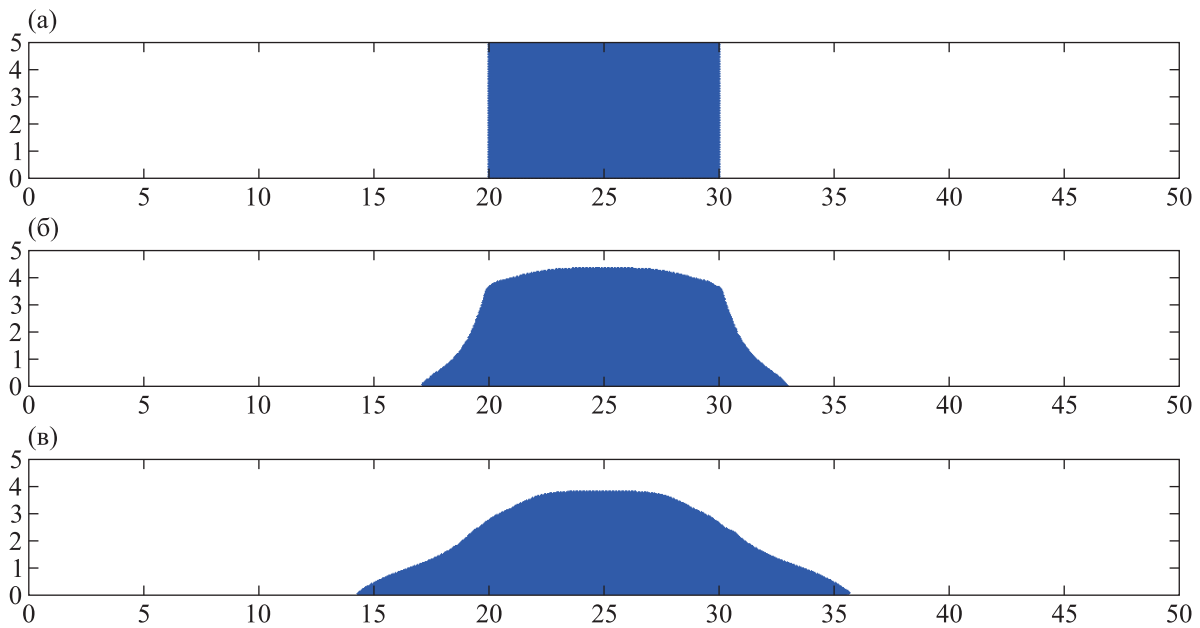


Рис. 5. Форма столба жидкости к моментам времени: 0 с (а); 0.25 с (б); 0.75 с (в)

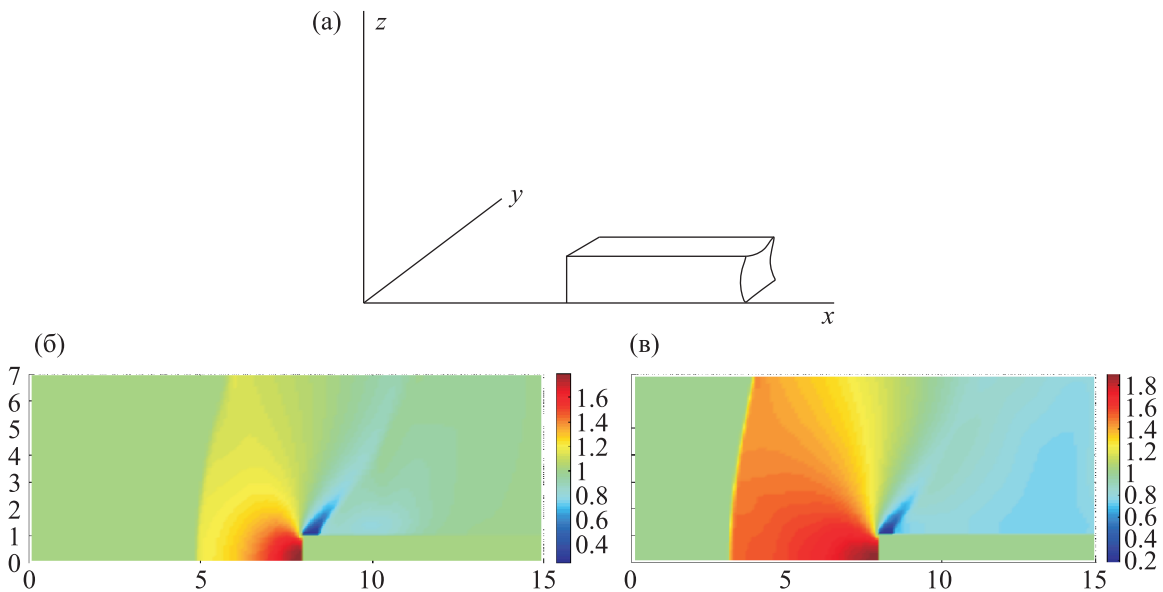


Рис. 6. Обтекание ступеньки дисперсным потоком: геометрия задачи (а); распределение давления p/p_0 в плоскости $z = 0$ к моменту времени $t = 80$ мс, рассчитанное с использованием МУМХ (б); то же, но для двумерной задачи (в)

многофазной среды. В частности, на рис. 6, б приведено распределение относительного давления в плоскости $z = 0$ на момент времени $t = 0.2$ с при обтекании трехмерной ступеньки, представленной на рис. 6, а, потоком дисперсной среды. В начальный момент $t = 0$ упомянутая выше ступенька с размерами $h_y = h_z = 1$ помещалась в однородный поток дисперсной среды ($\alpha_s = 5 \times 10^{-3}$), движущийся вдоль оси Ox со скоростью 150 м/с. Плоскости xOy , xOz — твердые стенки, на остальных граничных плоскостях использовались мягкие граничные условия. В расчете, выполненном на сетке из $150 \times 70 \times 70$ узлов с использованием МУМХ, число Куранта равно 1.2. Для сравнения на рис. 6, в представлено распределение относительного давления

при обтекании ступеньки в двумерном приближении, полученное к тому же моменту времени. Из представленных данных видно, что в трехмерном случае давление на лобовом торце меньше, чем в двумерном расчете, кроме того, отраженный скачок располагается на меньшем расстоянии от ступеньки за счет большего числа уровней свободы по сравнению с двумерным случаем. Отметим также, что расчет этой задачи с использованием метода Годунова требует неприемлемо больших временных затрат, поскольку максимальное число Куранта, при котором возможен устойчивый счет, имеет значение 0.13×10^{-2} .

5. Заключение

Представлен простой, но эффективный многомерный узловый метод характеристик, предназначенный для интегрирования гиперболических систем, базирующийся на расщеплении исходной системы уравнений на ряд одномерных подсистем, для расчета которых использован одномерный узловый метод характеристик, в котором наиболее полно использованы преимущества характеристического представления интегрируемой системы уравнений. Для ряда задач результаты расчетов с помощью МУМХ сопоставлены с данными, полученными с использованием методов КИР и Годунова. Отмечено свойство МУМХ, связанное со слабой зависимостью временного шага от размерности задачи.

Список литературы (References)

- Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. — М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1962.
Berezin I. S., Jidkov N. P. Metodi vychisleniy [Calculation methods]. — Moscow: GIFML, 1962 (in Russian).
- Гидаспов В. Ю., Северина Н. С. Численное моделирование тонкой структуры цилиндрической детонационной волны в водородно-воздушной горючей смеси // Теплофиз. высок. темп. — 2015. — Т. 53, № 4. — С. 556–560.
Gidasov V. Yu., Severina N. S. Numerical simulation of the fine structure of a cylindrical detonation wave in a hydrogen-air combustible mixture // High Temperature. — 2015. — Vol. 53, No. 4. — P. 526–530. (Original Russian paper: Gidasov V. Yu., Severina N. S. Chislennoe modelirovanie tonkoi struktury tsilindricheskoi detonatsionnoi volny v vodorodno-vozdushnoi goryuchej smesi // Teplofiz. vysok. temp. — 2015. — Vol. 53, No. 4. — P. 556–560.)
- Иванов А. М., Хохлов Н. И. Параллельная реализация сеточно-характеристического метода в случае явного выделения контактных границ // Компьютерные исследования и моделирование. — 2018. — Т. 10, № 5. — С. 667–678.
Ivanov A. M., Khokhlov N. I. Parallel'naya realizatsiya setochno-kharakteristicheskogo metoda v sluchae yavnogo vydeleniya kontaknykh granits [Parallel implementation of the grid-characteristic method in the case of explicit contact boundaries] // Computer research and modeling. — 2018. — Vol. 10, No. 5. — P. 667–678. — DOI: 10.20537/2076-7633-2018-10-5-667-678 (in Russian).
- Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семёнов А. Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. — М.: Физматлит, 2012.
Kulikovskiy A. G., Pogorelov N. V., Semenov A. Yu. Matematicheskiye voprosy chislenogo resheniya giperbolicheskikh system uravneniy [Mathematical issues of numerical solution of hyperbolic systems of equations]. — Moscow: Fizmatlit, 2012 (in Russian).
- Магомедов К. М. Метод характеристик для численного решения пространственных течений газа // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. — 1966. — Т. 6, № 2. — С. 313–325.
Magomedov K. M. Metod kharakteristik dlya chislennogo resheniya prostranstvennykh techenii gaza [Method of characteristics for numerical solution of gas spatial currents] // Zhurnal Vychislitelnoi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki. — 1966. — Vol. 6, No. 2. — P. 313–325 (in Russian).
- Магомедов К. М., Холодов А. С. О построении разностных схем для уравнений гиперболического типа на основе характеристических соотношений // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. — 1969. — Т. 9, № 2. — С. 373–386.
Magomedov K. M., Kholodov A. S. The construction of difference schemes for hyperbolic equations based on characteristic relations // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1969. — Vol. 9, No. 2. — P. 158–176. — DOI: 10.1016/0041-5553(69)90099-8 (Original Russian paper: Magomedov K. M., Kholodov A. S. O postroenii

- raznostnykh skhem dlya uravnenii giperbolicheskogo tipa na osnove kharakteristicheskikh sootnoshenii // Zhurnal vychisl. matem. i matem. fiziki. — 1969. — Vol. 9, No. 2. — P. 373–386.)
- Магомедов К. М., Холодов А. С. Сеточно-характеристические численные методы. — М.: Наука, 1988.
- Magomedov K. M., Kholodov A. S. Setochno-kharakteristicheskiye chisleniye metody [Grid-characteristic numerical methods]. — Moscow: Nauka, 1988 (in Russian).
- Русанов В. В. Характеристики общих уравнений газовой динамики // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. — 1963. — Т. 3, № 3. — С. 508–527.
- Rusanov V. V. Kharakteristiki obshchikh uravnenii gazovoi dinamiki [The Characteristics of General Equations of Gas Dynamics] // Zhurnal Vychislitelnoi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki. — 1963. — Vol. 3, No. 3. — P. 508–527 (in Russian).
- Суров В. С. Взаимодействие ударных волн с каплями пузырьковой жидкости // Журнал технической физики. — 2001. — Т. 71, № 6. — С. 17–22.
- Surov V. S. Interaction of shock waves with bubble-liquid drops // Technical Physics. The Russian Journal of Applied Physics. — 2001. — Vol. 46, No. 6. — P. 662–667. — DOI: 10.1134/1.1379630 (Original Russian paper: Surov V. S. Vzaimodeistvie udarnykh voln s kaplyami puzyr'kovoi zhidkosti // Zhurnal tekhnicheskoi fiziki. — 2001. — Vol. 71, No. 6. — P. 17–22.)
- Суров В. С. Математическое моделирование волновых явлений в дисперсных средах: дис. ... докт. физ.-мат. наук. — Челябинск: Челябинский государственный университет, 2002.
- Surov V. S. Matematicheskoe modelirovanie volnovykh javlenii v dispersnykh sredah: dis. ... doc. phys.-mat. nauk [Mathematical modeling of wave phenomena in dispersed media. Thesis]. — Chelyabinsk: Chelyabinsk Gosudarstveniy Universitet, 2002 (in Russian).
- Суров В. С. Об одном варианте метода характеристик для расчета течений односкоростной многокомпонентной смеси // Инженерно-физический журнал. — 2010. — Т. 83, № 2. — С. 345–350.
- Surov V. S. On a variant of the method of characteristics for calculating one-velocity flows of a multicomponent mixture // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. — 2010. — Vol. 83, No. 2. — P. 366–372. — DOI: 10.1007/s10891-010-0353-z (Original Russian paper: Surov V. S. Ob odnom variante metoda kharakteristik dlya rascheta techenii odnoskorostnoi mnogokomponentnoi smesi // Inzhenerno-fizicheskii zhurnal. — 2010. — Vol. 83, No. 2. — P. 345–350.)
- Суров В. С. О локализации контактных поверхностей в многожидкостной гидродинамике // Инженерно-физический журнал. — 2013. — Т. 86, № 5. — С. 1080–1087.
- Surov V. S. On localization of contact surfaces in multifluid hydrodynamics // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. — 2013. — Vol. 86, No. 5. — P. 1151–1159. — DOI: 10.1007/s10891-010-0376-5 (Original Russian paper: Surov V. S. O lokalizatsii kontaktnykh poverkhnostei v mnogozhidkostnoi gidrodinamike // Inzhenerno-fizicheskii zhurnal. — 2013. — Vol. 86, No. 5. — P. 1080–1087.)
- Суров В. С. Метод Годунова для расчета многомерных течений односкоростной многокомпонентной смеси // Инженерно-физический журнал. — 2016. — Т. 89, № 5. — С. 1237–1249.
- Surov V. S. The Godunov method for calculating multidimensional flows of a one-velocity multicomponent mixture // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. — 2016. — Vol. 89, No. 5. — P. 1227–1240. — DOI: 10.1007/s10891-016-1486-5 (Original Russian paper: Surov V. S. Metod Godunova dlya rascheta mnogomernykh techenii odnoskorostnoi mnogokomponentnoi smesi // Inzhenerno-fizicheskii zhurnal. — 2016. — Vol. 89, No. 5. — P. 1237–1249.)
- Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. — Новосибирск: Наука, 1967.
- Yanenko N. N. Metod drobnih shagov resheniya mnogomernykh zadach Matematicheskoi fiziki [Method of fractional steps to solve multidimensional problems of mathematical physics]. — Novosibirsk: Nauka, 1967 (in Russian).
- Marcum D. M., Hoffman J. D. Calculation of Three-Dimensional Flowfields by the Unsteady Method of Characteristics // AIAA Journal. — 1985. — Vol. 23, No. 10. — P. 1497–1505.
- Nakamura T., Tanaka R., Yabec T., Takizawa K. Exactly conservative semi-Lagrangian scheme for multi-dimensional hyperbolic equations with directional splitting technique // Journal of Computational Physics. — 2001. — Vol. 174, No. 1. — P. 171–207.
- Parpia I. H., Kentzer C. P., Williams M. H. Multidimensional time dependent method of characteristics // Computers and Fluids. — 1988. — Vol. 16, No. 1. — P. 105–117.

- Pilon L., Viskanta R.* Modified method of characteristics for solving population balance equations // International Journal for Numerical Methods in Fluids. — 2003. — Vol. 42, No. 11. — P. 1211–1236.
- Sauer R.* Nichtstationäre Probleme der Gasdynamik. — Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag, 1966.
- Sauerwein H.* Numerical calculations of multidimensional and unsteady flows by the method of characteristics // Journal of Computational Physics. — 1967. — Vol. 1. — P. 406–432.
- Sánchez-Alegría A., Moreno P., Loo-Yau J.R. et al.* An alternative model for aerial multiconductor transmission lines excited by external electromagnetic fields based on the method of characteristics // Electrical Engineering. — 2019. — Vol. 101. — P. 719–731.
- Surov V.S.* Calculating the flows of a one-velocity viscous heat-conducting mixture // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. — 2014. — Vol. 87, No. 2. — P. 367–375. — DOI: 10.1007/s10891-014-1021-5