

УДК: 532.545

## Исследование процесса роста амплитуды донных волн в реках и каналах

И. И. Потапов<sup>a</sup>, Ю. Г. Силакова<sup>b</sup>

Вычислительный центр ДВО РАН,  
Россия, 680000, г. Хабаровск, ул. Ким Ю Чена, д. 65

E-mail: <sup>a</sup> potapov2i@gmail.com, <sup>b</sup> krat\_yuliya@mail.ru

*Получено 27.01.2020, после доработки — 31.07.2020.*

*Принято к публикации 07.10.2020.*

Работа является теоретическим исследованием процесса развития донной неустойчивости в реках и каналах. На основе аналитической модели расхода влекомых наносов, учитывающей влияние уклонов донной поверхности, придонного давления и касательного напряжения на движение донного материала и аналитического решения, позволяющего определять придонные касательные и нормальные напряжения, возникающие при обтекании турбулентным потоком периодических длинных донных волн малой крутизны, сформулирована и решена задача определения скорости роста амплитуды для растущих донных волн. Полученное решение задачи позволяет определить характерное время роста донной волны, скорость роста донной волны и ее максимальную амплитуду в зависимости от физических и гранулометрических характеристик донного материала и гидравлических параметров водного потока. На примере развития периодической синусоидальной донной волны малой крутизны выполнена верификация решения, полученного для сформулированной задачи. Полученное аналитическое решение задачи позволяет определить скорость роста амплитуды донной волны от текущего значения ее амплитуды. Сравнение полученного решения с экспериментальными данными показало их хорошее качественное и количественное согласование.

Ключевые слова: донные волны, амплитуда донных волн, устойчивость донной поверхности, расход влекомых наносов

Работа выполнена при поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 18-05-00530 А).

UDC: 532.545

## Investigation of the process of growth of the amplitude of bed waves in rivers and channels

I. I. Potapov<sup>a</sup>, Yu. G. Silakova<sup>b</sup>

Computing Center of Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences,  
65 Kim Yu Chen st., Khabarovsk, 680000, Russia

E-mail: <sup>a</sup> potapov2i@gmail.com, <sup>b</sup> krat\_yuliya@mail.ru

*Received 27.01.2020, after completion — 31.07.2020.*

*Accepted for publication 07.10.2020.*

The work is a theoretical study of the development of bottom instability in rivers and canals. Based on an analytical model of the load of sediment, taking into account the influence of slopes of the bottom surface, bottom pressure and shear stress on the movement of the bottom material and an analytical solution that allows to determine bottom tangential and normal stresses over the periodic bottom, the problem of determining the amplitude growth rate for growing bottom waves is formulated and solved. The obtained solution of the problem allows us to determine the characteristic time of the growth of the bottom wave, the growth rate of the bottom wave and its maximum amplitude, depending on the physical and particle size characteristics of the bottom material and the hydraulic parameters of the water flow. On the example of the development of a periodic sinusoidal bottom wave of low steepness, the verification of the solution obtained for the formulated problem is carried out. The obtained analytical solution to the problem allows us to determine the growth rate of the amplitude of the bottom wave from the current value of its amplitude. Comparison of the obtained solution with experimental data showed their good qualitative and quantitative agreement.

Keywords: bed waves, bed waves amplitude, the bed surface stability, the bed load transport

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2020, vol. 12, no. 6, pp. 1339–1347 (Russian).

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (Grant No. 18-05-00530 A).

## Введение

Изучение процесса развития донной неустойчивости в реках и каналах было предметом интенсивных исследований на протяжении многих десятилетий. Исследования были направлены на выявление фундаментальных русловых механизмов, приводящих к образованию и развитию песчаных донных волн. Так, Дж. Ф. Кеннеди [Kennedy, 1963; Kennedy, 1969] развитие донной неустойчивости связывал с передачей возмущений, возникающих на свободной поверхности потока при некоторых значениях числа Фруда, ко дну.

Engelund F. и Fredsoe J. [Engelund, Fredsoe, 1982] связывали развитие донной неустойчивости с фазовым сдвигом между максимумами средней скорости потока и придонными касательными напряжениями. В работах Гришанина К. В. [Гришанин, 1974], Мельниковой О. Н. [Мельникова, 2006], Михайловой Н. А. [Михайлова, 1966] показано, что развитию донной неустойчивости способствуют имеющиеся в турбулентном потоке пульсации соизмеримые по масштабу с глубиной потока. Экспериментальные работы Бэгнольда, Шуляка Б. А. [Шуляк, 1971], Coleman S. E. [Coleman et al., 2003] показали, что на характер развития донной неустойчивости оказывает влияние диаметр донного материала. В работе [Крат, Потапов, 2015] в рамках линейной теории устойчивости несвязного дна канала получена аналитическая зависимость, определяющая длину донной волны в зависимости от числа Фруда гидродинамического потока и диаметра донных частиц, обобщающая ряд известных эмпирических зависимостей Бэгнольда, Шуляка Б. А. [Шуляк, 1971], Coleman S. E. [Coleman et al., 2003]. Попытки численного моделирования процесса развития донной неустойчивости в реках и каналах предпринимались в работах Tjerry S. [Tjerry, 1995], Sanne L. N. [Sanne, 2003], Paarlberg A. [Paarlberg, 2008], Khosronejad A. [Khosronejad, Sotiropoulos, 2014], Liu Y. [Liu et al., 2019], Zgheib N. [Zgheib, Balachandar, 2019], основное внимание в которых уделялось физическим механизмам, приводящим к развитию донной неустойчивости под действием турбулентных потоков. Обработка данных натурного эксперимента, представленного в работе [Fourriere et al., 2010], позволила получить эмпирическую зависимость, позволяющую определить скорость роста амплитуды донных волн во времени.

Однако, несмотря на достаточное внимание исследователей к данной проблеме, вопрос о развитии донной неустойчивости остается в настоящее время открытым. В значительной мере это связано с тем, что при анализе процесса развития донной неустойчивости многие исследователи в своих работах используют феноменологические модели движения влекомых наносов (см. [Engelund, Fredsoe, 1982; Tjerry, 1995; Sanne, 2003; Paarlberg, 2008; Coleman et al., 2003; Khosronejad, Sotiropoulos, 2014; Liu et al., 2019] и др.). Полученные в таких моделях результаты позволяют лишь качественно описать процесс, приводящий к неустойчивости донной поверхности русел рек и каналов. По этой причине представляет интерес проведение анализа роста амплитуды донных волн с использованием аналитической модели движения влекомых наносов, учитывающей влияние уклонов донной поверхности, придонных касательных и нормальных напряжений, а также физико-механических и гранулометрических параметров на движение донного материала.

В работе [Крат, Потапов, 2018] на основе аналитической модели расхода влекомых наносов [Петров, Потапов, 2014], учитывающей влияние уклонов поверхности дна, придонных касательных и нормальных напряжений на движение влекомых наносов, были проведены численные исследования процесса развития периодических донных волн в реках и каналах. Были выявлены три основных механизма движения донного материала, оказывающих влияние на развитие донной неустойчивости: транзитный, диффузионный и напорный. Значения градиентов транзитного, диффузионного и напорного механизмов определяют направление развития донной неустойчивости. Численные исследования показали, что при развитии неустойчивости донной поверхности градиенты диффузионного расхода являются отрицательными по отношению к положительным градиентам напорного и транзитного расходов. Если над вершиной донной

волны доминирует градиент диффузионного расхода, то происходит сглаживание донной волны, в противном случае происходит рост волны на дне канала.

Данная работа является теоретическим исследованием процесса развития донной неустойчивости в реках и каналах. В работе используются аналитическая модель расхода влекомых наносов, учитывающая влияние уклонов дна, придонного давления и касательного напряжения на движение донного материала [Петров, Потапов, 2014], и аналитическое решение, позволяющее определять придонные нормальные и касательные напряжения, возникающие при обтекании турбулентным потоком периодических длинных донных волн малой крутизны [Петров, Потапов, 2017; Петров, Потапов, 2019]. Полученное аналитическое решение позволяет определить скорость роста амплитуды периодических донных волн в зависимости от гидродинамических параметров потока, а также физико-механических и гранулометрических характеристик донного материала. Для синусоидальных донных волн выполнено сравнение полученного решения с экспериментальными данными [Fourriere et al., 2010], которое показало их хорошее качественное и количественное согласование.

## 1. Математическая постановка задачи

Исследование процесса развития донных волн в реках и каналах связано с определением скорости роста амплитуды донных волн. Рассмотрим математическую постановку задачи движения руслового потока с глубиной  $D$  над периодической донной поверхностью  $\zeta_b = h\sigma$  в криволинейной ортогональной системе координат, где  $h = h(t_b)$  — безразмерная амплитуда донной поверхности  $\zeta_b$ ,  $\sigma(\xi) = \sigma(\xi + 1)$  — периодическая функция, определяющая форму донной волны с единичным периодом. Расчетная область задачи приведена на рис. 1.

Математическая постановка рассматриваемой задачи в безразмерной формулировке включает в себя обобщенные на случай периодических длинных донных волн малой крутизны уравнения Прандтля, позволяющие определять придонное давление  $p$  и касательные напряжения  $\tau$  в безвихревых турбулентных потоках [Петров, Потапов, 2017; Петров, Потапов, 2019; Петров, Потапов, 2020]:

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad (1)$$

$$p(\xi) = h\psi(\xi), \quad \psi(\xi) = \left. \frac{\partial \Psi(\xi, z)}{\partial z} \right|_{z=0}, \quad \tau = \frac{\tau_0}{y(\xi)}, \quad (2)$$

$$y(\xi) = E \int_0^1 \exp(2ax) \exp\left(\frac{6h}{\mu_0}(\psi(a\xi) - \psi(a(x + \xi)))\right) dx. \quad (3)$$

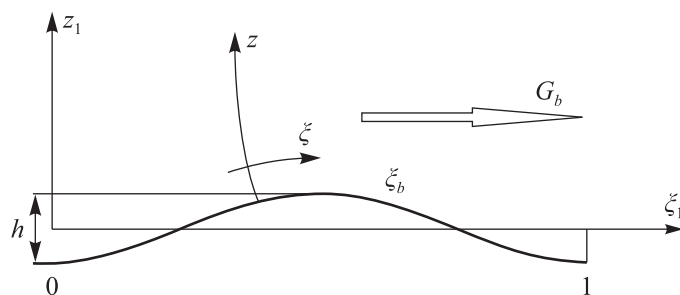


Рис. 1. Схема расчетной области:  $\xi_1, z_1$  — безразмерная декартова система координат;  $\xi, z$  — расчетная криволинейная система координат

Уравнение Экснера [Гришанин, 1974]:

$$S_d \sigma \frac{\partial h}{\partial t_b} + \frac{\partial G_b}{\partial \xi} = 0. \quad (4)$$

Аналитическое уравнение расхода влекомых наносов  $G_b$ , учитывающее влияние уклонов дна  $h \frac{\partial \sigma}{\partial \xi}$ , придонного давления  $p$  и касательного напряжения  $\tau$  на движение донного материала [Петров, Потапов, 2014]:

$$G_b = G_0 \left( \frac{\tau}{\tau_0} \right)^{3/2} \left( A - B \frac{h}{a} \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} - C \frac{FrD}{L} \frac{\partial p}{\partial \xi} \right). \quad (5)$$

Уравнения (1)–(5) замыкаются краевыми условиями

$$z = 0: \quad \Psi(\xi, 0) = \sigma(\xi), \quad h(\xi, 0) = z_0(\xi), \quad (6)$$

$$z = 1: \quad h \frac{\partial \Psi}{\partial z} \rightarrow 0, \quad (7)$$

$$\Psi(\xi, z) = \Psi(\xi + 1, z), \quad (8)$$

$$G_b(\xi, z) = G_b(\xi + 1, z). \quad (9)$$

Здесь  $\Psi$  – безразмерная функция тока,  $\tau_0$  – напряжение на ровном дне,  $L$  – длина донной волны,  $D$  – глубина гидродинамического потока,  $G_b$  – безразмерный расход влекомых наносов.

Связь безразмерных функций в уравнениях (1)–(5) с размерными определена следующим образом:

$$\Psi = \frac{\Psi_H}{H_0}, \quad z = \frac{Z}{H}, \quad h = \frac{H_0}{H}, \quad \xi = \frac{X}{L}, \quad a = \frac{L}{H}, \quad z_0 = \frac{Z_0}{H}, \quad \mu_0 = \frac{1}{\ln(1/z_0)},$$

$$S_d = \frac{1 - \varepsilon}{\sqrt{\rho_b g d^3}} \frac{HL}{T}, \quad \sigma(\xi) = \frac{2\zeta(t, \xi)}{H_0(t)}, \quad Fr = \frac{U^2}{gD}, \quad t_b = \frac{t}{T}, \quad G = G_b \sqrt{\rho_b g d^3},$$

где  $\Psi_H$  – функция тока, описывающая безвихревое поле скорости над периодическим дном,  $H$  – глубина логарифмического слоя,  $H_0$  – высота донной волны,  $Z_0$  – высота шероховатости дна,  $\varepsilon$  – коэффициент пористости песчаного дна,  $g$  – ускорение свободного падения,  $d$  – диаметр частиц потока,  $T$  – время развития амплитуды донной волны,  $U$  – средняя скорость потока,  $t_b$  – безразмерное время.

Коэффициенты уравнений (3), (5) определяются по следующим формулам:

$$E = \frac{2a \exp(-2a)}{1 - \exp(-2a)}, \quad G_0 = \frac{4}{3} \frac{1}{\kappa \operatorname{tg} \varphi} \frac{u_0^3}{(\rho_b g d)^{3/2}},$$

$$A = 1 - \chi, \quad B = \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} \left( \frac{\chi}{2} + (1 - \chi) \frac{1 + s}{s} \right), \quad C = \frac{A}{s \operatorname{tg} \varphi},$$

$$\chi = \sqrt{\frac{\tau_c}{\tau}}, \quad \tau_c = \Theta_c \rho_w \rho_b d g, \quad \tau_0 = \rho_w u_0^2, \quad s = f \rho_b, \quad \rho_b = \frac{\rho_s - \rho_w}{\rho_w},$$

где  $u_0$  – динамическая скорость потока;  $\rho_w, \rho_s$  – плотности воды и донных частиц;  $f$  – концентрация донного материала;  $\tau$  – придонное касательное напряжение;  $\tau_c$  – напряжение, определяющее момент начала движения донных частиц;  $\kappa$  – постоянная Кармана;  $\Theta_c = 0.047$  – критическое число Шильдса [Петров, Потапов, 2017]. Угол внутреннего трения донных частиц  $\varphi$  определяется по зависимости тангенса угла внутреннего трения от диаметра песчаных частиц  $\operatorname{tg} \varphi = 1.15d^{1/7}$  [Петров, Потапов, 2019].

Градиент расхода  $\frac{\partial G_b}{\partial \xi}$  в формуле (4) позволяет однозначно определить мгновенную скорость роста (смыва) донной волны  $\frac{\partial h}{\partial t_b}$  с заданной геометрией  $\sigma(\xi)$ , поэтому используется при дальнейшем анализе решения задачи.

## 2. Решение задачи

Из экспериментальных данных [Fourriere et al., 2010] известно, что на начальном этапе развития донной волны ее длина не изменяется, но при этом происходит рост амплитуды донной волны и ее форма близка к синусоидальной. Поэтому в качестве геометрии периодической донной волны принят один период синусоиды:

$$\sigma(\xi) = \frac{1}{2} \sin(2\pi\xi). \quad (10)$$

Решение сформулированной задачи (1)–(5) задано в виде ряда

$$\Psi(x, z) = \sigma(\xi) \exp\left(-2\pi\frac{z}{a}\right), \quad (11)$$

что позволило получить следующие зависимости:

$$\frac{\partial \sigma(\xi)}{\partial \xi} = \pi \cos(2\pi\xi), \quad \frac{\partial^2 \sigma(\xi)}{\partial \xi^2} = -2\pi^2 \sin(2\pi\xi), \quad (12)$$

$$\psi(\xi) = \frac{\partial \Psi(\xi, 0)}{\partial z} = -\frac{\pi}{a} \sin(2\pi\xi), \quad \frac{\partial \psi(\xi, 0)}{\partial \xi} = -\frac{2\pi^2}{a} \cos(2\pi\xi), \quad (13)$$

$$p = -\frac{h}{a} \pi \sin(2\pi\xi), \quad (14)$$

$$\frac{\partial p(\xi)}{\partial \xi} = -2\frac{h}{a} \pi^2 \cos(2\pi\xi), \quad \frac{\partial^2 p(\xi)}{\partial \xi^2} = 4\frac{h}{a} \pi^3 \sin(2\pi\xi), \quad (15)$$

$$\tau(\xi) = \frac{\tau_0}{y(\xi)}, \quad \frac{\partial \tau(\xi)}{\partial \xi} = -\frac{\tau_0}{y(\xi)^2} \frac{\partial y(\xi)}{\partial \xi}, \quad (16)$$

$$y(\xi) = E \int_0^1 \exp(2ax) \exp\left(\frac{6h\pi}{\mu_0 a} (\sin(2\pi a(x + \xi)) - \sin(2\pi a\xi))\right) dx. \quad (17)$$

Подставляя (12)–(17) в уравнение (4), получим аналитическую зависимость, позволяющую определить скорость роста амплитуды донных волн:

$$\frac{\partial h}{\partial t_b} = -\frac{G_0}{S_d \sigma} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \left( \frac{1}{y(\xi)} \right)^{3/2} \left( A - B \frac{h}{a} \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} - C \frac{FrD}{L} h \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) \right). \quad (18)$$

## 3. Анализ решения

Для полученной зависимости (18) выполнено сравнение с экспериментальными данными, приведенными в работе [Fourriere et al., 2010], при следующих гидродинамических, физико-механических и гранулометрических параметрах:  $L = 0.1$  м,  $D = 0.52$  м,  $H = 0.052$  м,  $Fr = 0.01$ ,  $\rho_w = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_s = 2650$  кг/м<sup>3</sup>,  $g = 9.81$  м/с<sup>2</sup>,  $H_0 = 0.0062$  м,  $d = 0.00032$  м,  $u_0 = 0.0116$  м/с,  $\mu_0 = 0.311$ ,  $\kappa = 0.2$ ,  $\varepsilon = 0.335$ ,  $f = 0.1$ ,  $Z_0 = 5.424d$ .

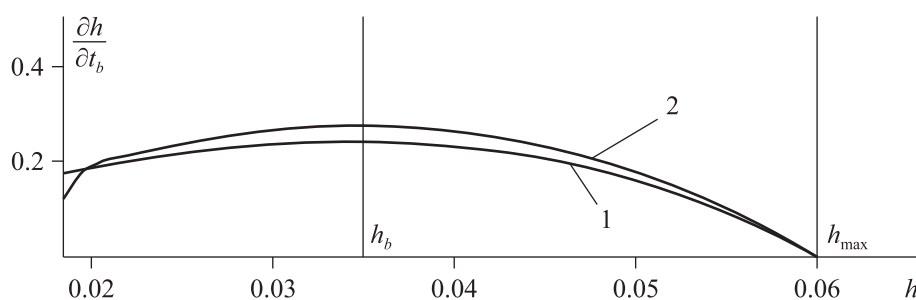


Рис. 2. Зависимость скорости роста безразмерной амплитуды донной волны от величины безразмерной амплитуды донной волны: 1 — экспериментальная зависимость (19), 2 — аналитическая зависимость (18)

На рис. 2 представлены зависимости скорости роста амплитуды донной волны от величины ее безразмерной амплитуды. Кривая 1 определяется зависимостью

$$\frac{\partial h}{\partial t_b} = 2Thn \left( 1 - \left( \frac{h}{h_{\max}} \right)^2 \right), \quad (19)$$

где  $T = 150$  с,  $n = 0.035$  с<sup>-1</sup>,  $h_{\max} = 0.0596$ . Зависимость (19) получена в работе [Fourriere et al., 2010] в результате обработки экспериментальных данных. Кривая 2 построена по полученному решению (18).

Из графика следует, что с ростом амплитуды донной волны  $h$  увеличивается скорость ее роста  $\frac{\partial h}{\partial t_b}$ . Существует значение амплитуды донной волны  $h_b$ , при которой скорость ее роста  $\frac{\partial h}{\partial t_b}$  является максимальной. Если амплитуда донной волны  $h$  превышает  $h_b$ , то скорость ее роста  $\frac{\partial h}{\partial t_b}$  уменьшается. При  $h = h_{\max}$  скорость роста амплитуды донной волны стремится к нулю, и согласно [Fourriere et al., 2010] начинается рост длины донной волны.

Отметим, что полученная зависимость (18) хорошо согласуется с зависимостью (19), полученной в результате обработки экспериментальных данных [Fourriere et al., 2010]. Таким образом, можно утверждать, что предложенная модель развития донных волн качественно и количественно согласуется с экспериментальными данными в диапазонах, когда перекошенностью донных волн можно пренебречь.

## Заключение

1. В работе сформулирована и решена задача определения скорости роста амплитуды для периодических длинных волн малой крутизны. Особенностью задачи является использование аналитической модели расхода влекомого наноса, которая учитывает влияние уклонов донной поверхности, придонных давлений и касательного напряжения на движение донного материала и аналитической модели, позволяющей определить придонные касательные напряжения, возникающие при обтекании турбулентным потоком периодических длинных донных волн малой крутизны.

2. Полученное решение задачи позволяет определить характерное время роста донной волны, скорость роста донной волны и ее максимальную амплитуду в зависимости от физических и гранулометрических характеристик донного материала и гидравлических параметров водного потока. Решение задачи учитывает основные механизмы движения донного материала в придонной области, влияющие на процесс возникновения и развития донной неустойчивости. Решение позволяет проводить анализ значимости вклада данных механизмов на процесс развития донной волны в произвольный момент времени.

3. Получена аналитическая зависимость для скорости роста амплитуды донной волны в зависимости от текущего значения ее амплитуды. Верификация решения, полученного для сформулированной задачи, выполнена на примере развития периодической синусоидальной донной волны малой крутизны. Сравнение полученного решения с экспериментальными данными показало их хорошее качественное и количественное согласование.

4. Полученное решение задачи показывает перспективность использования аналитической модели движения донных наносов при построении более точных моделей русловой устойчивости, в которых движение гидродинамического потока будет рассматриваться в рамках более совершенного описания турбулентный потока.

## Список литературы (References)

- Гришанин К. В. Устойчивость русел рек и каналов. — Л.: Гидрометеиздат, 1974. — 143 с.  
*Grishanin K. V. Ustojchivost' rusel rek i kanalov* [Stability of the river and canal channels]. — Leningrad: Gidrometeoizdat, 1974. — 143 p. (in Russian).
- Крат Ю. Г., Потапов И. И. Устойчивость дна в напорных каналах // Компьютерные исследования и моделирование. — 2015. — Т. 7. — С. 1061–1068.  
*Krat Yu. G., Potapov I. I. Ustojchivost' dna v napornyh kanalakh* [Bottom stability in closed conduits] // Computer Research and Modeling. — 2015. — Vol. 7. — P. 1061–1068 (in Russian).
- Крат Ю. Г., Потапов И. И. Движение влекомых наносов над периодическим дном // Компьютерные исследования и моделирование. — 2018. — Т. 10, № 1. — С. 45–58.  
*Krat Yu. G., Potapov I. I. Dvizhenie vlekomykh nanosov nad periodicheskim dnom* [Movement of sediment over periodic bed] // Computer Research and Modeling. — 2018. — Vol. 10, No. 1. — P. 45–58 (in Russian).
- Мельникова О. Н. Динамика руслового потока: учебное пособие. — М.: МАКС Пресс, 2006. — 139 с.  
*Mel'nikova O. N. Dinamika ruslovogo potoka: uchebnoe posobie* [Dynamics of the channel flow]. — Moskva: MAKS Press, 2006. — 139 p. (in Russian).
- Михайлова Н. А. Перенос твердых частиц турбулентными потоками воды. — Л.: Гидрометеиздат, 1966. — 236 с.  
*Mihajlova N. A. Perenos tverdykh chastic turbulentnymi potokami vody* [The transport of solid particles by turbulent water flows]. — Leningrad: Gidrometeoizdat, 1966. — 236 p. (in Russian).
- Петров А. Г., Потапов И. И. Моделирование обтекания турбулентным потоком периодической донной поверхности // Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана. — 2017. — Т. 53, № 3. — С. 415–421.  
*Petrov A. G., Potapov I. I. Modelirovanie obtokaniya turbulentnym potokom periodicheskoj donnoj poverkhnosti* // Izvestiya Rossiiskoi akademii nauk. Fizika atmosfery i okeana. — 2017. — Vol. 53, No. 3. — P. 415–421 (in Russian).
- Петров А. Г., Потапов И. И. Перенос наносов под действием нормальных и касательных придонных напряжений с учетом уклона дна // Прикладная механика и техническая физика. — 2014. — Т. 55, № 5. — С. 100–105.  
*Petrov A. G., Potapov I. I. Perenos nanosov pod dejstviem normal'nyh i kasatel'nyh pridonnyh naprjazhenij s uchetom uklona dna* [Sediment transport under normal and tangential bottom stresses with the bottom slope taken into account] // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. — 2014. — Vol. 55, No. 5. — P. 100–105 (in Russian).
- Петров А. Г., Потапов И. И. Избранные разделы русловой динамики. — М.: Ленанд, 2019. — 244 с.  
*Petrov A. G., Potapov I. I. Izbrannye razdely ruslovoi dinamiki* [Selected sections of channel dynamics]. — Moscow: Lenand, 2019. — 244 p. (in Russian).
- Петров А. Г., Потапов И. И. О задаче русловой устойчивости Энгелунда–Фредсо // Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана. — 2020. — Т. 56, № 4. — С. 428–432.  
*Petrov A. G., Potapov I. I. O zadache ruslovoj ustojchivosti Engelunda–Fredso* // Izvestiya Rossiiskoi akademii nauk. Fizika atmosfery i okeana. — 2020. — Vol. 56, No. 4. — P. 428–432 (in Russian).
- Шуляк Б. А. Физика волн на поверхности сыпучей среды и жидкости. — М.: Наука, 1971.  
*Shulyak B. A. Fizika voln na poverhnosti sypuchej sredy i zhidkosti* [Dynamics of the channel flow]. — Moscow: Nauka, 1971 (in Russian).



- Coleman S. E., Fedele J. J., Garcia M. H.* Closed-conduit bed-forms initiation and development // Journal of Hydraulic Engineering. — 2003. — Vol. 129, No. 12. — P. 956–965.
- Fourriere A., Claudin Ph., Andreotti B.* Bedforms in a turbulent stream: formation of ripples by primary linear instability and of dunes by nonlinear pattern coarsening // Journal of Fluid Mechanics. — 2010. — Vol. 649. — P. 287–328.
- Kennedy J. F.* The mechanics of dunes and antidunes in erodible bed channels // Fluid Mechanics. — 1963. — Vol. 16, No. 12. — P. 521–544.
- Kennedy J. F.* The formation of sediment ripples, dune and antidunes // Annual review of fluid mechanics. — 1969. — Vol. 1. — P. 147–168.
- Engelund F., Fredsoe J.* Sediment ripples and dunes // Annual review of fluid mechanics. — 1982. — Vol. 4. — P. 13–37.
- Khosronejad A., Sotiropoulos F.* Numerical simulation of sand waves in a turbulent open channel flow // J. Fluid Mech. — 2014. — Vol. 753. — P. 150–216.
- Liu Y., Fang H., Huang L., He G.* Numerical simulation of the production of three-dimensional sediment dunes // Phys. Fluids. — 2019. — Vol. 31. — DOI: 10.1063/1.5108741
- Paarlberg A.* Modelling dune evolution and dynamic roughness in rivers. — Enschede: University of Twente, 2008.
- Sanne L. N.* Modelling of sand dunes in steady and tidal flow. — Ph.D. Thesis. Coastal and river engineering section, Technical university of Copenhagen, Denmark, 2003.
- Tjerry S.* Morphological calculation of dunes in alluvial rivers. — Ph.D. Thesis. Institute of hydrodynamics and hydraulic engineering, Technical university of Denmark, 1995.
- Zgheib N., Balachandar S.* Linear stability analysis of subaqueous bedforms using direct numerical simulations // Theor. Comput. Fluid Dyn. — 2019. — Issue 2. — <https://doi.org/10.1007/s00162-019-00487-x>

