

УДК: 519.6

Приложение гибридного метода крупных частиц к расчету взаимодействия ударной волны со слоем газозвеси

Д. В. Садин

Военно-космическая академия имени А. Ф. Можайского,
Россия, 197198, г. Санкт-Петербург, ул. Ждановская, д. 13

E-mail: sadin@yandex.ru

*Получено 05.07.2020, после доработки — 28.08.2020.
Принято к публикации 18.09.2020.*

Для модельного неоднородного уравнения переноса с источником выполнен анализ устойчивости линейной гибридной схемы (комбинации противопоточной и центральной аппроксимаций). Получены условия устойчивости, зависящие от параметра гибридности, фактора интенсивности источника (произведения интенсивности на шаг по времени) и весового коэффициента линейной комбинации мощности источника на нижнем и верхнем временном слое. В нелинейном случае для уравнений движения неравновесной по скоростям и температурам газозвеси расчетным путем подтвержден линейный анализ устойчивости. Установлено, что предельно допустимое число Куранта гибридного метода крупных частиц второго порядка точности по пространству и времени при неявном учете трения и теплообмена между газом и частицами не зависит от фактора интенсивности межфазных взаимодействий, шага расчетной сетки и времен релаксации фаз (К-устойчивость). В традиционном случае явного способа расчета источниковых членов для значений безразмерного фактора интенсивности больше 10 наблюдается катастрофическое (на несколько порядков) снижение предельно допустимого числа Куранта, при котором расчетный шаг по времени становится неприемлемо малым.

На основе базовых соотношений распада разрыва в равновесной гетерогенной среде получено асимптотически точное автомодельное решение задачи взаимодействия ударной волны со слоем газозвеси, к которому сходится численное решение двухскоростной двухтемпературной динамики газозвеси при уменьшении размеров дисперсных частиц.

Изучены динамика движения скачка уплотнения в газе и его взаимодействия с ограниченным слоем газозвеси для различных размеров дисперсных частиц: 0.1, 2 и 20 мкм. Задача характеризуется двумя распадами разрывов: отраженной и преломленной ударными волнами на левой границе слоя, отраженной волной разрежения и прошедшим скачком уплотнения на правой контактной границе. Обсуждено влияние релаксационных процессов (безразмерных времен релаксации фаз) на характер течения газозвеси. Для мелких частиц времена выравнивания скоростей и температур фаз малы, а зоны релаксации являются подсеточными. Численное решение в характерных точках с относительной точностью $O(10^{-4})$ сходится к автомодельным решениям.

Ключевые слова: гибридный метод крупных частиц, устойчивость, газозвесь, релаксация, жесткость, автомодельное решение

UDC: 519.6

Application of a hybrid large-particle method to the computation of the interaction of a shock wave with a gas suspension layer

D. V. Sadin

Mozhaisky Military Space Academy,
13 Zhdanovskaya st., Saint Petersburg, 197198, Russia

E-mail: sadin@yandex.ru

Received 05.07.2020, after completion — 28.08.2020.

Accepted for publication 18.09.2020.

For a non-homogeneous model transport equation with source terms, the stability analysis of a linear hybrid scheme (a combination of upwind and central approximations) is performed. Stability conditions are obtained that depend on the hybridity parameter, the source intensity factor (the product of intensity per time step), and the weight coefficient of the linear combination of source power on the lower- and upper-time layer. In a nonlinear case for the non-equilibrium by velocities and temperatures equations of gas suspension motion, the linear stability analysis was confirmed by calculation. It is established that the maximum permissible Courant number of the hybrid large-particle method of the second order of accuracy in space and time with an implicit account of friction and heat exchange between gas and particles does not depend on the intensity factor of interface interactions, the grid spacing and the relaxation times of phases (K-stability). In the traditional case of an explicit method for calculating the source terms, when a dimensionless intensity factor greater than 10, there is a catastrophic (by several orders of magnitude) decrease in the maximum permissible Courant number, in which the calculated time step becomes unacceptably small.

On the basic ratios of Riemann's problem in the equilibrium heterogeneous medium, we obtained an asymptotically exact self-similar solution of the problem of interaction of a shock wave with a layer of gas-suspension to which converge the numerical solution of two-velocity two-temperature dynamics of gas-suspension when reducing the size of dispersed particles.

The dynamics of the shock wave in gas and its interaction with a limited gas suspension layer for different sizes of dispersed particles: 0.1, 2, and 20 μm were studied. The problem is characterized by two discontinuities decay: reflected and refracted shock waves at the left boundary of the layer, reflected rarefaction wave, and a past shock wave at the right contact edge. The influence of relaxation processes (dimensionless phase relaxation times) to the flow of a gas suspension is discussed. For small particles, the times of equalization of the velocities and temperatures of the phases are small, and the relaxation zones are sub-grid. The numerical solution at characteristic points converges with relative accuracy $O(10^{-4})$ to self-similar solutions.

Keywords: hybrid large-particle method, stability, gas suspension, relaxation, stiff terms, self-similar solution

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2020, vol. 12, no. 6, pp. 1323–1338 (Russian).

© 2020 Dmitry V. Sadin

This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Unported License.

To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/>
or send a letter to Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

Введение

Течения газа с частицами находят широкое применение в технологиях напыления, при разработке прямоточных камер сгорания с взаимодействием скачков уплотнения с продуктами сгорания, при анализе распространения ударных волн в запыленных угольных шахтах, обосновании проблем безопасности опасных производств с потенциальным импульсным выбросом газозвесей.

Численное моделирование течений двухфазных сред имеет ряд принципиальных особенностей по сравнению с вычислительной гидродинамикой. Одна из проблем связана с неоднородностью законов сохранения с правыми частями, зависящими от решения (межфазного трения и теплообмена). Если времена релаксации фаз много меньше газодинамического масштаба — времени распространения возмущения между узлами или ячейками сетки, то такие задачи относятся к жестким. Для явных алгоритмов расчета источниковых величин выбор шага по времени ограничен характерным временным масштабом для быстрого компонента решения, превышение которого приводит к неустойчивости. Первые работы были посвящены теоретическому обоснованию решения жестких задач для скалярного уравнения переноса с источником [LeVeque, Yee, 1990; Chen et al., 1994; Садин, 1996, 1998a; Chalabi, 1997], а также векторного (двухскоростного) модельного транспортного неоднородного уравнения [Садин, 1998b]. Сформировалось два подхода построения дискретных моделей: с расщеплением на конвективную и релаксационную стадии, явно-неявные схемы без расщепления. Для неравновесных уравнений движения гетерогенных сред в различных математических формулировках предложены дискретные модели [Садин, 1998b; Saurel, Abgrall, 1999; Gascón, Corberán, 2001; Садин, 2002a, 2002b; Xing, Shu, 2006; Saurel et al., 2007; Chalons et al., 2013; Садин, 2016].

Другая важная проблема вычислительной динамики гетерогенных сред заключается в построении тестовых задач, на которых можно количественно подтвердить вычислительные свойства схемы: точность и устойчивость алгоритма. В полной формулировке неравновесных уравнений сохранения многофазных сред точные решения не найдены. Автомодельные решения удается получить для предельных случаев: «выключения» (обнуления) межфазных обменов («замороженная» схема течения) [Saurel, Abgrall, 1999; Karni, Hernández-Dueñas, 2010; Tokareva, Togo, 2010] или при стремлении к нулю времен релаксации фаз (равновесная (односкоростная) схема). Для запыленного газа с малой концентрацией частиц течение газозвеси приводилось к уравнениям газовой динамики [Marble, 1970; Арутюнян, 1979; Вахненко, Паламарчук, 1984; Арутюнян, 1994], что позволило использовать известные автомодельные решения газовой динамики. Для заметной доли частиц в смеси необходимо учитывать массовую или объемную долю дисперсной фазы при одновременном увеличении уравнений на единицу. Задача Римана для произвольной концентрации дисперсной фазы решена для адиабатического [Иванов и др., 1996; Суров, 1997] и изотермического [Суров, 1998] случаев. Эти результаты являются в большей или меньшей степени приближенными, поскольку показатель политропы двухфазной среды — переменный в зависимости от свойств, составляющих смесь газа и частиц и их концентраций. Полные и точные решения задач Римана и Лагранжа с переменным (разрывным) показателем политропы найдены в работе [Садин, 2000], а также обсуждаются в [Садин, 2014, 2016].

В настоящей работе рассматривается известная задача взаимодействия ударной волны с ограниченным слоем газозвеси. Качественные закономерности после взаимодействия падающего скачка уплотнения с границами неоднородности изучены ранее. Возникают два распада разрыва с двумя ударными волнами слева, а также волной разрежения и прошедшим скачком уплотнения справа [Киселев и др., 1994; Кутушев, 2003; Тукмаков, 2020].

Целью работы являются анализ устойчивости линейной гибридной схемы (комбинации противопоточной и центральной аппроксимаций) для модельного неоднородного уравнения переноса с источником, исследование на устойчивость явно-неявного гибридного метода крупных

частиц [Садин, 2019] для полных уравнений сохранения газозвеси. На основе базовых соотношений [Садин, 2000, 2014] ставится задача получения асимптотически точного решения взаимодействия ударной волны со слоем газозвеси и сопоставления с ним численных решений, а также исследования сходимости результатов расчетов при уменьшении времен релаксации фаз.

1. Основные уравнения

Рассмотрим законы сохранения калорически совершенного газа и твердых несжимаемых частиц в рамках взаимопроникающих континуумов [Нигматулин, 1987; Садин, 2016]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \nabla_d \mathbf{G} + \mathbf{B} (\nabla_d \mathbf{F}) &= \mathbf{H}(\mathbf{q}), \\ \mathbf{q} &= [\rho_1, \rho_2, \rho_1 \mathbf{v}_1, \rho_2 \mathbf{v}_2, \rho_2 e_2, \rho_1 E_1 + \rho_2 K_2]^T, \\ \mathbf{G} &= [\rho_1 \mathbf{v}_1, \rho_2 \mathbf{v}_2, \rho_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1, \rho_2 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2, \rho_2 e_2 \mathbf{v}_2, \rho_1 E_1 \mathbf{v}_1 + \rho_2 K_2 \mathbf{v}_2]^T, \\ \mathbf{F} &= [0, 0, p, p, 0, p(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2)]^T, \quad \mathbf{H} = [0, 0, -\mathbf{F}_\mu, \mathbf{F}_\mu, Q_T, -Q_T]^T, \\ \nabla_d &= \text{diag}(\nabla \cdot, \nabla \cdot, \nabla, \nabla, \nabla \cdot, \nabla \cdot), \quad \mathbf{B} = \text{diag}[1, 1, \alpha_1, \alpha_2, 1, 1], \\ \rho_i &= \rho_i^\circ \alpha_i (i = 1, 2), \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad E_1 = e_1 + \mathbf{v}_1^2/2, \quad K_2 = \mathbf{v}_2^2/2. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь и далее индексы 1 и 2 внизу относятся соответственно к параметрам несущей и дисперсной фаз; ∇ — оператор Гамильтона. Через $\alpha_i, \rho_i^\circ, \rho_i, \mathbf{v}_i, E_i, e_i, p$ обозначены объемная доля, истинная и приведенная плотности, вектор скорости, полная и внутренняя энергии единицы массы i -й фазы, давление газа; \mathbf{F}_μ, Q_T — соответственно вязкая составляющая силы межфазного взаимодействия, мощность теплообмена между газом и частицами в единице объема; t — время.

Замыкающими соотношениями системы (1) являются уравнения состояния идеального калорически совершенного газа и несжимаемых твердых частиц: $p = (\gamma_1 - 1)\rho_1^\circ e_1$, $e_1 = c_v T_1$, $e_2 = c_2 T_2$, $\gamma_1, c_v, c_2, \rho_2^\circ \equiv \text{const}$, где T_1, T_2 — температура несущей фазы и частиц; γ_1, c_v — показатель адиабаты и удельная теплоемкость газа при постоянном объеме; c_2 — удельная теплоемкость частиц. Силовое и тепловое межфазное взаимодействие \mathbf{F}_μ, Q_T определяется из критериальных соотношений [Нигматулин, 1987].

2. Гибридный метод крупных частиц

Гибридная схема для модельного уравнения. Рассмотрим задачу Коши для линейного уравнения переноса с источником:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = -bu, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad u(x, 0) = g(x). \quad (2)$$

Аппроксимируем поставленную задачу (2) линейной гибридной схемой вида

$$\begin{aligned} \frac{u_n^{k+1} - u_n^k}{\tau} + (1 - \psi) a \frac{u_n^k - u_{n-1}^k}{h} + \psi a \frac{u_{n+1}^k - u_{n-1}^k}{2h} &= -(1 - \delta) b u_n^k - \delta b u_n^{k+1}, \\ 0 \leq \psi \leq 1, \quad 0 \leq \delta \leq 1. \end{aligned} \quad (3)$$

Исследуем схему (3) на устойчивость методом Неймана, для чего подставим в (3) частное решение $u_n^k = \lambda^k e^{ian}$ (α — вещественное число, $i^2 = -1$). Имеем

$$\begin{aligned} \lambda(\alpha) &= A \cos \alpha + iB \sin \alpha + C, \\ A &= \frac{(1 - \psi)\sigma}{1 + \delta b \tau}, \quad B = -\frac{i\sigma}{1 + \delta b \tau}, \quad C = \frac{1 - (1 - \psi)\sigma - (1 - \delta)b\tau}{1 + \delta b \tau}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\sigma = a\tau/h$ — число Куранта.

Очевидно, что уравнение (4) задает на комплексной плоскости эллипс с полуосями A и B , а также смещенный вдоль вещественной оси на расстояние C .

Условие устойчивости по Нейману зависит от ряда параметров и выполнено, если

$$|\lambda(\alpha, \sigma, \psi, \delta, b\tau)| \leq 1. \tag{5}$$

Вначале рассмотрим случай однородного уравнения $b = 0$. Заметим, что при $\sigma > 0$ и $0 < \psi < 1$ эллипс смещен на величину $1 - \sigma < C < 1$ и касается единичной окружности в точке $(1, 0)$, поскольку $A + C = 1$. Для крайних значений параметра гибридности $\psi = 0$ и $\psi = 1$ имеем соответственно окружность радиусом σ и вертикальный отрезок (рис. 1). Поэтому условие Неймана (5) выполнено, если радиус кривизны эллипса B^2/A в точке касания меньше единицы. Откуда получим условие устойчивости

$$\sigma \leq 1 - \psi.$$

В случае неоднородного уравнения $b > 0$ для того, чтобы эллипс (4) был вписан в единичную окружность (рис. 2) во всем диапазоне изменения параметра гибридности схемы $0 \leq \psi \leq 1$, достаточно одновременного выполнения двух неравенств:

$$\sigma_0 \leq 1 + (\delta - 1/2)b\tau, \tag{6}$$

$$\sigma_1 \leq \sqrt{(2\delta - 1)b^2\tau^2 + 2b\tau}. \tag{7}$$

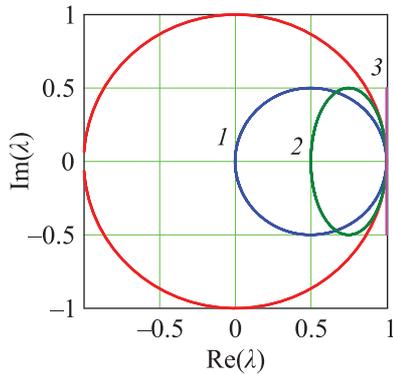


Рис. 1. Области линейной устойчивости гибридной схемы для однородного уравнения ($b\tau = 0$) с числом Куранта $\sigma = 0.5$ при различных параметрах гибридности ψ : 1 – 0, 2 – 0.5, 3 – 1

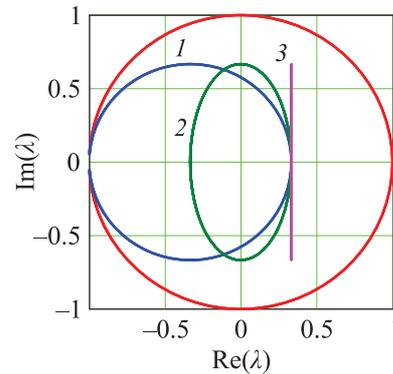


Рис. 2. Области линейной устойчивости гибридной схемы для неоднородного уравнения ($b\tau = 1$) с числом Куранта $\sigma = 1$ при различных параметрах гибридности ψ : 1 – 0, 2 – 0.5, 3 – 1

Условие (6) при $\psi = 0$ соответствует противопоточной схеме и доказано в [Садин, 1996]. А неравенство (7) вытекает из $B^2 + C^2 \leq 1$ при $\psi = 1$ (центрально-разностная схема). Нетрудно видеть, что при произвольном $0 < \psi < 1$ эллипс (4) получается сжатием окружности при $\psi = 0$ в положительном направлении вещественной оси до вырождения в вертикальный отрезок при $\psi = 1$ (рис. 2).

Число Куранта $\sigma_0 = 1 + (\delta - 1/2)b\tau$ из (6) линейно возрастает с увеличением фактора интенсивности источника $b\tau$ при $\delta > 1/2$, убывает при $\delta < 1/2$ и $\sigma_0 = 1$ для $\delta = 1/2$ при любом положительном значении $b\tau$ (рис. 3, прямые 1, 2, 3). Зависимость числа Куранта σ_1 для центрально-разностной схемы (7) от фактора интенсивности источника является нелинейной функцией (рис. 3, кривые 4, 5, 6). Подкоренное выражение представляет собой квадратичную функцию величины $b\tau$ и описывает на плоскости $(b\tau, \sigma)$ параболу. Причем при $\delta < 1/2$ парабола

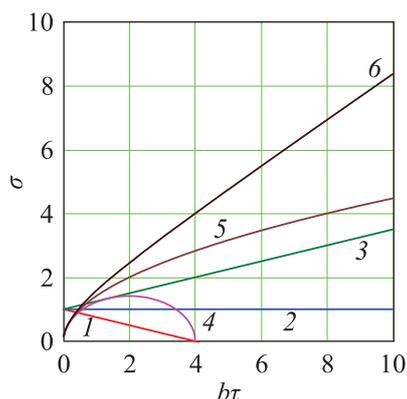


Рис. 3. Зависимость чисел Куранта σ_0 , σ_1 от фактора интенсивности источника bt при различных значениях параметра невязности δ : 1 – 0.25, 2 – 0.5, 3 – 0.75 для σ_0 и 4 – 0.25, 5 – 0.5, 6 – 0.75 для σ_1

уходит вниз, при $\delta > 1/2$ обращена вверх, а при $\delta = 1/2$ превращается в прямую линию. Откуда следует, что линейная гибридная схема с параметром $\delta < 1/2$ является ограниченно устойчивой по фактору интенсивности источника в диапазоне его изменения $0 \leq bt \leq 1/(1/2 - \delta)$ и абсолютно неустойчива при $bt > 1/(1/2 - \delta)$. Напротив, при $\delta > 1/2$ схема (3) устойчива при любом значении bt . Кривая, описываемая уравнением $\sigma_1 = \sqrt{(2\delta - 1)b^2\tau^2 + 2bt}$ из (7), является неограниченно возрастающей функцией (рис. 4). Следовательно, при произвольном значении фактора $bt > (\sqrt{2\delta - 1} - 1)/(2\delta - 1)$ схема устойчива по Нейману с числом Куранта $\sigma_1 > 1$.

Метод Неймана обеспечивает необходимое условие устойчивости. Достаточные условия устойчивости энергетическим методом для противопоточной схемы, аппроксимирующей линейное уравнение переноса с источником, рассмотрены в [Садин, 1998а].

Алгоритм гибридного метода крупных частиц. Кратко опишем алгоритм гибридного метода крупных частиц с настраиваемыми диссипативными свойствами (CDP2 – Customizable Dissipative Properties) [Садин, 2019] для одномерного случая, обобщение на пространственные ортогональные сетки выполняется без существенных особенностей. В расчетах используется равномерная сетка с размером ячейки h . Целые индексы относятся к центру ячейки x_n , а полуцелые – к ее граням $x_{n\pm 1/2} = x_n \pm h/2$. Временной слой t^k пронумерован верхним индексом k , а шаг по времени обозначим как $\tau = t^{k+1} - t^k$.

Алгоритм состоит из двух шагов. Шаг «предиктор», с расщеплением на лагранжевы (0), эйлеровы и заключительный (1) этапы:

$$\mathbf{q}_n^{(0)} - \mathbf{H}(\mathbf{q}_n^{(0)})\tau = \mathbf{q}_n^k - \mathbf{B}_n^k (\tilde{\mathbf{F}}_{n+1/2}^k - \tilde{\mathbf{F}}_{n-1/2}^k) \tau/h, \quad (8)$$

$$\mathbf{q}_n^{(1)} = \mathbf{q}_n^{(0)} - (\hat{\mathbf{G}}_{n+1/2}^{(0)} - \hat{\mathbf{G}}_{n-1/2}^{(0)}) \tau/h. \quad (9)$$

Шаг «корректор», с определением окончательных значений искомым функций с суммарной аппроксимацией $O(h^2 + \tau^2)$ на гладких решениях:

$$\mathbf{q}_n^{(2)} - 0.5\mathbf{H}(\mathbf{q}_n^{(2)})\tau = 0.5(\mathbf{q}_n^k + \mathbf{q}_n^{(1)}) - 0.5(\tilde{\mathbf{F}}_{n+1/2}^{(1)} - \tilde{\mathbf{F}}_{n-1/2}^{(1)}) \tau/h, \quad (10)$$

$$\mathbf{q}_n^{k+1} = \mathbf{q}_n^{(2)} - 0.5(\hat{\mathbf{G}}_{n+1/2}^{(2)} - \hat{\mathbf{G}}_{n-1/2}^{(2)}) \tau/h. \quad (11)$$

Для обеспечения монотонности численного решения на лагранжевом этапе используется нелинейная искусственная вязкость $Q_{n\pm 1/2}$ с ограничителем ψ_v : $\tilde{p}_{n\pm 1/2} = p_{n\pm 1/2} + (1 - \psi_v) Q_{n\pm 1/2}$. На эйлеровом этапе применяется гибридная схема потоков $\hat{\mathbf{G}}_{n\pm 1/2} = (1 - \psi_f) \mathbf{G}_{n\pm 1/2}^{\text{Upwind}} + \psi_f \mathbf{G}_{i\pm 1/2}^{\text{Centered}}$ с ограничителем ψ_f [Садин, 2019]. Высокая устойчивость схемы достигается неявным учетом

источниковых членов $\mathbf{H}(\mathbf{q}_n)$ (межфазного трения и теплообмена) [Садин, 1996]. Для исключения итерационных процедур используется линеаризация $\mathbf{H}(\mathbf{q}_n)$ при неявном учете линейной части [Садин, 1998b].

Шаг по времени определяется из условия Куранта – Фридрихса – Леви для «чистого» газа:

$$\tau^k = \text{CFL} \frac{h}{\max_n \left(|v_{1,n}^k| + a_n^k \right)}, \text{ при } \text{CFL} < 1,$$

где CFL — фиксированное число Куранта (рекомендуемое значение меньше 0.5), a_n^k — скорость звука по газовой фазе в точке (x_n, t^k) .

Расчетное исследование гибридного метода крупных частиц на устойчивость. Теоретический анализ областей линейной устойчивости гибридной неоднородной схемы позволяет сделать важный, но качественный вывод относительно запаса устойчивости для нелинейного случая. В задачах динамики двухфазных сред интенсивность межфазных взаимодействий имеет порядок $O(1/t_1^{(\mu)})$, а шаг по времени — $O(h/a_0)$. Здесь $t_1^{(\mu)}$ — время динамической релаксации газовой фазы в газозвеси [Садин, 2002a], a_0 — скорость звука, например, в начальный момент времени в невозмущенном газе. Поэтому безразмерный фактор интенсивности межфазного трения и теплообмена для уравнений (1) может быть определен в виде $\bar{t} = h / (a_0 t_1^{(\mu)})$.

Для выявления областей устойчивости гибридного метода крупных частиц проведены серийные расчеты задачи взаимодействия ударной волны со слоем газозвеси для различных \bar{t} с определением предельно допустимого числа Куранта CFL_* . Критерием неустойчивости принят аварийный останов программы или появление заметных осцилляций и искажений в численном решении. Результаты расчетов для случаев расчета межфазных взаимодействий на нижнем временном слое $\mathbf{H}(\mathbf{q}_n^k)$ и верхнем слое $\mathbf{H}(\mathbf{q}_n^{(0)})$ представлены на рис. 4 (соответственно 1 и 2).

Предельно допустимое число Куранта при неявном учете силового и теплового фазового обмена $\mathbf{H}(\mathbf{q}_n^{(0)})$ не зависит от фактора интенсивности 2 (рис. 4), а следовательно, от размеров расчетной сетки и времен релаксации фаз (К-устойчивость [Садин, 2002a, 2002b]). В случае явного способа расчета трения и теплообмена между газом и частицами $\mathbf{H}(\mathbf{q}_n^k)$ для малых значений $\bar{t} < 0.1$ запас устойчивости 1 схемы CDP2 близок к варианту 2 или границе устойчивости по «чистому» газу. А при $\bar{t} > 10$ наблюдается катастрофическое (на несколько порядков) падение предельно допустимого числа Куранта CFL_* , при котором расчетный шаг по времени становится неприемлемо малым. Например, $\bar{t} = 39.2$ на сетке с шагом $h = 0.05$ для газозвеси с диаметром частиц $d = 1$ мкм. При этом метод устойчив с числом Куранта $\text{CFL} \leq 0.03$.

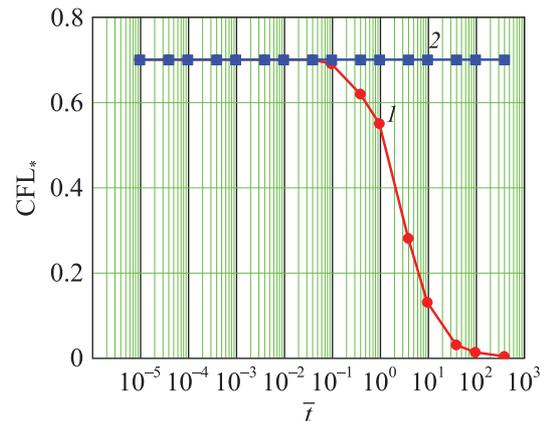


Рис. 4. Зависимость предельно допустимого числа Куранта CFL_* от безразмерного фактора интенсивности источника: 1 — явный учет межфазных взаимодействий, 2 — неявный учет межфазных взаимодействий

3. Задача взаимодействия ударной волны со слоем газозвеси

Постановка задачи. Задача решается на безразмерном интервале $x \in (0, 1)$, отнесенном к длине расчетной области $L = 0.25$ м. По неподвижному воздуху ($\gamma_1 = 1.4$) слева направо движется ударная волна с числом Маха 1.22. В начальный момент времени $t = 0$ фронт скачка

уплотнения расположен в точке $x_1 = 0.3$. Область $x \in (0.4, 0.6)$ заполнена газозвесью монодисперсных несжимаемых сферических частиц с объемной долей $\alpha_2 = 0.001$, а для однородности и общности алгоритма в области «чистого» газа объемная концентрация частиц принята пренебрежимо малой: $\alpha_2 = 10^{-10}$. Физические свойства воздуха и материала частиц представлены в таблицах 1 и 2.

Таблица 1. Физические свойства воздуха

Динамическая вязкость $\mu_1 \cdot 10^5, \text{Па} \cdot \text{с}$	Удельная теплоемкость при постоянном давлении $c_p \cdot 10^{-3}, \text{Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$	Коэффициент теплопроводности $\lambda_1 \cdot 10^2, \text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$
1.8	1.005	2.5

Таблица 2. Физические свойства материала частиц

Плотность $\rho_2^0, \text{кг}/\text{м}^3$	Удельная теплоемкость $c_2, \text{Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$	Коэффициент теплопроводности $\lambda_2 \cdot 10^2, \text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$
2500	710	1.1

Перед ударной волной среда покоится ($\mathbf{v}_{10} = \mathbf{v}_{20} = 0$) и находится в термодинамическом равновесии при температуре фаз $T_{10} = T_{20} = 293.23 \text{ К}$ и давлении $p_0 = 101\,325 \text{ Па}$. Граничные условия слева и справа расчетной области заданы в виде свободного втекания и вытекания.

Асимптотически точное автомодельное решение. Для частиц конечных размеров течение газозвеси является неравновесным по скоростям и температурам фаз. Степень неравновесности обычно характеризуется временами скоростной и тепловой релаксаций соответственно газовой $t_1^{(\mu)}, t_1^{(T)}$ и дисперсной $t_2^{(\mu)}, t_2^{(T)}$ фаз, например, в режиме Стокса обтекания [Садин, 2002а]:

$$t_1^{(\mu)} = \frac{1}{18} \frac{\rho_1^0 d^2}{\mu_1 \alpha_2}, \quad t_2^{(\mu)} = \frac{1}{18} \frac{\rho_2^0 d^2}{\mu_1 \alpha_1}, \quad t_1^{(T)} = \frac{d^2 \rho_1^0 c_p}{4 \lambda_1 \alpha_2}, \quad t_2^{(T)} = \frac{d^2 \rho_2^0 c_2}{4 \lambda_2 \alpha_1},$$

где d — диаметр частицы.

В таблице 3 приведены времена выравнивания скоростей и температур фаз по отношению к характерному времени задачи (окончанию расчета) $t_f = 0.4 \text{ мс}$ для различных диаметров частиц $d = 0.1, 2, 20 \text{ мкм}$.

Таблица 3. Относительные времена релаксации фаз

$d, \text{мкм}$	$t_1^{(\mu)}/t_f$	$t_2^{(\mu)}/t_f$	$t_1^{(T)}/t_f$	$t_2^{(T)}/t_f$
0.1	$9.290 \cdot 10^{-5}$	$1.931 \cdot 10^{-4}$	$3.024 \cdot 10^{-4}$	$1.010 \cdot 10^{-5}$
2	$3.716 \cdot 10^{-2}$	$7.724 \cdot 10^{-2}$	$1.209 \cdot 10^{-1}$	$4.038 \cdot 10^{-3}$
20	3.716	7.724	$1.209 \cdot 10^1$	$4.038 \cdot 10^{-1}$

При уменьшении диаметра частиц $d \rightarrow 0$ времена скоростной и тепловой релаксации малы, следовательно, $((u_1 - u_2) \rightarrow 0, (T_1 - T_2) \rightarrow 0, \mathbf{H}(\mathbf{q}) \rightarrow \mathbf{0} \equiv [0, 0, 0, 0, 0, 0]^T$. В предельном случае $u^* = u_1 = u_2, T^* = T_1 = T_2, e^* = \zeta_1 e_1^* + \zeta_2 e_2^*$, где $\zeta_i = \rho_i^*/\rho^*$ — массовые концентрации фаз, законы сохранения (1) могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \frac{\partial \rho^* u^*}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \zeta_2}{\partial t} + u^* \frac{\partial \zeta_2}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \rho^* u^*}{\partial t} + \frac{\partial \rho^* u^{*2}}{\partial x} + \frac{\partial p^*}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \rho^* e^*}{\partial t} + \frac{\partial \rho^* u^* e^*}{\partial x} + \frac{\partial p^* u^*}{\partial x} = 0.$$

При тепловом равновесии фаз замыкающее уравнение имеет вид [Садин, 2000, 2014]

$$e^* = \frac{1}{\gamma^* - 1} \frac{p^* \alpha_1^*}{\rho^*},$$

где $\gamma^* = 1 + (\zeta_1 R_1) / (\zeta_1 c_v + \zeta_2 c_2)$ — показатель политропы равновесной двухфазной среды.

Показатель политропы γ^* смеси определяется свойствами несущего газа и частиц, а также их массовыми концентрациями. Для малых концентраций частиц $\zeta_2 \rightarrow 0$ величина γ^* стремится к показателю адиабаты газовой фазы $\gamma_1 = 1.4$, а при увеличении доли частиц $\gamma^* \rightarrow 1$. Для заданных выше исходных данных в слое газозвеси $\gamma^* = 1.13086$. Массовые концентрации и объемные доли фаз связаны соотношениями

$$\zeta_2 = \frac{\alpha_2^*}{1 + (1 - \alpha_2^*)(\lambda^* - 1)}, \quad \lambda^* = \frac{\rho_1^{*o}}{\rho_2^{*o}}, \quad \zeta_1 + \zeta_2 = 1.$$

Взаимодействие ударной волны со слоем газозвеси приведено на $x-t$ -диаграмме (рис. 5, сплошные линии — траектории ударных волн и характеристик волны разрежения, пунктир — траектории контактных разрывов). Течение характеризуется начальными параметрами 0, 4 и 7, а также газодинамическими величинами за падающей 1, отраженной 2, преломленной в слое 3, прошедшей 6 ударными волнами и в области централизованной волны разрежения 3–5.

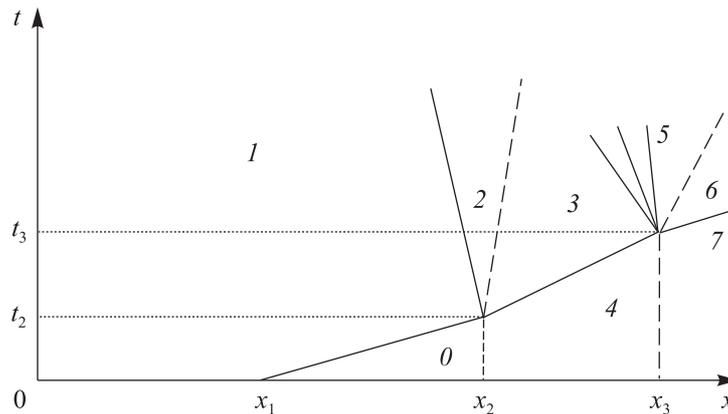


Рис. 5. Диаграмма взаимодействия ударной волны со слоем газозвеси

Опираясь на базовые выражения распада разрыва в равновесной двухфазной среде и неизменность массовой концентрации (как следствие, и показателя политропы γ^*) вдоль траектории смеси [Садин, 2000, 2014], приведем расчетные соотношения для задачи взаимодействия ударной волны со слоем газозвеси. Опустим в обозначениях параметров, где не теряется однозначность понимания, верхний индекс *, полагая смесь равновесной. А нижним индексом будем помечать значения газодинамических величин в соответствующей области (рис. 5).

В области 1 (за падающей ударной волной) при заданном числе Маха M_0 параметры p_1, u_1, ρ_1 определяются по известным формулам газовой динамики. За отраженной от границы раздела сред 2 ударной волной при $t > t_2$ (рис. 5) рассчитывается давление p_2 как решение нелинейного уравнения с заданной точностью, например методом итераций:

$$u_1 - (p_2 - p_1) \sqrt{\frac{\chi_1 - 1}{\rho_1 (\kappa_1 p_2 + p_1)}} = (p_2 - p_4) \sqrt{\frac{\chi_4 - 1}{\rho_4 (\kappa_4 p_2 + p_4)}},$$

где $\chi_l = (\gamma_l^* + 2\alpha_{1l} - 1) / (\gamma_l^* - 1)$, $\kappa_l = (\gamma_l^* + 1) / (\gamma_l^* - 1)$ — вспомогательные функции, l — номер области (рис. 5).

Параметры газа за отраженным скачком уплотнения определяются из выражений

$$u_2 = u_1 - (p_2 - p_1) \sqrt{\frac{\chi_1 - 1}{\rho_1 (\kappa_1 p_2 + p_1)}}, \quad \rho_2 = \rho_1 \frac{\kappa_1 p_2 + p_1}{\chi_1 p_1 + \frac{\gamma_1^* - 2\alpha_{11} + 1}{\gamma_1^* - 1} p_2}, \quad \alpha_{12} = 1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} (1 - \alpha_{11}).$$

Используя полученные значения газодинамических величин, рассчитываются число Маха отраженной ударной волны и скорость ее движения:

$$M_1 = \sqrt{\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}} \left(\frac{\gamma_2^* + 2\alpha_{12} - 1}{2\gamma_2^*} \frac{p_2}{p_1} + \frac{\gamma_2^* - 2\alpha_{12} + 1}{2\gamma_2^*} \right)}, \quad D_1 = u_1 - M_1 a_1,$$

где $a_l = \sqrt{\gamma_l^* p_l / (\rho_l \alpha_l)}$ – скорость звука в области l .

Вследствие непрерывности скорости и давления на контактной границе $u_3 = u_2$ и $p_3 = p_2$, а плотность смеси, объемная доля газа, число Маха преломленной на левой границе слоя ударной волны и ее скорость равны

$$\rho_3 = \rho_4 \frac{\kappa_4 p_3 + p_4}{\chi_4 p_4 + \frac{\gamma_4^* - 2\alpha_{14} + 1}{\gamma_4^* - 1} p_3}, \quad \alpha_{13} = 1 - \frac{\rho_3}{\rho_4} (1 - \alpha_{14}),$$

$$M_4 = \sqrt{\frac{\alpha_{14}}{\alpha_{13}} \left(\frac{\gamma_3^* + 2\alpha_{13} - 1}{2\gamma_3^*} \frac{p_3}{p_4} + \frac{\gamma_3^* - 2\alpha_{13} + 1}{2\gamma_3^*} \right)}, \quad D_4 = M_4 a_4.$$

В момент времени $t = t_3$ происходит второй распад с образованием центрированной волны разрежения 3–5 и прошедшей через слой газозвеси ударной волны 7. Вначале определяется давление в зоне постоянного течения 6:

$$u_6 = (p_6 - p_7) \sqrt{\frac{\chi_7 - 1}{\rho_7 (\kappa_7 p_6 + p_7)}}, \quad \rho_6 = \rho_7 \frac{\kappa_7 p_6 + p_7}{\chi_7 p_7 + \frac{\gamma_7^* - 2\alpha_{17} + 1}{\gamma_7^* - 1} p_6}, \quad \alpha_{16} = 1 - \frac{\rho_6}{\rho_7} (1 - \alpha_{17}),$$

$$M_7 = \sqrt{\frac{\alpha_{17}}{\alpha_{16}} \left(\frac{\gamma_6^* + 2\alpha_{16} - 1}{2\gamma_6^*} \frac{p_6}{p_7} + \frac{\gamma_6^* - 2\alpha_{16} + 1}{2\gamma_6^*} \right)}, \quad D_7 = M_7 a_7.$$

В области постоянного течения 5 $u_5 = u_6$ и $p_5 = p_6$, а плотность смеси, объемная доля газа определяются из выражений

$$\rho_5 = \rho_3 \left[\alpha_{23} + \alpha_{13} \left(1 - \frac{\gamma_3^* - 1}{2\alpha_{13}} \frac{u_5 - u_3}{a_3} \right)^{-\frac{2}{\gamma_3^* - 1}} \right]^{-1}, \quad \alpha_{15} = 1 - \frac{\rho_5}{\rho_3} (1 - \alpha_{13}).$$

Наконец, определим решение в области центрированной волны разрежения 3–5 (рис. 4), учитывая постоянство инварианта Римана [Садин, 2000, 2014]:

$$u + \frac{2a\alpha_1}{\gamma_3^* - 1} = u_3 + \frac{2a_3\alpha_{13}}{\gamma_3^* - 1}.$$

Зададим автомодельную переменную в виде $\xi' = \frac{x - x_3}{a_3 \alpha_{13} (t - t_3)} - \frac{M'_3}{\alpha_{13}}$. Опуская промежуточные выкладки, имеем автомодельное решение в области $u_3 - a_3 \leq (x - x_3) / (t - t_3) \leq u_5 - a_5$:

$$\left[\frac{(1 - \alpha_{13}) \alpha_1}{(1 - \alpha_1) \alpha_{13}} \right]^\omega = \frac{\alpha_1 + \omega}{\alpha_1 (1 - \omega \xi')}, \quad \omega = \frac{\gamma_3^* - 1}{2},$$

$$M' = M'_3 + \frac{2\alpha_{13}}{\gamma_3^* + 2\alpha_1 - 1} (\alpha_1 \xi' + 1), \quad M' = \frac{u}{a_3}, \quad M'_3 = \frac{u_3}{a_3},$$

$$\rho = \rho_3 \frac{\alpha_1}{\alpha_{13}} \left(1 - \frac{\gamma_3^* - 1}{2\alpha_3} (M' - M'_3) \right)^{\frac{1}{\omega}}, \quad p = p_3 \left(1 - \frac{\gamma_3^* - 1}{2\alpha_3} (M' - M'_3) \right)^{\frac{\gamma_3^*}{\omega}}.$$

Приведенные соотношения являются асимптотически точным автомодельным решением, к которому сходится неравновесное решение поставленной задачи для двухскоростной двухтемпературной динамики газозвеси (1) при уменьшении размеров дисперсных частиц $d \rightarrow 0$.

Обсуждение численных результатов задачи. Задача взаимодействия ударной волны с ограниченным слоем газозвеси решалась в неравновесной формулировке (1) численно гибридным методом крупных частиц (8)–(11) с неявным учетом межфазных взаимодействий с числом Куранта $CFL = 0.4$. Для нелинейной коррекции схемы использовались ограничитель потоков Van Leer $\psi_f = (r + |r|) / (1 + r)$ в (9) и (11) и ограничитель вязкости Superbee $\psi_v = \max [\min (2r, 1), \min (r, 2), 0]$ в (8) и (10). Здесь r – отношение наклонов параметров на грани ячейки. Для расчетов использовалась равномерная сетка, содержащая 500 ячеек.

Результаты расчетов представлены на рис. 6 в виде распределений плотности смеси $\rho = \rho_1 + \rho_2$ (пунктир), а также скоростей газа u_1 (штриховые линии) и дисперсной фазы u_2 (штрихпунктирные линии). Для сравнения сплошными кривыми показаны асимптотически точные автомодельные профили указанных параметров. Рассматриваются варианты задачи для различных размеров частиц $d = 0.1, 2, 20$ мкм (соответственно верхний, средний и нижний ряд). Численные решения приведены в характерные моменты времени: после преломления ударной волны на левой контактной границе при $t_i = 0.15$ мс и после второго распада разрыва на правом крае слоя при $t_f = 0.4$ мс.

При взаимодействии падающего скачка уплотнения с левой границей газозвеси c_1 в результате распада разрыва образуются две ударные волны: отраженная s_1 и преломленная s_2 (рис. 6). В дальнейшем при падении волны s_2 на контактный разрыв c_2 реализуется конфигурация с отражением волны разрежения r и прошедшим через слой взвешенных частиц скачком уплотнения s_3 .

Для очень мелких частиц газозвеси ($d = 0.1$ мкм) выравнивание скоростей и температур фаз происходит достаточно быстро (см. табл. 3), и течение двухфазной среды практически равновесное, а пространственные зоны релаксации являются подсеточными (рис. 6, $a-d$). Расчетные профили плотности и скорости хорошо согласуются с автомодельным решением. Отклонения расчетных значений $\varphi = \{\rho, u_1, p\}$ плотности, скорости и давления от их автомодельных равновесных величин $\delta\varphi = |\varphi - \varphi^*| / \varphi^*$ на момент окончания расчета ($t_f = 0.4$ мс) составляют:

- $\delta\varphi_1 \cdot 10^4 = \{0.798, 3.18, 0.960\}$ – за отраженной ударной волной в точке $x = 0.4$;
- $\delta\varphi_2 \cdot 10^4 = \{3.03, 7.61, 3.35\}$ – в зоне постоянного течения в слое газозвеси в точке $x = 0.6$;
- $\delta\varphi_3 \cdot 10^4 = \{2.34, 8.81, 5.94\}$ – за прошедшей ударной волной в точке $x = 0.7$.

С увеличением диаметра частиц ($d = 2$ мкм) эффект неравновесности (различие скоростей и температур фаз) становится существенным. Распад разрыва при взаимодействии падающей

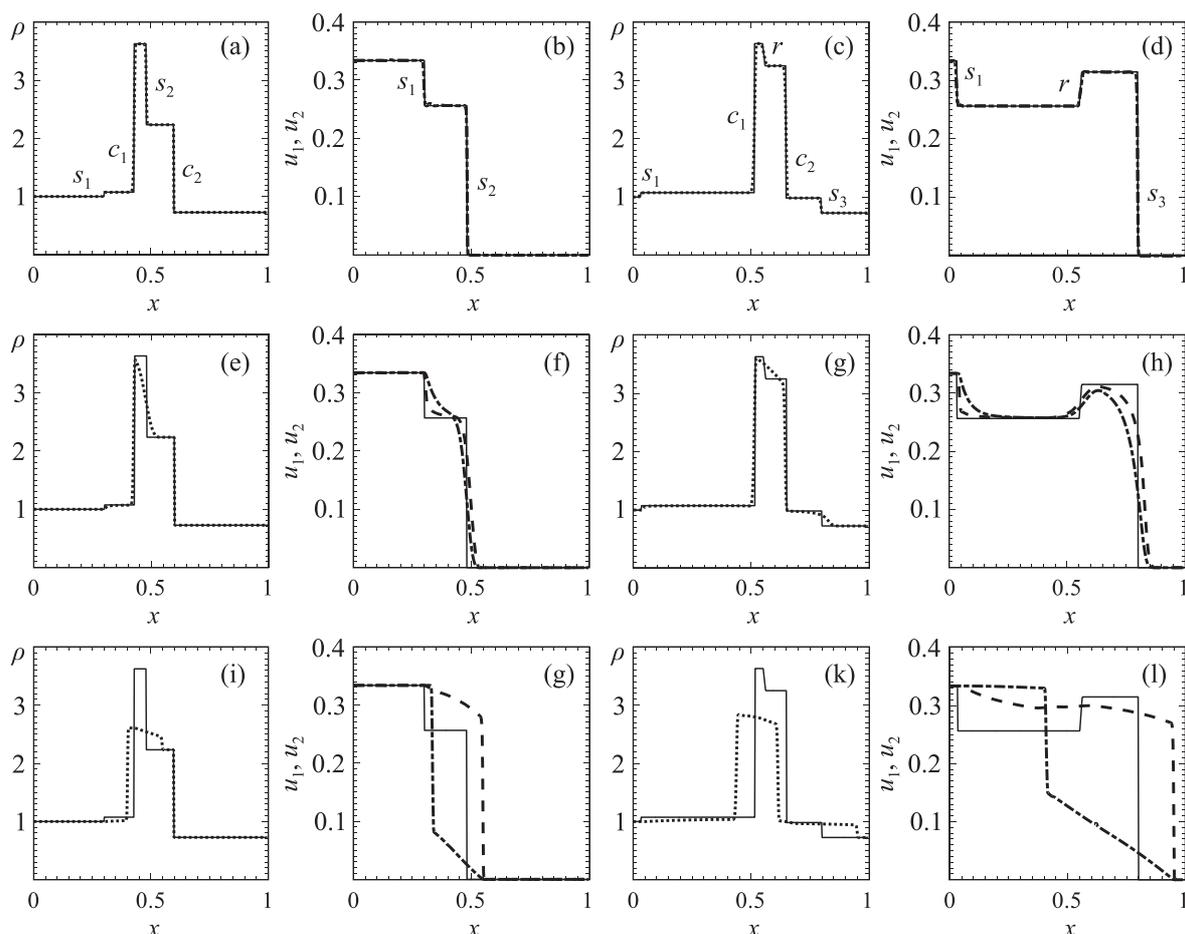


Рис. 6. Распределения плотности смеси ρ и скоростей фаз u_1 и u_2 для различных размеров частиц: (a)–(d) для $d = 0.1$ мкм, (e)–(h) для $d = 2$ мкм, (i)–(l) для $d = 20$ мкм; в момент времени $t_i = 0.15$ мс – (a), (e), (i) – плотность (пунктир), (b), (f), (g) – скорость газа (штрих), скорость частиц (штрихпунктир), $t_f = 0.4$ – (c), (g), (k), (d), (h), (l) обозначения кривых сохранены. Асимптотически точное решение – сплошные линии

ударной волны реализуется в виде прошедшей и отраженной волн сжатия (рис. 6, e–h) с вырожденной (звуковой) интенсивностью фронта волны. Пространственная зона релаксации внутри слоя газозвеси является конечной и составляет примерно 1/4 расчетной области задачи. За фронтом волны сжатия параметры двухфазной среды приближаются к предельным равновесным значениям. Расчетные относительные отклонения в данном случае равны

- $\delta\varphi_1 \cdot 10^2 = \{0.0977, 0.422, 0.139\}$ – при $x = 0.4$;
- $\delta\varphi_2 \cdot 10^2 = \{3.45, 3.56, 2.97\}$ – при $x = 0.6$;
- $\delta\varphi_3 \cdot 10^2 = \{0.680, 3.27, 1.25\}$ – при $x = 0.7$.

Дальнейшее увеличение размеров дисперсных включений $d = 20$ мкм приводит к значительному расхождению расчета и равновесной теории:

- $\delta\varphi_1 \cdot 10^1 = \{0.362, 1.55, 0.504\}$ – при $x = 0.4$;
- $\delta\varphi_2 \cdot 10^1 = \{1.70, 0.476, 0.0710\}$ – при $x = 0.6$;
- $\delta\varphi_3 \cdot 10^1 = \{0.173, 0.626, 0.252\}$ – при $x = 0.7$.

Особенностью данного варианта расчета является формирование нестационарной ударной волны конечной интенсивности с разрывом параметров несущего газа и непрерывной волной сжатия дисперсной фазы. Границы слоя газозвеси отстают, а фронт преломленной и прошедшей ударной волны опережает их положения в равновесном случае. Зона релаксации сопоставима с пространственным масштабом задачи.

Заключение

На модельном примере линейной гибридной схемы для уравнения переноса с источником выполнено теоретическое обоснование областей устойчивости в зависимости от параметра гибридности схемы, фактора интенсивности источника и степени неявности учета правой части. В серии вычислительных экспериментов для задачи взаимодействия ударной волны со слоем газозвеси показано, что для значений безразмерного фактора интенсивности больше 10 допустимый шаг по времени предложенного подхода на порядки больший по сравнению с явным способом учета межфазных обменов. В отличие от традиционных схем неявный безытерационный способ расчета межфазных взаимодействий наделяет гибридный метод крупных частиц позитивными свойствами: большим запасом устойчивости и независимостью допустимого числа Куранта от размеров расчетной сетки, интенсивности теплообмена и динамической релаксации фаз.

Для задачи взаимодействия ударной волны со слоем газозвеси выполнены оценки динамической и тепловой релаксации газовой и дисперсной фаз для различных размеров частиц. На основе базовых соотношений распада разрыва в двухфазной среде получено асимптотически точное автомодельное решение. Тестовое решение является объективной основой подтверждения надежности и точности работы алгоритма гибридного метода крупных частиц и может быть востребовано для проверки других разностных схем.

Обсуждены особенности течения газозвеси с образованием нестационарных структур: двух сильных разрывов, скачка уплотнения в газе и непрерывной волны сжатия в дисперсной фазе и двух слабых разрывов по обеим фазам. При уменьшении времен фазовых релаксаций численное решение сходится к равновесному.

Список литературы (References)

- Арутюнян Г. М. Условия применимости результатов гидродинамики совершенного газа к дисперсным средам // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. — 1979. — № 1. — С. 157–160.
Arutyunyan G. M. Conditions of applicability of the results of the hydrodynamics of a perfect gas to disperse media // Fluid Dynamics. — 1979. — Vol. 14. — P. 118–121. (Original Russian paper: Arutyunyan G. M. Usloviya primenimosti rezul'tatov gidrodinamiki sovershennogo gaza k dispersnym sredam // Fluid Dynamics. — 1979. — No. 1. — P. 157–160.)
- Арутюнян Г. М. Термогидродинамическая теория гетерогенных систем. — М.: Физматлит, 1994. — 272 с.
Arutyunyan G. M. Termogidrodinamicheskaya teoriya geterogennyh sistem [Thermohydrodynamic theory of heterogeneous systems]. — Moscow: Fizmatlit, 1994. — 272 p. (in Russian).
- Вахненко В. А., Паламарчук Б. Н. Описание ударно-волновых процессов в двухфазных средах, содержащих несжимаемую фазу // Прикладная механика и техническая физика. — 1984. — № 1. — С. 113–119.
Vakhnenko V. A., Palamarchuk B. I. Description of shock-wave processes in a two-phase medium containing an incompressible phase // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. — 1984. — Vol. 25. — P. 101–107. (Original Russian article: Vakhnenko V. A., Palamarchuk B. I. Opisanie udarno-volnovykh processov v dvuhfaznykh sredakh, soderzhashchih neszhimaemuyu fazu // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. — 1984. — No. 1. — P. 113–119.)

- Иванов А. С., Козлов В. В., Садин Д. В.* Нестационарное истечение двухфазной дисперсной среды из цилиндрического канала конечных размеров в атмосферу // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. — 1996. — № 3. — С. 60–66.
Ivanov A. S., Kozlov V. V., Sadin D. V. Unsteady Flow of a Two-Phase Disperse Medium from a Cylindrical Channel of Finite Dimensions into the Atmosphere // Fluid dynamics. 1996. — Vol. 31, No. 3. — P. 386–391. (Original Russian article: *Ivanov A. S., Kozlov V. V., Sadin D. V.* Nestacionarnoe istechenie dvuhfaznoj dispersnoj sredy iz cilindricheskogo kanala konechnyh razmerov v atmosferu // Fluid Dynamics. — 1996. — No. 3. — P. 60–66.)
- Киселев В. П., Киселев С. П., Фомин В. М.* О взаимодействии ударной волны с облаком частиц конечных размеров // Прикладная механика и техническая физика. — 1994. — № 2. — С. 26–37.
Kiselev V. P., Kiselev S. P., Fomin V. M. Interaction of a shock wave with a cloud of particles of finite dimensions // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. — 1994. — Vol. 35. — P. 183–192. (Original Russian article: *Kiselev V. P., Kiselev S. P., Fomin V. M.* O vzaimodejstvii udarnoj volny s oblakom chastic konechnyh razmerov // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. — 1994. — No. 2. — P. 26–37.)
- Кутушев А. Г.* Математическое моделирование волновых процессов в аэродисперсных и порошкообразных средах. — СПб.: Недра, 2003. — 284 с.
Kutshhev A. G. Matematicheskoe modelirovanie volnovyh processov v aerodispersnyh i poroshkoobraznyh sredah [Mathematical modeling of wave processes in aerodispersed and powdered media]. — Saint-Petersburg: Nedra, 2003. — 284 p. (in Russian).
- Нигматулин Р. И.* Динамика многофазных сред. Ч. 1. — М.: Наука, 1987. — 464 с.
Nigmatulin R. I. Dinamika mnogofaznyh sred [Dynamics of Multiphase Media]. Part 1. — Moscow: Nauka, 1987. — 464 p. (in Russian).
- Садин Д. В.* Модифицированный метод крупных частиц для расчета нестационарных течений газа в пористой среде // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1996. — Т. 36, № 10. — С. 158–164.
Sadin D. V. A Modified Large-Particle Method for Calculating Unsteady Gas Flows in a Porous Medium // Comput. Math. and Math. Phys. — 1996. — Vol. 36, No. 10. — P. 1453–1458. (Original Russian article: *Sadin D. V.* Modificirovannyj metod krupnyh chastic dlya rascheta nestacionarnyh techenij gaza v poristoj srede // Comput. Math. and Math. Phys. — 1996. — Vol. 36, No. 10. — P. 158–164.)
- Садин Д. В.* О сходимости одного класса разностных схем для уравнений нестационарного движения газа в дисперсной среде // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1998а. — Т. 38, № 9. — С. 1572–1577.
Sadin D. V. On the Convergence of a Certain Class of Difference Schemes for the Equations of Unsteady Gas Motion in a Disperse Medium // Comput. Math. and Math. Phys. — 1998. — Vol. 38, No. 9. — P. 1508–1513. (Original Russian article: *Sadin D. V.* O skhodomosti odnogo klassa raznostnyh skhem dlya uravnenij nestacionarnogo dvizheniya gaza v dispersnoj srede // Comput. Math. and Math. Phys. — 1998. — Vol. 38, No. 9. — P. 1572–1577.)
- Садин Д. В.* Метод расчета волновых гетерогенных течений с интенсивным межфазным взаимодействием // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1998b. — Т. 38, № 6. — С. 1033–1039.
Sadin D. V. Method for Computing Heterogeneous Wave Flows with Intense Phase Interaction // Comput. Math. and Math. Phys. — 1998b. — Vol. 38, No. 6. — P. 987–993. (Original Russian article: *Sadin D. V.* Metod rascheta volnovyh geterogennyh techenij s intensivnym mezhfaznym vzaimodejstviem // Comput. Math. and Math. Phys. — 1998. — Vol. 38, No. 6. — P. 1033–1039.)
- Садин Д. В.* Основы теории моделирования волновых гетерогенных процессов. — СПб.: Военный инженерно-космический ун-т, 2000. — 60 с.
Sadin D. V. Osnovy teorii modelirovaniya volnovyh geterogennyh processov [Fundamentals of the theory of modeling wave hetero-geneous processes]. — Saint-Petersburg: Military Engineering Space University, 2000. — 60 p. (in Russian).
- Садин Д. В.* О жесткости систем дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих движения гетерогенных сред // Математическое моделирование. — 2002а. — Т. 14, № 11. — С. 43–53.
Sadin D. V. O zhestkosti sistem differencial'nyh uravnenij v chastnyh proizvodnyh, opisyvayushchih dvizheniya geterogennyh sred [On stiff systems of partial differential equations for motion of heterogeneous media] // Math. Models Comput. Simul. — 2002a. — Vol. 14, No. 11. — P. 43–53 (in Russian).
- Садин Д. В.* Проблема жесткости при моделировании волновых течений гетерогенных сред с трехтемпературной схемой межфазного тепло- и массообмена // Прикладная механика и техническая физ. — 2002b. — Т. 43, № 2. — С. 136–141.
Sadin D. V. Stiffness problem in modeling wave flows of heterogeneous media with a three-temperature scheme of interphase heat and mass transfer // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. — 2002. — Vol. 43, No. 2. —

- P. 286–290. (Original Russian article: *Sadin D. V.* Problema zhestkosti pri modelirovanii volnovykh techenij geterogennykh sred s trekhtemperaturnoj skhemoj mezhfaznogo teplo- i massoobmena // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. — 2002. — Vol. 43, No. 2. — P. 136–141.)
- Садин Д. В.* Решение жестких задач течений двухфазных сред со сложной волновой структурой // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*. — 2014. — Т. 15, вып. 4. — <http://chemphys.edu.ru/issues/2014-15-4/articles/243/>
- Sadin D. V.* Reshenie zhestkikh zadach techenij dvuhfaznykh sred so slozhnoy volnovoju strukturoj [Stiff problems of a two-phase flow with a complex wave structure] // *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*. — 2014. — Vol. 15, Iss. 4. — <http://chemphys.edu.ru/issues/2014-15-4/articles/243/> (in Russian).
- Садин Д. В.* TVD-схема для жестких задач волновой динамики гетерогенных сред негиперболического неконсервативного типа // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. — 2016. — Т. 56, № 12. — С. 2098–2109.
- Sadin D. V.* TVD scheme for stiff problems of wave dynamics of heterogeneous media of nonhyperbolic nonconservative type // *Comput. Math. and Math. Phys.* — 2016. — Vol. 56. — P. 2068–2078. (Original Russian article: *Sadin D. V.* TVD-skema dlya zhestkikh zadach volnovoju dinamiki geterogennykh sred negiperbolicheskogo nekonservativnogo tipa // *Comput. Math. and Math. Phys.* — 2016. — Vol. 56, No. 12. — P. 2098–2109.)
- Садин Д. В.* Модификация метода крупных частиц до схемы второго порядка точности по пространству и времени для ударно-волновых течений газозвеси // *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Сер. Математическое моделирование и программирование*. — 2019. — Т. 12, № 2. — С. 112–122.
- Sadin D. V.* Modifikaciya metoda krupnykh chastic do skhemy vtorogo poryadka tochnosti po prostranstvu i vremeni dlya udarno-volnovykh techenij gazovzvеси [A modification of the large-particle method to a scheme having the second order of accuracy in space and time for shockwave flows in a gas suspension] // *Vestn. Yuzhn. Ural. Gos. Univ. Ser. Mat. Model. Programm.* — 2019. — Vol. 12, No. 2. — P. 112–122 (in Russian).
- Суров В. С.* Распад произвольного разрыва в односкоростной модели дисперсной среды Рахматулина. // *Физика горения и взрыва*. — 1997. — Т. 33, № 1. — С. 143–147.
- Surov V.S.* Decay of an arbitrary discontinuity in Rakhmatulin's one-velocity model of a dispersed medium // *Combustion, Explosion and Shock Waves*. — 1997. — Vol. 33. — P. 121–124. (Original Russian article: *Surov V.S.* Raspad proizvol'nogo razryva v odnoskorostnoj modeli dispersnoj sredy Rahmatulina // *Combustion, Explosion and Shock Waves*. — 1997. — No. 1. — P. 143–147.)
- Суров В. С.* К расчету ударно-волновых процессов в пузырьковых жидкостях // *Журнал технической физики*. — 1998. — Т. 68, № 11. — С. 12–19.
- Surov V.S.* Calculating shock-wave processes in bubbly liquids // *Technical Physics*. — 1998. — Vol. 43. — P. 1280–1287. (Original Russian article: *Surov V.S.* K raschetu udarno-volnovykh processov v puzyr'kovykh zhidkostyah // *Technical Physics*. — 1998. — Vol. 68, No. 11. — P. 12–19.)
- Тукмаков Д. А.* Численное исследование интенсивных ударных волн в запыленных средах с однородной и двухкомпонентной несущей фазой // *Компьютерные исследования и моделирование*. — 2020. — Т. 12, № 1. — С. 141–154.
- Tukmarov D. A.* Chislennoe issledovanie intensivnykh udarnykh voln v zapylennykh sredah s odnorodnoj i dvuhkomponentnoj nesushchej fazoj [Numerical study of intense shock waves in dusty media with a homogeneous and two-component carrier phase] // *Computer research and modeling*. — 2020. — Vol. 12, No. 1. — P. 141–154 (in Russian).
- Chalabi A.* On convergence of numerical schemes for hyperbolic conservation laws with stiff source terms // *Math. Comp.* — 1997. — Vol. 66, No. 218. — P. 527–546.
- Chalons C., Girardin M., Kokh S.* Large time step and asymptotic preserving numerical schemes for the gas dynamics equations with source terms // *SIAM Journal on Scientific Computing*. 2013. — Vol. 35, No. 6. — P. A2874–A2902.
- Chen G., Levermore C., Liu T.* Hyperbolic conservation laws with stiff relaxation terms and entropy // *Comm. Pure. Appl. Math.* — 1994. — Vol. 47. — P. 787–830.
- Gascón Ll., Corberán J.M.* Construction of Second-Order TVD Schemes for Nonhomogeneous Hyperbolic Conservation Laws // *J. Comput. Phys.* — 2001. — Vol. 172. — P. 261–297.
- Karni S., Hernández-Dueñas G.* A Hybrid Algorithm for the Baer-Nunziato Model Using the Riemann Invariants // *Journal of Scientific Computing*. — 2010. — Vol. 45, No. 1. — P. 382–403.
- LeVeque R.J., Yee H. C.* A study of numerical methods for hyperbolic conservation laws with stiff source terms // *J. Comput. Phys.* — 1990. — Vol. 86 (1). — P. 187–210.

- Marble F. E.* Dynamics of dusty gases // *Ann. Rev. Fluid Mech.* — 1970. — Vol. 2. — P. 397–446.
- Saurel R., Abgrall R.* A multiphase Godunov method for compressible multifluid and multiphase flows // *J. Comput. Phys.* — 1999. — Vol. 150 (2). — P. 425–467.
- Saurel R., Le Metayer O., Massoni J., Gavrilyuk S.* Shock Jump Relations for Multiphase Mixtures with Stiff Mechanical Relaxation // *Shock Waves.*— 2007. — Vol. 16. — P. 209–232.
- Tokareva S. A., Toro E. F.* HLLC-type Riemann solver for the Baer–Nunziato equations of compressible two-phase flow // *J. Comput. Phys.* — 2010. — Vol. 229. — P. 3573–3604.
- Xing Y., Shu C-W.* High-Order Well-Balanced Finite Difference WENO Schemes for a Class of Hyperbolic Systems with Source Terms // *Journal of Scientific Computing.* — 2006. — Vol. 27, Nos. 1–3. — P. 477–494.