

УДК: 519.6

## Метод численного решения одной стационарной задачи гидродинамики в конвективной форме в $L$ -образной области

В. А. Рукавишников<sup>1,a</sup>, А. В. Рукавишников<sup>2,b</sup>

<sup>1</sup>Вычислительный центр ДВО РАН,

Россия, 680000, г. Хабаровск, ул. Ким Ю Чена, д. 65

<sup>2</sup>Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН,

Россия, 680000, г. Хабаровск, ул. Дзержинского, д. 54

E-mail: <sup>a</sup> vark0102@mail.ru, <sup>b</sup> 78321a@mail.ru

*Получено 20.01.2020, после доработки — 16.02.2020.*

*Принято к публикации 10.11.2020.*

Большой класс задач описывает физические процессы, протекающие в невыпуклых областях, содержащих угол больше 180 градусов на границе. Решение в окрестности такого угла сингулярно, а его отыскание, при использовании классических подходов, влечет за собой потерю точности. В представленной работе рассмотрены стационарные, линеаризованные с помощью итераций Пикара несжимаемые уравнения Навье–Стокса течения вязкой жидкости в конвективной форме в  $L$ -образной области. Определено  $R_\nu$ -обобщенное решение задачи в специальных множествах весовых пространств. Для нахождения приближенного  $R_\nu$ -обобщенного решения построен специальный метод конечных элементов. Во-первых, пространства конечно-элементных функций удовлетворяют закону сохранения массы в сильном смысле, то есть в узлах сетки. Для этой цели используется Скотт–Вогелиус конечно-элементная пара. Выполнение закона сохранения массы ведет к отысканию более точного с физической точки зрения решения. Во-вторых, базисные функции конечномерных пространств дополнены весовыми функциями как множителями, которые совпадают с расстоянием от точки до вершины тупого угла в  $\delta$ -окрестности точки сингулярности и радиусом  $\delta$  вне ее. Степень весовой функции, как и параметр  $\nu$  в определении  $R_\nu$ -обобщенного решения, так и радиус  $\delta$ -окрестности точки сингулярности являются свободными параметрами метода. Специально подобранная их комбинация приводит к увеличению порядка сходимости приближенного решения к точному решению задачи почти в два раза по сравнению с классическими подходами и достигает единицы по шагу сетки в нормах весовых пространств Соболева. Таким образом, установлено, что скорость сходимости не зависит от величины угла.

Ключевые слова: задача гидродинамики с сингулярностью, весовой метод конечных элементов

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 20-11-19993).

UDC: 519.6

## The method of numerical solution of the one stationary hydrodynamics problem in convective form in $L$ -shaped domain

V. A. Rukavishnikov<sup>1,a</sup>, A. V. Rukavishnikov<sup>2,b</sup>

<sup>1</sup>Computing Center FEBRAS,

65 Kim U Chen st., Khabarovsk, 680000, Russia

<sup>2</sup>Khabarovsk Division of the Institute of Applied Mathematics FEBRAS,

54 Dzerzhinsky st., Khabarovsk, 680000, Russia

E-mail: <sup>a</sup> vark0102@mail.ru, <sup>b</sup> 78321a@mail.ru

*Received 20.01.2020, after completion — 16.02.2020.*

*Accepted for publication 10.11.2020.*

An essential class of problems describes physical processes occurring in non-convex domains containing a corner greater than 180 degrees on the boundary. The solution in a neighborhood of a corner is singular and its finding using classical approaches entails a loss of accuracy. In the paper, we consider stationary, linearized by Picard's iterations, Navier–Stokes equations governing the flow of an incompressible viscous fluid in the convection form in  $L$ -shaped domain. An  $R_\nu$ -generalized solution of the problem in special sets of weighted spaces is defined. A special finite element method to find an approximate  $R_\nu$ -generalized solution is constructed. Firstly, functions of the finite element spaces satisfy the law of conservation of mass in the strong sense, i.e. at the grid nodes. For this purpose, Scott–Vogelius element pair is used. The fulfillment of the condition of mass conservation leads to the finding more accurate, from a physical point of view, solution. Secondly, basis functions of the finite element spaces are supplemented by weight functions. The degree of the weight function, as well as the parameter  $\nu$  in the definition of an  $R_\nu$ -generalized solution, and a radius of a neighborhood of the singularity point are free parameters of the method. A specially selected combination of them leads to an increase almost twice in the order of convergence rate of an approximate solution to the exact one in relation to the classical approaches. The convergence rate reaches the first order by the grid step in the norms of Sobolev weight spaces. Thus, numerically shown that the convergence rate does not depend on the corner value.

Keywords: hydrodynamic problem with singularity, weighted finite element problem

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2020, vol. 12, no. 6, pp. 1291–1306 (Russian).

This work was supported by Russian Science Foundation (project No. 20-11-19993).

## Введение

В настоящее время для приближенного решения задач, описывающих естественные физические процессы, предложены различные численные методы. Особый интерес математиков и инженеров привлекают методы решения задач в многоугольной области  $\Omega$ , имеющей тупые углы на границе. В чем сложность такого рода задач? Дело в том, например, для системы Максвелла известно, что ее обобщенное решение не принадлежит пространству С. Л. Соболева  $W_2^1(\Omega)$ , т. е. интеграл Дирихле от функции решения расходится. В таком случае краевая задача называется задачей с сильной сингулярностью. Для задачи упругости можно определить обобщенное решение в пространстве  $W_2^1(\Omega)$ , но оно не будет принадлежать пространству  $W_2^2(\Omega)$ . В этом случае краевая задача называется задачей со слабой сингулярностью. С учетом принципа согласованных оценок приближенное решение таких задач, полученное с помощью классических конечно-разностных и конечно-элементных схем, сходится к точному решению со скоростью существенно меньшей единицы по шагу сетки  $h$  и зависит от величины входящего угла  $\omega$ ,  $\omega \in (\pi, 2\pi)$ .

В представленной работе предложен численный метод решения стационарных, линеаризованных с помощью итераций Пикара несжимаемых уравнений Навье – Стокса течения вязкой жидкости в конвективной форме в  $L$ -образной области.

Существуют различные подходы для численного решения задач гидродинамики в областях с входящим тупым углом на границе многоугольной области. Они основаны: 1) на выделении сингулярных составляющих решения и сгущении сетки к точке сингулярности [Burda et al., 2005]; 2) на определении двойственных функций к сингулярным составляющим решения и доопределении вариационной постановки задачи с помощью вспомогательных уравнений [Puо, Jang, 2019]; 3) на аппроксимации коэффициентов напряжений для сингулярных составляющих решения и на поиске на их основе регулярных составляющих решения [Choi, Kweon, 2016]; 4) на разбиении области на подобласти простой геометрии (не содержащие тупые внутренние углы) и реализации алгоритма Стрэнга – Фикса, т. е. увеличении размерности дискретного пространства в окрестности точки сингулярности [Salem, Chorfi, 2016]; 5) на выделении нескольких окрестностей точки сингулярности и введении вспомогательных билинейных форм, так называемый energy-corrected-метод конечных элементов (см., например, [John et al., 2017]).

В статье предложен более простой в реализации метод для достижения заданной точности, который не требует сгущения сетки и введения вспомогательных уравнений в окрестности точки сингулярности. Для этой цели решение задачи в переменных «скорость» и «давление» определено как  $R_\nu$ -обобщенное в весовых множествах  $\mathbf{W}_{2,\nu}^2(\Omega, \delta)$  и  $W_{2,\nu}^1(\Omega, \delta)$  соответственно.

Впервые определять решение как  $R_\nu$ -обобщенное было предложено в работе [Рукавишников, 1989] для эллиптических задач, на его основе была построена теория численных методов. Подход позволил ввести весовое пространство или множество, в зависимости от геометрии области и входных данных (правых частей, коэффициентов уравнения, граничных и начальных данных), которому принадлежит  $R_\nu$ -обобщенное решение. Доказаны его единственность и дифференциальные свойства (см., например, [Рукавишников, Кузнецова, 2009а; Рукавишников, 2014; Рукавишников, Николаев, 2015; Рукавишников, Рукавишникова, 2019]). Для решения задачи Стокса установлен весовой аналог условия Ладыженской – Бабушки – Брецци [Rukavishnikov, Rukavishnikova, 2018].

Для приближенного решения эллиптических задач с сингулярностью разработаны весовые метод конечных разностей и узловой метод конечных элементов (см., например, [Рукавишников, Рукавишникова, 1994; Рукавишников, Беспалов, 2000; Rukavishnikov, Rukavishnikova, 2018]). Для численного решения уравнения Максвелла — весовой реберный метод конечных элементов [Рукавишников, Мосолапов, 2019]. Для эллиптических задач получены априорные оценки скорости сходимости в нормах весовых пространств (см., например, [Рукавишников, Кузнецова, 2009b; Rukavishnikov, Rukavishnikova, 2010; Rukavishnikov, Rukavishnikova, 2013]).

В работе для приближенного  $R_\nu$ -обобщенного решения стационарных, линейризованных с помощью итераций Пикара несжимаемых уравнений Навье – Стокса течения вязкой жидкости в конвективной форме в  $L$ -образной области построен метод конечных элементов специального вида: 1) функции конечно-элементных пространств удовлетворяют закону сохранения массы в сильном смысле – Скотт – Вогелиус конечно-элементная пара [Scott, Vogelius, 1985], что не влечет неустойчивости в решении; 2) базисные функции представляют собой произведение базисных функций Скотт – Вогелиус конечно-элементной пары и весовых функций в некоторой степени. Это позволяет лучше учитывать поведение решения в окрестности точки сингулярности и повысить порядок скорости сходимости приближенного решения к точному решению задачи (для компонент вектора скоростей) в норме пространства  $W_{2,\nu}^1(\Omega)$ .

Анализ численных экспериментов показал преимущество предложенного подхода над классическими методами (см., например, [Blum, 1990]) по скорости сходимости (почти в два раза по порядку). Таким образом, разработанный метод преодолевает так называемый эффект загрязнения, а скорость сходимости приближенного решения к точному решению задачи достигает первого порядка по шагу сетки  $h$  и не зависит от величины входящего угла. Подобный эффект достигается и для других задач (см., например, [Rukavishnikov, Rukavishnikov, 2019]).

Реализованный алгоритм открывает возможность для решения нестационарных нелинейных уравнений Навье – Стокса течения вязкой несжимаемой жидкости в конвективной форме в области с тупым входящим углом на границе многоугольной области.

## 1. Основные обозначения и определения пространств

Пусть  $\mathbf{R}^2$  – двумерное евклидово пространство,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  – его элемент с мерой  $d\mathbf{x} = dx_1 dx_2$  и нормой  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ . Пусть  $\Omega \subset \mathbf{R}^2$  – многоугольная область с одним внутренним тупым углом на границе  $\Gamma$  области  $\Omega$ . Вершина тупого угла находится в начале координат  $O(0, 0)$ , ее будем называть особой точкой или точкой сингулярности. Пусть  $\bar{\Omega}$  – замыкание области  $\Omega$ , т. е.  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ .

Введем необходимые обозначения операторов.

Пусть заданы вектор-функции  $\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}(\mathbf{x}) = (v_1(\mathbf{x}), v_2(\mathbf{x}))$ ,  $\mathbf{w} \equiv \mathbf{w}(\mathbf{x}) = (w_1(\mathbf{x}), w_2(\mathbf{x}))$  и функция  $q \equiv q(\mathbf{x})$ , тогда

$$\Delta \mathbf{v} = \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} \right)^T \text{ — оператор Лапласа } \mathbf{v},$$

$$\nabla q = \left( \frac{\partial q}{\partial x_1}, \frac{\partial q}{\partial x_2} \right)^T \text{ — градиент } q,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \text{ — дивергенция } \mathbf{v},$$

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{w} = \left( v_1 \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial w_1}{\partial x_2}, v_1 \frac{\partial w_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial w_2}{\partial x_2} \right)^T.$$

Через  $\Omega'_\delta$  обозначим пересечение круга радиусом  $\delta$  с центром в особой точке  $O(0, 0)$  и замыканием области  $\Omega$ , т. е.  $\Omega'_\delta = \{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}: x_1^2 + x_2^2 \leq \delta^2, \delta > 0\}$ . Далее определим функцию  $\rho(\mathbf{x})$  в  $\bar{\Omega}$ . Ее значение в каждой точке  $\mathbf{x}$  совпадает с расстоянием до особой точки  $O(0, 0)$ , если  $\mathbf{x} \in \Omega'_\delta$ , и равно величине  $\delta$ , если  $\mathbf{x} \in \Omega \setminus \Omega'_\delta$ . Функцию  $\rho(\mathbf{x})$  будем называть весовой функцией.

Определим необходимые пространства и множества обобщенных функций.

Введем весовое пространство  $L_{2,\gamma}(\Omega)$ . Определенная в  $\Omega$  функция  $w(\mathbf{x})$  принадлежит пространству  $L_{2,\gamma}(\Omega)$ , если ее норма

$$\|w\|_{L_{2,\gamma}(\Omega)} = \sqrt{\int_{\Omega} \rho^{2\gamma}(\mathbf{x}) w^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}$$

ограничена. Причем если  $\gamma = 0$ , то пространство  $L_{2,0}(\Omega)$  совпадает с пространством Лебега  $L_2(\Omega)$  и  $\|\cdot\|_{L_{2,0}(\Omega)} \equiv \|\cdot\|_{L_2(\Omega)}$ .

Введем весовое пространство вектор-функции  $\mathbf{L}_{2,\gamma}(\Omega)$ . Определенная в  $\Omega$  вектор-функция  $\mathbf{v} = (v_1(\mathbf{x}), v_2(\mathbf{x}))$  принадлежит пространству  $\mathbf{L}_{2,\gamma}(\Omega)$ , если  $v_i(\mathbf{x}) \in L_{2,\gamma}(\Omega)$ ,  $i = 1, 2$ , и ее норма

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}_{2,\gamma}(\Omega)} = \sqrt{\int_{\Omega} \rho^{2\gamma}(\mathbf{x}) (v_1^2(\mathbf{x}) + v_2^2(\mathbf{x})) d\mathbf{x}}$$

ограничена. Причем если  $\gamma = 0$ , то  $\mathbf{L}_{2,0}(\Omega) \equiv \mathbf{L}_2(\Omega)$  и  $\|\cdot\|_{\mathbf{L}_{2,0}(\Omega)} \equiv \|\cdot\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}$ .

Через  $D^m w(\mathbf{x}) = \frac{\partial^{m_1} w(\mathbf{x})}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2}}$  обозначим  $m$ -ю обобщенную производную функции  $w(\mathbf{x})$ ,  $|m| = m_1 + m_2$ ,  $m_i$  — неотрицательные целые числа. Введем весовое пространство  $W_{2,\gamma}^k(\Omega)$  ( $k$  — неотрицательное целое число). Определенная в  $\Omega$  функция  $w(\mathbf{x})$  принадлежит пространству  $W_{2,\gamma}^k(\Omega)$ , если ее норма

$$\|w\|_{W_{2,\gamma}^k(\Omega)} = \sqrt{\sum_{|m| \leq k} \|\rho^\gamma |D^m w|\|_{L_2(\Omega)}^2} \tag{1}$$

ограничена. Если  $k = 0$ , то  $W_{2,\gamma}^0(\Omega) \equiv L_{2,\gamma}(\Omega)$  и  $\|\cdot\|_{W_{2,\gamma}^0(\Omega)} \equiv \|\cdot\|_{L_{2,\gamma}(\Omega)}$ . Обозначим через  $\mathbf{W}_{2,\gamma}^k(\Omega)$  весовое пространство вектор-функций. Определенная в  $\Omega$  вектор-функция  $\mathbf{v} = (v_1(\mathbf{x}), v_2(\mathbf{x}))$  принадлежит пространству  $\mathbf{W}_{2,\gamma}^k(\Omega)$ , если ее норма

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}_{2,\gamma}^k(\Omega)} = \sqrt{\sum_{i=1}^2 \left( \sum_{|m| \leq k} \|\rho^\gamma |D^m v_i|\|_{L_2(\Omega)}^2 \right)} \tag{2}$$

ограничена. При  $k = 0$ ,  $\mathbf{W}_{2,\gamma}^0(\Omega) \equiv \mathbf{L}_{2,\gamma}(\Omega)$  и  $\|\cdot\|_{\mathbf{W}_{2,\gamma}^0(\Omega)} \equiv \|\cdot\|_{\mathbf{L}_{2,\gamma}(\Omega)}$ .

Через  $W_{2,\gamma}^1(\Omega, \delta)$  для  $\gamma > 0$  обозначим множество функций  $w(\mathbf{x})$  из пространства  $W_{2,\gamma}^1(\Omega)$ , удовлетворяющих условиям

$$|w(\mathbf{x})| \leq C_1 \left( \frac{\delta}{\rho(\mathbf{x})} \right)^\gamma, \quad \mathbf{x} \in \Omega'_\delta, \tag{3}$$

$$|D^1 w(\mathbf{x})| \leq C_1 \left( \frac{\delta}{\rho(\mathbf{x})} \right)^{\gamma+1}, \quad \mathbf{x} \in \Omega'_\delta, \tag{4}$$

$$\int_{\overline{\Omega} \setminus \Omega'_\delta} \rho^{2\gamma}(\mathbf{x}) u^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \geq C_2 \tag{5}$$

с ограниченной при  $k = 1$  нормой (1) ( $C_1$  и  $C_2$  — положительные константы в соотношениях (3)–(5)). Через  $L_{2,\gamma}(\Omega, \delta)$  обозначим множество функций из пространства  $L_{2,\gamma}(\Omega)$ , подчиняющихся условиям (3) и (5), с нормой пространства  $L_{2,\gamma}(\Omega)$ .  $L_{2,\gamma}^0(\Omega, \delta)$  — подмножество  $L_{2,\gamma}(\Omega, \delta)$  таких функций  $w(\mathbf{x})$ , что  $L_{2,\gamma}^0(\Omega, \delta) = \{w(\mathbf{x}) \in L_{2,\gamma}(\Omega, \delta) : \int_{\Omega} \rho^\gamma(\mathbf{x}) w(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0\}$ .

Определим множество вектор-функций  $\mathbf{W}_{2,\gamma}^1(\Omega, \delta)$ . Заданная в области  $\Omega$  вектор-функция  $\mathbf{v} = (v_1(\mathbf{x}), v_2(\mathbf{x}))$  принадлежит множеству  $\mathbf{W}_{2,\gamma}^1(\Omega, \delta)$ , если  $v_i(\mathbf{x}) \in W_{2,\gamma}^1(\Omega)$  и для каждой его компоненты справедливы соотношения (3)–(5), с ограниченной при  $k = 1$  нормой (2). Аналогично вводится множество  $\mathbf{L}_{2,\gamma}(\Omega, \delta)$  для вектор-функций  $\mathbf{v} = (v_1(\mathbf{x}), v_2(\mathbf{x}))$  в  $\Omega$ . Для этого необходимо, чтобы  $v_i(\mathbf{x}) \in L_{2,\gamma}(\Omega)$ , для которых выполняются условия (3) и (5), с ограниченной при  $k = 0$  нормой (2).

Через  $\overset{o}{W}_{2,\gamma}^1(\Omega, \delta)$  обозначим подмножество множества  $W_{2,\gamma}^1(\Omega, \delta)$ , которое является замыканием по норме (1) ( $k = 1$ ) множества бесконечно дифференцируемых финитных в  $\Omega$  функций, удовлетворяющих условиям (3)–(5). Через  $W_{2,\gamma}^{1/2}(\Gamma, \delta)$  обозначим множество функций  $\varphi(\mathbf{x})$  на границе  $\Gamma$  области  $\Omega$ , если существует продолжение  $\Phi(\mathbf{x})$  в  $\Omega$  из множества  $W_{2,\gamma}^1(\Omega, \delta)$  такое, что  $\Phi(\mathbf{x})$  совпадает с  $\varphi(\mathbf{x})$  на  $\Gamma$ , с нормой  $\|\varphi\|_{W_{2,\gamma}^{1/2}(\Gamma, \delta)} = \inf_{\Phi|_{\Gamma}=\varphi} \|\Phi\|_{W_{2,\gamma}^1(\Omega)}$ .

По аналогии с вышеизложенным вводятся множества вектор-функций  $\overset{o}{\mathbf{W}}_{2,\gamma}^1(\Omega, \delta)$  и  $\mathbf{W}_{2,\gamma}^1(\Gamma, \delta)$  в  $\Omega$  и на  $\Gamma$  соответственно.

## 2. Постановка задачи и определение $R_\gamma$ -обобщенного решения

Запишем уравнения Навье–Стокса несжимаемой вязкой жидкости в переменных «скорость – давление» в конвективной форме: найти  $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_1(\mathbf{x}, t), u_2(\mathbf{x}, t))$  (вектор скоростей) и  $p \equiv p(\mathbf{x}, t)$  (кинематическое давление), удовлетворяющие системе уравнений

$$d \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \bar{\nu} \Delta \mathbf{u} + d(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{в} \quad \Omega \times (0, T], \quad (6)$$

при заданных коэффициентах плотности  $d > 0$ , кинематической вязкости  $\bar{\nu} > 0$  и массовых силах  $\mathbf{f} \equiv \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = (f_1(\mathbf{x}, t), f_2(\mathbf{x}, t))$ . Дополним систему (6) начальным и граничным условиями

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad \mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{на} \quad \Gamma \times (0, T], \quad (7)$$

где  $\mathbf{u}_0 \equiv \mathbf{u}_0(\mathbf{x})$  и  $\mathbf{g} \equiv \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = (g_1(\mathbf{x}, t), g_2(\mathbf{x}, t))$  – заданные функции в  $\Omega$  и на  $\Gamma \times (0, T]$  соответственно.

Линеаризация, основанная на итерациях Пикара (см. [Elman et al., 2005] и цитируемую там литературу), и применение неявных схем по времени для (6) приводят к приведенной ниже системе.

Задача состоит в том, чтобы найти  $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}(\mathbf{x}) = (u_1(\mathbf{x}), u_2(\mathbf{x}))$  (вектор скоростей) и  $p \equiv p(\mathbf{x})$  (давление), удовлетворяющие системе уравнений и граничным условиям

$$\alpha d \mathbf{u} - \bar{\nu} \Delta \mathbf{u} + d(\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{в} \quad \Omega, \quad (8)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad (9)$$

где  $\alpha > 0$  и  $\mathbf{a} \equiv \mathbf{a}(\mathbf{x}) = (a_1(\mathbf{x}), a_2(\mathbf{x}))$  – известное приближение к  $\mathbf{u}$  в  $\Omega$ ,  $\mathbf{f} \equiv \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}))$  и  $\mathbf{g} \equiv \mathbf{g}(\mathbf{x}) = (g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}))$  – заданные функции в  $\Omega$  и на  $\Gamma$  соответственно. Для линеаризованной системы (8), (9) как и для исходной системы (6), (7), справедливы законы сохранения момента и массы.

В настоящей работе определим  $R_\gamma$ -обобщенное решение задачи (8), (9) и построим приближенный метод его нахождения с помощью весового метода конечных элементов. Реализуем численный метод решения задачи (8), (9) и покажем преимущество нашего подхода над классическим в  $L$ -образной области, т. е. в области, имеющей тупой внутренний угол на границе многоугольной области  $\Omega$ , равный  $\frac{3\pi}{2}$ .

Для определения  $R_\nu$ -обобщенного решения задачи (8), (9) введем необходимые билинейные и линейную формы:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} [\alpha d \rho^{2\nu}(\mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) + \bar{\nu} \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \nabla (\rho^{2\nu}(\mathbf{x}) \mathbf{v}(\mathbf{x})) + d \rho^{2\nu}(\mathbf{x}) (\mathbf{a}(\mathbf{x}) \cdot \nabla) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x})] dx,$$

$$b(\mathbf{v}, p) = - \int_{\Omega} p(\mathbf{x}) \operatorname{div} (\rho^{2\nu} \mathbf{v}(\mathbf{x})) dx, \quad c(\mathbf{u}, q) = - \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}) (\rho^{2\nu}(\mathbf{x}) q(\mathbf{x})) dx,$$

$$l(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \rho^{2\nu}(\mathbf{x}) \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) dx.$$

**Определение 1** ( $R_\nu$ -обобщенного решения). Пару функций  $(\mathbf{u}_\nu(\mathbf{x}), p_\nu(\mathbf{x})) \in \mathbf{W}_{2,\nu}^1(\Omega, \delta) \times L_{2,\nu}^0(\Omega, \delta)$  назовем  $R_\nu$ -обобщенным решением задачи (8), (9), если  $\mathbf{u}_\nu(\mathbf{x})$  удовлетворяет условию (9) на  $\Gamma$  и выполняются интегральные тождества

$$a(\mathbf{u}_\nu, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p_\nu) = l(\mathbf{v}), \quad c(\mathbf{u}_\nu, q) = 0$$

для всех пар функций  $(\mathbf{v}(\mathbf{x}), q(\mathbf{x})) \in \mathbf{W}_{2,\nu}^1(\Omega, \delta) \times L_{2,\nu}^0(\Omega, \delta)$  и заданных  $\mathbf{a}(\mathbf{x}) \in \mathbf{W}_{2,\mu}(\Omega, \delta)$ ,  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbf{L}_{2,\mu}(\Omega, \delta)$ ,  $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \in \mathbf{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Gamma, \delta)$ ,  $\nu \geq \mu$ .

### 3. Построение весового метода конечных элементов

В данном параграфе в  $L$ -образной области  $\Omega$  построим весовой метод конечных элементов, определим приближенное  $R_\nu$ -обобщенное решение задачи (8), (9) и предложим итерационный алгоритм решения полученной системы линейных алгебраических уравнений.

Пусть  $\Omega = (-a, a) \times (-a, a) \setminus [0, a] \times [-a, 0]$ ,  $a > 0$ . Выполним триангуляцию  $T_h$  замыкания области  $\Omega$ . Для этого горизонтальными и вертикальными прямыми  $x_1^{(j)} = -a + jh$ ,  $x_2^{(i)} = -a + ih$ ,  $j, i = 0, \dots, N$ , разобьем  $\bar{\Omega}$  на замкнутые квадраты  $M^l$  со стороной, равной  $h$ , где  $h = \frac{2a}{N}$ . Их совокупность обозначим через  $M = \{M^l\}_{l=1}^{\frac{3N^2}{4}}$ ,  $N$  — четное число. Затем каждый квадрат  $M^l$  диагональю (соединяющей нижнюю левую и верхнюю правую вершины) поделим на два треугольника. Рассмотрим замыкания полученных треугольников, которые обозначим через  $L^i$  и назовем макроэлементами. Пусть  $L$  — их совокупность, т. е.  $L = \{L^i\}_{i=1}^{\frac{3N^2}{2}}$ . Далее точку пересечения медиан макроэлемента  $L^i$  соединим с его вершинами. Таким образом,  $L^i$  разбиваем на три треугольника, их замыкания обозначим через  $K^j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , и назовем конечными элементами триангуляции  $T_h$ . Пусть  $\Omega_h = \bigcup_{K^j \in T_h} K^j$ .

Вершины и середины сторон конечных элементов обозначим через  $R_l$  и  $S_k$  соответственно. Определим два множества узлов:

1) для компонент вектора скоростей:

$$Y_h = Y_h^\Omega \cup Y_h^\Gamma = \{R_l \cup S_k\}, \text{ причем } Y_h^\Omega \text{ — множество узлов, принадлежащих } \Omega, \text{ и } Y_h^\Gamma \text{ — } \Gamma;$$

2) для скалярной функции давления:

$Z_h = \{N_i\}$  — множество узлов, где  $N_i$  совпадает с узлом  $R_k$  на конечном элементе. Причем  $N_l$  и  $N_j$ , совпадающие с одним узлом  $R_k$  (вершиной), но относящиеся к разным конечным элементам, являются различными узлами, а значит, и степенями свободы. Более подробное распределение узлов двух множеств представлено на примере макроэлемента  $L^i$  (рис. 1).

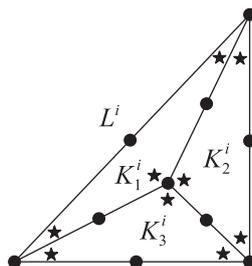


Рис. 1. Макроэлемент  $L^i$ :  $\bullet$  — (узлы) элементы множества  $Y_h$  (для компонент вектора скоростей),  $\star$  — множества  $Z_h$  (для функции давления)

Определим конечно-элементную пару пространств, предложенную Скоттом и Вогелиусом (С–В) (см. [Scott, Vogelius, 1985]). Для компонент вектора скоростей используем многочлены 2-й степени, их пространство:

$$S^h = \{w^h \in C(\Omega) : w^h|_K \in P_2(K) \text{ для любого } K \in T_h\};$$

для скалярной функции давления — 1-й степени, их пространство:

$$G^h = \{q^h \in L_2(\Omega) : q^h|_K \in P_1(K) \text{ для любого } K \in T_h\}.$$

Отметим, что пространство  $S^h$  совпадает с соответствующим пространством классической конечно-элементной пары Тейлора–Худа (Т–Х) —  $P_2 \setminus P_1$ , а пространство  $G^h$  рассматриваемой конечно-элементной пары отличается от соответствующего пространства (для давления) в паре Т–Х. Функции принадлежат пространству  $L_2(\Omega)$  и не обязаны быть непрерывными. Размерность пространства  $G^h$  существенно больше, чем в классической паре Т–Х. Дело в том, что для конечно-элементной пары С–В справедливо выполнение закона сохранения массы в сильном смысле (т. е. в узлах) (см. [Scott, Vogelius, 1985]), а не в слабом (интегральном) смысле, как для классической конечно-элементной пары Т–Х.

На основании введенных пространств  $S^h$  и  $G^h$  определим базисные функции специального вида и построим схему весового метода конечных элементов для задачи (8), (9).

Для компонент вектора скоростей: каждому внутреннему узлу  $M_k \in Y_h^\Omega$  поставим в соответствие базисную функцию

$$\theta_k(\mathbf{x}) = \rho^{v^*}(\mathbf{x}) \cdot \varphi_k(\mathbf{x}), \quad \varphi_k(\mathbf{x}) \in S^h, \quad \varphi_k(M_i) = \delta_{ki}, \quad k, i = 0, 1, \dots$$

Для скалярной функции давления: каждому узлу  $N_l \in Z_h$  поставим в соответствие базисную функцию

$$\chi_l(\mathbf{x}) = \rho^{\mu^*}(\mathbf{x}) \cdot \psi_l(\mathbf{x}), \quad \psi_l(\mathbf{x}) \in G^h, \quad \psi_l(N_j) = \delta_{lj}, \quad l, j = 0, 1, \dots,$$

где  $v^*$  и  $\mu^*$  — действительные числа и  $\delta_{lj} = \begin{cases} 1, & j = l, \\ 0, & j \neq l. \end{cases}$

Определим пространство  $V^h$  — пространство для компонент  $w_{v,i}^h(\mathbf{x})$ ,  $i = 1, 2$ , вектора скоростей  $\mathbf{w}_v^h(\mathbf{x})$  — как линейную оболочку, натянутую на множество базисных функций  $\{\theta_k(\mathbf{x})\}_k$ , т. е.

$$w_{v,1}^h(\mathbf{x}) = \sum_k r_k^1 \cdot \theta_k(\mathbf{x}), \quad w_{v,2}^h(\mathbf{x}) = \sum_k r_k^2 \cdot \theta_k(\mathbf{x}), \quad (10)$$

где

$$r_k^i = \rho^{-v^*}(M_k) \cdot \tilde{r}_k^i, \quad i = 1, 2. \quad (11)$$

Введем пространство  $Q^h$  — пространство для скалярной функции давления  $q_v^h(\mathbf{x})$  — как линейную оболочку, натянутую на множество базисных функций  $\{\chi_l(\mathbf{x})\}_l$ , т. е.

$$q_v^h(\mathbf{x}) = \sum_l t_l \cdot \chi_l(\mathbf{x}), \tag{12}$$

где

$$t_l = \rho^{-\mu^*} (N_l) \cdot \tilde{t}_l. \tag{13}$$

Коэффициенты  $r_k^i$  и  $t_l$  в (10) и (12) являются решением системы (14) (см. определение 2 ниже), а коэффициенты  $\tilde{r}_k^i$  и  $\tilde{t}_l$  в (11) и (13) есть суть значений (компонент вектора скоростей и давления искомого решения) в узлах  $M_k \in Y_h^\Omega$  и  $N_l \in Z_h$  соответственно.

Кроме этого, введем подпространство  $V_0^h$  пространства  $V^h$ :

$$V_0^h = \{w^h(\mathbf{x}) \in V^h : w^h(M_k)|_{M_k \in Y_h^\Gamma} = 0\}.$$

Пусть  $\mathbf{V}^h = V^h \times V^h$ ,  $\mathbf{V}_0^h = V_0^h \times V_0^h$  и  $\mathbf{V}^h \subset \mathbf{W}_{2,\nu}^1(\Omega_h, \delta)$ ,  $\mathbf{V}_0^h \subset \mathbf{W}_{2,\nu}^1(\Omega_h, \delta)$ ,  $Q^h \subset L_{2,\nu}^0(\Omega_h, \delta)$ .

Определим приближенное  $R_\nu$ -обобщенное решение задачи (8), (9).

**Определение 2** (приближенного  $R_\nu$ -обобщенного решения). Приближенным  $R_\nu$ -обобщенным решением задачи (8), (9), по весовому методу конечных элементов, назовем пару  $(\mathbf{u}_v^h(\mathbf{x}), p_v^h(\mathbf{x})) \in \mathbf{V}^h \times Q^h$  ( $\mathbf{u}_v^h(\mathbf{x}) = (u_{v,1}^h(\mathbf{x}), u_{v,2}^h(\mathbf{x}))$ ) в узлах  $Y_h^\Gamma$  удовлетворяет граничному условию (9)), для которой справедливы тождества

$$a(\mathbf{u}_v^h, \mathbf{v}^h) + b(\mathbf{v}^h, p_v^h) = l(\mathbf{v}^h), \quad c(\mathbf{u}_v^h, q^h) = 0 \tag{14}$$

для всех пар функций  $(\mathbf{v}^h(\mathbf{x}), q^h(\mathbf{x})) \in \mathbf{V}_0^h \times Q^h$  и заданных  $\mathbf{a}(\mathbf{x}) \in \mathbf{W}_{2,\mu}^1(\Omega, \delta)$ ,  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbf{L}_{2,\mu}(\Omega, \delta)$ ,  $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \in \mathbf{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Gamma, \delta)$ ,  $\nu \geq \mu$ .

Решаем систему (14) методом Галёркина, последовательно подставляя вместо функций  $v_m^h(\mathbf{x})$  ( $\mathbf{v}^h(\mathbf{x}) = (v_1^h(\mathbf{x}), v_2^h(\mathbf{x}))$ ) в  $m$ -м уравнении ( $m = 1, 2$ ) базисные функции  $\theta_k(\mathbf{x}) \in V_0^h$ ,  $\theta_k(\mathbf{x}) = \rho^{\nu^*}(\mathbf{x}) \cdot \varphi_k(\mathbf{x})$ :

$$\begin{aligned} & \sum_i r_i^m \cdot \left[ \int_{(\Omega_h \setminus \Omega'_\delta) \cup \text{supp}\{\varphi_k(\mathbf{x})\}} \delta^{2(\nu+\nu^*)} \left[ d(\alpha\varphi_i(\mathbf{x}) + a_1(\mathbf{x}) \frac{\partial\varphi_i(\mathbf{x})}{\partial x_1} + a_2(\mathbf{x}) \frac{\partial\varphi_i(\mathbf{x})}{\partial x_2}) \varphi_k(\mathbf{x}) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \bar{\nu} \left( \frac{\partial\varphi_i(\mathbf{x})}{\partial x_1} \frac{\partial\varphi_k(\mathbf{x})}{\partial x_1} + \frac{\partial\varphi_i(\mathbf{x})}{\partial x_2} \frac{\partial\varphi_k(\mathbf{x})}{\partial x_2} \right) \right] d\mathbf{x} + \right. \\ & + \int_{\Omega'_\delta \cup \text{supp}\{\varphi_k(\mathbf{x})\}} \rho^{2(\nu+\nu^*)}(\mathbf{x}) \left[ (\nu^*(2\nu + \nu^*)\rho^{-2}(\mathbf{x})\bar{\nu} + \alpha d + \nu^* d \rho^{-2}(\mathbf{x})(a_1(\mathbf{x})x_1 + a_2(\mathbf{x})x_2)) \varphi_i(\mathbf{x}) + \right. \\ & \quad \left. + (2\nu + \nu^*)\bar{\nu}\rho^{-2}(\mathbf{x}) \left( x_1 \frac{\partial\varphi_i(\mathbf{x})}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial\varphi_i(\mathbf{x})}{\partial x_2} \right) + d \left( a_1(\mathbf{x}) \frac{\partial\varphi_i(\mathbf{x})}{\partial x_1} + a_2(\mathbf{x}) \frac{\partial\varphi_i(\mathbf{x})}{\partial x_2} \right) \right] \varphi_k(\mathbf{x}) + \\ & \quad \left. + \bar{\nu} \left( \frac{\partial\varphi_i(\mathbf{x})}{\partial x_1} \frac{\partial\varphi_k(\mathbf{x})}{\partial x_1} + \frac{\partial\varphi_i(\mathbf{x})}{\partial x_2} \frac{\partial\varphi_k(\mathbf{x})}{\partial x_2} \right) + \bar{\nu}\nu^* \rho^{-2}(\mathbf{x}) \varphi_i(\mathbf{x}) \left( x_1 \frac{\partial\varphi_k(\mathbf{x})}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial\varphi_k(\mathbf{x})}{\partial x_2} \right) \right] d\mathbf{x} \Big] - \\ & \quad - \sum_j t_j \cdot \left[ \int_{(\Omega_h \setminus \Omega'_\delta) \cup \text{supp}\{\varphi_k(\mathbf{x})\}} \delta^{2\nu+\nu^*+\mu^*} \psi_j(\mathbf{x}) \frac{\partial\varphi_k(\mathbf{x})}{\partial x_m} d\mathbf{x} + \right. \\ & \quad \left. + \int_{\Omega'_\delta \cup \text{supp}\{\varphi_k(\mathbf{x})\}} \rho^{2\nu+\nu^*+\mu^*}(\mathbf{x}) \psi_j(\mathbf{x}) \left[ (2\nu + \nu^*)\rho^{-2}(\mathbf{x})x_m \varphi_k(\mathbf{x}) + \frac{\partial\varphi_k(\mathbf{x})}{\partial x_m} \right] d\mathbf{x} \right] = \\ & = \int_{(\Omega_h \setminus \Omega'_\delta) \cup \text{supp}\{\varphi_k(\mathbf{x})\}} f_m \delta^{2\nu+\nu^*} \varphi_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega'_\delta \cup \text{supp}\{\varphi_k(\mathbf{x})\}} f_m \rho^{2\nu+\nu^*}(\mathbf{x}) \varphi_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad k = 0, 1, \dots; \end{aligned}$$

вместо  $q^h(\mathbf{x})$  в 3-м уравнении — базисные функции  $\chi_l(\mathbf{x}) \in Q^h$ ,  $\chi_l(\mathbf{x}) = \rho^{\mu^*}(\mathbf{x}) \cdot \psi_l(\mathbf{x})$ :

$$\begin{aligned} & - \left( \sum_i r_i^1 \cdot \left[ \int_{(\Omega_h \setminus \Omega'_\delta) \cup \text{supp}\{\psi_l(\mathbf{x})\}} \delta^{2\nu+\nu^*+\mu^*} \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{x})}{\partial x_1} \psi_l(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \right. \right. \\ & + \int_{\Omega'_\delta \cup \text{supp}\{\psi_l(\mathbf{x})\}} \rho^{2\nu+\nu^*+\mu^*}(\mathbf{x}) \left( \rho^{-2}(\mathbf{x}) \nu^* x_1 \varphi_i(\mathbf{x}) + \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{x})}{\partial x_1} \right) \psi_l(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \left. \right] + \\ & + \sum_i r_i^2 \cdot \left[ \int_{(\Omega_h \setminus \Omega'_\delta) \cup \text{supp}\{\psi_l(\mathbf{x})\}} \delta^{2\nu+\nu^*+\mu^*} \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{x})}{\partial x_2} \psi_l(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \right. \\ & \left. \left. + \int_{\Omega'_\delta \cup \text{supp}\{\psi_l(\mathbf{x})\}} \rho^{2\nu+\nu^*+\mu^*}(\mathbf{x}) \left( \rho^{-2}(\mathbf{x}) \nu^* x_2 \varphi_i(\mathbf{x}) + \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{x})}{\partial x_2} \right) \psi_l(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right] = 0, \quad l = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Конечно-элементная задача (14) порождает систему линейных алгебраических уравнений с седловой точкой вида

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega \\ \mathbf{z} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

В нашем случае  $\mathbf{A}$  — положительно-определенная квадратная матрица,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}^T$  — прямоугольные (не квадратные) матрицы,  $\zeta = \mathbf{u}_v^h$ ,  $\eta = p_v^h$ ,  $\omega = \mathbf{F}^h$ ,  $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ .

Для нахождения решения системы (15) построим сходящийся итерационный процесс (см. [Bramble et al., 1997]). Для этого

- 1) выберем произвольные начальные приближения  $\eta^0, \zeta^0$  для (15);
- 2) проведем итерации  $k = 0, 1, 2, \dots$ , далее — 3) и 4), пока не будет выполнено условие остановки итерационного процесса;
- 3) вычислим  $\zeta^{k+1} = \zeta^k + \hat{\mathbf{A}}^{-1}(\omega - \mathbf{A}\zeta^k - \mathbf{B}\eta^k)$ ;
- 4) найдем  $\eta^{k+1} = \eta^k + \hat{\mathbf{S}}^{-1}(\mathbf{C}^T \zeta^{k+1} - \mathbf{z})$ .

В пунктах 3) и 4)  $\hat{\mathbf{A}}$  и  $\hat{\mathbf{S}}$  — переобуславливающие матрицы для матриц  $\mathbf{A}$  и дополнения по Шуру  $\mathbf{S} = \mathbf{C}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$  соответственно. Подробно о построении переобуславливателя и решения системы (15) с ним см., например, в [Rukavishnikov, Rukavishnikov, 2018].

#### 4. Результаты численных экспериментов

В данном параграфе представим результаты численных экспериментов задачи (8), (9) в  $L$ -образной области  $\Omega$ . Покажем преимущество предложенного весового метода конечных элементов над классическим подходом.

Пусть  $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1) \setminus [0, 1] \times [-1, 0]$ . В качестве точного решения задачи (8), (9) в полярных координатах возьмем пару  $(\mathbf{u}, p)$ :

$$u_1(r, \varphi) = r^\lambda (\Theta'(\varphi) \cdot \cos \varphi + (1 + \lambda) \cdot \Theta(\varphi) \cdot \sin \varphi), \quad (16)$$

$$u_2(r, \varphi) = r^\lambda (\Theta'(\varphi) \cdot \sin \varphi + (1 + \lambda) \cdot \Theta(\varphi) \cdot \cos \varphi), \quad (17)$$

$$p(r, \varphi) = r^{\lambda-1} \frac{(1 + \lambda)^2 \cdot \Theta'(\varphi) + \Theta'''(\varphi)}{\lambda - 1}. \quad (18)$$

Параметр  $\lambda$  в (16)–(18) является наименьшим положительным корнем трансцендентного уравнения  $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\lambda\right) = \lambda$ , его приближенное значение имеет следующий вид:  $\lambda \approx 0.5444838205973307$ . При таком  $\lambda$  пара функций  $(\mathbf{u}, p)$  аналитична в  $\overline{\Omega} \setminus (0, 0)$ , но  $u_i \notin W_2^2(\Omega)$ ,  $i = 1, 2$ , и  $p \notin W_2^1(\Omega)$ .

Вспомогательные функции  $\Theta(\varphi)$ ,  $\Theta'(\varphi)$  и  $\Theta'''(\varphi)$  в (16)–(18) задаются следующими формулами:

$$\Theta(\varphi) = \frac{\sin((1 + \lambda)\varphi) \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2}\lambda\right)}{1 + \lambda} - \frac{\sin((1 - \lambda)\varphi) \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2}\lambda\right)}{1 - \lambda} + \cos((1 - \lambda)\varphi) - \cos((1 + \lambda)\varphi),$$

$$\Theta'(\varphi) = (1 + \lambda) \sin((1 + \lambda)\varphi) - (1 - \lambda) \sin((1 - \lambda)\varphi) - \cos\left(\frac{3\pi}{2}\lambda\right) \cdot \cos((1 - \lambda)\varphi) + \cos\left(\frac{3\pi}{2}\lambda\right) \cdot \cos((1 + \lambda)\varphi),$$

$$\Theta'''(\varphi) = -(1 + \lambda)^3 \sin((1 + \lambda)\varphi) + (1 - \lambda)^3 \sin((1 - \lambda)\varphi) + \cos\left(\frac{3\pi}{2}\lambda\right) \cdot (1 - \lambda)^2 \cdot \cos((1 - \lambda)\varphi) - \cos\left(\frac{3\pi}{2}\lambda\right) \cdot (1 + \lambda)^2 \cdot \cos((1 + \lambda)\varphi).$$

При этом в численных экспериментах будем полагать, что параметры  $\alpha = \bar{\nu} = d = 1$  и заданная вектор-функция  $\mathbf{a} = b \mathbf{u}$ , где  $b = 0.95$ .

Таблица 1. Зависимость величины погрешности обобщенного решения, с использованием стандартного метода конечных элементов ( $\nu = 0, \delta = 1, \nu^* = \mu^* = 0$ ), от числа отрезков разбиения  $N$  в норме пространства  $W_2^1(\Omega)$

$N$	74	148	296
	$3.649e-1$	$2.488e-1$	$1.707e-1$

Таблица 2. Зависимость величины погрешности  $R_\nu$ -обобщенного решения ( $\nu = 1.5$ ), с использованием весового метода конечных элементов, от числа отрезков разбиения  $N$  и величины окрестности  $\delta$  (по столбцам), степени весовой функции  $\nu^*$  (по строкам),  $\mu^* = \nu^*$ , в норме пространства  $W_{2,\nu}^1(\Omega)$

$\delta$	0.015			0.0175		
$(\nu^*, N)$	74	148	296	74	148	296
$\lambda-1$	$3.853e-4$	$1.915e-4$	$9.375e-5$	$5.195e-4$	$2.567e-4$	$1.276e-4$
-0.425	$3.481e-4$	$1.733e-4$	$8.609e-5$	$4.613e-4$	$2.278e-4$	$1.121e-4$
-0.4	$3.112e-4$	$1.540e-4$	$7.687e-5$	$4.141e-4$	$2.056e-4$	$1.030e-4$
-0.375	$3.034e-4$	$1.509e-4$	$7.534e-5$	$3.956e-4$	$1.963e-4$	$9.761e-5$
-0.35	$3.010e-4$	$1.499e-4$	$7.493e-5$	$3.883e-4$	$1.926e-4$	$9.556e-5$
-0.325	$2.964e-4$	$1.474e-4$	$7.288e-5$	<b>3.705e-4</b>	<b>1.846e-4</b>	<b>9.180e-5</b>
-0.3	<b>2.761e-4</b>	<b>1.372e-4</b>	<b>6.829e-5</b>	$3.896e-4$	$1.935e-4$	$9.618e-5$
-0.275	$2.951e-4$	$1.470e-4$	$7.299e-5$	$3.921e-4$	$1.949e-4$	$9.740e-5$
-0.25	$3.281e-4$	$1.631e-4$	$8.098e-5$	$4.249e-4$	$2.105e-4$	$1.042e-4$
-0.225	$3.548e-4$	$1.754e-4$	$8.732e-5$	$4.361e-4$	$2.165e-4$	$1.078e-4$
-0.2	$3.712e-4$	$1.846e-4$	$9.133e-5$	$4.702e-4$	$2.346e-4$	$1.170e-4$
0	$5.001e-4$	$2.497e-4$	$1.246e-4$	$6.428e-4$	$3.189e-4$	$1.584e-4$

Численные эксперименты проведены для разбиений  $\Omega_h$  области  $\overline{\Omega}$  с различным шагом  $h = \frac{2}{N}$ . Величины погрешности  $R_\nu$ -обобщенного и обобщенного ( $\nu = 0, \delta = 1, \nu^* = \mu^* = 0$ )

Таблица 3. Зависимость величины погрешности  $R_\nu$ -обобщенного решения ( $\nu = 1.8$ ), с использованием весового метода конечных элементов, от числа отрезков разбиения  $N$  и величины окрестности  $\delta$  (по столбцам), степени весовой функции  $\nu^*$  (по строкам),  $\mu^* = \nu^*$ , в норме пространства  $W_{2,\nu}^1(\Omega)$

$\delta$	0.015			0.0175		
$(\nu^*, N)$	74	148	296	74	148	296
$\lambda-1$	$1.225e-4$	$6.064e-5$	$3.023e-5$	$1.845e-4$	$9.170e-5$	$4.557e-5$
-0.425	$1.114e-4$	$5.536e-5$	$2.756e-5$	$1.639e-4$	$8.124e-5$	$4.052e-5$
-0.4	$9.860e-5$	$4.876e-5$	$2.426e-5$	$1.498e-4$	$7.420e-5$	$3.688e-5$
-0.375	$9.435e-5$	$4.685e-5$	$2.334e-5$	$1.411e-4$	$7.021e-5$	$3.499e-5$
-0.35	$9.059e-5$	$4.490e-5$	$2.232e-5$	$1.266e-4$	$6.312e-5$	$3.147e-5$
-0.325	$8.429e-5$	$4.182e-5$	$2.087e-5$	$1.217e-4$	$6.049e-5$	$3.016e-5$
-0.3	$8.280e-5$	$4.097e-5$	$2.042e-5$	<b><math>1.128e-4</math></b>	<b><math>5.619e-5</math></b>	<b><math>2.810e-5</math></b>
-0.275	<b><math>7.862e-5</math></b>	<b><math>3.890e-5</math></b>	<b><math>1.936e-5</math></b>	$1.148e-4$	$5.743e-5$	$2.876e-5$
-0.25	$8.799e-5$	$4.354e-5$	$2.168e-5$	$1.213e-4$	$6.072e-5$	$3.027e-5$
-0.225	$9.716e-5$	$4.821e-5$	$2.399e-5$	$1.261e-4$	$6.276e-5$	$3.129e-5$
-0.2	$1.026e-4$	$5.103e-5$	$2.536e-5$	$1.303e-4$	$6.471e-5$	$3.227e-5$
0	$1.544e-4$	$7.716e-5$	$3.845e-5$	$1.894e-4$	$9.374e-5$	$4.664e-5$

решений для компонент вектора скоростей определены при помощи модуля разности между приближенным и точным решениями на элементах триангуляции  $T_h$ , ее величина обозначена через  $\delta_i$  для  $i$ -й компоненты вектора скоростей,  $M$  — ее максимальная величина в  $\bar{\Omega}$  (см. рис. 2, 3), а также в нормах пространств  $W_2^1(\Omega)$  и  $W_{2,\nu}^1(\Omega)$  для обобщенного и  $R_\nu$ -обобщенного решений соответственно (см. таблицы 1–3). Жирным шрифтом в таблицах 2 и 3 выделены те значения свободного параметра  $\nu^*$  (степени весовой функции), для которых достигается наилучший результат по абсолютной величине.

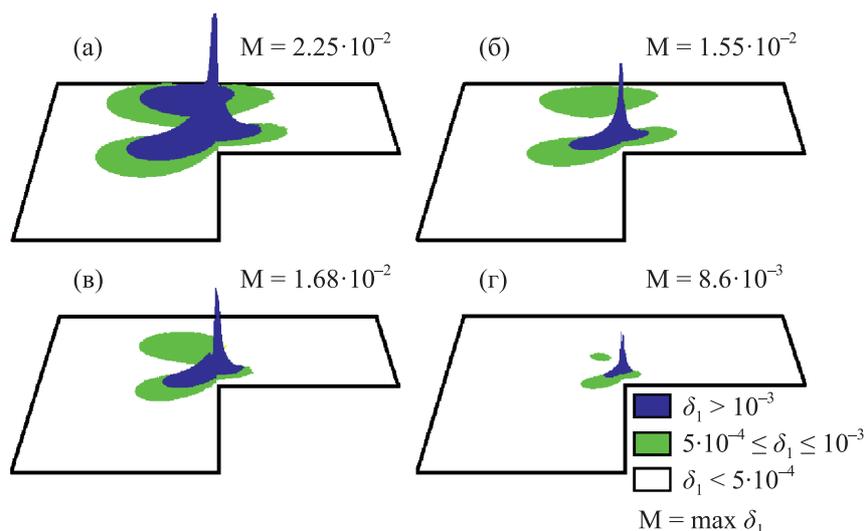


Рис. 2. Графики абсолютной погрешности  $\delta_1$  для первой компоненты вектора скоростей обобщенного ( $\nu = 0$ ,  $\delta = 1$ ,  $\nu^* = \mu^* = 0$ ), при а)  $N = 148$ , б)  $N = 296$ , и  $R_\nu$ -обобщенного ( $\nu = 1.5$ ,  $\delta = 0.015$ ,  $\nu^* = \mu^* = -0.425$ ), при в)  $N = 148$ , г)  $N = 296$ , решений;  $M$  — максимум функции  $\delta_1$  в  $\bar{\Omega}$  для каждого графика а)–г)

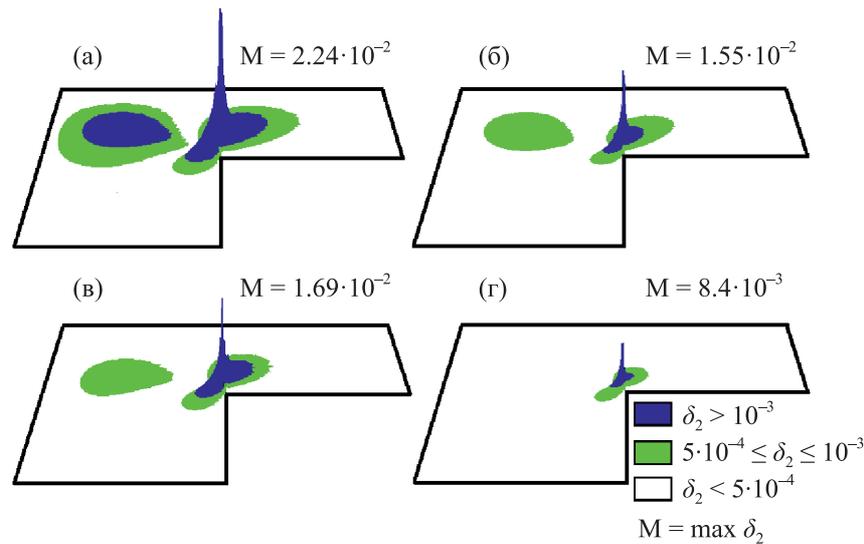


Рис. 3. Графики абсолютной погрешности  $\delta_2$  для второй компоненты вектора скоростей обобщенного ( $\nu = 0$ ,  $\delta = 1$ ,  $\nu^* = \mu^* = 0$ ), при а)  $N = 148$ , б)  $N = 296$ , и  $R_\nu$ -обобщенного ( $\nu = 1.5$ ,  $\delta = 0.015$ ,  $\nu^* = \mu^* = -0.425$ ), при в)  $N = 148$ , г)  $N = 296$ , решений;  $M$  – максимум функции  $\delta_2$  в  $\bar{\Omega}$  на каждом графике а)–г)

## Заключение

В работе определено  $R_\nu$ -обобщенное решение задачи, полученной в результате дискретизации по времени и линеаризации с помощью итераций Пикара нелинейных несжимаемых уравнений Навье – Стокса вязкой жидкости в переменных «скорость – давление». Построен и реализован весовой метод конечных элементов. Базисные функции конечно-элементных пространств включают в себя весовую функцию в некоторой степени в виде множителя, которая зависит от поведения решения в окрестности точки сингулярности.

Проведен численный анализ модельной задачи, решение которой имеет особенность в окрестности входящего угла, равного  $\frac{3\pi}{2}$ . Результаты серии численных экспериментов показали:

- Приближенное  $R_\nu$ -обобщенное решение (весового метода конечных элементов) сходится к точному решению задачи (8), (9) со скоростью  $O(h)$  в норме пространства  $\mathbf{W}_{2,\nu}^1(\Omega)$  (таблицы 2 и 3), в то время как приближенное обобщенное решение (классического метода конечных элементов) сходится к точному решению задачи (8), (9) со скоростью  $O(h^{0.55})$  в норме пространства  $\mathbf{W}_2^1(\Omega)$  (таблица 1). Таким образом, предложенный метод подавляет так называемый эффект загрязнения (см. [Blum, 1990]).
- Для всех значений  $\delta$  из диапазона оптимальных значений ( $\delta \sim h$ ) приближенное  $R_\nu$ -обобщенное решение сходится к точному со скоростью  $O(h)$  в норме пространства  $\mathbf{W}_{2,\nu}^1(\Omega)$ .
- Для всех значений  $\delta$  из диапазона оптимальных значений ( $\delta \sim h$ ) можно определить наилучшую степень  $\nu^*$  весовой функции  $\rho(\mathbf{x})$  с точки зрения наименьшей погрешности (выделено жирным шрифтом в таблицах 2 и 3) в норме пространства  $\mathbf{W}_{2,\nu}^1(\Omega)$ , которая находится между числом, определяющим асимптотику решения  $(1 - \lambda)$  (см. (18)), и нулем. При этом случай, когда степень  $\nu^*$  весовой функции  $\rho(\mathbf{x})$  равна нулю, то есть невесовой метод конечных элементов, хуже, чем когда  $\nu^*$  равна  $(1 - \lambda)$  и тем более когда  $\nu^*$  принимает наилучшее значение (например,  $\nu^* = -0.3$  при  $\nu = 1.5$  и  $\delta = 0.015$ , таблица 2).

- Количество узлов и содержащие их окрестности, при использовании весового МКЭ, в которых величины абсолютной погрешности  $\delta_i$ ,  $i = 1, 2$ , превосходят заданные значения, уменьшаются с ростом  $N$  и существенно меньше, чем при использовании классического МКЭ (см. рис. 2, 3).

Предложенный в работе метод прост в реализации и для достижения заданной точности не требует сгущения сетки и введения вспомогательных уравнений в окрестности точки сингулярности. Разработанный и реализованный алгоритм открывает возможность для решения нестационарных нелинейных уравнений Навье–Стокса течения вязкой несжимаемой жидкости в конвективной форме в области с тупым входящим углом на границе многоугольной области.

Численные эксперименты проведены на вычислительном кластере ЦКП «Центр данных ДВО РАН».

## Список литературы (References)

- Рукавишников В. А.* О дифференциальных свойствах  $R_\nu$ -обобщенного решения задачи Дирихле // ДАН. — 1989. — Т. 309, № 6. — С. 1318–1320.  
*Rukavishnikov V. A.* Differential properties of an  $R_\nu$ -generalized solution of the Dirichlet problem // Soviet Math. Dokl. — 1990. — Vol. 40. — P. 653–655. (Original Russian paper: *Rukavishnikov V. A.* O differentsial'nykh svoystvakh  $R_\nu$ -obobshchennogo resheniya zadachi Dirikhle // DAN. — 1989. — Vol. 309, No. 6. — P. 1318–1320.)
- Рукавишников В. А.* О существовании и единственности  $R_\nu$ -обобщенного решения для краевой задачи с несогласованным вырождением исходных данных // ДАН. — 2014. — Т. 458, № 3. — С. 261–263.  
*Rukavishnikov V. A.* On the existence and uniqueness of an  $R_\nu$ -generalized solution of a boundary value problem with uncoordinated degeneration of the input data // Docl. Math. — 2014. — Vol. 90, Iss. 2. — P. 562–564. (Original Russian paper: *Rukavishnikov V. A.* O sushchestvovanii i yedinstvennosti  $R_\nu$ -obobshchennogo resheniya dlya kraevoy zadachi s nesoglasovannym vyrozhdeniem iskhodnykh dannykh // DAN. — 2014. — Vol. 458, No. 3. — P. 261–263.)
- Рукавишников В. А., Беспалов А. Ю.* Экспоненциальная скорость сходимости метода конечных элементов для задачи Дирихле с сингулярностью решения // ДАН. — 2000. — Т. 374, № 6. — С. 727–731.  
*Rukavishnikov V. A., Bepalov A. Yu.* An exponential rate of convergence of the finite element method for the Dirichlet problem with a singularity of the solution // Docl. Math. — 2000. — Vol. 62, Iss. 2. — P. 266–270. (Original Russian paper: *Rukavishnikov V. A., Bepalov A. Yu.* Ekspontsial'naya skorost' skhodimosti metoda konechnykh elementov dlya zadachi Dirikhle s singulyarnost'yu resheniya // DAN. — 2000. — Vol. 374, No. 6. — P. 727–731.)
- Рукавишников В. А., Кузнецова Е. В.* О принадлежности  $R_\nu$ -обобщенного решения краевой задачи с сингулярностью пространству  $W_{2,\nu+\beta/2+k+1}^{k+2}(\Omega, \delta)$  // Дифференциальные уравнения. — 2009(a). — Т. 45, № 6. — С. 894–898.  
*Rukavishnikov V. A., Kuznetsova E. V.* The  $R_\nu$ -generalized solution with a singularity of a boundary value problem belongs to the space  $W_{2,\nu+\beta/2+k+1}^{k+2}(\Omega, \delta)$  // Differ. Equ. — 2009. — Vol. 45, Issue 6. — P. 913–917. (Original Russian paper: *Rukavishnikov V. A., Kuznetsova E. V.* O prinalozhnosti  $R_\nu$ -obobshchennogo resheniya kraevoy zadachi s singulyarnost'yu prostranstvu  $W_{2,\nu+\beta/2+k+1}^{k+2}(\Omega, \delta)$  // Differentsial'nyye uravneniya. — 2009. — Vol. 45, No. 6. — P. 894–898.)
- Рукавишников В. А., Кузнецова Е. В.* Схема метода конечных элементов для краевой задачи с несогласованным вырождением исходных данных // Сиб. журн. вычисл. матем. — 2009(b). — Т. 12, № 3. — С. 313–324.  
*Rukavishnikov V. A., Kuznetsova E. V.* A scheme of a finite element method for boundary value problems with noncoordinated degeneration of input data // Num. Anal. Appl. — 2009. — Vol. 2, Iss. 3. — P. 250–259. (Original Russian paper: *Rukavishnikov V. A., Kuznetsova E. V.* Skhema metoda konechnykh elementov dlya kraevoy zadachi s nesoglasovannym vyrozhdeniem iskhodnykh dannykh // Sib. zhurn. vychisl. matem. — 2009. — Vol. 12, No. 3. — P. 313–324.)
- Рукавишников В. А., Мосолапов А. О.* Весовой векторный метод конечных элементов и его приложения // Компьютерные исследования и моделирование. — 2019. — Т. 11, № 1. — С. 71–86.  
*Rukavishnikov V. A., Mosolapov A. O.* Vesovoy vektorny method konechnykh elementov i ego prilozheniya [Weighted vector finite element method and its applications] // Computer Research and Modeling. — 2019. — Vol. 11, No. 1. — P. 71–86 (in Russian).

- Рукавишников В. А., Николаев С. Г.* Об  $R_\nu$ -обобщенном решении системы Ламе с угловой сингулярностью // ДАН. — 2015. — Т. 463, № 2. — С. 137–139.  
*Rukavishnikov V. A., Nikolaev S. G.* On the  $R_\nu$ -generalized solution of the Lamé system with corner singularity // *Docl. Math.* — 2015. — Vol. 92, Iss. 1. — P. 421–423. (Original Russian paper: *Rukavishnikov V. A., Nikolaev S. G.* Ob  $R_\nu$ -obobshchennom reshenii sistemy Lame s uglovoy singulyarnost'yu // DAN. — 2015. — Vol. 463, No. 2. — P. 137–139.)
- Рукавишников В. А., Рукавишникова Е. И.* Метод конечных элементов для первой краевой задачи с согласованным вырождением исходных данных // ДАН. — 1994. — Т. 338, № 6. — С. 731–733.  
*Rukavishnikov V. A., Rukavishnikova E. I.* The finite element method for the first boundary value problem with coordinated degeneration of the initial data // *Russian Acad. Sci. Dokl. Math.* — 1995. — Vol. 50, Iss. 2. — P. 335–339. (Original Russian paper: *Rukavishnikov V. A., Rukavishnikova E. I.* Metod konechnykh elementov dlya pervoy krayevoy zadachi s soglasovannym vyrozhdeniyem iskhodnykh dannyykh // DAN. — 1994. — Vol. 338, No. 6. — P. 731–733.)
- Рукавишников В. А., Рукавишникова Е. И.* Существование и единственность  $R_\nu$ -обобщенного решения задачи Дирихле для системы Ламе с угловой сингулярностью // Дифференциальные уравнения. — 2019. — Т. 55, № 6. — С. 848–856.  
*Rukavishnikov V. A., Rukavishnikova E. I.* Existence and uniqueness of an  $R_\nu$ -generalized solution of the Dirichlet problem for the Lamé system with a corner singularity // *Differ. Equ.* — 2019. — Vol. 55, Iss. 6. — P. 832–840. (Original Russian paper: *Rukavishnikov V. A., Rukavishnikova E. I.* Sushchestvovanie i yedinstvennost'  $R_\nu$ -obobshchennogo resheniya zadachi Dirichle dlya sistemy Lame s uglovoy singulyarnost'yu // *Differentsial'nyye uravneniya.* — 2019. — Vol. 55, No. 6. — P. 848–856.)
- Blum H.* The influence of reentrant corners in the numerical approximation of viscous flow problems // *Notes on Numerical Fluid Mechanics.* — 1990. — Vol. 30. — P. 37–46.
- Bramble J. H., Pasciak J. E., Vassilev A. T.* Analysis of the inexact Uzawa algorithm for saddle point problems // *SIAM Journal on Numerical Analysis.* — 1997. — Vol. 34. — P. 1072–1092.
- Burda P., Novotný J., Sístek J.* Precise FEM solution of a corner singularity using an adjusted mesh // *International Journal for Numerical Methods in Fluids.* — 2005. — Vol. 47. — P. 1285–1292.
- Choi H. J., Kweon J. R.* A finite element method for singular solutions of the Navier–Stokes equations on a non-convex polygon // *Journal of Computational and Applied Mathematics.* — 2016. — Vol. 292. — P. 342–362.
- Elman H. C., Silvester D. J., Wathen A. J.* Finite elements and fast iterative solvers: with applications in incompressible fluid dynamics // *Numer. Math. Sci. Comput.* — Oxford: Oxford university press, 2005. — 395 p.
- John L., Pustejovska P., Wohlmuth B., Rude U.* Energy-corrected finite element methods for the Stokes system // *IMA Journal of Numerical Analysis.* — 2017. — Vol. 37, No. 2. — P. 687–729.
- Pyo J. H., Jang D. K.* Algorithms to apply finite element dual singular function method for the Stokes equations including singularities // *J. Korean Soc. Ind. Appl. Math.* — 2019. — Vol. 23, No. 2. — P. 115–138.
- Rukavishnikov V. A., Rukavishnikov A. V.* Weighted finite element method for the Stokes problem with corner singularity // *Journal of Computational and Applied Mathematics.* — 2018. — Vol. 341. — P. 144–156.
- Rukavishnikov V. A., Rukavishnikov A. V.* New numerical method for the rotation form of the Oseen problem with corner singularity // *Symmetry.* — 2019. — Vol. 11, No. 54. — P. 1–17.
- Rukavishnikov V. A., Rukavishnikova H. I.* The finite element method for boundary value problem with strong singularity // *Journal of Computational and Applied Mathematics.* — 2010. — Vol. 234, No. 9. — P. 2870–2882.
- Rukavishnikov V. A., Rukavishnikova H. I.* On the error estimation of the finite element method for the boundary value problems with singularity in the Lebesgue weighted space // *Numerical Functional Analysis and Optimization.* — 2013. — Vol. 34, No. 12. — P. 1328–1347.

- Rukavishnikov V. A., Rukavishnikova E. I.* Weighted finite-element method for Elasticity problems with singularity // Finite element method. Simulation, numerical analysis and solution techniques, eds. Păcurar Răzvan. — London: IntechOpen Limited, 2018. — P. 295–311.
- Salem A., Chorfi N.* Solving the Stokes problem in a domain with corners by the mortar spectral element method // Electronic Journal of Differential Equations. — 2016. — Vol. 2016, No. 337. — P. 1–16.
- Scott L. R., Vogelius M.* Norm estimates for a maximal right inverse of the divergence operator in spaces of piecewise polynomials // Mathematical Modeling and Numerical Analysis. — 1985. — Vol. 19. — P. 111–143.