

УДК: 51-74, 532, 533.6

Методические аспекты численного решения задач внешнего обтекания на локально-адаптивных сетках с использованием пристеночных функций

А. Л. Митин^{1,а}, С. В. Калашников¹, Е. А. Янковский²,
А. А. Аксёнов³, С. В. Жлуктов³, С. А. Чернышев⁴

¹ Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н. Е. Жуковского,
Россия, 140180, г. Жуковский, ул. Жуковского, д. 1

² Московский физико-технический институт, Россия, 140180, г. Жуковский, ул. Гагарина, д. 16

³ Объединенный институт высоких температур РАН, Россия, 125412, г. Москва, ул. Ижорская, д. 13

⁴ ООО «ВИП», Россия, 121205, Москва, территория инновационного центра «Сколково»,
ул. Нобеля, д. 7, эт. 4, пом. № 10, нрм № 9

E-mail: ^а alexmitin03@gmail.com

Получено 19.11.2020, после доработки — 26.12.2020.

Принято к публикации 26.12.2020.

Работа посвящена исследованию возможности повышения эффективности решения задач внешней аэродинамики. Изучаются методические аспекты применения локально-адаптивных неструктурированных расчетных сеток и пристеночных функций для численного моделирования турбулентных течений около летательных аппаратов. Интегрируются осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье–Стокса, которые замыкаются стандартной моделью турбулентности $k-\varepsilon$. Рассматривается обтекание крылового профиля RAЕ 2822 турбулентным дозвуковым потоком вязкого сжимаемого газа. Расчеты проводятся в программном ВГД-комплексе FlowVision. Анализируется эффективность применения технологии сглаживания диффузионных потоков и формулы Брэдшоу для турбулентной вязкости в качестве мер, повышающих точность решения аэродинамических задач на локально-адаптивных сетках. Результаты исследования показывают, что использование технологии сглаживания диффузионных потоков приводит к существенному уменьшению расхождений в величине коэффициента лобового сопротивления между результатами расчетов и экспериментальными данными. Кроме того, обеспечивается регуляризация распределения коэффициента поверхностного трения на криволинейной поверхности профиля. Эти результаты позволяют сделать вывод о том, что данная технология является эффективным способом повышения точности расчетов на локально-адаптивных сетках. Формула Брэдшоу для динамического коэффициента турбулентной вязкости традиционно используется в модели SST $k-\omega$. В настоящей работе исследуется возможность ее применения в стандартной $k-\varepsilon$ -модели турбулентности. Результаты расчетов показывают, что, с одной стороны, данная формула обеспечивает хорошее согласование суммарных аэродинамических характеристик и распределения коэффициента давления по поверхности профиля с экспериментом. Помимо этого, она значительно повышает точность моделирования течения в пограничном слое и в следе. С другой стороны, использование формулы Брэдшоу при моделировании обтекания профиля RAЕ 2822 приводит к занижению коэффициента поверхностного трения. Поэтому в работе делается вывод о том, что практическое применение формулы Брэдшоу требует ее предварительной валидации и калибровки на надежных экспериментальных данных для рассматриваемого класса задач. Результаты работы в целом показывают, что при использовании рассмотренных технологий численное решение задач внешнего обтекания на локально-адаптивных сетках с применением пристеночных функций обеспечивает точность, приемлемую для оперативной оценки аэродинамических характеристик, а ПК FlowVision является эффективным инструментом решения задач предварительного аэродинамического проектирования, концептуального проектирования и оптимизации аэродинамических форм.

Ключевые слова: профиль крыла, осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье–Стокса, модель турбулентности, формула Брэдшоу, локально-адаптивная расчетная сетка, ПК FlowVision

UDC: 51-74, 532, 533.6

Methodical questions of numerical simulation of external flows on locally-adaptive grids using wall functions

A. L. Mitin^{1,a}, S. V. Kalashnikov¹, E. A. Yankovskiy²,
A. A. Aksenov³, S. V. Zhlukov³, S. A. Chernyshev⁴

¹ Central Aerohydrodynamic Institute (TsAGI), 1 Zhukovsky st., Zhukovsky, 140180, Russia

² Moscow Institute of Physics and Technology, 16 Gagarina st., Zhukovsky, 140180, Russia

³ Joint Institute for High Temperatures RAS, 13 Izhorskaya st., Moscow, 125412, Russia

⁴ “NEP” LLC,

wp No. 9, office 10, floor 4, 7 Nobelja st., territory of innovation center Skolkovo, Moscow, 121205, Russia

E-mail: ^a alexmitin03@gmail.com

Received 19.11.2020, after completion — 26.12.2020.

Accepted for publication 26.12.2020.

The work is dedicated to investigation of possibility to increase the efficiency of solving external aerodynamic problems. Methodical questions of using locally-adaptive grids and wall functions for numerical simulation of turbulent flows past flying vehicles are studied. Reynolds-averaged Navier–Stokes equations are integrated. The equations are closed by standard k – ϵ turbulence model. Subsonic turbulent flow of perfect compressible viscous gas past airfoil RAE 2822 is considered. Calculations are performed in CFD software FlowVision. The efficiency of using the technology of smoothing diffusion fluxes and the Bradshaw formula for turbulent viscosity is analyzed. These techniques are regarded as means of increasing the accuracy of solving aerodynamic problems on locally-adaptive grids. The obtained results show that using the technology of smoothing diffusion fluxes essentially decreases the discrepancy between computed and experimental values of the drag coefficient. In addition, the distribution of the skin friction coefficient over the curvilinear surface of the airfoil becomes more regular. These results indicate that the given technology is an effective way to increase the accuracy of calculations on locally-adaptive grids. The Bradshaw formula for the dynamic coefficient of turbulent viscosity is traditionally used in the SST k – ω turbulence model. The possibility to implement it in the standard k – ϵ turbulence model is investigated in the present article. The calculations show that this formula provides good agreement of integral aerodynamic characteristics and the distribution of the pressure coefficient over the airfoil surface with experimental data. Besides that, it essentially augments the accuracy of simulation of the flow in the boundary layer and in the wake. On the other hand, using the Bradshaw formula in the simulation of the air flow past airfoil RAE 2822 leads to under-prediction of the skin friction coefficient. For this reason, the conclusion is made that practical use of the Bradshaw formula requires its preliminary validation and calibration on reliable experimental data available for the considered flows. The results of the work as a whole show that using the technologies discussed in numerical solution of external aerodynamic problems on locally-adaptive grids together with wall functions provides the computational accuracy acceptable for quick assessment of the aerodynamic characteristics of a flying vehicle. So, one can deduce that the FlowVision software is an effective tool for preliminary design studies, for conceptual design, and for aerodynamic shape optimization.

Keywords: airfoil, Reynolds-averaged Navier–Stokes equations, turbulence model, Bradshaw formula, locally-adaptive computational grid, FlowVision software

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2020, vol. 12, no. 6, pp. 1269–1290 (Russian).

© 2020 Alexander L. Mitin, Sergey V. Kalashnikov, Evgeniy A. Yankovskiy,
Andrey A. Aksenov, Sergey V. Zhlukov, Sergey A. Chernyshev

This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Unported License.

To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/>
or send a letter to Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

1. Введение

В прикладной вычислительной аэродинамике можно выделить ряд задач, для которых оперативность и экономичность расчетов имеют больший приоритет, чем точность получаемых расчетных результатов. К числу таких задач можно отнести получение первого приближения в задачах оптимального аэродинамического проектирования, а также концептуальные исследования и задачи предварительного аэродинамического проектирования. Их общая особенность, которая и обуславливает приоритет оперативности и экономичности перед точностью, заключается в необходимости выполнения большого количества расчетов. Оперативность численных расчетов может быть достигнута различными способами, которые можно условно разделить на две группы.

К первой группе относятся меры, которые направлены на сокращение временных затрат и вычислительных ресурсов, необходимых для выполнения расчетов. Она включает в себя упрощение физической и математической моделей, уменьшение сеточного разрешения, ослабление критериев итерационной сходимости или ограничение количества шагов численного интегрирования.

Одной из наиболее широко распространенных мер такого рода является использование модели невязкого совершенного газа, особенно эффективное при решении оптимизационных задач сверхзвуковой аэродинамики [Таковицкий, 2016]. Также в аэродинамическом проектировании весьма распространены зональные подходы, основанные на принципе вязко-невязкого взаимодействия [Drela, Giles, 1987; Drela, 1989; Wolkov, Lyapunov, 1994], который заключается в совместном расчете внешнего потока в рамках модели невязкого газа и пограничного слоя в рамках интегральных или дифференциальных уравнений. Несмотря на значительный прогресс в области методов численного решения уравнений Навье–Стокса и на существенный рост вычислительных ресурсов, указанные подходы широко применяются в инженерной практике [Johnson et al., 2005]. Уменьшение сеточного разрешения и неполная итерационная сходимость, в свою очередь, могут эффективно применяться в задачах оптимального аэродинамического проектирования с использованием суррогатных моделей [Leifsson, Koziel, 2015].

Второе направление повышения оперативности численных исследований связано с автоматизацией и с сокращением продолжительности цикла подготовки индивидуальных расчетов. Особое место в рамках этого направления занимает подход, основанный на решении гидродинамических уравнений методом конечного объема на локально-адаптивных расчетных сетках. В контексте повышения оперативности его главным преимуществом является возможность универсальной автоматизации процесса генерации расчетной сетки [Aksenov et al., 1998], который при его выполнении вручную, как правило, является наиболее продолжительным и трудоемким этапом подготовки индивидуального расчета. В частности, без учета времени подготовки цифровой модели исследуемого объекта генерация локально-адаптивной расчетной сетки для сложной геометрии обычно занимает несколько минут, в то время как подготовка неструктурированной расчетной сетки может занимать несколько суток, а блочно-структурированной — до нескольких недель.

Обтекание летательных аппаратов, не относящихся к специальным классам высотных или малоскоростных, практически всегда является турбулентным. Турбулентность моделируют разными способами. Наиболее экономичным является моделирование турбулентных течений в рамках осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса (RANS) с использованием какой-либо модели турбулентности (как правило, одно- или двухпараметрической) совместно с моделью пристеночных функций, предполагающей замену прямого разрешения логарифмического слоя и вязкого подслоя турбулентного пограничного слоя аналитической зависимостью. Данное упрощение математической модели иногда приводит к снижению точности расчета [Wilcox, 1994], но при этом, не сужая существенно круг доступных для решения расчетных задач, способствует сокращению времени расчета и потребных вычислительных ресурсов за счет более мягких требований к сеточному разрешению пограничного слоя. Следует отме-

тять, что при выполнении определенных условий [Roache, 1998] это не приводит к существенному увеличению погрешности дискретизации.

Совместное использование локально-адаптивных расчетных сеток и пристеночных функций в рамках RANS представляется особенно эффективным с точки зрения оперативности и гибкости применения, позволяя решать широкий класс исследовательских [Долгов и др., 2019] и проектировочных задач [Печенюк, 2017]. Однако, несмотря на очевидные преимущества, использование локально-адаптивных расчетных сеток в задачах, связанных с турбулентным обтеканием, сопряжено с некоторыми специфическими методическими вопросами, которые обусловлены главным образом тем, как при этом моделируются обтекаемые поверхности.

Так как в общем случае их форма не совпадает с формой ячеек сетки, для корректного моделирования соответствующих граничных условий необходима локальная модификация либо расчетной сетки, либо численной схемы. Существует довольно большое разнообразие подходов к решению этой задачи, зачастую весьма нетривиальных. В качестве примеров можно привести использование гибридных расчетных сеток [Luo et al., 2010], использование бессеточных численных схем вблизи границ [Luo et al., 2006], моделирование погруженных границ с помощью дополнительных слагаемых в гидродинамических уравнениях [Lai, Peskin, 2000] или с помощью «фиктивных» ячеек, расположенных на обратной стороне обтекаемой поверхности [Dadone, Grossman, 2007].

Однако более широкое распространение в промышленной вычислительной гидродинамике получили различные варианты метода cut-cell, предполагающего обрезку ячеек локально-адаптивной сетки обтекаемой поверхностью [Aftosmis et al., 1998; Aksenov et al., 1998]. При этом обрезка может производиться с локальным упрощением формы поверхности и без ее упрощения, как это делается в указанных работах. В последнем случае обрезку ячеек можно условно назвать булевой [Аксёнов, 2017]. Уравнения сохранения массы, импульса и энергии в обрезанных ячейках-многогранниках аппроксимируются с помощью той же численной схемы, что и в необрезанных ячейках. В связи с этим данный подход обладает высокой надежностью и универсальностью, не требует модификации решаемых уравнений или численной схемы вблизи обтекаемой поверхности и не приводит к потере консервативности и порядка точности.

Один из ключевых методических вопросов, связанных с применением данного подхода к расчету турбулентного течения около криволинейной поверхности, состоит в том, насколько существенное влияние на точность получаемых результатов оказывают обрезанные ячейки вблизи стенки, которые могут сильно различаться по размерам и форме. Есть все основания полагать, что этот фактор является весьма важным, так как при этом распределение значений расстояния от центра ближайшей ячейки до стенки, значений y^+ и, как следствие, касательного напряжения носит крайне нерегулярный и немонотонный характер. Это может приводить к различным негативным последствиям, включающим избыточную активацию диссипативных механизмов монотонизации численной схемы, некорректную работу пристеночных функций, а также локально завышенные значения коэффициента поверхностного трения. Также сильный разброс значений y^+ может ограничивать допустимое сеточное разрешение пограничного слоя, так как для незначительной части обрезанных ячеек y^+ может достигать нижнего предела, определяемого условиями корректной работы пристеночных функций.

Настоящая работа посвящена исследованию данного вопроса с проведением расчетов в программном комплексе (ПК) вычислительной гидродинамики (ВГД) FlowVision [Аксёнов, 2017]. ПК FlowVision основан на методе конечных объемов. В нем используется технология расчетной сетки с локальной динамической адаптацией и с подсеточным разрешением геометрии обтекаемой поверхности. Предметом исследования являются методические вопросы численного моделирования турбулентного обтекания с использованием пристеночных функций при решении задач внешней аэродинамики. В рамках работы выполнена серия расчетов тестового случая, основанного на эксперименте в аэродинамической трубе и рассматривающего обтекание крылового профиля турбулентным дозвуковым потоком вязкого сжимаемого совершенного газа. Результаты расчетов сравниваются с полученными в эксперименте суммарными

и распределенными аэродинамическими характеристиками. На основе этого сравнения анализируется точность расчета суммарных и распределенных характеристик рассматриваемого течения на локально-адаптивной расчетной сетке с применением модели турбулентности $k-\varepsilon$ и пристеночных функций.

Также работа включает в себя исследование одного из способов регуляризации распределения величины касательного напряжения — технологии сглаживания диффузионных потоков. При использовании сглаживания диффузионных потоков касательные напряжения вычисляются не по фактическому расстоянию от стенки до центра примыкающей ячейки, а на основе фиксированного расстояния, причем необходимые для этого параметры течения вычисляются в соответствующей этому расстоянию внутренней точке расчетной области с интерполяцией в нее данных из соседних ячеек. В результате распределение касательных напряжений вдоль стенки приобретает более гладкий характер. В работе исследована эффективность применения сглаживания диффузионных потоков в качестве способа повышения точности расчета турбулентного пограничного слоя на локально-адаптивных расчетных сетках.

Помимо вышеперечисленного, в рамках настоящей работы также исследована эффективность формулы Брэдшоу для расчета турбулентной вязкости. Она, в частности, используется в двухпараметрических моделях турбулентности семейства $k-\omega$ [Menter, 1994; Menter et al., 2003; Langtry, Menter, 2009] с целью повышения их робастности в присутствии неблагоприятного градиента давления. Это достигается посредством применения в данной формуле демпфирующих механизмов для устранения присущей двухпараметрическим моделям склонности к избыточной генерации турбулентной вязкости при наличии положительного градиента давления вниз по потоку.

2. Методика исследования

Тестовый случай, рассмотренный в настоящей работе, основан на экспериментальных исследованиях крылового профиля RAE 2822 (рис. 1) в трансзвуковой аэродинамической трубе, описание и результаты которых приведены в [Cook et al., 1979]. В ходе испытаний для нескольких режимов обтекания был получен массив данных, включавший суммарные аэродинамические характеристики профиля, распределение коэффициента давления c_p и коэффициента поверхностного трения c_f по его поверхности, интегральные характеристики пограничного слоя, а также профили скорости в пограничном слое и в следе за профилем. В рамках настоящей работы рассмотрен режим обтекания, которому соответствуют значение числа Маха набегающего потока $M_\infty = 0.676$, угол атаки $\alpha = 2.4^\circ$ и вычисленное на основе хорды число Рейнольдса $Re_\infty = 5.7 \times 10^6$.

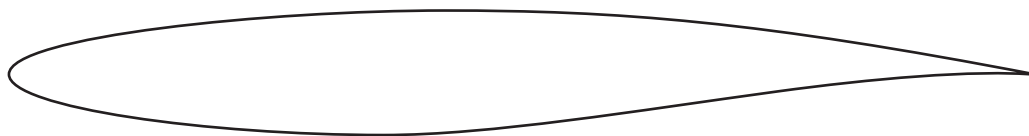


Рис. 1. Профиль RAE 2822

Необходимо отметить, что испытания проводились в аэродинамической трубе с закрытой рабочей частью, стенки которой имели щелевую перфорацию, а модель профиля представляла собой секцию прямого крыла. В такой постановке основной проблемой, возникающей при сравнении расчетных результатов с экспериментальными данными, является необходимость учета влияния стенок рабочей части на обтекание модели. Для этого необходимо либо моделирование влияния стенок в ходе расчета, либо внесение поправок в экспериментальные данные. В противном случае неучтенное влияние стенок рабочей части может стать дополнительным источником систематических расхождений между результатами расчета и данными, полученными в эксперименте.

Как указано в [Cook et al., 1979], поправки на влияние стенок в результаты рассматриваемого эксперимента не вносились. В связи с этим наиболее корректная постановка расчетов, обеспечивающая результаты, максимально пригодные для сравнения, очевидно, должна как можно более точно соответствовать описанной в [Cook et al., 1979] постановке экспериментальных исследований. Однако такой подход включает в себе ряд трудностей, связанных с моделированием геометрии АДТ и граничных условий, что приводит к значительному увеличению трудоемкости подготовки расчетов, к увеличению числа ячеек расчетной сетки и, как следствие, к росту потребных вычислительных ресурсов и временных затрат. В рамках рассматриваемого тестового случая эта общая проблема дополнительно усугубляется недостатком детальной информации о геометрии АДТ.

В свете указанных трудностей более целесообразным с практической точки зрения может оказаться решение рассматриваемой в настоящей работе задачи в классической постановке, основанной на предположении о плоскопараллельном характере обтекания профиля свободным безграничным потоком. Обоснованность такого подхода и связанных с ним упрощений, однако, будет зависеть от того, приведет ли пренебрежение влиянием стенок рабочей части АДТ к искажению основных выводов исследования и к снижению достоверности полученных результатов. Для ответа на этот вопрос требуется оценка искажений, которые вносят стенки в картину обтекания профиля. Для рассматриваемого профиля такая оценка, выполненная в рамках теории малых возмущений, приведена в [Binion, 1979]. Являясь приближенной с количественной точки зрения в силу особенностей использованного метода расчета и формулировки граничных условий, она тем не менее позволяет сделать выводы относительно качественного характера влияния перфорированных стенок рабочей части АДТ.

На рис. 2 приведены данные из [Binion, 1979], иллюстрирующие влияние стенок рабочей части АДТ на распределение коэффициента давления c_p на поверхности профиля RAЕ 2822 при $M_\infty = 0.6$, $\alpha = 2.57^\circ$, т. е. на режиме обтекания, близком к режиму, исследуемому в настоящей работе. Данные приведены для стенок со щелевой перфорацией, относительная площадь которой составляет 4 %, что несколько выше относительной площади перфорации, использованной в эксперименте [Cook et al., 1979]. Следует отметить, что, согласно [Binion, 1979], они хорошо согласуются с результатами экспериментальных исследований.

Данные приведены в форме зависимости коэффициента давления c_p от продольной координаты x , отнесенной к длине хорды профиля b , которая представляет собой расстояние от его передней до его задней кромки. Коэффициент давления определяется следующим образом:

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2}. \quad (1)$$

Здесь p — статическое давление в рассматриваемой точке на поверхности профиля, p_∞ — статическое давление набегающего потока, ρ_∞ — плотность набегающего потока, V_∞ — скорость набегающего потока.

Из приведенных на рис. 2 данных видно, что влияние стенок рабочей части АДТ в основном локализовано в области разгона потока и обусловленного им пика разрежения на верхней поверхности профиля в районе его передней кромки. Главным образом оно проявляется в уменьшении разгона потока и, соответственно, в уменьшении величины пика разрежения, которое составляет примерно 20 %. На остальной части поверхности профиля существенного влияния стенок не наблюдается. Как следствие, можно ожидать, что присутствие перфорированных стенок приводит к уменьшению величины подсасывающей силы, действующей на профиль, что в свою очередь приводит к некоторому уменьшению коэффициента подъемной силы и увеличению коэффициента силы лобового сопротивления. С другой стороны, если течение вблизи передней кромки профиля является сверхкритическим, то влияние стенок будет проявляться в некотором уменьшении интенсивности замыкающего сверхзвуковую зону прямого скачка уплотнения и, соответственно, в некотором уменьшении волнового сопротивления.

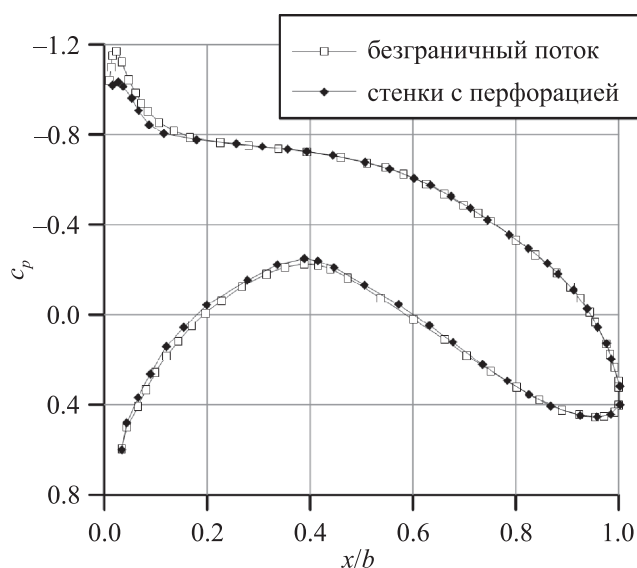


Рис. 2. График, иллюстрирующий влияние стенок рабочей части АДТ, имеющих щелевую перфорацию, на распределение коэффициента давления на поверхности профиля при $M_\infty = 0.6$, $\alpha = 2.57^\circ$ (построен на основе данных из [Binion, 1979])

Численное моделирование обтекания профиля выполнено в рамках осредненной по Рейнольдсу системы уравнений Навье–Стокса (RANS), для замыкания которой был использован стандартный вариант двухпараметрической модели турбулентности $k-\varepsilon$ [Wilcox, 1994].

Расчетная область имеет форму квадрата со сторонами 12 м, что соответствует расстоянию 10 хорд от ее границ до поверхности профиля (рис. 3). На входной, верхней и нижней границах расчетной области используется граничное условие типа «вход/выход», на котором задаются компоненты вектора скорости \bar{V}_∞ , статическое давление P_∞ набегающего потока и параметры турбулентности. Отметим, что в ПК FlowVision граничное условие «скорость с давлением» можно задавать как на сверх-, так и на дозвуковых входах в расчетную область. В первом случае заданные в интерфейсе FlowVision величины используются напрямую. Во втором случае по заданным значениям \bar{V}_∞ и P_∞ вычисляется полное давление, и оно (совместно с направлением скорости, определяемым вектором \bar{V}_∞) используется для вычисления локального статического давления на границе. Величины турбулентной кинетической энергии k и турбулентной диссипации ε задаются косвенным образом через значение интенсивности турбулентности Tu и отношение турбулентной вязкости к молекулярной μ^+ .

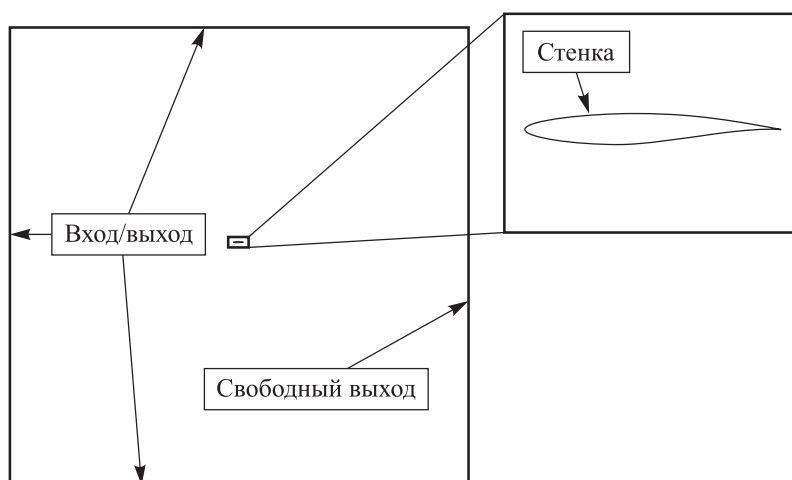


Рис. 3. Иллюстрация геометрии расчетной области и граничных условий

На выходной границе расчетной области используется граничное условие типа «свободный выход», на котором задается статическое давление, равное статическому давлению набегающего потока.

На поверхности профиля используется граничное условие типа «стенка» с вычислением параметров потока с помощью модели пристеночных функций FlowVision [Жлуктов и др., 2010; Жлуктов, Аксёнов, 2015; Жлуктов и др., 2018]. Выбор нестандартных пристеночных функций был продиктован их более высокой точностью при значениях $y^+ < 30$.

Расчетная сетка (рис. 4) представляет собой начальную сетку и несколько уровней адаптации, выполненной путем локального разбиения ячеек. Начальная расчетная сетка была подобрана таким образом, чтобы сеточное разрешение профиля составило 100 ячеек на длину хорды. Адаптация выполнялась вблизи поверхности профиля и характеризовалась двумя параметрами: максимальным уровнем адаптации, т. е. количеством последовательных разбиений ячеек, и количеством слоев для каждого уровня.

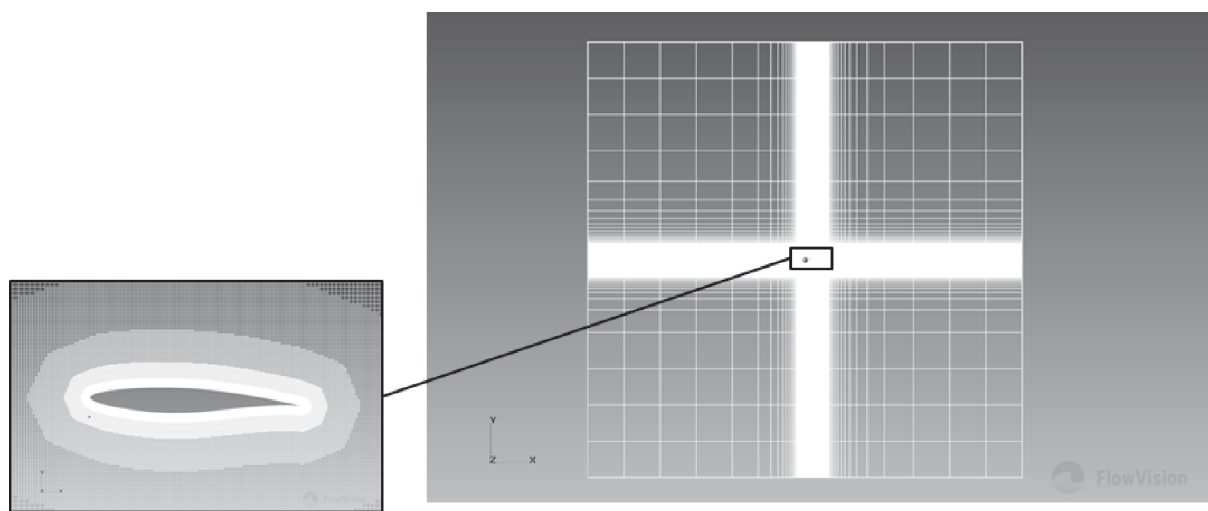


Рис. 4. Иллюстрация расчетной сетки: общий вид (справа) и вид сетки около профиля (слева)

Параметры адаптации расчетной сетки приведены в табл. 1. Как будет показано далее, при стандартной методике расчета ограничения применяемой модели турбулентности из-за сильного разброса значений y^+ позволяют выполнять адаптацию расчетной сетки лишь до пятого уровня. Дальнейшая адаптация расчетной сетки стала возможна лишь при использовании технологии сглаживания диффузионных потоков. В связи с этим базовый вариант расчета выполнялся с пятым максимальным уровнем адаптации.

Таблица 1. Параметры адаптации расчетной сетки. Здесь уровень адаптации — количество последовательных разбиений ячеек начальной сетки вблизи поверхности профиля; количество слоев — число ячеек с соответствующим уровнем адаптации по нормали к поверхности профиля

Уровень адаптации	Количество слоев
1	30
2	30
3	30
4	30
5	10
6	5

3. Анализ результатов

3.1. Влияние сглаживания диффузионных потоков

Расчетная область FlowVision всегда ограничена замкнутыми триангулированными (в общем случае — криволинейными) поверхностями. Гексагональные ячейки обрезаются треугольниками, из которых составлены границы расчетной области. Треугольники границы, в свою очередь, обрезаются ячейками. Поэтому пристенная ячейка в общем случае представляет собой многогранник произвольной формы. В настоящей работе используется термин «сглаживание диффузионных потоков». Термин взят из интерфейса FlowVision. Поясним его смысл. Технология сглаживания диффузионных потоков в ПК FlowVision предполагает «окружение» твердой криволинейной триангулированной стенки эквидистантной поверхностью.

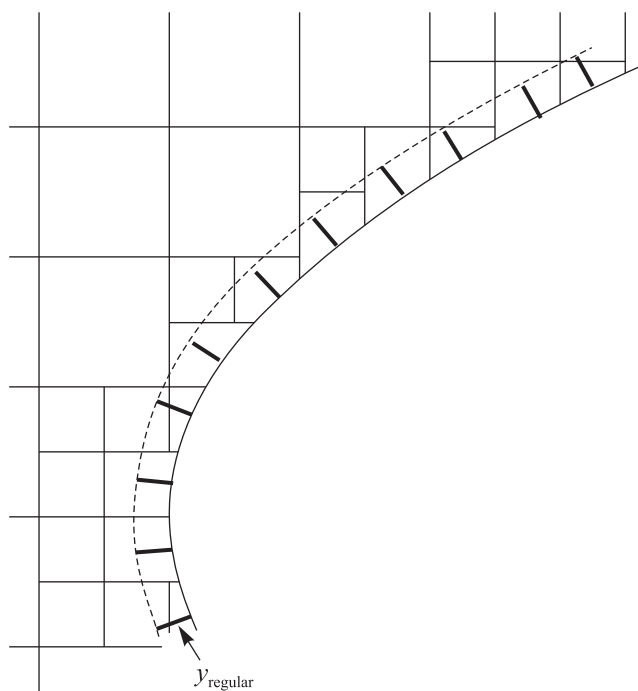


Рис. 5. Иллюстрация технологии FlowVision сглаживания диффузионных потоков

Расстояние от стенки до этой поверхности определяется следующим образом:

$$y_{\text{regular}} = \frac{1}{2} \sqrt{h_x^2 n_x^2 + h_y^2 n_y^2 + h_z^2 n_z^2}. \quad (2)$$

Здесь h_x , h_y , h_z — размеры исходной приповерхностной декартовой ячейки (необрезанной поверхностью), \mathbf{n} — вектор нормали к данной поверхности. Очевидно, что при моделировании течения около пластины на сетке, одна из координатных плоскостей которой сонаправлена с пластиной, y_{regular} соответствует расстоянию от пластины до центра приповерхностной ячейки. Очевидно также, что при моделировании течения около шара на равномерной кубической сетке y_{regular} соответствует половине размера кубической ячейки. Каждый треугольник, попавший в ячейку и ею обрезанный, превращается в многоугольник. Эти многоугольники формируют «твердую» поверхность пристенной ячейки. Для каждого такого многоугольника находится точка, удаленная от геометрического центра по нормали на расстояние y_{regular} , и в эту точку интерполируются данные, необходимые для вычисления диффузионных потоков: вязкого трения, теплового потока (если решается тепловая задача), диффузионного потока (если решается многокомпонентная задача). В результате распределения диффузионных потоков по твер-

дой криволинейной поверхности, полученные на локально-адаптивной сетке, существенным образом сглаживаются. То есть сглаживание диффузионных потоков в ПК FlowVision не является численным или схемным сглаживанием соответствующих физических величин в традиционном понимании этого слова.

На рис. 6 приведены значения суммарных аэродинамических характеристик профиля, полученные в расчетах на сетке с 5 уровнем адаптации, в базовой постановке и с использованием технологии сглаживания диффузионных потоков, а также соответствующие значения, полученные в эксперименте. Приведенные данные включают в себя коэффициент лобового сопротивления c_{xa} и коэффициент подъемной силы c_{ya} , которые определяются следующим образом:

$$c_{xa} = \frac{F_{xa}}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 b L}, \quad (3)$$

$$c_{ya} = \frac{F_{ya}}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 b L}. \quad (4)$$

Здесь F_{xa} — сила лобового сопротивления в Н, F_{ya} — подъемная сила в Н, b — хорда профиля в м, L — характерный поперечный размер, который в плоскопараллельных задачах принимается равным 1 м.

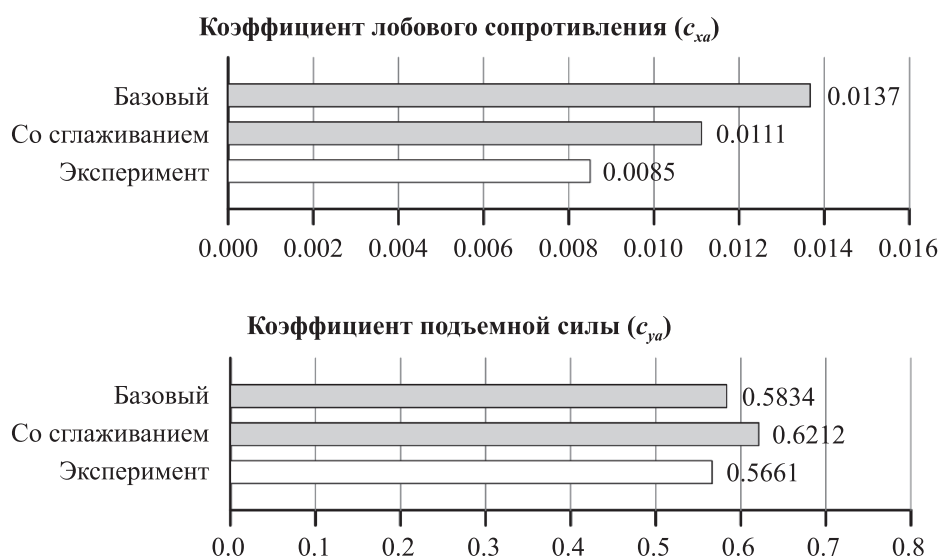


Рис. 6. Сводка суммарных аэродинамических характеристик профиля, иллюстрирующая изменение расхождения между результатами расчета и экспериментальными данными в результате использования технологии сглаживания диффузионных потоков

Из рис. 6 видно, что при расчете без сглаживания диффузионных потоков полученная величина коэффициента лобового сопротивления c_{xa} превышает экспериментальное значение на 61 %. С практической точки зрения это весьма значительное расхождение, даже с учетом присутствующих в экспериментальных данных систематических погрешностей. При этом расчетное значение коэффициента подъемной силы c_{ya} отличается от экспериментального всего лишь на 3 %.

Использование технологии сглаживания диффузионных потоков приводит к двукратному уменьшению расхождения между расчетным и экспериментальным значениями c_{xa} — с 61 до 30 %. В то же время значение c_{ya} увеличивается на 6.4 %, а его расхождение с экспериментом, соответственно, увеличивается с 3 до 9.7 %.

Для интерпретации этих результатов и выявления источников наблюдаемых расхождений необходим анализ картины обтекания профиля и распределенных параметров течения.

На рис. 7 приведены распределения коэффициента давления c_p на поверхности профиля, полученные в расчетах и в эксперименте.

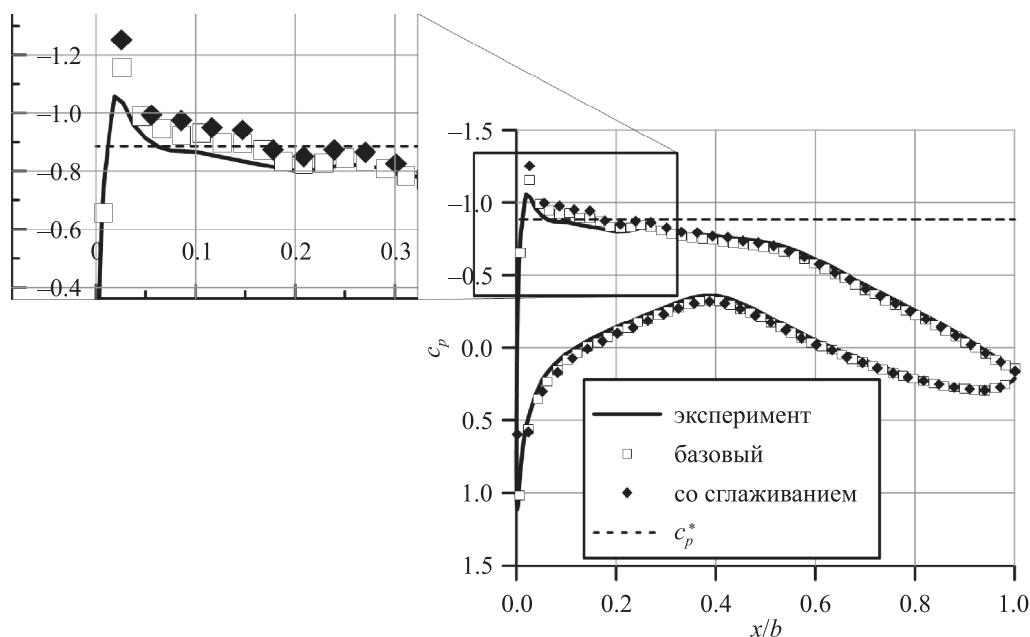


Рис. 7. График, иллюстрирующий влияние сглаживания диффузионных потоков на получаемое в расчетах распределение коэффициента давления на поверхности профиля. Здесь и далее на аналогичных графиках слева приведена в увеличенном масштабе часть графика, соответствующая верхней поверхности профиля вблизи его передней кромки

Из приведенных данных видно, что на большей части поверхности профиля расчетное распределение c_p хорошо согласуется с экспериментом, причем влияние сглаживания диффузионных потоков на него минимально. При анализе рис. 7 обращает на себя внимание присутствие сверхзвуковой зоны на верхней поверхности профиля вблизи его передней кромки, косвенным свидетельством которого является локальное превышение по абсолютной величине коэффициентом давления критического значения c_p^* , которое обозначено на рисунке штриховой линией.

Сверхзвуковую зону с разгоном потока до $M \approx 1.12$ также можно отчетливо наблюдать на рис. 8, на котором приведено поле значений местного числа Маха. Как правило, при такой конфигурации течения сверхзвуковая зона замыкается прямым скачком уплотнения, что приводит к потерям механической энергии и появлению волновой составляющей в силе лобового сопротивления, а также иногда может индуцировать отрыв пограничного слоя. Однако в рамках исследуемого тестового случая отрыв маловероятен в силу относительно низкой интенсивности скачка. Например, данные, приведенные в [Babinsky, Harvey, 2011], говорят о том, что для отрыва необходимо, чтобы число Маха перед скачком составляло не менее $M = 1.3..1.35$, в то время как в рассматриваемом случае оно не превышает $M \approx 1.12$. Это с высокой надежностью исключают возможность индуцированного скачком уплотнения отрыва потока как в расчете, так и в эксперименте.

Тем не менее, с точки зрения численного моделирования данный вид течения является проблемным для используемой в работе модели турбулентности, которая, как обсуждалось выше, в присутствии неблагоприятного градиента давления проявляет склонность к избыточной генерации турбулентной вязкости [Menter, 1994; Wilcox, 1994]. Присутствие в задаче скачка уплотнения и, как следствие, значительного по величине положительного градиента давления усугубляет эту проблему, а также поднимает вопрос о моделировании взаимодействия скачка с пограничным слоем.

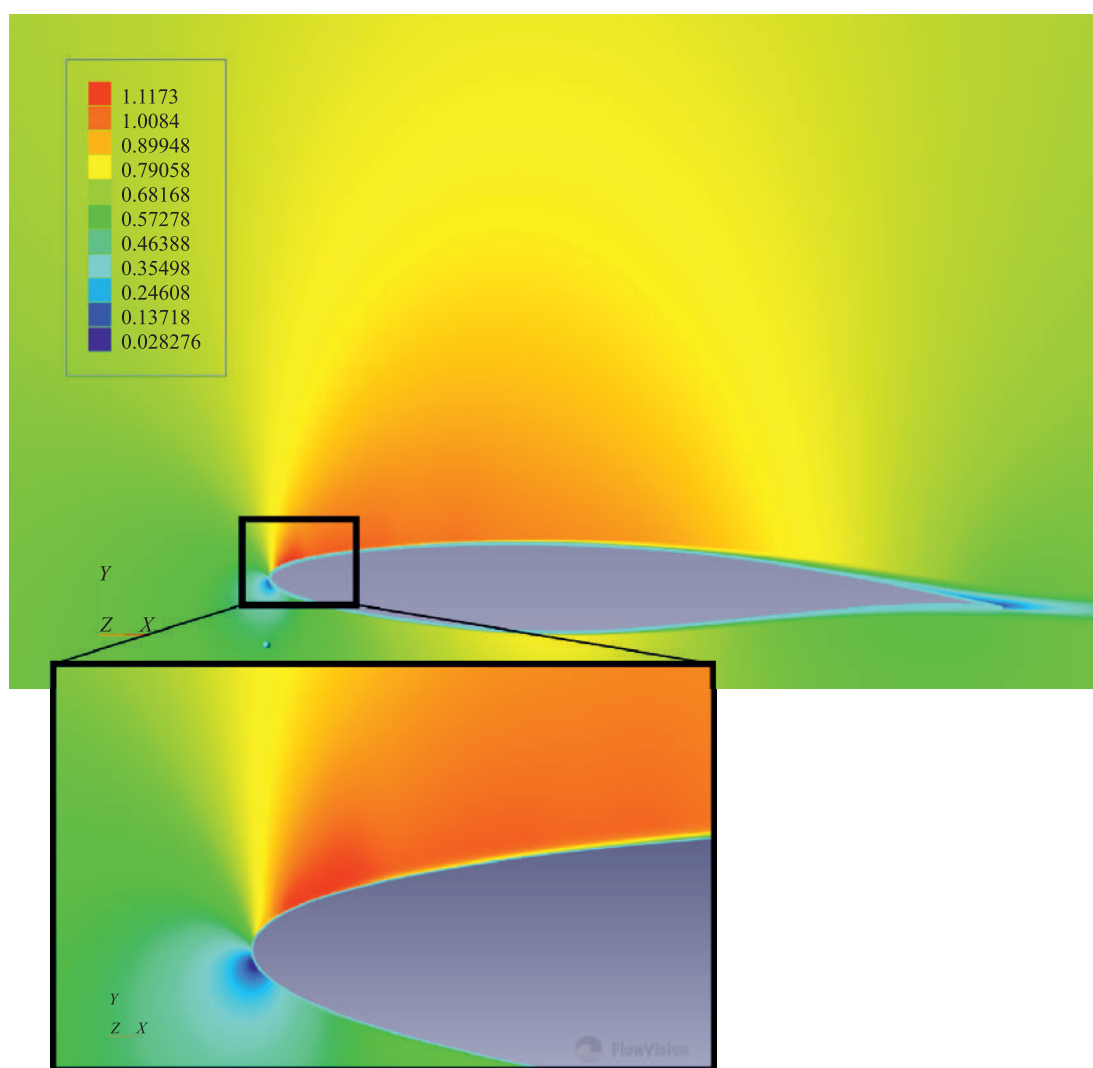


Рис. 8. Поле значений местного числа Маха, полученное в базовом расчете

В контексте основной цели настоящего исследования этот вопрос является чрезвычайно важным, так как в области взаимодействия скачка уплотнения с пограничным слоем перестает действовать логарифмический закон изменения скорости вблизи стенки. Как следствие, погрешности при моделировании течения в ней с помощью пристеночных функций могут оказаться весьма значительными, что ставит под сомнение корректность применения пристеночных функций в этой области.

В свете вышесказанного вполне объяснимо, что на рис. 7 в сверхзвуковой зоне и на некотором расстоянии после нее (до $x/b \approx 0.3$) наблюдается заметное расхождение результатов расчетов между собой и с экспериментом. Для расчетов характерен более интенсивный, чем в эксперименте, разгон потока с его последующим торможением при переходе через прямой скачок уплотнения, что характеризуется избыточным по сравнению с экспериментом перепадом давления. Скорее всего, это приводит к более высоким, чем в эксперименте, потерям механической энергии и, соответственно, к более высокому значению волнового сопротивления. При этом, однако, следует отметить, что описанные различия в картине обтекания, как обсуждалось выше, могут быть частично обусловлены особенностями постановки расчетов, не учитывающей влияние стенок рабочей части аэродинамической трубы. Легко заметить, что наблюдаемый характер расхождений в целом согласуется с данными, приведенными на рис. 2. Это дает основание полагать, что увеличение расхождения расчета с экспериментом в величине c_{ya} , имеющее

место при использовании технологии сглаживания диффузионных потоков, также частично обусловлено неучтенным влиянием стенок.

Из рис. 7 также видно, что сглаживание диффузионных потоков приводит к увеличению разрежения в сверхзвуковой зоне. Это выливается в увеличение подсасывающей силы, действующей на профиль, что в свою очередь оказывает влияние, как на величину подъемной силы, так и на величину силы лобового сопротивления. В частности, это объясняет наблюдаемое на рис. 6 увеличение значения c_{ya} . С другой стороны, упомянутое выше увеличение интенсивности разгона потока может быть причиной роста интенсивности прямого скачка уплотнения и, соответственно, волновой составляющей сопротивления профиля. Результирующее изменение составляющей силы сопротивления, обусловленной распределением давления, определяется балансом приращений подсасывающей силы и волнового сопротивления.

На рис. 9 приведено сравнение расчетных распределений коэффициента поверхностного трения c_f с экспериментальными данными на верхней поверхности профиля. Коэффициент поверхностного трения определяется следующим образом:

$$c_f = \frac{\tau}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2}. \quad (5)$$

Здесь τ — касательное напряжение на поверхности профиля.

Из рис. 9 видно, что распределение c_f , полученное в базовом расчете, хоть и имеет нерегулярный и немонотонный характер, тем не менее демонстрирует приемлемое согласование с экспериментом в тех точках, в которых производились измерения. К сожалению, измерения внутри сверхзвуковой зоны и вблизи замыкающего ее скачка уплотнения в эксперименте не выполнялись, однако отмеченные выше особенности используемой в работе модели турбулентности дают основания полагать, что значения c_f при $x/b < 0.18$ в расчетах могут завышаться. В совокупности с нерегулярностями в распределении c_f это, наравне с завышенным волновым сопротивлением, можно рассматривать как один из источников расхождений в величине c_{xa} между базовым расчетом и экспериментом.

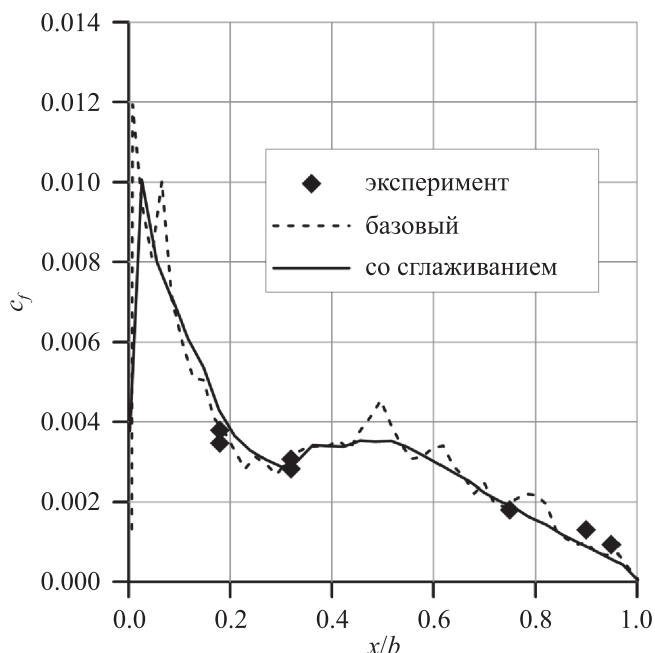


Рис. 9. График, иллюстрирующий регуляризацию получаемого в расчетах распределения коэффициента поверхностного трения на верхней поверхности профиля в результате использования технологии сглаживания диффузионных потоков

Из рис. 9 также видно, что сглаживание диффузионных потоков эффективно устраняет немоности в распределении c_f , обусловленные нерегулярной обрезкой пристенных ячеек расчетной сетки. Помимо этого, оно способствует снижению значения c_f вблизи передней кромки профиля на 20 %, что, очевидно, является одной из причин наблюдаемого на рис. 5 уменьшения величины c_{xa} .

Данные, приведенные на рис. 10, свидетельствуют о незначительном влиянии сглаживания диффузионных потоков на расчетные профили скорости в пограничном слое и в следе за профилем. В частности, из сравнения профилей скорости в пограничном слое видно, что как для базового расчета, так и для расчета со сглаживанием диффузионных потоков толщина пограничного слоя на 67 % превышает полученную в эксперименте, а профиль скорости имеет меньшую наполненность. Расчетный профиль скорости в следе характеризуется несколько большей величиной максимальной потери скорости, чем в эксперименте. Применение технологии сглаживания диффузионных потоков приводит к ее незначительному уменьшению, несколько улучшая согласование с экспериментом.

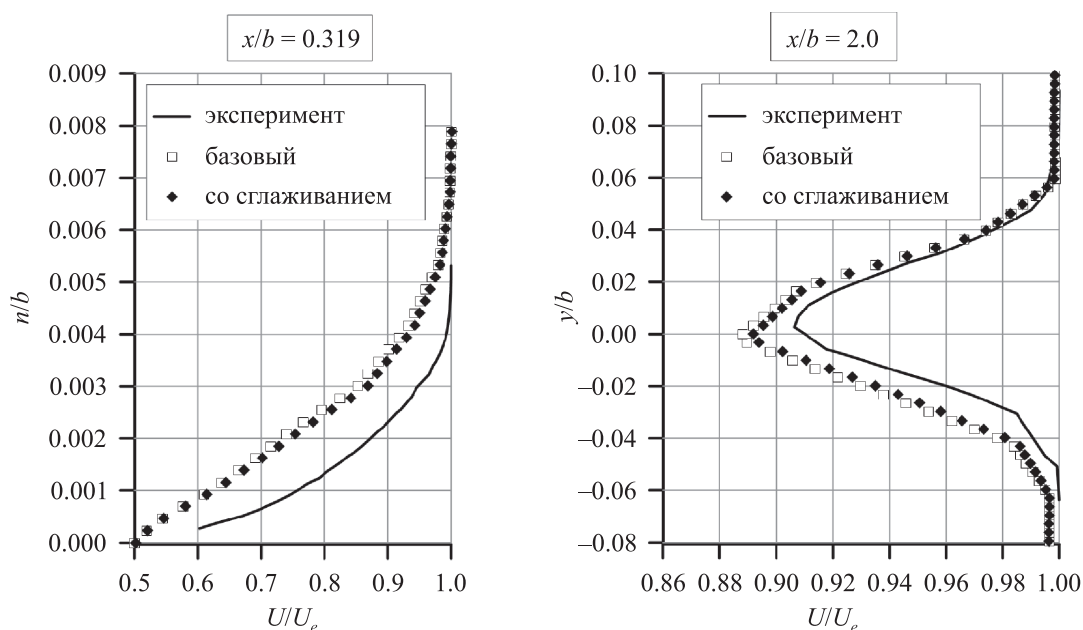


Рис. 10. Графики, иллюстрирующие влияние сглаживания диффузионных потоков на получаемые в расчетах профили скорости в пограничном слое и в следе за профилем. На графике слева приведены профили скорости в пограничном слое в точке верхней поверхности профиля, находящейся на расстоянии $0.319b$ от передней кромки. На графике справа приведены профили скорости в следе за профилем в плоскости, находящейся на расстоянии $2b$ от задней кромки. Здесь n — расстояние от поверхности профиля вдоль нормали к ней, U — скорость потока в пограничном слое или в следе, U_e — скорость потока на границе пограничного слоя или следа, x — расстояние от передней кромки профиля вдоль его хорды, y — вертикальная координата относительно плоскости хорды профиля

Приведенные расчетные результаты показывают, что благоприятное влияние сглаживания диффузионных потоков проявляется главным образом в регуляризации распределения коэффициента поверхностного трения. Однозначная характеристика его влияния на точность моделирования распределения давления затруднена в связи с тем, что особенности постановки расчетов не позволяют отделить расхождения, обусловленные неучтенным влиянием стенок рабочей части аэродинамической трубы, от расхождений, обусловленных погрешностями расчета.

Тем не менее, с учетом полученных результатов сглаживание диффузионных потоков представляется весьма эффективной мерой по повышению точности расчета суммарных аэродинамических характеристик и распределения коэффициента поверхностного трения.

3.2. Влияние увеличения сеточного разрешения пограничного слоя

Как было отмечено выше, технология сглаживания диффузионных потоков не только повышает точность расчета касательных напряжений, но также позволяет увеличить сеточное разрешение пограничного слоя без опасности локального попадания значений y^+ за пределы диапазона, соответствующего корректной работе моделей турбулентности и пристеночных функций. Для решаемой задачи это означает, что адаптация расчетной сетки вблизи поверхности профиля может быть увеличена на один дополнительный уровень. Напомним, что повышение адаптации на 1 уровень в ПК FlowVision предполагает разбиение 6-гранных расчетных ячеек предыдущего уровня на 8 равных ячеек [Аксёнов, 2017]. Декартовы ячейки, содержащие границу расчетной области, при адаптации разбиваются по тому же принципу.

Сравнение с экспериментальными данными суммарных аэродинамических характеристик профиля, полученных в результате расчетов на базовой и сгущенной сетках с использованием технологии сглаживания диффузионных потоков, приведено на рис. 11. В первую очередь оно демонстрирует достижение сходимости коэффициента подъемной силы по степени адаптации расчетной сетки, так как в результате добавления дополнительного уровня адаптации его значение изменилось лишь на 0.1 %. Изменение коэффициента лобового сопротивления при сгущении расчетной сетки составило 4.5 %, благодаря чему его расхождение со значением, полученным в эксперименте, уменьшилось с 30.5 до 24.7 %.

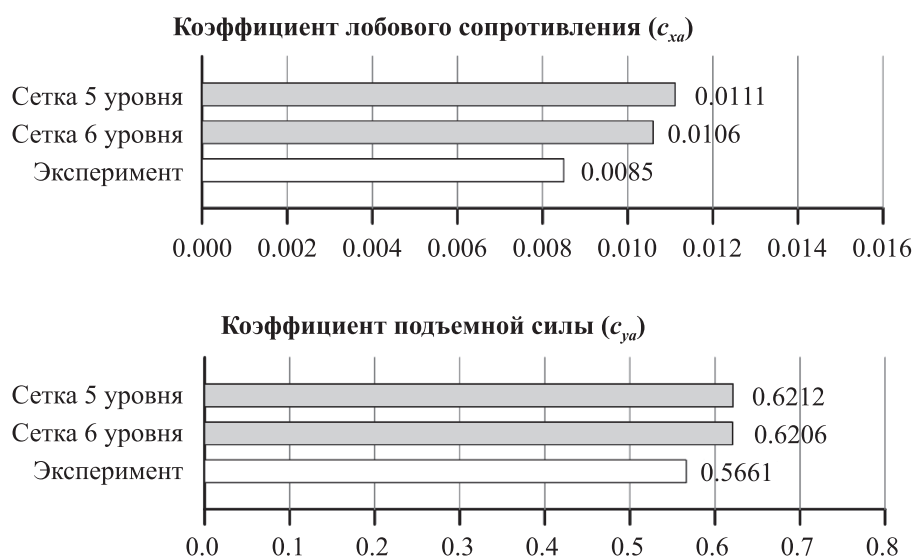


Рис. 11. Сводка суммарных аэродинамических характеристик профиля, иллюстрирующая изменение расхождения между результатами расчета и экспериментальными данными в результате увеличения максимального уровня адаптации расчетной сетки

Из сравнения распределений коэффициента давления на поверхности профиля, приведенных на рис. 12, видно, что сгущение расчетной сетки приводит к некоторому уменьшению разгона потока в сверхзвуковой зоне. Это является причиной уменьшения разрежения и величины подсосывающей силы, с одной стороны, и некоторого ослабления замыкающего сверхзвуковую зону скачка уплотнения — с другой.

Сопоставление этих данных с рис. 13 позволяет утверждать, что уменьшение интенсивности скачка уплотнения может являться основной причиной наблюдаемого на рис. 11 уменьшения коэффициента лобового сопротивления, так как, согласно рис. 13, сгущение сетки не оказывает существенного влияния на распределение коэффициента поверхностного трения.

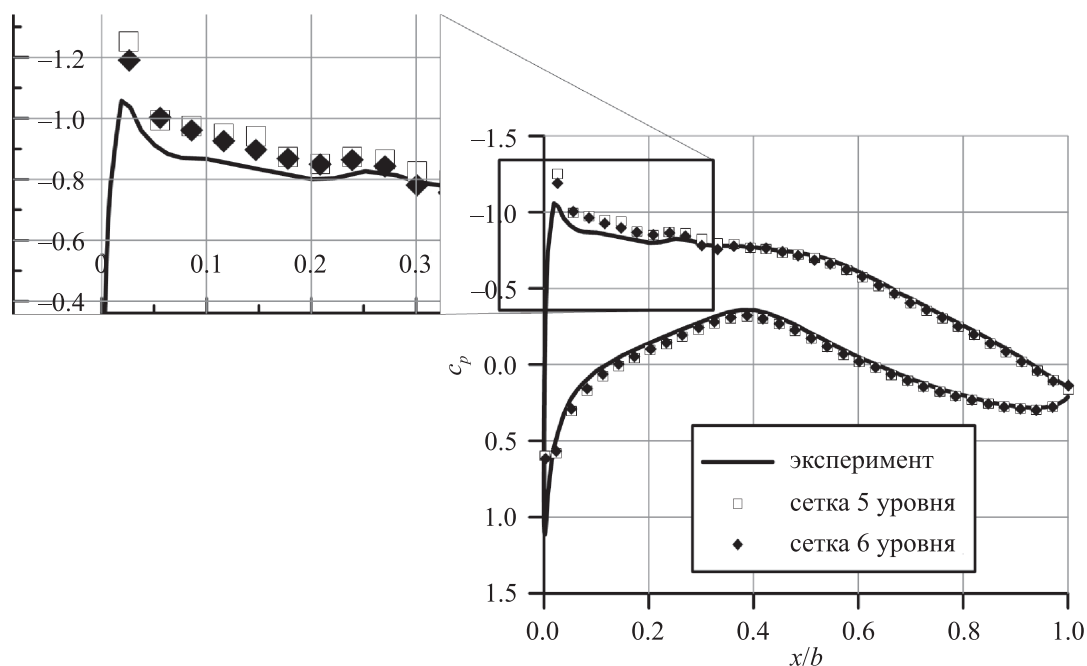


Рис. 12. График, иллюстрирующий улучшение согласования расчетного и экспериментального распределений коэффициента давления в результате увеличения максимального уровня адаптации расчетной сетки

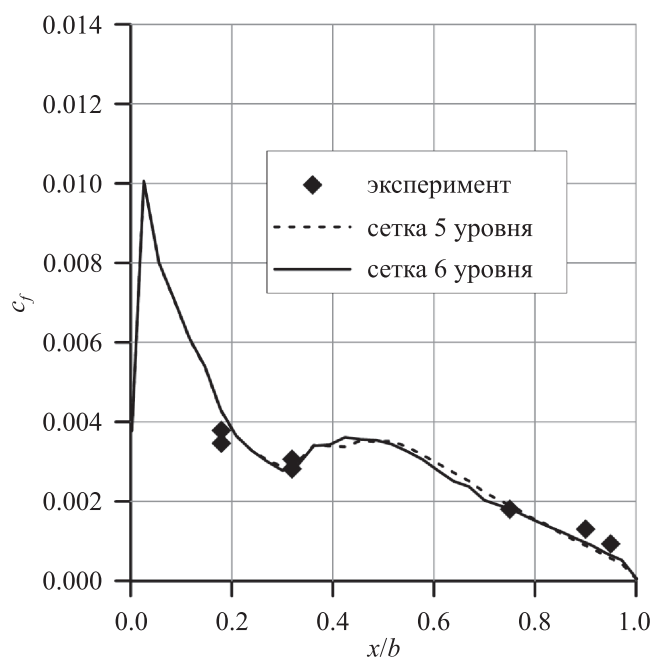


Рис. 13. График, иллюстрирующий слабое влияние увеличения максимального уровня адаптации расчетной сетки на распределение коэффициента поверхностного трения на верхней поверхности профиля

Из данных, приведенных на рис. 14, видно, что сгущение сетки приводит к уменьшению расчетной толщины пограничного слоя примерно на 13 %, не оказывая заметного влияния на наполненность профиля скорости в пограничном слое и на форму профиля скорости в следе.

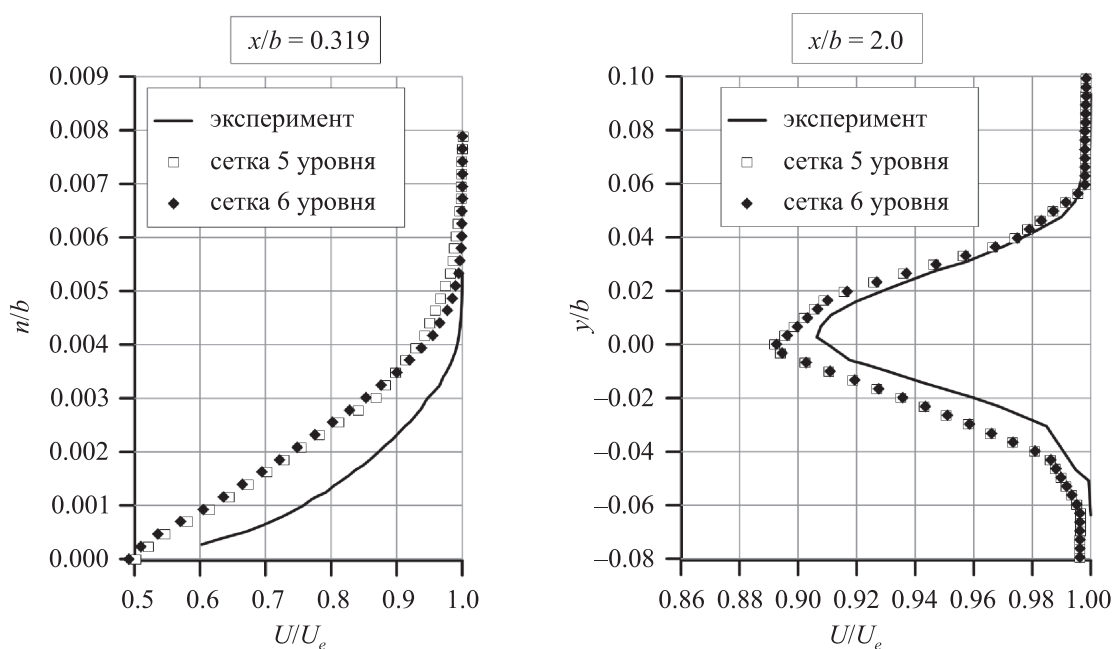


Рис. 14. Графики, иллюстрирующие слабое влияние увеличения максимального уровня адаптации расчетной сетки на профили скорости в пограничном слое и в следе за профилем

3.3. Влияние использования формулы Брэдлишоу для турбулентной вязкости

Выражение для кинематического коэффициента турбулентной вязкости в стандартной k - ε -модели турбулентности имеет вид

$$\nu_t = 0.09 \frac{k^2}{\varepsilon}. \quad (6)$$

Альтернативная формула Брэдлишоу [Menter et al., 2003] имеет вид

$$\nu_t = \frac{a_1 k}{\max \left[a_1 \frac{\varepsilon}{0.09 \cdot k}, \sqrt{S} \cdot \tanh(\arg^2) \right]}, \quad (7)$$

$$\arg = \frac{k}{\varepsilon} \cdot \max \left[\frac{2\sqrt{k}}{y}, \frac{45\nu}{y^2} \right],$$

$$S = \sum_{i,j} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial V_j}{\partial x_i}.$$

Здесь k — турбулентная энергия, ε — скорость ее диссипации, y — расстояние от стенки до центра расчетной ячейки по нормали, ν — коэффициент кинематической вязкости, V_i — компоненты скорости, x_i — декартовы координаты, $a_1 = 0.31$ — модельная константа, выведенная в интерфейс FlowVision.

Данный раздел посвящен исследованию влияния использования формулы Брэдлишоу в рамках стандартной k - ε -модели турбулентности на характеристики течения около профиля RAE 2822. Расчеты проводятся на сетке с адаптацией до 6 уровня. Используется технология FlowVision сглаживания диффузионных потоков.

На рис. 15 приведено сравнение суммарных аэродинамических характеристик профиля, полученных с использованием формулы Брэдлишоу (7), с характеристиками, полученными с использованием стандартной формулы (6) для турбулентной вязкости.

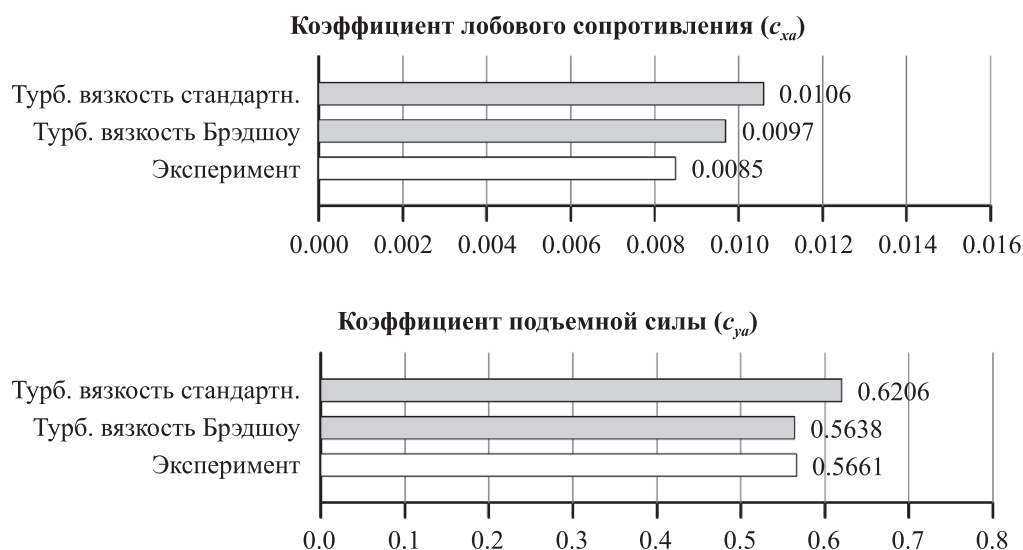


Рис. 15. Сводка суммарных аэродинамических характеристик профиля, иллюстрирующая улучшение согласования расчета с экспериментом в результате использования формулы Брэдшоу для турбулентной вязкости

Из рисунка видно, что использование формулы Брэдшоу существенным образом улучшает согласование расчета с экспериментом как в отношении коэффициента лобового сопротивления, так и в отношении коэффициента подъемной силы: расчетное значение c_{xa} уменьшается на 8.5 %, в результате чего его расхождение с экспериментальным значением уменьшается до 14 %; значение c_{ya} уменьшается на 9 % и достигает совпадения с экспериментом с точностью 0.4 %.

Данные по распределению коэффициента давления, приведенные на рис. 16, также демонстрируют приближение результатов расчета к экспериментальным данным, которое проявляется в уменьшении разрежения в сверхзвуковой зоне.

Обращает на себя внимание уменьшение перепада давления при прохождении скачка уплотнения, замыкающего сверхзвуковую зону, что свидетельствует о его ослаблении и, соответственно, об уменьшении волновой составляющей лобового сопротивления профиля. С другой

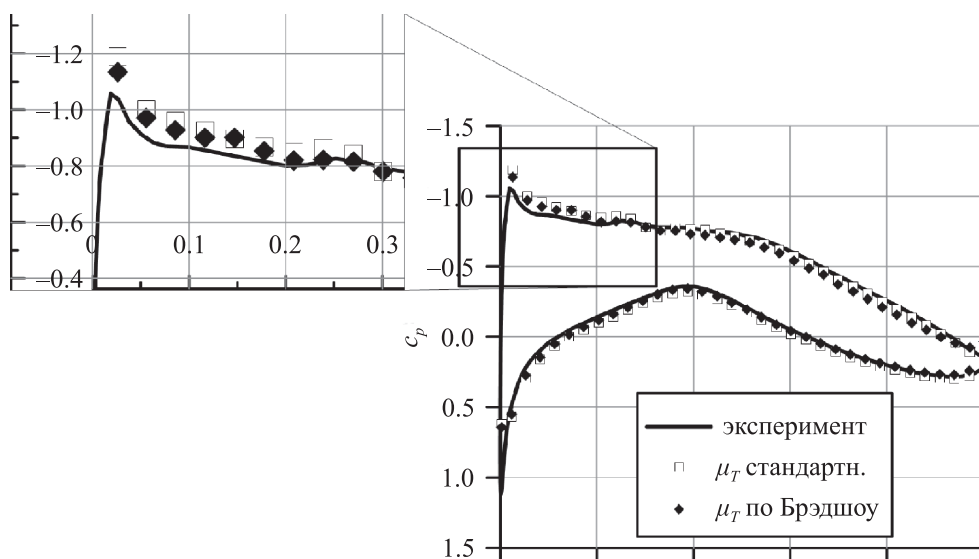


Рис. 16. График, иллюстрирующий улучшение согласования расчетного распределения коэффициента давления с экспериментальными данными в результате использования формулы Брэдшоу для турбулентной вязкости

стороны, уменьшение разрежения в сверхзвуковой зоне, являющееся косвенным признаком уменьшения интенсивности разгона потока, означает уменьшение величины подсасывающей силы.

В отношении распределения коэффициента поверхностного трения c_f наблюдается обратная тенденция. Из рис. 17 видно, что расчетные значения c_f , полученные с использованием формулы Брэдшоу, занижены относительно экспериментальных во всех точках, в которых производились измерения, кроме точки $x/b = 0.32$. Очевидно, что это во многом определяет наблюдаемое на рис. 15 уменьшение значения c_{xa} , в связи с чем встает вопрос, можно ли рассматривать сопутствующее уменьшение расхождения между расчетным и экспериментальными значениями c_{xa} как следствие повышения точности расчета.

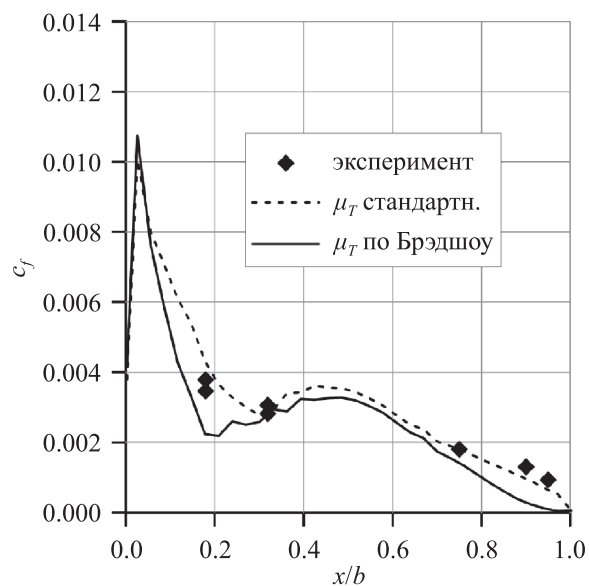


Рис. 17. График, иллюстрирующий занижение получаемых в расчете значений коэффициента поверхностного трения на верхней поверхности профиля при использовании формулы Брэдшоу для турбулентной вязкости

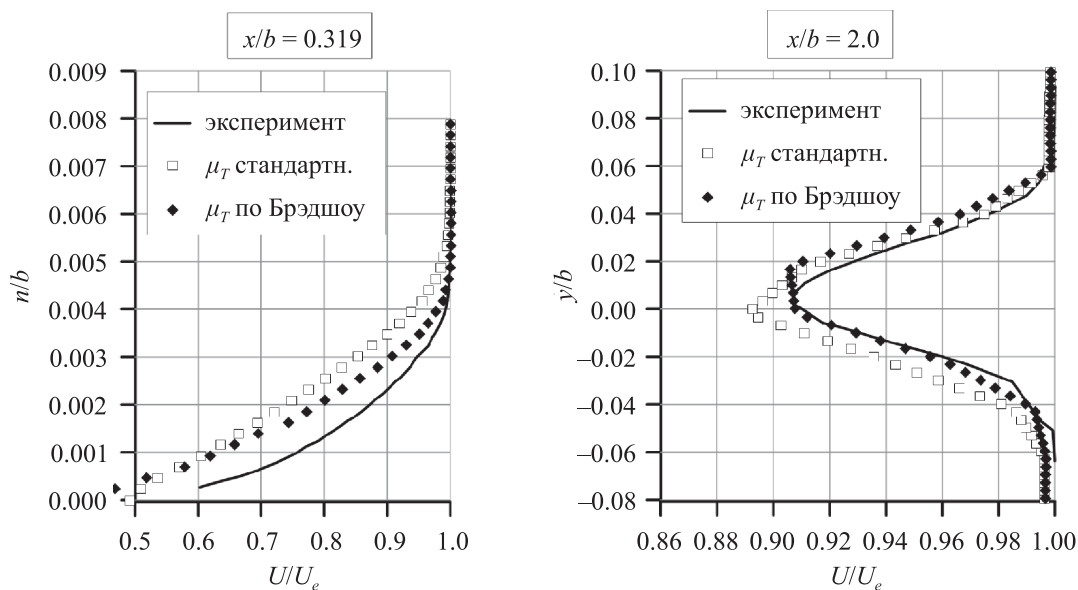


Рис. 18. График, иллюстрирующий улучшение согласования получаемых в расчете толщины пограничного слоя и максимальной потери скорости в следе с экспериментальными данными в результате использования формулы Брэдшоу для турбулентной вязкости

При этом, однако, следует отметить, что использование формулы Брэдшоу способствует повышению точности расчета толщины пограничного слоя, благодаря чему ее расчетное значение отличается от измеренного в эксперименте всего лишь на 15–17 %. Также значительное уменьшение расхождений с экспериментом наблюдается в следе за профилем. Расхождение между расчетным и экспериментальными значениями максимальной потери скорости в следе становится пренебрежимо малым, для толщины следа расхождение с экспериментом также уменьшается.

В итоге приведенные данные показывают, что однозначный положительный эффект от использования формулы Брэдшоу для турбулентной вязкости в рамках стандартного варианта модели турбулентности k – ε проявляется главным образом в повышении точности расчета пограничного слоя и следа за профилем.

4. Заключение

В настоящей работе исследованы некоторые методические аспекты применения локально-адаптивных расчетных сеток и пристеночных функций в задачах численного моделирования внешнего обтекания летательных аппаратов в рамках осредненной по Рейнольдсу системы уравнений Навье–Стокса, замкнутой с помощью стандартного варианта модели турбулентности k – ε . Рассмотрено обтекание крылового профиля RAE 2822 турбулентным дозвуковым потоком вязкого сжимаемого совершенного газа. Цель работы состояла в анализе эффективности применения технологии FlowVision сглаживания диффузионных потоков и формулы Брэдшоу для турбулентной вязкости в качестве мер, повышающих точность решения задач внешнего обтекания на локально-адаптивных сетках.

Результаты исследования показали, что использование технологии сглаживания диффузионных потоков при сопоставимом времени расчета приводит к существенному уменьшению расхождений в величине коэффициента лобового сопротивления между результатами расчетов и экспериментальными данными. Помимо этого, обеспечивается регуляризация распределения коэффициента поверхностного трения на обтекаемой поверхности, а также ослабляются ограничения на максимально допустимое сеточное разрешение пограничного слоя, обусловленные сильным разбросом значений y^+ . В свете этого технология FlowVision сглаживания диффузионных потоков представляется эффективным способом повышения точности расчетов на локально-адаптивных сетках.

Результаты применения формулы Брэдшоу для турбулентной вязкости в рамках стандартной k – ε -модели турбулентности не столь однозначны. С одной стороны, использование этой формулы обеспечивает хорошее согласование суммарных аэродинамических характеристик и распределения коэффициента давления по поверхности профиля с экспериментом. Также при использовании формулы Брэдшоу значительно повышается точность моделирования течения в пограничном слое и в следе. С другой стороны, использование формулы Брэдшоу при моделировании обтекания профиля RAE 2822 приводит к занижению значений коэффициента поверхностного трения. Поэтому на фоне обнадеживающих результатов расчета суммарных аэродинамических характеристик тем не менее есть основания считать, что практическое применение формулы Брэдшоу без ее предварительной валидации на релевантных тестовых случаях сопряжено с риском получения некорректных результатов или их некорректной интерпретации.

Несмотря на это, результаты, полученные в настоящей работе, в целом показывают, что при использовании рассмотренных технологий численное решение задач внешнего обтекания летательных аппаратов на локально-адаптивных сетках с применением пристеночных функций обеспечивает точность, приемлемую для оперативной оценки аэродинамических характеристик аппаратов.

Список литературы (References)

- Аксёнов А. А.* FlowVision. Индустриальная вычислительная гидродинамика // Компьютерные исследования и моделирование. — Т. 9, № 1. — 2017. — С. 5–20.
Aksenov A. A. FlowVision. Industrial'naya vychislitel'naya gidrodinamika [FlowVision. Industrial computational fluid dynamics] // Computer Research and Modeling. — Vol. 9, No. 1. — 2017. — P. 5–20 (in Russian).
- Долгов Е. В., Колосов Н. С., Фирсов А. А.* Исследование влияния искрового разряда на смешение струи газообразного топлива со сверхзвуковым воздушным потоком // Компьютерные исследования и моделирование. — 2019. — Т. 11, № 5. — С. 849–860.
Dolgov E. V., Kolosov N. S., Firsov A. A. The study of the discharge influence on mixing of gaseous fuel jet with the supersonic air flow // Computer Research and Modeling. — 2019. — Vol. 11, No. 5. — P. 849–860 (in Russian).
- Жлуктов С. В., Аксёнов А. А., Харченко С. А., Москалёв И. В., Сушко Г. Б., Шиишаева А. С.* Моделирование отрывных течений в программном комплексе FlowVision-HPC // Вычислительные методы и программирование. — 2010. — Т. 11, № 2. — С. 76–87.
Zhlukotov S. V., Aksenov A. A., Kharchenko S. A., Moskalev I. V., Sushko G. B., Shishaeva A. S. Modelirovaniye otryvnykh techeniy v programmnom komplekse FlowVision-HPC [Simulation of separated flows in FlowVision-HPC software] // Vychislitel'nye metody i programmirovaniye [Numerical methods and programming]. — 2010. — Vol. 11, No. 2. — P. 76–87 (in Russian).
- Жлуктов С. В., Аксёнов А. А.* Пристеночные функции для высокорейнольдсовых расчетов в программном комплексе FlowVision // Компьютерные исследования и моделирование. — Т. 7, № 6. — 2015. — С. 1221–1239.
Zhlukotov S. V., Aksenov A. A. Pristenochnye funktsii dlja vysokoreynoldsovykh raschetov v programmnom komplekse FlowVision [Wall functions for high-Reynolds calculations in FlowVision software] // Kompjuternye Issledovaniya i Modelirovaniye [Computer Research and Modeling]. — Vol. 7, No. 6. — 2015. — P. 1221–1239 (in Russian).
- Жлуктов С. В., Аксёнов А. А., Савицкий Д. В.* Высокореинольдсовые расчеты турбулентного теплопереноса в программном комплексе FlowVision // Компьютерные исследования и моделирование. — Т. 10, № 4. — 2018. — С. 461–481.
Zhlukotov S. V., Aksenov A. A. Vysokoreinoldsovyye raschety turbulentnogo teploperenosa v programmnom komplekse FlowVision [High-Reynolds number calculations of turbulent heat transfer in FlowVision software] // Kompjuternye Issledovaniya i Modelirovaniye [Computer Research and Modeling]. — Vol. 10, No. 4. — 2018. — P. 461–481 (in Russian).
- Печенюк А. В.* Оптимизация судовых обводов для снижения сопротивления движению // Компьютерные исследования и моделирование. — 2017. — Т. 9, № 1. — С. 57–65.
Pechenyuk A. V. Optimization of a hull form for decrease ship resistance to movement // Computer Research and Modeling. — 2017. — Vol. 9, No. 1. — P. 57–65 (in Russian).
- Таковицкий С. А.* Оптимизационные задачи сверхзвуковой аэродинамики. — М.: Наука, 2013.
Takovitskiy S. A. Optimizatsionnye zadachi sverkhzvukovoy aerodinamiki [Optimization problems in supersonic aerodynamics]. — Moscow: Nauka, 2013 (in Russian).
- Aftosmis M. J., Berger M. J., Melton J. E.* Robust and Efficient Cartesian Mesh Generation for Component-Based Geometry // AIAA Journal. — 1998. — Vol. 36, No. 6. — P. 952–960.
- Aksenov A., Dyadkin A., Pokhilko V.* Overcoming of barrier between CAD and CFD by modified finite volume method // ASME Publications PVP. — 1998. — Vol. 377. — P. 79–83.
- Babinsky H., Harvey J. K., eds.* Shock Wave — Boundary-Layer Interactions. — Cambridge University Press, 2011.
- Binion T. W.* Limitations of available data. — AGARD AR 138, 1979.
- Cook P. H., McDonald M. A., Firmin M. C. P.* Aerofoil RAE 2822 — pressure distributions, and boundary layer and wake measurements. — AGARD AR 138, 1979.
- Dadone A., Grossman B.* Ghost-cell method for analysis of inviscid three-dimensional flows on Cartesian-grids // Computers & Fluids. — 2007. — Vol. 36. — P. 1513–1528.
- Drela M.* XFOIL: An analysis and design system for low Reynolds number airfoils // Low Reynolds numbers aerodynamics. — 1989. — P. 1–12.

- Drela M., Giles M. B.* Viscous-Inviscid Analysis of Transonic and Low Reynolds Number Airfoils // AIAA Journal. — 1987. — Vol. 25, No. 10. — P. 1347–1355.
- Johnson F. T., Tinoco E. N., Yu N. J.* Thirty years of development and application of CFD at Boeing Commercial Airplanes, Seattle // Computers & Fluids. — 2005. — Vol. 34, No. 10. — P. 1115–1151.
- Karman Jr S. L.* SPLITFLOW: A 3D Unstructured Cartesian/Prismatic Grid CFD Code for Complex Geometries. AIAA Paper 95-0343 // 33rd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. — 1995.
- Lai M. C., Peskin C. S.* An Immersed Boundary Method with Formal Second-Order Accuracy and Reduced Numerical Viscosity // Journal of Computational Physics. — 2000. — Vol. 160, No. 2. — P. 705–719.
- Langtry R. B., Menter F. R.* Correlation-Based Transition Modeling for Unstructured Parallelized Computational Fluid Dynamics Codes // AIAA Journal. — 2009. — Vol. 47, No. 12. — P. 2894–2906.
- Leifsson L., Koziel S.* Aerodynamic shape optimization by variable-fidelity computational fluid dynamics models: A review of recent progress // Journal of Computational Science. — 2015. — Vol. 10. — P. 45–54.
- Luo H., Baum J. D., Loehner R.* A hybrid Cartesian grid and gridless method for compressible flows // Journal of Computational Physics. — 2006. — Vol. 214, No. 2. — P. 459–474.
- Luo H., Spiegel S., Loehner R.* Hybrid Grid Generation Method for Complex Geometries // AIAA Journal. — 2010. — Vol. 48, No. 11. — P. 2639–2647.
- Melton J. E., Berger M. J., Aftosmis M. J., Wong M. D.* 3D Applications of a Cartesian Grid Method. AIAA Paper 95-0853 // 33rd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. — 1995.
- Menter F. R.* Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications // AIAA Journal. — 1994. — Vol. 32, No. 8. — P. 1598–1605.
- Menter F., Carregal Ferreira J., Esch T., Konno B.* The SST Turbulence Model with Improved Wall Treatment for Heat Transfer Predictions in Gas Turbines // Proceedings of the International Gas Turbine Congress. — 2003. — Tokyo, November 2–7. — 7 p.
- Roache P. J.* Verification of Codes and Calculations // AIAA Journal. — 1998. — Vol. 36, No. 5. — P. 696–702.
- Wilcox D. C.* Turbulence modeling for CFD. — DCW Industries Inc., 1994.
- Wolkov A. V., Lyapunov S. V.* Numerical prediction of transonic viscous separated flows past an airfoil // Theoretical and Computational Fluid Dynamics. — 1994. — Vol. 6, No. 1. — P. 49–63.