

УДК: 574.5:51-7:62

Интервальный анализ динамики растительного покрова

Д. А. Говорков^{1,2,a}, В. П. Новиков^{1,b},
И. Г. Соловьёв^{1,2,c}, В. Р. Цибульский^{1,d}

¹ Тюменский научный центр СО РАН,
Россия, 625026, г. Тюмень, ул. Малыгина, д. 86

² Тюменский индустриальный университет,
Россия, 625000, г. Тюмень, ул. Володарского, д. 38

E-mail: ^a dagovorkov@mail.ru, ^b viktor.p.novikov@yandex.ru, ^c solovyev@ikz.ru, ^d v-tsb@yandex.ru

Получено 12.07.2020, после доработки — 24.08.2020.

Принято к публикации 08.09.2020.

В развитие ранее полученного результата по моделированию динамики растительного покрова, вследствие изменчивости температурного фона, представлена новая схема интервального анализа динамики флористических образцов формаций в случае, когда параметр скорости реагирования модели динамики каждого учетного вида растения задан интервалом разброса своих возможных значений. Желаемая в фундаментальных исследованиях детализация описания функциональных параметров макромоделей биоразнообразия, учитывающая существенные причины наблюдаемых эволюционных процессов, может оказаться проблемной задачей. Использование более надежных интервальных оценок варибельности функциональных параметров «обходит» проблему неопределенности в вопросах первичного оценивания эволюции фиторесурсного потенциала осваиваемых подконтрольных территорий. Полученные решения сохраняют не только качественную картину динамики видового разнообразия, но и дают строгую, в рамках исходных предположений, количественную оценку меры присутствия каждого вида растения. Практическая значимость схем двустороннего оценивания на основе конструирования уравнений для верхних и нижних границ траекторий разброса решений зависит от условий и меры пропорционального соответствия интервалов разбросов исходных параметров с интервалами разбросов решений. Для динамических систем желаемая пропорциональность далеко не всегда обеспечивается. Приведенные примеры демонстрирует приемлемую точность интервального оценивания эволюционных процессов. Важно заметить, что конструкции оценочных уравнений порождают исчезающие интервалы разбросов решений для квазипостоянных температурных возмущений системы. Иными словами, траектории стационарных температурных состояний растительного покрова предложенной схемой интервального оценивания не огрубляется. Строгость результата интервального оценивания видового состава растительного покрова формаций может стать определяющим фактором при выборе метода в задачах анализа динамики видового разнообразия и растительного потенциала территориальных систем ресурсно-экологического мониторинга. Возможности предложенного подхода иллюстрируются геоинформационными образами вычислительного анализа динамики растительного покрова полуострова Ямал и графиками ретроспективного анализа флористической изменчивости формаций ландшафтно-литологической группы «Верховые» по данным вариации летнего температурного фона метеостанции г. Салехарда от 2010 до 1935 года. Разработанные показатели флористической изменчивости и приведенные графики характеризуют динамику видового разнообразия, как в среднем, так и индивидуально, в виде интервалов возможных состояний по каждому учетному виду растения.

Ключевые слова: биоразнообразие, динамика, растительный покров, формация, интервальный анализ, границы разброса решений, равновесное состояние, динамика реагирования

© 2020 Денис Александрович Говорков, Виктор Петрович Новиков,
Илья Георгиевич Соловьёв, Владимир Романович Цибульский

Статья доступна по лицензии Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Unported License.
Чтобы получить текст лицензии, посетите веб-сайт <http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/>
или отправьте письмо в Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

UDC: 574.5:51-7:62

Interval analysis of vegetation cover dynamics

**D. A. Govorkov^{1,2,a}, V. P. Novikov^{1,b},
I. G. Solovyev^{1,c}, V. R. Tsibulsky^{1,d}**

¹Tyumen Scientific Centre SB RAS,
86 Malygina st., Tyumen, 625026, Russia

²Tyumen Industrial University,
38 Volodarskogo st., Tyumen, 625000, Russia

E-mail: ^a dagovorkov@mail.ru, ^b viktor.p.novikov@yandex.ru, ^c solovyev@ikz.ru, ^d v-tsib@yandex.ru

Received 12.07.2020, after completion — 24.08.2020.

Accepted for publication 08.09.2020.

In the development of the previously obtained result on modeling the dynamics of vegetation cover, due to variations in the temperature background, a new scheme for the interval analysis of the dynamics of floristic images of formations is presented in the case when the parameter of the response rate of the model of the dynamics of each counting plant species is set by the interval of scatter of its possible values. The detailed description of the functional parameters of macromodels of biodiversity, desired in fundamental research, taking into account the essential reasons for the observed evolutionary processes, may turn out to be a problematic task. The use of more reliable interval estimates of the variability of functional parameters “bypasses” the problem of uncertainty in the primary assessment of the evolution of the phyto-resource potential of the developed controlled territories. The solutions obtained preserve not only a qualitative picture of the dynamics of species diversity, but also give a rigorous, within the framework of the initial assumptions, a quantitative assessment of the degree of presence of each plant species. The practical significance of two-sided estimation schemes based on the construction of equations for the upper and lower boundaries of the trajectories of the scatter of solutions depends on the conditions and measure of proportional correspondence of the intervals of scatter of the initial parameters with the intervals of scatter of solutions. For dynamic systems, the desired proportionality is not always ensured. The given examples demonstrate the acceptable accuracy of interval estimation of evolutionary processes. It is important to note that the constructions of the estimating equations generate vanishing intervals of scatter of solutions for quasi-constant temperature perturbations of the system. In other words, the trajectories of stationary temperature states of the vegetation cover are not roughened by the proposed interval estimation scheme. The rigor of the result of interval estimation of the species composition of the vegetation cover of formations can become a determining factor when choosing a method in the problems of analyzing the dynamics of species diversity and the plant potential of territorial systems of resource-ecological monitoring. The possibilities of the proposed approach are illustrated by geoinformation images of the computational analysis of the dynamics of the vegetation cover of the Yamal Peninsula and by the graphs of the retro-perspective analysis of the floristic variability of the formations of the landscape-lithological group “Upper” based on the data of the summer temperature background of the Salehard weather station from 2010 to 1935. The developed indicators of floristic variability and the given graphs characterize the dynamics of species diversity, both on average and individually in the form of intervals of possible states for each species of plant.

Keywords: biodiversity, dynamics, vegetation cover, formation, interval analysis, solution spread limits, equilibrium state, reaction dynamics

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2020, vol. 12, no. 5, pp. 1191–1205 (Russian).

1. Введение

Климатические тренды температурного фона и связанная с ним изменчивость растительного покрова имеют особое значение в вопросах контроля и сохранения биоразнообразия [Морозова, 2011; O'Connog et al., 2020] для ранимых территорий Севера, испытывающих, кроме того, все возрастающую антропогенную нагрузку ресурсодобывающих компаний [Pavlenko, Glukhareva, 2007; Удалая, 2016]. Наблюдаемая динамика и мощность климатических катаклизмов, их социально-индустриальные последствия свидетельствуют, что оценка и контроль границ сбалансированного сосуществования природы и общества [Тарко, 2005] носят не локальный характер, значимый для жизнеобеспечения аборигенного населения Севера, а имеют более масштабное влияние, выходящее за границы региона.

Современное развитие геоинформационных (ГИ) технологий [Brown, 2014; Афонин и др., 2016; Pourghasemi, Gokseoglu, 2019], систем и средств дистанционного зондирования [Peregon, Yamagata, 2013; Thiel, Schullius, 2016], математических методов моделирования в природопользовании [Санданов, 2019] создает основу для построения территориальных комплексов ресурсно-экологического мониторинга, объединяющих функции контроля, локального прогнозирования состояния и изменчивости структуры и параметров ландшафтов, флоры и фауны региона.

Положенная в основу биоклиматического моделирования корреляция данных о географических координатах распространения видов растений с вектором климатических факторов в указанных точках дает упрощенное описание ареалов потенциального обитания видов и их изменчивости при вариациях температурных полей. Не учитываются динамика возмущений, реакция среды и, что особенно важно, реальный флористический портрет контролируемого пространства, отражающий многофакторную и до конца непроявленную природу равновесного сосуществования популяций. В основе рассматриваемого метода лежит геоботаническая карта, представляющая собой схему конечных элементов с более детальным фактографическим описанием ландшафтно-флористических образов растительного покрова, именуемых растительными формациями.

Учитывая связь географических координат позиционирования формаций со шкалой широтного снижения температурного фактора в сторону Севера, можно предположить, что при климатических изменениях температурного фона новые флористические образы формаций есть композиции опорных флористических образов, изначально зафиксированных геоботанической картой, расположенной в исследуемом широтном температурном диапазоне.

Введение фактора реактивности видов на вариации температурного фона позволяет оценивать динамику изменчивости фиторесурсного потенциала территории на коротких природно-климатических циклах в условиях значимых возмущений.

Отметим, что динамика флористических состояний и температурных возмущений оценивается как среднегодовая. Особенности графика распределения температур в пределах года можно учитывать введением расширенного множества температурных факторов [Fick, Hijmans, 2017], например среднее значение положительных температур в году, используемое далее.

В работе [Арефьев и др., 2017] дан вариант решения задачи анализа и прогноза изменчивости растительного покрова полуострова Ямал при климатических вариациях температурного фона. В состав созданной ГИС входят векторная геоботаническая карта растительных формаций Западной Сибири масштаба 1:1500000, изданная в 1976 году под руководством академика В. Б. Сочавы (1976), электронная таблица данных о видовом и количественном составе сосудистых, составленная и систематизированная в ИПОС СО РАН [Цибульский и др., 1995], и разработанная математическая модель динамики изменчивости видового состава. Несмотря на то что ландшафты и флористика формаций в современных реалиях техногена претерпели изменения, использование указанного блока исходных данных хорошо демонстрирует возможности предложенных решений анализа и прогноза пространственной и временной изменчивости флористического потенциала подконтрольных территорий.

Представленные исследования во многом мотивированы указанной выше работой [Арефьев и др., 2017] и посвящены совершенствованию математического инструментария, связан-

ного со сложностями в определении исходных данных, необходимых для параметрической настройки модели. Проблема заключается не только в установлении возможно полного видового состава растительности, образующего формации, что требует определения и оцифровки большого числа фактографических данных полевых и камеральных исследований, используемых напрямую для параметрических настроек опорных векторов модели, но и в том, что системный показатель скорости реагирования популяции каждого вида растения на изменения температурного фона (или скорость самовосстановления) в применяемой модели линейной динамики первого порядка не относится к данным фактографического характера и не может быть зафиксирован полевыми исследованиями. Этот вычисляемый показатель есть результат обработки данных за более длительные периоды наблюдений.

Введение интервальной неопределенности для параметра скорости реагирования имеет принципиальное значение. Природа характеристики реактивности, а в нашем случае — динамики флористической изменчивости формации, сложна. А вот экспертное оценивание интервалов более доступно.

Используемые в научной периодике подобные характеристики, такие как структурная устойчивость, функциональная устойчивость [Kolomyts, Sharaya, 2015], показатели упругости, реактивности популяций и т. д., в контексте рассматриваемой задачи сами зависят от изменяющегося уровня температурного фона — главного возмущающего фактора в моделировании.

В названных предположениях рассмотренная ранее схема моделирования может быть обобщена посредством перехода от плохо определяемых функциональных параметров (в данном случае это $\lambda(j)$ — параметр скорость реагирования вида) к более строгим их интервальным оценкам:

$$\lambda(j) \in [\underline{\lambda(j)}, \overline{\lambda(j)}].$$

Введение интервальных параметров переводит ранее используемую модель в класс конечномерных динамических систем, описываемых линейными разностными включениями, в нашем случае — первого порядка.

Цель работы — дать новый инструмент анализа динамики растительного покрова на вариации температурного фона приземного слоя атмосферы «трубками» разброса траекторий своих состояний в условиях, когда функциональный параметр скорости реагирования каждого вида популяции задан интервалом своих возможных значений.

Более традиционные статистические методы описания неопределенностей [Себер, 1989] воспроизводят динамику поведения моделируемых процессов в «среднем». Методы интервального анализа, как сказано выше, доставляют результаты модельных исследований в виде трубок возможных решений, перенося интервалы разброса исходных данных на интервалы возможного разброса восстанавливаемых эволюционных траекторий. Строгость результата, доставляемая интервальным анализом, оказывается более практичной в вопросах прогнозирования фиторесурсного потенциала обследуемых территорий.

Современные вычислительные технологии интервального анализа [Buisson et al., 2010; Wentao, Wang, 2019] позволяют строить границы областей разброса решений уравнений с интервальными параметрами на основе алгебры элементарных интервальных операций, когда построение порождающих уравнений для этих границ не требуется [Жолен и др., 2007]. Двухстороннее оценивание решений дифференциально-разностных уравнений с интервальными параметрами связано с построением уравнений для границ разброса решений. В основе такого конструирования могут выступать известные теоремы о дифференциальных неравенствах С. А. Чаплыгина [Чаплыгин, 1956] и Т. Важевского [Wazewski, 1950]. Определение ответа в виде уравнений для верхней и нижней оценок границ решений исходного уравнения имеет значение в обосновании асимптотически устойчивых свойств решений [Матросов, 2001] для целого множества обследуемых объектов. Такая форма анализа создает строгую основу последующего развития задач управления в условиях неопределенности [Соловьёв, 1992]. В то же время подобное конструирование, как правило, огрубляет результаты анализа, устанавливая существенно завышенные оценки интервалов разброса решений.

Тем не менее, как показано ниже, данный подход оказался эффективным при оценке динамики изменчивости растительного покрова [Арефьев и др., 2017] вследствие вариации температурного фактора в условиях, когда параметр скорости реагирования каждого j -го вида растения задан интервалом своих возможных значений: $\lambda(j) \in [\underline{\lambda}(j), \overline{\lambda}(j)]$. Важная особенность полученного результата — в приемлемой точности двусторонних оценок, позволяющих не только дать качественную картину изменчивости видового состава растительного покрова, но и оценить динамику их количества для каждой формации на выделенном временном периоде ретроспективного анализа при заданном графике изменения температурного фактора. Отметим, что построенная модель двустороннего оценивания исследуемых процессов, обусловленная интервальной формой задания скоростного параметра $\lambda(j)$ исходного уравнения, порождает асимптотически исчезающий интервал возможных расхождений решений, если возмущающее воздействие исходного уравнения переходит в квазистатистическое состояние. Иными словами, график равновесного флористического состояния формации при вариациях температурного фактора не огрубляется построенной схемой двустороннего оценивания.

2. Математическая схема интервального анализа

Напомним кратко основные положения упомянутой ранее работы [Арефьев и др., 2017] по методике моделирования растительного покрова обследуемой территории вследствие климатических возмущений температурного фона приземного слоя атмосферы. Сразу заметим, что описанная схема анализа есть математическая интерпретация базовых географических положений [Морозова, 2011] по биоразнообразию на основе широтной самоорганизации природно-климатических зон в масштабе геоботанической карты региона.

Пространственная и атрибутивная детальность анализа определяется масштабом используемой геоботанической карты мозаичных образов растительных формаций [Карта «Растительность Западно-Сибирской равнины», 1976] и полнотой данных по видовому составу и степени присутствия популяций растений, образующих каждую формацию [Ильина и др., 1985; Мельцер, 1994; Цибульский и др., 1995].

Расположение формаций обследуемой территории имеет широтно-ориентированную структуру позиционирования, подобно строению природно-климатических зон [Коновалов и др., 2015; Thiel, Schmullius, 2016; O'Connor et al., 2020], ортогонально градиенту снижения температурного фактора в сторону Севера. Основываясь на данной закономерности, вводится *первое предположение* о том, что для равнинных территорий с потеплением флористические образы формаций южных широтных зон будут «смещаться» на позиции формаций сопрягаемых северных широтных зон, а с похолоданием имеет место обратное «смещение» с Севера на Юг.

Различие флористических образов формаций в пределах одной температурной зоны указывает на различие ландшафтно-литологических условий произрастания. К главным ландшафтно-литологическим признакам конструирования модели полуострова Ямал были отнесены: ландшафтно-флористические признаки названия формации, степень и характер увлажнения формации, структура почвогрунтов, глубина сезонно-талого слоя [Арефьев и др., 2017]. Ориентированные вдоль градиента температурного фактора формации со сходными ландшафтно-литологическими условиями произрастания образуют ландшафтноподобную группу (ЛПГ), в рамках которой и реализуются отмеченные выше процессы «смещения» — это *второе предположение*.

Пусть пары $\langle \theta(i), \mathbf{w}(i) \rangle$, $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$, — опорная температура и опорный вектор флористического состояния i -й формации выделенной ЛПГ, упорядочены по шкале температурного фактора:

$$\theta(1) < \theta(2) < \dots < \theta(i) < \dots < \theta(n),$$

а n — количество формаций в группе. Если N — учетное количество видов растений, образующих ЛППГ, то вектор опорных состояний i -й формации имеет представление

$$\mathbf{w}(i) = [w(1, i) \quad w(2, i) \quad \dots \quad w(N, i)]^T,$$

где $w(j, i) \in [0, 5]$ — степень присутствия популяции j -го вида, $j \in J = \{1, 2, \dots, N\}$, в i -й формации группы, заданная в балах.

Под опорным значением $\theta(i)$ будем понимать среднее состояние температурного фактора i -й формации за длительные периоды наблюдений. Под опорным вектором состояния i -й формации $\mathbf{w}(i)$ понимается равновесное флористическое состояние при температуре $\theta(i)$, т. е. флористический образ формации, когда температурный фактор $\theta(i)$ остается неизменным произвольно долго.

Пусть состояние i -й формации в $k-1$ году соответствует вектору

$$\mathbf{v}(i, k-1) = [v(1, i, k-1) \quad v(2, i, k-1) \quad \dots \quad v(N, i, k-1)]^T,$$

а возмущенные значение температурных факторов в k -м году для всех формаций группы оценивается по выражению

$$\theta(i, k) = \theta(i) + \delta(k), \quad i \in I,$$

где $\delta(k)$ — уровень температурного возмущения.

Введем вектор $\mathbf{w}(i, k) = [w(1, i, k) \quad w(2, i, k) \quad \dots \quad w(N, i, k)]^T$ равновесного флористического состояния i -й формации для возмущенного температурного фактора $\theta(i, k)$, тогда *третье предположение* исходной работы формулируется следующим образом.

Реакция растительного покрова на изменяющиеся равновесные состояния популяций носит асимптотический характер и аппроксимируется динамикой первого порядка, представленной для каждого j -го вида растения линейными разностными уравнениями

$$v(j, i, k) = \lambda(j) \cdot v(j, i, k-1) + (1 - \lambda(j)) \cdot w(j, i, k), \quad j \in J, \quad (1)$$

где $\lambda(j)$ — скорость реагирования j -го вида, связанная с периодом $\Delta T(j)$ переходного процесса самовосстановления отношением $\lambda(j)^{\Delta T(j)} \approx 0.02$.

Четвертое предположение определяет правило формирования компонент $\mathbf{w}(i, k)$ равновесного флористического состояния каждой i -й формации группы для произвольного возмущения $\delta(k)$ температурного фактора $\theta(i, k)$ в виде

$$w(j, i, k) = \mu(1, \theta(i, k)) \cdot w(j, 1) + \dots + \mu(i, \theta(i, k)) \cdot w(j, i) + \dots + \mu(n, \theta(i, k)) \cdot w(j, n), \quad (2)$$

где функции сопряжения опорных состояний $\mu(m, \theta(i, k))$ удовлетворяют условиям нормирования

$$\mu(1, \theta) + \mu(2, \theta) + \dots + \mu(n, \theta) = 1, \quad \mu(i, \theta) \geq 0, \quad \mu(i, \theta(i)) = 1.$$

Без ограничения общности индивидуальные свойства статической устойчивости (сопротивляемости) каждого j -го вида к уровню температурных возмущений, как это было в [Арефьев и др., 2017], здесь будем опускать.

Перейдем к анализу динамики флористического состояния формаций в условиях интервальной оценки параметра $\lambda(j) \in [\underline{\lambda}(j), \bar{\lambda}(j)]$ — скорости самовосстановления популяции растений j -го вида в уравнении (1).

Вычислительный анализ упрощается, если учетное множество видов растений группы $J = \{1, 2, \dots, N\}$ разделяется на подгруппы $J = \bigcup_1^{nL} J(l)$, имеющие разную темпоральную дина-

мику самовосстановления, представленную разнесенными интервалами возможных значений своих скоростных параметров

$$\lambda(j) \in [\underline{\lambda}(l), \overline{\lambda}(l)], \quad j \in J(l), \quad l \in L = \{1, 2, \dots, nL\}. \quad (3)$$

Соответствующие группировки видов растений опорных векторов и состояний формаций обозначим как $\mathbf{w}_l(i)$, $\mathbf{v}_l(i, k)$.

Применяя преобразование (1) к линейной форме (2), в условиях (3), можно записать

$$\mathbf{v}_l(i, k) = \eta_l(1, i, k) \cdot \mathbf{w}_l(1) + \dots + \eta_l(m, i, k) \cdot \mathbf{w}_l(m) + \dots + \eta_l(n, i, k) \cdot \mathbf{w}_l(n), \quad (4)$$

где динамические образы $\eta_l(m, i, k)$ функции сопряжения $\mu(m, \theta(i, k))$, согласно (1) и (2), удовлетворяют включениям

$$\eta_l(m, i, k) \in \mu(m, \theta(i, k)) + [\underline{\lambda}(l), \overline{\lambda}(l)] [\eta_l(m, i, k-1) - \mu(m, \theta(i, k))], \quad (5)$$

полное множество решений которых оценивается на основании нижеследующего.

Утверждение. Все траектории решений разностного включения (5) $\eta(m, i, k)$ удовлетворяют интервальному ограничению

$$\eta_l(m, i, k) \in [\underline{\eta}_l(m, i, k), \overline{\eta}_l(m, i, k)], \quad (6)$$

если данное условие выполняется для начального момента времени $k = 0$, а уравнения для верхней ($\overline{\eta}_l(m, i, k)$) и нижней ($\underline{\eta}_l(m, i, k)$) границ имеют вид

$$\begin{cases} \overline{\eta}_l(m, i, k) = \mu(m, \theta(i, k)) + \underline{\lambda}(l) \cdot [\overline{\eta}_l(m, i, k-1) - \mu(m, \theta(i, k))] + \\ \quad + \overline{\lambda}(l) \cdot [\underline{\eta}_l(m, i, k-1) - \mu(m, \theta(i, k))]_+, \\ \underline{\eta}_l(m, i, k) = \mu(m, \theta(i, k)) + \underline{\lambda}(l) \cdot [\underline{\eta}_l(m, i, k-1) - \mu(m, \theta(i, k))] + \\ \quad + \overline{\lambda}(l) \cdot [\overline{\eta}_l(m, i, k-1) - \mu(m, \theta(i, k))]_-. \end{cases} \quad (7)$$

Здесь принято: $(x)_+ = (x, \text{если } x \geq 0) \vee (0, \text{если } x < 0)$, а $(x)_- = x - (x)_+$.

Доказательство приведено в приложении.

Утверждение позволяет строить интервальные оценки процессов эволюции растительного покрова по темпорально разделенным подгруппам растений (3) при возмущениях температурного фона. Согласно (4), (6) имеем

$$\mathbf{v}(i, k) \in [\underline{\mathbf{v}}(i, k), \overline{\mathbf{v}}(i, k)],$$

где

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{v}}_l(i, k) &= \overline{\eta}_l(1, i, k) \cdot \mathbf{w}_l(1) + \dots + \overline{\eta}_l(m, i, k) \cdot \mathbf{w}_l(m) + \dots + \overline{\eta}_l(n, i, k) \cdot \mathbf{w}_l(n), \\ \underline{\mathbf{v}}_l(i, k) &= \underline{\eta}_l(1, i, k) \cdot \mathbf{w}_l(1) + \dots + \underline{\eta}_l(m, i, k) \cdot \mathbf{w}_l(m) + \dots + \underline{\eta}_l(n, i, k) \cdot \mathbf{w}_l(n). \end{aligned} \quad (8)$$

Вычислительная реализация динамических функций сопряжения $\underline{\eta}_l(m, i, k)$, $\overline{\eta}_l(m, i, k)$ для всех видов растений, входящих в l -ю подгруппу, производится один раз в каждой темпера-

турной зоне, в то время как без группировки подобный расчет производится для каждого вида в каждом слое.

Полученный результат свидетельствует, что в условиях темпорального разделения видов на подгруппы (3) количество вычислительных реализаций интервальных траекторий динамических функций сопряжения (7), согласно (8), заметно сокращается, что упрощает вычислительный анализ.

3. Вычислительные реализации, свойства решений и приложения

Для иллюстрации свойств решений модели двустороннего оценивания приведем результаты вычислительного анализа реакций возмущенных функций сопряжения при гармонических релаксационных колебаниях температурного фактора. Для простоты последующего анализа, но без ограничения общности, функции сопряжения опорных векторов учетного множества растений введем кусочно-линейными связями:

$$\mu(m, \theta(i, k)) = \frac{1}{\theta(m) - \theta(m-1)} \left[(\theta(i, k) - \theta(m-1))_+ - (\theta(i, k) - \theta(m))_+ \right] - \\ - \frac{1}{\theta(m+1) - \theta(m)} \left[(\theta(i, k) - \theta(m))_+ - (\theta(i, k) - \theta(m+1))_+ \right], \quad m \in I.$$

На фрагменте I рис. 1 представлены интервальная реакция динамики функции сопряжения с переходным периодом $\Delta T \in [4, 12]$ лет на релаксационный гармонический сигнал с периодом 6 лет, а также график ошибки оценивания $\Delta \eta(\bullet, k) = \bar{\eta}(\bullet, k) - \underline{\eta}(\bullet, k)$, а на фрагменте II рис. 1 — реакция и ошибка той же интервальной модели на сигнал с периодом 12 лет. Расчеты подтверждают факт, что средний уровень ошибки пропорционален росту частоты возмущающего воздействия. Ошибка оценивания асимптотически исчезает, если частота колебаний гармонического возмущения стремится к нулю, а само возмущение переходит в статическое состояние. Как и отмечалось ранее, построенная модель двухстороннего оценивания не огрубляет равновесные состояния системы.

Рассмотренная схема анализа была использована для ретроспективной оценки динамики растительного покрова полуострова Ямал [Цибульский и др., 1995] на периоде наблюдений летнего температурного фона города Салехарда с 1935 по 2010 г. На основе данных и результатов работ [Мельцер, 1994; Цибульский и др., 1995; Арефьев и др., 2017] обследуемые территории представлены 48 формациями [Ильина и др., 1985], разбитыми на восемь ЛПП, которые распределены в четырех температурных широтных зонах. В рассматриваемом примере анализировалась группа «верховые – V», образованная четырьмя формациями с номерами 1, 10, 17, 22 по легенде карты «Растительность Западно-Сибирской равнины», 1976; [Ильина и др., 1985] по одной в каждой зоне. Учетное множество видов растений в группе составляет $N = 100$ единиц. Каждая формация представлена на карте (рис. 2, слева) мозаикой тонированных полигональных объектов, расположенных в выделенных поименованных зонах.

Для каждого вида растения группы было проведено моделирование динамики интервальных траекторий состояния видов (8) на периоде с 1935 по 2010 г. по заданному графику вариаций среднегодового температурного фона для летнего времени (рис. 2, фрагмент 1). Приведенные на рис. 2 графики ретроспективного анализа интервальной динамики состояния демонстрируют отличие диапазонов разброса решений для характерных видов первой формации: *Calamagrostis neglecta* (Ehrh.) Gaertn., Mey. & Schreb из первой темпоральной подгруппы с интервалом разброса переходных периодов $\Delta T(1) \in [3, 6]$ лет (рис. 2, фрагмент 5) и *Betula nana* L. из второй подгруппы с интервалом периодов $\Delta T(2) \in [6, 12]$ лет. Исходные данные моделирования по указанным видам вынесены в таблицу 1.

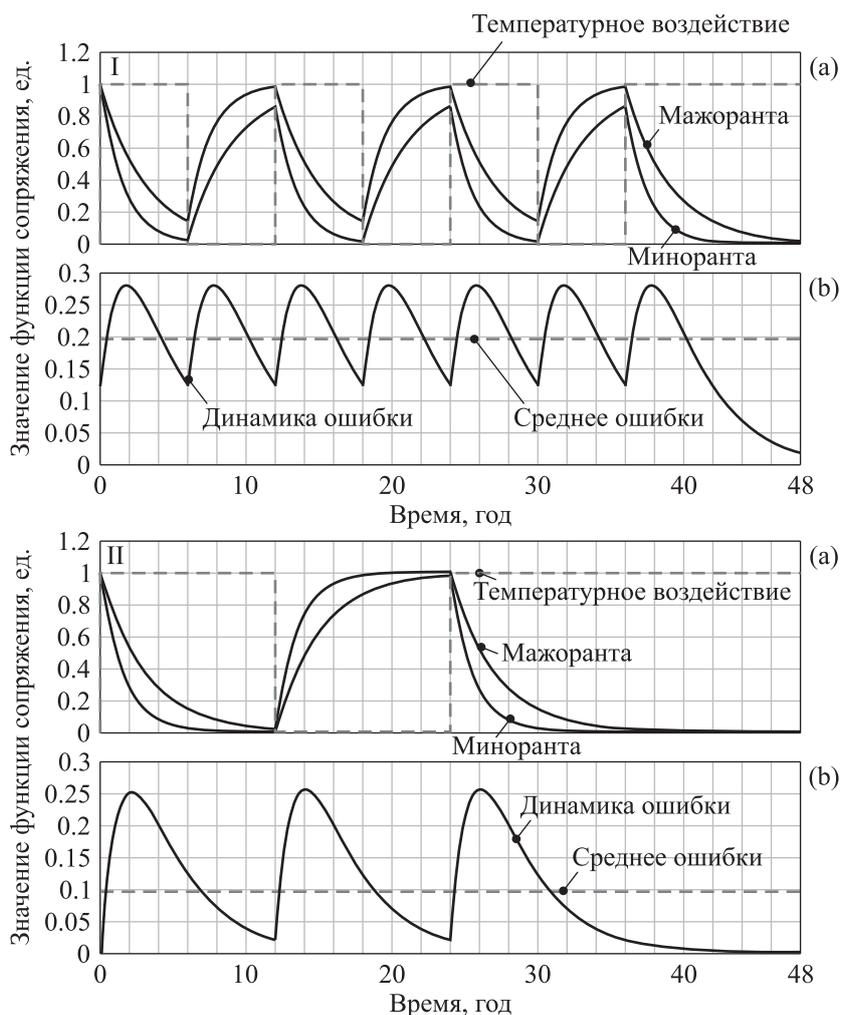


Рис. 1. Графики температурного воздействия и динамика двусторонней оценки функции сопряжения (а) при высокочастотном (I) и низкочастотном (II) возмущениях; (б) разброс интервальных ошибок оценивания для приведенных примеров

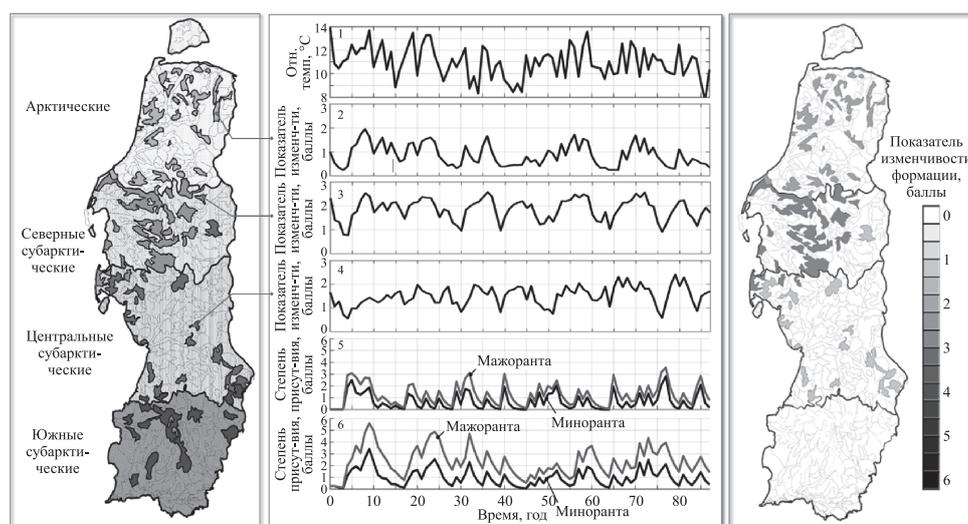


Рис. 2. Геоинформационные образы и моделируемые временные графики флористической изменчивости формаций «верховые – I» полуострова Ямал

Таблица 1. Исходные данные моделирования и анализа

Данные по видам		Данные по формациям				
Наименование вида	Интервал разброса периода переходных периодов, лет	Номер на карте	1	10	17	22
		Опорная температура	11.3	12.2	13.4	14.2
<i>Calamagrostis neglecta</i>	[3, 6]	Вектор опорных состояний	0	3	2	0
<i>Betula nana</i> L.	[6, 12]		0	3	5	4

Если изменчивость популяции j -го вида i -й формации оценивать выражением

$$\delta v_0(j, i, k) = |v_0(j, i, k) - w(j, i)| / w_0(j),$$

где $v_0(j, i, k) = 0.5 \cdot (\bar{v}(j, i, k) + \underline{v}(j, i, k))$ — средние для интервала, а $w_0(j) = \sum_{i \in I} w(j, i) / n$ —

среднее опорное для j -го вида в группе, то изменчивость растительного покрова i -й формации в группе можно оценивать по выражению

$$\delta v_V(i, k) = \sum_{j \in J} \delta v_0(j, i, k) / N. \quad (9)$$

Ретроспективные оценки флористической изменчивости для формаций № 1, 10, 17 группы V при заданном возмущении среднегодового температурного фона для летнего времени представлен в соответствии с (9) трендами на рис. 2, фрагменты 2, 3, 4. Анализ изменчивости растительного покрова для формации № 22 группы V не приводится ввиду отсутствия детальных данных по флористике формаций сопрягаемой южной северотаежной зоны.

Прогноз флористической изменчивости формаций и шкала изменчивости по метрике (9) при положительной вариации температурного фона, равной зональному шагу температур, иллюстрируется картой на рис. 2 (справа). По данному анализу можно сделать вывод, что изменчивость видового разнообразия оказывается выше на срединных территориях за счет большего числа видов на сопряженных южных формациях.

Заметим, что наличие интервальных неопределенностей не только сохраняет качественную картину динамики растительного покрова, но и доставляет количественную оценку степени присутствия для каждого вида популяции.

4. Заключение

Проведенный анализ позволяет сделать следующие выводы.

1. Метод математического моделирования эволюционных процессов ландшафтной биоэкологии является эффективным инструментом анализа и прогнозирования биоразнообразия и ресурсного потенциала осваиваемых территорий [Медоуз и др., 1991; Тарко, 2005]. Положенные в основу известных моделей концепции конкурентного взаимодействия видов [Колобов, 2012], стадий произрастания популяций [Логофет, 1991], генетического отбора [Aleshchenko, Vukvareva, 2010], равно как и рассмотренный подход на основе самоорганизации природно-климатических зон в биоклиматологии [Говорков, Соловьёв, 2015; Арефьев и др., 2017] позволяют воспроизводить графики эволюции «живого», отражая фундаментальные закономерности сосуществования экосистем. Однако воспроизводимые макрозакономерности не объясняют сущностных причин многообразия поведенческих проявлений реально наблюдаемых процессов. Настраечные параметры макромоделей отражают осредненное действие множества скрытых факторов, детализация описания которых может оказаться проблемным делом. А в нашем случае — оценки эколого-ресурсного потенциала — необязательным. Представленный выше интервальный анализ есть пример строгого двустороннего оценивания

эволюционных кривых, если плохо определяемые параметры модели задаются более строгими интервалами оценок

2. Рассмотренная схема интервального анализа для линейной динамики первого порядка сводится к двухсторонней оценке решения разностного включения на основе построения уравнений для верхней и нижней границ решений. Полученная таким образом модель интервального анализа устанавливает строгие границы решений не только для исходной линейной модели, но и для любых нестационарных моделей, удовлетворяющих секторным ограничениям вида [Гелиг и др., 1978]

$$v(j, i, k) - w(j, i, k) = \lambda(j, k, v(j, i, k-1) - w(j, i, k)), \quad \lambda(j, k, x(k)) \in [\underline{\lambda}(j), \overline{\lambda}(j)] \cdot x(k).$$

Это позволяет декомпозировать задачи построения моделей для плохо формализуемых биоклиматических процессов с корректным воспроизведением макродинамических процессов и отдельным доопределением существенных микродинамических аспектов поведения «живого».

3. Практическая значимость схем двустороннего оценивания зависит от условий пропорционального соответствия — интервалов разброса параметров исходной модели с интервалами разбросов решений. Следует признать, что желаемое соответствие далеко не всегда достижимо и, помимо прочего, зависит от уровня исходной неопределенности. Полученные результаты для модели динамики первого порядка доставляют приемлемые для практики показатели точности анализа.

4. Рассмотренная схема модельного анализа динамики растительного покрова, вследствие климатических вариаций температурного фона, ориентирована на задачу мониторинга естественного фиторесурсного потенциала подконтрольных территорий. Решение указанной задачи базируется на систематизации большого объема фактографических данных о видовом и количественном составе растительного покрова формаций, получаемых по результатам регламентированных наблюдений уполномоченных органов Росприроднадзора, технологий дистанционного зондирования, полевых и камеральных исследований биологов и ландшафтоведов профильных институтов. Оценка функциональных параметров $\lambda(j)$ (скорости реагирования для каждого j -го учетного вида растения) требует обработки данных состояния флористики за более длительные периоды наблюдений колебаний температурного фона. Исходные данные для полуострова Ямал были получены и систематизированы биологами и ландшафтоведами ИПОС СО РАН [Арефьев и др., 2017] по результатам многолетних полевых и камеральных работ. Упрощенная схема учета равновесных состояний (2) по фактографическим данным опорных векторов, а также интервальные оценки плохо определяемых скоростных параметров модели делают предложенную схему удобным инструментом быстрого анализа на горизонте прогноза динамики температурного фона. Отметим, что техника двустороннего оценивания не только сохраняет качественную картину динамики видового разнообразия, но и дает строгую количественную оценку степени присутствия каждого вида растения. Кроме того, конструкции оценочных уравнений дают асимптотически исчезающие интервалы разброса решений для квазистатических температурных состояний системы.

5. В отличие от макрогеографического районирования фиторазнообразия для крупномасштабных природных зон [Морозова, 2011], образующих основу тематических атласов стран и регионов [Карта «Биомы России»], рассмотренная схема контроля «малых» территориальных зон позволяет детальнее прогнозировать динамику изменчивости растительного покрова, учитывая фактографические данные реальной флористики формаций при значимых вариациях температурного фона.

6. Представленные исследования носят междисциплинарный характер, объединяя на основе базовых положений биоклиматологии метод анализа динамики растительного покрова посредством двухстороннего оценивания возмущенных решений разностных включений и геоинформационные средства и инструменты картографической визуализации результатов вычислений анализа.

Приложение

Доказательство утверждения. Запишем исходные соотношения (1), (3), (5) в упрощенном виде:

$$\eta(k) = \mu(k) + \lambda(\eta(k-1) - \mu(k)), \quad \lambda \in [\underline{\lambda} \quad \bar{\lambda}], \quad (1п)$$

соответствующие упрощения записи системы (7) приводят к уравнениям верхней границы и нижней границы:

$$\begin{aligned} \bar{\eta}(k) &= \mu(k) + \underline{\lambda}(\bar{\eta}(k-1) - \mu(k))_- + \bar{\lambda}(\bar{\eta}(k-1) - \mu(k))_+, \\ \underline{\eta}(k) &= \mu(k) + \underline{\lambda}(\underline{\eta}(k-1) - \mu(k))_+ + \bar{\lambda}(\underline{\eta}(k-1) - \mu(k))_-. \end{aligned} \quad (2п)$$

Проведем анализ для уравнения верхней границы. Следует доказать, что если выполнено отношение

$$\bar{\varepsilon}(k-1) = \bar{\eta}(k-1) - \eta(k-1) > 0, \quad (3п)$$

то при любых $\mu(k)$ и $\lambda \in [\underline{\lambda} \quad \bar{\lambda}] \geq 0$ будет обеспечено: $\bar{\varepsilon}(k) > 0$.

Пусть $\bar{\eta}(k-1) > \eta(k-1) \geq \mu(k)$. Перейдем к уравнению ошибки (3п). Для этого из (2п) вычтем уравнение (1п). В принятых условиях $\bar{\eta}(k-1) \geq \mu(k)$ имеем

$$\bar{\varepsilon}(k) = \bar{\lambda} \cdot \bar{\varepsilon}(k-1) + (\bar{\lambda} - \lambda) \cdot (\eta(k-1) - \mu(k)).$$

Все компоненты суммы в правой части уравнения положительны, из чего следует: $\bar{\varepsilon}(k) \geq 0$.

Второй случай, когда имеет место отношение $\mu(k) \geq \bar{\eta}(k-1) > \eta(k-1)$. Уравнение верхней границы принимает вид

$$\bar{\eta}(k) = \mu(k) + \underline{\lambda}(\bar{\eta}(k-1) - \mu(k))_-.$$

Вычитая из полученного уравнения исходное (1п), приходим к модели ошибки

$$\bar{\varepsilon}(k) = \underline{\lambda} \cdot \bar{\varepsilon}(k-1) + (\underline{\lambda} - \lambda) \cdot (\eta(k-1) - \mu(k)).$$

Первое слагаемое правой части — строго положительно, множители второго слагаемого — не положительны, что в совокупности подтверждает условие $\bar{\varepsilon}(k) > 0$ и, тем самым, доказывает исходную причинно-следственную связь. Подобная схема вывода справедлива и для уравнения нижней границы, что в совокупности и доказывает исходное утверждение.

Список литературы (References)

- Арефьев С. П., Глазунов В. А., Говорков Д. А., Московченко Д. В., Соловьёв И. Г., Цибульский В. Р.* Модель и анализ климатогенной динамики растительного покрова на примере данных полуострова Ямал // Математическая биология и биоинформатика. — 2017. — Т. 12, № 2. — С. 256–272. — DOI: 10.17537/2017.12.256
- Arefiev S. P., Glazunov V. A., Govorkov D. A., Moskovchenko D. V., Solovyev I. G., Tsibulskiy V. R.* Model' i analiz klimatogennoi dinamiki rastitel'nogo pokrova na primere dannykh poluostrova Yamal [Model and Analysis of Vegetative Cover Climathogenic Dynamics on the Example of the Yamal Peninsula Data] // Mathematical biology and bioinformatics. — 2017. — Vol. 12, No. 2. — P. 256–272. — DOI: 10.17537/2017.12.256

- Афонин А. Н., Севрюков С. Ю., Соловьёв П. А., Лулева Н. Н.* Веб-ГИС для решения задач эколого-географического анализа и моделирования: новые возможности // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 7. Геология. География. — 2016. — № 4. — С. 97–111. — DOI: 10.21638/11701/spbu07.2016.408
- Afonin A. N., Sevriukov S. Yu., Solov'ev P. A., Luneva N. N.* Veb-GIS dlia resheniia zadach ekologo-geograficheskogo analiza i modelirovaniia: novye vozmozhnosti [Web-GIS for the solution of tasks of the ecologo-geographical analysis and modeling: new opportunities] // Vestnik of St Petersburg University. Series 7. Geology. Geography. — 2016. — No. 4. — P. 97–111. — DOI: 10.21638/11701/spbu07.2016.408
- Гелиг А. Х., Леонов Г. А., Якубович В. А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. — М.: Наука, 1978. — 400 с.
- Gelig A. H., Leonov G. A., Jakubovich V. A.* Ustojchivost' nelineinykh sistem s needin-stvennym sostojaniem ravnovesija [Stability of nonlinear systems with a non-unique equilibrium state]. — Moscow: Nauka, 1978. — 400 p.
- Говорков Д. А., Соловьёв И. Г.* Геоинформационные инструменты анализа и моделирования трансформации видового и количественного состава растительного покрова полуострова Ямал // Вестник кибернетики. — 2015. — № 1 (17). — С. 24–28.
- Govorkov D. A., Solovyev I. G.* Geoinformatsionnye instrumenty analiza i modelirovaniia transformatsii vidovogo i kolichestvennogo sostava rastitel'nogo pokrova poluostrova Yamal [Geoinformation tools for analysis and modelling transformation of specific and quantitative structure of the vegetation cover of the Yamal peninsula] // Vestnik kibernetiki [Cybernetics messenger]. — 2015. — No. 1 (17). — P. 24–28.
- Жолен Д., Кифер М., Дидри О., Вальтер Э.* Прикладной интервальный анализ. — Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2007. — 468 с.
- Zholen D., Kifer M., Didri O., Val'ter E.* Prikladnoi interval'nyi analiz [Applied interval analysis]. — Izhevsk: Institut komp'iuternykh issledovaniy [Institute of Computer Research], 2007. — 468 p.
- Ильина И. С., Лапишина Е. И., Лавренко Н. Н., Мельцер Л. И., Романова Е. А., Богоявленский Б. А., Махно В. Д.* Растительный покров Западно-Сибирской равнины. — Новосибирск: Наука, 1985. — 251 с.
- I'lina I. S., Lapishna E. I., Lavrenko N. N., Mel'tser L. I., Romanova E. A., Bogoiavlenskii B. A., Makhno V. D.* Rastitel'nyi pokrov Zapadno-Sibirskoi ravniny [Plant cover of the West Siberian Plain]. — Novosibirsk: Nauka, 1985. — 251 p.
- Матросов В. М.* Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем. — М.: Физматлит, 2001. — 384 с.
- Matrosov V. M.* Metod vektornykh funktsii Liapunova: analiz dinamicheskikh svoistv nelineinykh sistem [Lyapunov vector function method: analysis of the dynamic properties of nonlinear systems]. — Moscow: Fizmatlit, 2001. — 384 p.
- Медоуз Д. Х., Медоуз Д. Л., Рендерс Й., Беренс В. В.* Пределы роста. — М.: МГУ, 1991. — 208 с.
- Medouz D. Kh., Medouz D. L., Renders I., Berens V. V.* Predely rosta [Limits of growth]. — Moscow: Moscow State university, 1991. — 208 p.
- Мельцер Л. И.* Фитоценотические аспекты устойчивости ландшафтов Ямала // Западная Сибирь — проблемы развития. — Тюмень: Изд-во ИПОС СО РАН, 1994. — С. 128–141.
- Mel'tser L. I.* Fitotsenoticheskie aspekty ustojchivosti landshaftov Yamala. Zapadnaia Sibir' — problemy razvitiia [Phytocenotic aspects of the sustainability of Yamal landscapes. Western Siberia — problems of development]. — Tyumen: IPOS SO RAN, 1994. — P. 128–141.
- Морозова О. В.* Пространственные тренды таксономического богатства флоры сосудистых растений // Международный научный и прикладной журнал: «Биосфера». — 2011. — Т. 3, № 2. — С. 190–207.
- Morozova O. V.* Prostranstvennyye trendy taksonomicheskogo bogatstva flory sosudistykh rastenii [Spatial trends in the taxonomic richness of the vascular plant flora] // Biosphere. — 2011. — Vol. 3, No. 2. — P. 190–207.
- Карта «Биомы России»* [Электронный ресурс]. — <https://wwf.ru/what-we-do/bio/biomy-rossii/>
- Karta "Biomy Rossii"* [Map "Biomes of Russia"]. — <https://wwf.ru/what-we-do/bio/biomy-rossii/>
- Карта «Растительность Западно-Сибирской равнины»* / под общ. ред. ак. В. Б. Сочавы. — М.: ГУГК, 1976.
- Karta "Rastitel'nost' Zapadno-Sibirskoi ravniny"* [Map "Vegetation of the West Siberian Plain"] / pod obshch. red. ak. V. B. Sochavy [Under the general. ed. ac. V. B. Sochava]. — Moscow: GUGK, 1976.

- Колобов А. Н.* Численно-аналитические исследования роста дерева в условиях конкуренции за свет // Математическая биология и биоинформатика. — 2012. — Т. 7, вып. 1. — С. 125–138.
Kolobov A. N. Chislenno-analiticheskie issledovaniia rosta dereva v usloviiakh konkurentsii za svet [Numerical-Analytical Study Of The Tree Growth Model Under Light] // Matematicheskaya biologiya i bioinformatika. — 2012. — Vol. 7, Iss. 1. — P. 125–138.
- Коновалов А. А., Московченко Д. В., Глазунов В. А., Тигеев А. А., Гашев С. Н.* Аппроксимации климатической зависимости биоты на севере Тюменской области // Вестник кибернетики. — 2015. — № 2 (18). — С. 11–23.
Konovarov A. A., Moskovchenko D. V., Glazunov V. A., Tigeev A. A., Gashev S. N. Approksimatsii klimaticheskoi zavisimosti bioty na severe Tyumenskoi oblasti [Approximations of biota' climatic dependence in the north of Tyumen region] // Vestnik kibernetiki [Cybernetics messenger]. — 2015. — No. 2 (18). — P. 11–23.
- Логофет Д. О.* К теории матричных моделей динамики популяций с возрастной и дополнительной структурами // Журнал общей биологии. — 1991 — Т. 52, № 6. — С. 793–804.
Logofet D. O. K teorii matrichnykh modelei dinamiki populiatsii s vozrastnoi i dopolnitel'noi strukturami [On the theory of matrix models of population dynamics with age and additional structures] // Zhurnal obshchei biologii [Biology bulletin reviews]. — 1991. — Vol. 52, No. 6. — P. 793–804.
- Санданов Д. В.* Современные подходы к моделированию разнообразия и пространственному распределению видов растений: перспективы их применения в России // Вестник Томского государственного университета. Биология. — 2019. — № 46. — С. 82–114. — DOI: 10.17223/19988591/46/5
Sandanov D. V. Sovremennye podkhody k modelirovaniu raznoobrazii i prostranstvennomu raspredeleniiu vidov rastenii: perspektivy ikh primeneniia v Rossii [Modern approaches to modeling plant diversity and spatial distribution of plant species: Implication prospects in Russia] // Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Biologiya [Tomsk State University Journal of Biology]. — 2019. — No. 46. — P. 82–114. — DOI: 10.17223/19988591/46/5
- Себер Дж.* Линейный регрессионный анализ. — М.: Мир, 1989. — 456 с.
Seber Dzh. Lineinyy regressiionnyy analiz [Linear Regression Analysis]. — Moscow: Mir, 1989. — 456 p.
- Соловьёв И. Г.* Методы мажоризации в анализе и синтезе адаптивных систем. — Новосибирск: Наука, 1992. — 191 с.
Solovyev I. G. Metody mazhorizatsii v analize i sinteze adaptivnykh system [Majorization methods in the analysis and synthesis of adaptive systems]. — Novosibirsk: Nauka, 1992. — 191 p.
- Тарко А. М.* Антропогенные изменения глобальных биосферных процессов. Математическое моделирование. — М.: Физматлит, 2005. — 232 с.
Tarko A. M. Antropogennyye izmeneniia global'nykh biosfernykh protsessov. Matematicheskoe modelirovanie [Anthropogenic changes in global biosphere processes. Mathematical modeling]. — Moscow: Fizmatlit, 2005. — 232 p.
- Удалая Д. В.* Влияние отходов производства при добыче углеводородов на окружающую среду Крайнего Севера (на примере Уренгойского газоконденсатного месторождения) // Материалы ежегодной научно-практической конференции «Экологическое образование в интересах устойчивого развития». — 2016. — Т. 2. — С. 562–568.
Udalaya D. V. Vliianie otkhodov proizvodstva pri dobyche uglevodorodov na okruzhaiushchuiu sredu krainego severa (na primere Urengoisikogo gazokondensatnogo mestorozhdeniia) [Influence of waste products in the extraction of hydrocarbons in the environment of the far north (on the example of the Urengoy's gas condensate field)] // Materialy ezhegodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii "Ekologicheskoe obrazovanie v interesakh ustoichivogo razvitiia" [Materials of the annual scientific-practical conference Environmental Education for Sustainable Development]. — 2016. — Vol. 2. — P. 562–568.
- Цибульский В. Р., Валеева Э. И., Арефьев С. П., Мельцер Л. И., Московченко Д. В., Гашев С. Н., Бруснынина И. Н., Шаропова Т. А.* Природная среда Ямала. В 2-х томах, т. 2. — Тюмень: Изд-во ИПОС СО РАН, 1995. — 104 с.
Tsibul'skii V. R., Valeeva E. I., Arefev S. P., Mel'tser L. I., Moskovchenko D. V., Gashev S. N., Brusynina I. N., Sharapova T. A. Prirodnaia sreda Yamala. V 2-kh tomakh [The natural environment of Yamal. In 2 volumes]. Vol. 2. — Tyumen: IPOS SO RAN, 1995. — 104 p.
- Чаплыгин С. А.* Избранные труды по механике и математике. — М.: Гостехиздат, 1956. — 568 с.
Chaplygin S. A. Izbrannyye trudy po mekhanike i matematike [Selected works in mechanics and mathematics]. — Moscow: Gostekhizdat, 1956. — 568 p.

- Aleshchenko G. M., Bukvareva E. N.* Two-level hierarchical model of optimal biological diversity // *Biology Bulletin*. — 2010. — Vol. 37, No. 1. — P. 1–9.
- Brown J. L.* SDMtoolbox: a python-based GIS toolkit for landscape genetic, biogeographic and species distribution model analyses // *Methods in Ecology and Evolution*. — 2014. — Vol. 5, No. 7. — P. 694–700. — DOI: 10.1111/2041-210X.12200
- Buisson L., Thuiller W., Casajus N., Lek S., Grenouillet G.* Uncertainty in ensemble forecasting of species distribution // *Global Change Biology*. — 2010. — Vol. 16. — P. 1145–1157. — DOI: 10.1016/j.watres.2019.115343
- Fick S. E., Hijmans R. J.* WorldClim 2: new 1km spatial resolution climate surfaces for global land areas // *International Journal of Climatology*. — 2017. — Vol. 37 (12). — P. 4302–4315.
- Kolomyts E. G., Sharaya L. S.* Quantitative assessment of functional stability of forest ecosystems // *Russian Journal of Ecology*. — 2015. — Vol. 46, No. 2. — P. 117–127.
- O'Connor B., Bojinski S., Rösli S., Schaepman M.* Monitoring global changes in biodiversity and climate essential as ecological crisis intensifies // *Ecological Informatics*. — 2020. — Vol. 55. — DOI: 10.1016/j.ecoinf.2019.101033
- Pavlenko V. I., Glukhareva E. K.* Environmental impact of oil and gas production in the Russian arctic. International society of offshore and polar engineers // *The seventeenth international offshore and polar engineering conference*. — 2007.
- Peregon A., Yamagata Y.* The use of ALOS/PALSAR backscatter to estimate above-ground forest biomass: A case study in Western Siberia // *Remote Sensing of Environment*. — 2013. — Vol. 137. — P. 139–146. — DOI: 10.1016/j.rse.2013.06.012
- Pourghasemi H. R., Gokceoglu C.* *Spatial Modeling in GIS and R for Earth and Environmental Sciences*. — Elsevier, 2019. — P. 798.
- Tang W., Wang Z., Shen Y.* Interval estimation for discrete-time linear systems: A two-step method // *Systems & Control Letters*. — 2019. — Vol. 123. — P. 69–74. — DOI: 10.1016/j.sysconle.2018.11.001
- Thiel C., Schmullius C.* The potential of ALOS PALSAR backscatter and InSAR coherence for forest growing stock volume estimation in Central Siberia // *Remote Sensing of Environment*. — 2016. — Vol. 173. — P. 258–273. — DOI: 10.1016/j.rse.2015.10.030
- Wazewski T.* Systems des equations et des inequalities differentielles ordinaires aux deuxiemes membres monotones et leurs applications // *Ann. Sol. Pol. Math.* — 1950. — Vol. 23. — P. 112–166.

