

УДК: 519.6

Использование разностных схем для уравнения переноса со стоком при моделировании энергосетей

А. И. Лобанов^а, Ф. Х. Мирон^б

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет),
Россия, 141701, г. Долгопрудный, Московской обл., Институтский пер., д. 9

E-mail: ^а lobanov.ai@phystech.edu, ^б firuz8050@gmail.com

Получено 03.09.2020, после доработки — 28.09.2020.

Принято к публикации 05.10.2020.

Современные системы транспортировки электроэнергии представляют собой сложные инженерные системы. В состав таких систем входят как точечные объекты (производители электроэнергии, потребители, трансформаторные подстанции), так и распределенные (линии электропередач). При создании математических моделей такие сооружения представляются в виде графов с различными типами узлов. Для исследования динамических эффектов в таких системах приходится решать численно систему дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа.

В работе использован подход, аналогичный уже примененным ранее при моделировании подобных задач. Использован вариант метода расщепления. Авторами предложен свой способ расщепления. В отличие от большинства известных работ расщепление проводится не по физическим процессам (перенос без диссипации, отдельно диссипативные процессы), а на перенос со стоковыми членами и «обменную» часть. Такое расщепление делает возможным построение гибридных схем для инвариантов Римана, обладающих высоким порядком аппроксимации и минимальной диссипативной погрешностью. Для однофазной ЛЭП приведен пример построения такой гибридной разностной схемы. Предложенная разностная схема строится на основе анализа свойств схем в пространстве неопределенных коэффициентов.

Приведены примеры расчетов модельной задачи с использованием предложенного расщепления и построенной разностной схемы. На примере численных расчетов показано, что разностная схема позволяет численно воспроизводить возникающие области больших градиентов. Показано, что разностная схема позволяет обнаружить резонансы в подобных системах.

Ключевые слова: энергосети, граф, телеграфное уравнение, уравнение переноса со стоком, разностная схема, неопределенные коэффициенты, линейное программирование

UDC: 519.6

On the using the differential schemes to transport equation with drain in grid modeling

A. I. Lobanov^a, F. Kh. Mirov^b

Moscow Institute of Physics and Technology (national research university)
9 Institutskii line, Dolgoprudnyi, Moscow Region, 141701, Russia

E-mail: ^a lobanov.ai@phystech.edu, ^b firuz8050@gmail.com

Received 03.09.2020, after completion — 28.09.2020.

Accepted for publication 05.10.2020.

Modern power transportation systems are the complex engineering systems. Such systems include both point facilities (power producers, consumers, transformer substations, etc.) and the distributed elements (f.e. power lines). Such structures are presented in the form of the graphs with different types of nodes under creating the mathematical models. It is necessary to solve the system of partial differential equations of the hyperbolic type to study the dynamic effects in such systems.

An approach similar to one already applied in modeling similar problems earlier used in the work. New variant of the splitting method was used proposed by the authors. Unlike most known works, the splitting is not carried out according to physical processes (energy transport without dissipation, separately dissipative processes). We used splitting to the transport equations with the drain and the exchange between Riemann's invariants. This splitting makes possible to construct the hybrid schemes for Riemann invariants with a high order of approximation and minimal dissipation error. An example of constructing such a hybrid differential scheme is described for a single-phase power line. The difference scheme proposed is based on the analysis of the properties of the schemes in the space of insufficient coefficients.

Examples of the model problem numerical solutions using the proposed splitting and the difference scheme are given. The results of the numerical calculations shows that the difference scheme allows to reproduce the arising regions of large gradients. It is shown that the difference schemes also allow detecting resonances in such the systems.

Keywords: grid, graph, telegraph equation, transport equation with drain, difference schemes, insufficient coefficients, linear programming

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2020, vol. 12, no. 5, pp. 1149–1164 (Russian).

Введение

Современные энергетические системы представляют собой сложные инженерные сооружения. Они состоят из набора генерирующих электростанций (производители электроэнергии), линий электропередач, распределительных и трансформаторных станций. Основная цель системы — доставка электроэнергии потребителям с минимальными потерями. Такая сетевая структура может быть описана в виде графа с ребрами (ЛЭП), набором входящих узлов (генераторы), набором узлов, соответствующих трансформаторам, и точкам ветвления, а также набором узлов, представляющих собой неких интегральных потребителей электроэнергии.

Инженерная сложность сооружения влечет за собой и сложность проектирования, и описания функционирования системы в целом. Кроме проблем оценки потерь в энергосистеме, вопросов перспективного развития, возникает проблема описания динамических режимов ее функционирования с целью оценки вероятности тех или иных аварий и их возможных последствий. При этом необходимо учитывать сложную структуру энергосетей.

Для описания сложной структуры современных электрических сетей используются методы моделирования графов. Обычно в таких математических моделях на первый план выходят вопросы структуры сетей, сложности, потенциальных уязвимостей. Обзор свободных программ для такого моделирования приведен в [Heitkoetter et al., 2019]. Методы описания процессов в энергосетях с учетом структуры графа описаны в [Kan et al., 2019].

Общий подход к описанию динамических режимов в энергосистемах был дан в [Бордонос и др., 2009]. Отметим, что исследование именно динамических режимов — трудная задача, требующая использования разностных схем, минимизирующих и диссипативную, и дисперсионную составляющую погрешности.

Математическая модель участка энергосистемы рассмотрена в [Lis et al., 2019]. Для описания процессов в энергосети использовалось телеграфное уравнение с учетом диссипативных слагаемых. В работе содержится вывод варианта уравнения с распределенными параметрами на основе использования принципа наименьшего действия Гамильтона–Остроградского. Рассматривалась электроцепь, состоящая из трех участков с различными характеристиками. Граф цепи — линейный, точки ветвления отсутствуют, а участки с разными характеристиками следуют непосредственно друг за другом. Для численных расчетов использована явная разностная схема. Реализация проведена в среде Matlab. Среди численных результатов авторов отметим возникновение решений с большими градиентами и появление высокочастотных составляющих за счет отражений волн от границ участков цепи с различными характеристиками. Авторы используют телеграфное уравнение и в других работах по моделированию электросетей [Czaban et al., 2018]. Отметим, что линейные математические модели процессов в энергетических сетях на основе телеграфного уравнения широко используются и для решения других прикладных задач, например по оценке потерь на участке сети.

Динамические расчеты процессов в энергосетях проводятся также с помощью специализированных пакетов [Nayir, 2013]. В работе численные результаты по резонансам и переходным явлениям были получены с использованием АТР — свободной версии пакета динамического моделирования электрических процессов ЕМТР (Electromagnetic Transients Program).

Существенную роль динамические процессы в сетях играют при передаче сигналов. В этом случае отражения в системе являются источниками искажения сигналов и появления шумов. Анализ задач такого рода с использованием телеграфного уравнения и средств Matlab для его численного решения приведен в [Perhyar et al., 2015].

Математические модели функционирования энергетических систем с представлением в виде сложного графа часто рассматриваются в стационарном случае для создания моделей оптимизации отпуска электроэнергии потребителям. В качестве примера работы такого рода укажем [Карпенко, Кузьмина, 2014]. Для таких работ характерно решение не динамической задачи на графе, а задачи оптимизации. Применение методов оптимизации для поиска уязвимостей в сложных энергосетях описано в [Pinar et al., 2010].

Таким образом, можно сделать вывод, что математическое моделирование энергосистем (и систем передачи данных) как сложных графов представляет существенный научный и инженерный интерес. Наименее разработанной областью такого моделирования является описание динамических процессов на графе. Оно требует применения разностных схем высокого порядка аппроксимации.

В настоящей статье авторы делают попытку использовать разработанные ранее схемы нового класса [Лобанов, Мирон, 2020] к описанию процессов в электрических сетях на достаточно простом графе.

Определяющие уравнения и безразмерная постановка задачи

Будем рассматривать математическую модель однофазной линии. При рассмотрении трех линий основные принципы построения математической модели и численного метода останутся такими же, возрастет только число определяющих уравнений при сохранении гиперболического типа системы [Бордонос и др., 2009].

Математическая модель энергосистемы может быть описана с помощью направленного графа [Морозов, Холодов, 2008; Бордонос и др., 2009], где ребра графа — линии электропередач, узлы — генераторы, трансформаторы, точки ветвления (распределительные подстанции), потребители электроэнергии.

Будем рассматривать энергосистему как совокупность производителей электроэнергии (узлы графа, в которых заданы начальные условия), точки ветвления (распределительные подстанции) и трансформаторные подстанции (узлы графа), потребители электроэнергии (финальные узлы). Для демонстрации численного метода рассмотрим описание элементов графа.

Линии электропередач — ребра графа

Для описания каждого ребра графа (линии электропередачи) используем телеграфное уравнение, записанное в форме [Попов, 2000; Морозов, Холодов, 2008; Бордонос и др., 2009].

Расчетные значения в точке x в момент времени t линии с номером k есть текущее значение тока $i_k(x_k, t)$ и текущее значение напряжения $u_k(x_k, t)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial i_k}{\partial t} + \frac{1}{L_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} &= -\frac{R_k}{L_k} i_k, \\ \frac{\partial u_k}{\partial t} + \frac{1}{C_k} \frac{\partial i_k}{\partial x_k} &= -\frac{G_k}{C_k} u_k. \end{aligned} \quad (1)$$

Линия с индексом k характеризуется удельными (отнесенными к единице длины) величинами: R_k — полное сопротивление, G_k — проводимость утечки, L_k — индуктивность, C_k — емкость. Приведем запись системы в безразмерном виде. Выбираем в качестве характерного масштаба длины для каждой линии X_{0k} . Характерные масштабы времени, напряжения и силы тока — T , I_0 , U_0 — выбираются общими для всей системы. Тогда при принятом введении безразмерных переменных $x_k = X_{0k} \xi$, $t = T \tau$, $R_k = R_0 \rho_k$, $i_k = I_0 \tilde{i}_k$, $u_k = U_0 \tilde{u}_k = I_0 R_0 \tilde{u}_k$. С учетом выбранных масштабов (1) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{I_0}{T} \frac{\partial \tilde{i}_k}{\partial \tau} + \frac{U_0}{X_{0k} L_k} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial \xi} &= -\frac{I_0 R_0 \rho_k}{L_k} \tilde{i}_k, \\ \frac{U_0}{T} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial \tau} + \frac{I_0}{X_{0k} C_k} \frac{\partial \tilde{i}_k}{\partial \xi} &= -\frac{U_0 G_k}{C_k} \tilde{u}_k, \end{aligned} \quad (1a)$$

или

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{i}_k}{\partial \tau} + \frac{R_0 T}{X_{0k} L_k} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial \xi} &= -\frac{R_0 T \rho_k}{L_k} \tilde{i}_k, \\ \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial \tau} + \frac{T}{R_0 X_{0k} C_k} \frac{\partial \tilde{i}_k}{\partial \xi} &= -\frac{T G_k}{C_k} \tilde{u}_k.\end{aligned}\quad (1b)$$

Если теперь ввести новые безразмерные переменные индуктивности, емкости каждого участка, $l_k = \frac{X_{0k} L_k}{R_0 T}$, $c_k = \frac{R_0 X_{0k} C_k}{T}$, а также $r_k = X_{0k} \rho_k$ и $g_k = \frac{G_k}{R_0 X_{0k}}$, то для каждого ребра имеем систему уравнений в безразмерном виде:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{i}_k}{\partial \tau} + \frac{1}{l_k} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial \xi} &= -\frac{r_k}{l_k} \tilde{i}_k, \\ \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial \tau} + \frac{1}{c_k} \frac{\partial \tilde{i}_k}{\partial \xi} &= -\frac{g_k}{c_k} \tilde{u}_k.\end{aligned}\quad (2)$$

При этом безразмерная длина каждого ребра равна 1, т. е. $\xi \in [0, 1]$.

Численный метод для уравнения на ребрах графа

Для построения разностной схемы запишем систему (2) в инвариантах Римана. Вводя в рассмотрение векторы $\mathbf{u}_k = (\tilde{i}_k, \tilde{u}_k)^T$, $\mathbf{f}_k = \left(-\frac{r_k}{l_k} \tilde{i}_k, -\frac{g_k}{c_k} \tilde{u}_k \right)^T$, систему можем записать в векторной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial \tau} + \mathbf{A}_k \frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial \xi} = \mathbf{f}_k, \quad (3)$$

где $\mathbf{A}_k = \begin{pmatrix} 0 & 1/l_k \\ 1/c_k & 0 \end{pmatrix}$.

Будем использовать такую характеристическую форму уравнений (1) (точнее, ее модификации с использованием инвариантов Римана) для построения эффективных разностных схем для решения (1), а в граничных точках — для замыкания системы с помощью граничных условий.

Собственные числа матрицы \mathbf{A} равны $\lambda_{1k} = \frac{1}{\sqrt{l_k c_k}}$, $\lambda_{2k} = -\frac{1}{\sqrt{l_k c_k}}$, им соответствуют инварианты Римана:

$$I_{1k} = \sqrt{l_k} \cdot \tilde{i}_k + \sqrt{c_k} \cdot \tilde{u}_k, \quad I_{2k} = \sqrt{l_k} \cdot \tilde{i}_k - \sqrt{c_k} \cdot \tilde{u}_k. \quad (4)$$

Естественные переменные — сила тока и напряжение — восстанавливаются с использованием очевидных формул:

$$\tilde{i}_k = \frac{I_{1k} + I_{2k}}{2\sqrt{l_k}}, \quad \tilde{u}_k = \frac{I_{1k} - I_{2k}}{2\sqrt{c_k}}. \quad (5)$$

В инвариантах на каждом ребре графа система уравнений записывается в виде уравнений, где дифференциальный оператор действует только на один инвариант, а уравнения связаны друг с другом через линейную правую часть:

$$\frac{\partial I_{1k}}{\partial \tau} + \frac{1}{\sqrt{l_k c_k}} \frac{\partial I_{1k}}{\partial \xi} = \varphi_1, \quad \frac{\partial I_{2k}}{\partial \tau} - \frac{1}{\sqrt{l_k c_k}} \frac{\partial I_{2k}}{\partial \xi} = \varphi_2.$$

Здесь

$$\varphi_1 = -\frac{1}{2} \left(\frac{r_k}{l_k} + \frac{g_k}{c_k} \right) I_{1k} - \frac{1}{2} \left(\frac{r_k}{l_k} - \frac{g_k}{c_k} \right) I_{2k}, \quad \varphi_2 = -\frac{1}{2} \left(\frac{r_k}{l_k} - \frac{g_k}{c_k} \right) I_{1k} - \frac{1}{2} \left(\frac{r_k}{l_k} + \frac{g_k}{c_k} \right) I_{2k}.$$

Для дальнейшего удобна несколько иная форма представления правой части. Действительно, в силу (4) $I_{2k} = I_{1k} + 2\sqrt{c_k} \cdot \tilde{u}_k$, и тогда $\varphi_1 = -\frac{1}{2} \left(\frac{r_k}{l_k} + \frac{g_k}{c_k} \right) I_{1k} - \frac{1}{2} \left(\frac{r_k}{l_k} - \frac{g_k}{c_k} \right) (I_{1k} + 2\sqrt{c_k} \cdot \tilde{u}_k) =$

$= -\frac{r_k}{l_k} I_{1k} + \left(\frac{r_k}{l_k} - \frac{g_k}{c_k} \right) \sqrt{c_k} \cdot \tilde{u}_k$. Аналогично: $I_{1k} = I_{2k} - 2\sqrt{c_k} \cdot \tilde{u}_k$, и тогда для второго уравнения

$$\varphi_2 = -\frac{1}{2} \left(\frac{r_k}{l_k} - \frac{g_k}{c_k} \right) (I_{2k} - 2\sqrt{c_k} \tilde{u}_k) - \frac{1}{2} \left(\frac{r_k}{l_k} + \frac{g_k}{c_k} \right) I_{2k} = -\frac{r_k}{l_k} I_{2k} + \left(\frac{r_k}{l_k} - \frac{g_k}{c_k} \right) \sqrt{c_k} \tilde{u}_k.$$

В [Морозов, Холодов, 2008; Бордонос и др., 2009] для решения подобной системы уравнений строился метод расщепления по физическим процессам. На первом этапе расщепления решалась однородная система для инвариантов

$$\frac{\partial I_{1k}}{\partial \tau} + \frac{1}{\sqrt{l_k c_k}} \frac{\partial I_{1k}}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial I_{2k}}{\partial \tau} - \frac{1}{\sqrt{l_k c_k}} \frac{\partial I_{2k}}{\partial \xi} = 0.$$

При этом для воспроизведения коллективных эффектов, возникающих из-за работы множества устройств и наличия разветвлений в цепи, авторы строили разностные схемы высокого (третьего) порядка аппроксимации [Холодов, Холодов, 2006; Холодов и др., 2015; Холодов, 2019]. На втором этапе расщепления для линейной системы ОДУ с постоянными коэффициентами строилось точное решение в каждом узле разностной сетки. С помощью построенного решения корректировалось значение инвариантов Римана в узлах сетки.

Схема расщепления. Первый этап

На взгляд авторов, более перспективным является использование другого варианта метода расщепления. Предлагаемое расщепление не соответствует «физическим процессам» в традиционном понимании, но приводит к возможности использования эффективных численных методов. Для первого этапа запишем систему в инвариантах в следующем виде:

$$\frac{\partial I_{1k}}{\partial \tau} + \frac{1}{\sqrt{l_k c_k}} \frac{\partial I_{1k}}{\partial \xi} = -\frac{r_k}{l_k} I_{1k},$$

$$\frac{\partial I_{2k}}{\partial \tau} - \frac{1}{\sqrt{l_k c_k}} \frac{\partial I_{2k}}{\partial \xi} = -\frac{r_k}{l_k} I_{2k}.$$

Каждое из двух уравнений представляет собой линейное уравнение переноса с линейным стоком. В [Лобанов, Мирон, 2020] описано построение гибридной разностной схемы высокого порядка аппроксимации для уравнения со стоком.

Для расчета задачи на каждом ребре графа используем следующую схему. Для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = -bu$$

выбирается пятиточечный шаблон. В этом случае уравнение переноса соответствует первому уравнению системы, при этом $a = 1/\sqrt{l_k c_k}$, $b = r_k/l_k$. Множество разностных схем на этом шаблоне может быть записано в виде

$$u_m^{n+1} = \sum_{\mu \in \mathcal{M}} \alpha_\mu u_{m+\mu}^n. \quad (6)$$

Суммирование в (6) ведется по всем точкам шаблона. Пусть существует некоторое волновое число, такое, что скорость распространения гармоники по сетке совпадает со скоростью распространения возмущений в точном решении. Запишем действительную и мнимую части преобразования Фурье для задачи (6) и потребуем, чтобы при фиксированном волновом числе гармоники k и действительная, и мнимая части совпали бы с действительной и мнимой частью преобразования Фурье дифференциальной задачи. Для мнимой части преобразования Фурье получим условие

$$-2\alpha_{-2} \cos(kh) - \alpha_{-1} + \alpha_1 + \frac{\sin(\sigma kh)}{\sin(kh)} = 0,$$

а для действительной части

$$\alpha_{-2} \cos(2kh) + \alpha_{-1} \cos(kh) + \alpha_0 + \alpha_1 \cos(kh) = \cos(\sigma kh).$$

В пределе при $kh \rightarrow 0$ последнее равенство переходит в условие $\alpha_{-2} + \alpha_{-1} + \alpha_0 + \alpha_1 = 1$.

Произведение kh , входящее во все условия, есть безразмерное волновое число задачи. Заметим, что рассмотрение в терминах преобразования Фурье предполагает бесконечное множество гармоник (для точного решения задачи (1) всегда существует ряд Фурье). При реальной реализации разностной задачи существует минимальная длина волны, которую можно разрешить на введенной равномерной сетке. Этой длине волны соответствует максимальное значение безразмерного волнового числа, равное π .

Обозначим $\sigma = \frac{a\tau}{h}$ — число Куранта. Для краткости введем также обозначение

$\tilde{\sigma} = \frac{\sin(\sigma kh)}{\sin(kh)}$. Этот параметр будем называть модифицированным числом Куранта. Интересно,

что во всех схемах высокого порядка появляется еще один безразмерный параметр. Это

$s^2 = \sigma^2 - \frac{(b\tau)^2}{(kh)^2}$, он определяет сеточную вязкость или антивязкость.

Разностные схемы для линейного уравнения переноса без стока исследованы в [Лобанов, Милов, 2018]. Построена гибридная схема для линейного уравнения переноса с минимальной дисперсионной ошибкой. В [Лобанов, Милов, 2020] на основе решения двойственной задачи линейного программирования построены опорные схемы для гибридной схемы (высокого порядка в области гладкого решения и монотонной — в области больших градиентов). Это семейство разностных схем обладает несколько лучшими аппроксимационными свойствами, чем схемы [Лобанов, Милов, 2018]. Поэтому в качестве расщепления использован именно вариант уравнений с линейными стоками. На основе тестовых расчетов в качестве опорных выбраны следующие схемы.

Разностная схема высокого порядка аппроксимации с коэффициентами $\alpha_{-2} = \frac{s^2 - \tilde{\sigma}(1-b\tau)}{2(2 - \cos(kh))}$, $\alpha_{-1} = \frac{2(1-b\tau)\tilde{\sigma} - s^2 \cos(kh)}{2 - \cos(kh)}$, $\alpha_0 = (1-b\tau) - s^2 + \frac{3(s^2 - \tilde{\sigma}(1-b\tau))}{2(2 - \cos(kh))}$. Аналог четырехточечной схемы второго порядка с разностью «против потока» (схемы Бима–Уорминга). Монотонная разностная схема с $\alpha_{-2} = 0$, $\alpha_{-1} = \tilde{\sigma}(1-b\tau)$, $\alpha_0 = (1-\tilde{\sigma})(1-b\tau)$, $\alpha_1 = 0$, аналог известной схемы первого порядка с разностью вверх по потоку («левый уголок», схема Куранта–Изаксона–Риса).

Для оценки локального значения безразмерного волнового числа будем использовать следующие соображения. Пусть на каждом временном слое вычислено преобразование Фурье решения по пространственной координате $F[u]$. Тогда в качестве оценки второй разности используем $u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n \sim F[u](e^{-ikh} - 2 + e^{ikh}) = -4F[u]\sin^2 \frac{kh}{2}$, а первая разность оценивается как $u_{m+1}^n - u_{m-1}^n \sim F[u](e^{-ikh} - e^{ikh}) = -4iF[u]\sin \frac{kh}{2} \cos \frac{kh}{2}$. Можно считать, что отношение разностей по абсолютной величине приближает равенство

$$\left| \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n} \right| \approx \operatorname{tg} \frac{kh}{2}.$$

Решение этого уравнения определяет локальное безразмерное волновое число. Знак его не важен, так как все функции безразмерного волнового числа, входящие в определяющие соотношения, четные. Если полученное значение превосходило некоторое пороговое (в расчетах оно принималось $\pi/4$), то использовалась монотонная схема первого порядка аппроксимации, в остальных случаях — схема второго порядка аппроксимации. В этом случае безразмерное волновое число определяет переключение в гибридной схеме. Выбор значения порога произволен. Нами такое значение выбрано, так как оно позволяет сгладить три высокочастотные гармоники с безразмерными волновыми числами $\pi/4$, $\pi/2$ и π .

Приведенное выше рассмотрение не касалось вопросов устойчивости построенных схем. Расчеты показывают, что если параметр s^2 принимает отрицательные значения, то устойчивость численного метода теряется. Поэтому для численного решения уравнения со стоком считалось, что при достижении этим параметром отрицательных значений они заменялись нулем.

Для второго инварианта, соответствующему отрицательной скорости переноса, разностная схема строилась аналогично на пятиточечном шаблоне, представляющем собой зеркальное отражение шаблона для схемы (6).

Описанная выше схема была реализована для каждого инварианта (с учетом знака скорости переноса).

Схема расщепления. Второй этап

На втором этапе в каждой точке сетки необходимо решать линейную систему ОДУ:

$$\frac{dI_{1k}}{d\tau} = - \left(\frac{r_k}{l_k} - \frac{g_k}{c_k} \right) \sqrt{c_k} \cdot \tilde{u}_k, \quad (7)$$

$$\frac{dI_{2k}}{d\tau} = \left(\frac{r_k}{l_k} - \frac{g_k}{c_k} \right) \sqrt{c_k} \cdot \tilde{u}_k. \quad (8)$$

Система (7)–(8) описывает обменный процесс. Эта линейная система может быть записана в инвариантах Римана с использованием второй формулы (5).

$$\frac{dI_{1k}}{d\tau} = -\frac{1}{2} \left(\frac{r_k}{I_k} - \frac{g_k}{c_k} \right) (I_{1k} - I_{2k}),$$

$$\frac{dI_{2k}}{d\tau} = \frac{1}{2} \left(\frac{r_k}{I_k} - \frac{g_k}{c_k} \right) (I_{1k} - I_{2k}).$$

В статье [Бордонос и др., 2009] при расчетах на втором этапе использовалось точное решение линейной системы ОДУ. В реализации авторов для решения системы (7)–(8) использован метод трапеций, сохраняющий консервативность обменов.

Граничные условия

Точки ветвления

Будем считать, что в каждом узле происходит разветвление одного входящего участка (L_1 на рисунке) на два выходящих (R_1, R_2), как показано на рис. 1. Эти обозначения будем использовать в качестве индексов для инвариантов Римана. Для получения условий в точке ветвления используем законы Кирхгофа, записанные в инвариантах Римана. Предположим, что сам узел имеет внутреннее сопротивление R .

Для точки ветвления известны входящие значения инвариантов: I_1^L — соответствует положительному собственному числу для входящего участка, $I_2^{R_1}$ и $I_2^{R_2}$ — соответствуют отрицательным собственным числам для выходящих участков. В естественных переменных законы Кирхгофа имеют вид

$$i_L - i_{R_1} - i_{R_2} = 0, \quad u_L - u_{R_1} - i_L \cdot R = 0, \quad u_{R_1} - u_{R_2} = 0.$$

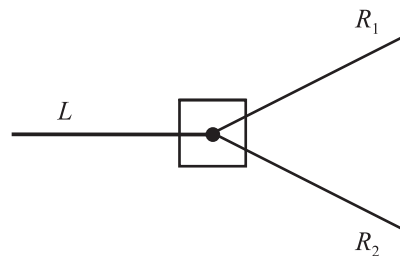


Рис. 1. Точка ветвления (схематическое изображение). Ветвь L — входящая, R_1, R_2 — исходящие ветви. Сопротивление сосредоточено в одной точке. Случай соответствует отпайке ЛЭП

Используем выражения для инвариантов через токи и напряжения:

$$u_L + \frac{1}{(\sqrt{Ic})_L} i_L = I_1^L, \quad u_{R_1} - \frac{1}{(\sqrt{Ic})_{R_1}} i_{R_1} = I_2^{R_1}, \quad u_{R_2} - \frac{1}{(\sqrt{Ic})_{R_2}} i_{R_2} = I_2^{R_2}.$$

Тогда для инвариантов Римана в точке ветвления можно написать

$$I_2^L - u_L + \frac{1}{(\sqrt{Ic})_L} i_L = 0, \quad I_1^{R_1} - u_{R_1} - \frac{1}{(\sqrt{Ic})_{R_1}} i_{R_1} = 0, \quad I_1^{R_2} - u_{R_2} - \frac{1}{(\sqrt{Ic})_{R_2}} i_{R_2} = 0.$$

При решении получившейся системы линейных уравнений легко получаются выражения для токов в точке разветвления через значения входящих (известных) инвариантов:

$$i_L = \frac{1}{\Delta} \cdot \left(\frac{(I_1^L + I_2^{R_2})}{(\sqrt{lc})_{R_1}} + \frac{(I_1^L + I_2^{R_1})}{(\sqrt{lc})_{R_2}} \right),$$

$$i_{R_1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \left(\frac{(I_1^L + I_2^{R_1})}{(\sqrt{lc})_{R_2}} - \left(R + \frac{1}{(\sqrt{lc})_L} \right) \cdot (I_2^{R_1} - I_2^{R_2}) \right),$$

$$i_{R_2} = \frac{1}{\Delta} \cdot \left(\frac{(I_1^L + I_2^{R_2})}{(\sqrt{lc})_{R_1}} + \left(R + \frac{1}{(\sqrt{lc})_L} \right) \cdot (I_2^{R_1} - I_2^{R_2}) \right),$$

где $\Delta = \frac{1}{(\sqrt{lc})_{R_1}} \cdot \left(R + \frac{1}{(\sqrt{lc})_L} \right) + \frac{1}{(\sqrt{lc})_{R_2}} \cdot \left(R + \frac{1}{(\sqrt{lc})_L} \right) - \frac{1}{(\sqrt{lc})_{R_1} (\sqrt{lc})_{R_2}}$.

После определения токов известны все напряжения:

$$u_L = I_1^L - \frac{1}{(\sqrt{lc})_L} i_L, \quad u_{R_1} = I_2^{R_1} + \frac{1}{(\sqrt{lc})_{R_1}} i_{R_1}, \quad u_{R_2} = I_2^{R_2} + \frac{1}{(\sqrt{lc})_{R_2}} i_{R_2}.$$

Тогда легко восстанавливаются неизвестные значения в точке ветвления выходящих инвариантов Римана.

$$I_2^L = I_1^L - \frac{2}{(\sqrt{lc})_L} i_L,$$

$$I_1^{R_1} = i_L \cdot R + \frac{1}{(\sqrt{lc})_L} i_L + \frac{1}{(\sqrt{lc})_{R_1}} i_{R_1} - I_1^L,$$

$$I_1^{R_2} = i_L \cdot R + \frac{1}{(\sqrt{lc})_L} i_L + \frac{1}{(\sqrt{lc})_{R_2}} i_{R_2} - I_1^L.$$

Выражения для инвариантов используются в качестве граничных условий для решения уравнений. От аналогичных условий, используемых в [Бордонос и др., 2009], приведенные выражения отличаются только учетом внутреннего сопротивления точки ветвления.

Граничные условия в вершинах дерева

Для вершин дерева, соответствующих генераторам, задается модельная зависимость тока от времени. Для математической модели реальной электросети необходимо использовать дифференциальные уравнения, например, для описания синхронного генератора [Копылов, 1986]. Для вершин дерева, соответствующих нагрузкам (потребителям электроэнергии), используется закон Ома.

Результаты расчетов

Все численные результаты получены с использованием авторского исследовательского программного комплекса на языке С. Данный комплекс предназначен для исследования свойств новых разностных схем высокого порядка аппроксимации для решения линейных уравнений и систем гиперболического типа.

Для оценки работоспособности программ и качества численных методов рассмотрена модельная задача. Рассматривалось дерево, моделирующее энергосеть, с одной вершиной, соответствующей генератору, одной точкой ветвления и двумя вершинами, соответствующими нагрузкам (потребителям).

В точке, соответствующей генератору, задано значение напряжения как функция времени. Для тестовых расчетов считалось, что напряжение зависит от времени по гармоническому закону $u(0,t) = U_0 \cdot \sin(2\pi f t)$. В качестве граничных условий на выходе (потребителей электроэнергии) будем использовать закон Ома с заданной зависимостью сопротивления нагрузки от времени $R \cdot i - u = 0$. В простейшем модельном случае сопротивление будет постоянным.

Параметры расчета для модельной задачи приняты следующими. Число узлов сетки по пространственной координате для каждой ветви — 500, финальное безразмерное время расчета — 4. Безразмерные значения индуктивности, емкости, сопротивления и проводимости для каждой линии: $l_1 = 0.2$, $c_1 = 0.5$, $r_1 = 0.001$, $g_1 = 0.001$, $l_2 = 0.25$, $c_2 = 0.5$, $r_2 = 0.01$, $g_2 = 0.001$, $l_3 = 0.25$, $c_3 = 0.5$, $r_3 = 0.002$, $g_3 = 0.001$. Начальные условия для всех линий: $i(x,0) = 0$, $u(x,0) = 0$.

На рис. 2–4 приведены распределения токов и напряжений в трех ветвях графа, соответствующего рис. 1, в зависимости от заданной частоты генератора на входе.

Результаты расчетов, приведенные на рис. 2–4, демонстрируют следующие основные свойства разностной схемы. Даже при граничном условии, заданном в виде гармонических колебаний, в решении телеграфных уравнений на графе появляются высокочастотные компоненты и большие градиенты решений из-за отражений от границ различных участков. Эффект возникает при большом значении сопротивления нагрузки, как и в [Бордонос и др., 2009]. Введение конечного сопротивления точки ветвления лишь усиливает возникающий эффект.

Рисунки демонстрируют еще один эффект в данной конфигурации графа: резонанс по напряжению в первом участке цепи — значение напряжения в максимуме при частоте источника $f = 3$ увеличилось в 2.5 раза по сравнению со значениями $f = 2.5$ и $f = 3.5$. При тестовых расчетах фиксировались также кратные резонансы и резонансы по току.

Применение гибридных разностных схем для уравнений, записанных в форме с линейным стоком, позволило вести расчеты для достаточно большого времени без заметного искажения формы фронта распространяющихся волн.

Дискуссия и выводы

Несомненно, исследование динамических процессов в энергосетях требует применения разностных схем высокого порядка аппроксимации, обладающих при этом минимальной дисперсионной погрешностью. Один из подходов развивается в работах [Морозов, Холодов, 2008; Бордонос и др., 2009]. При этом в качестве основных разностных схем для решения уравнений в частных производных гиперболического типа используются гибридные схемы высокого порядка аппроксимации [Холодов, Холодов, 2006; Холодов и др., 2015].

В настоящей статье рассмотрен несколько отличный подход. Предлагается при расщеплении (по физическим процессам) диссипацию частично включить в рассматриваемый гиперболический оператор. Это позволяет достаточно просто построить разностные схемы высокого порядка аппроксимации для уравнения переноса со стоковыми слагаемыми [Лобанов, Мирон, 2020]. Применение таких разностных схем к моделированию динамических процессов в энергетических сетях позволяет качественно воспроизводить некоторые эффекты, возникающие в сложных системах. В частности, численные решения воспроизводят возникновение резких волновых фронтов при отражениях от нагрузки или точки ветвления.

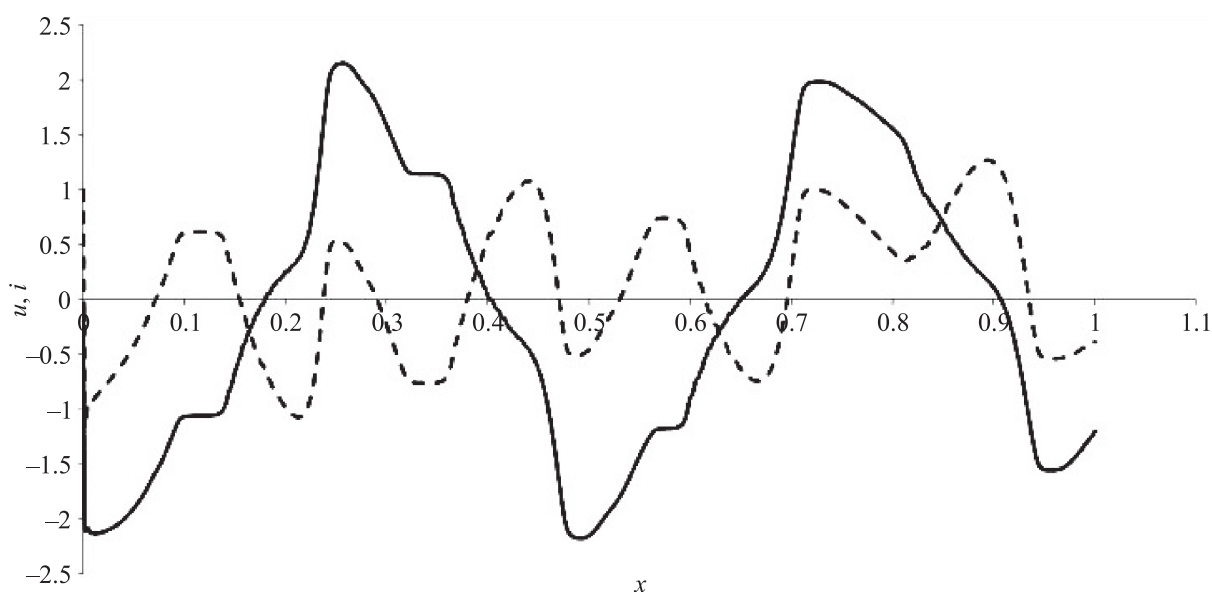


Рис. 2а. Распределение безразмерных тока и напряжения в ветви 1 для времени $T=4$. Заданная частота генератора $f=2.5$ меньше резонансной. Сплошная линия — ток, пунктирная — напряжение

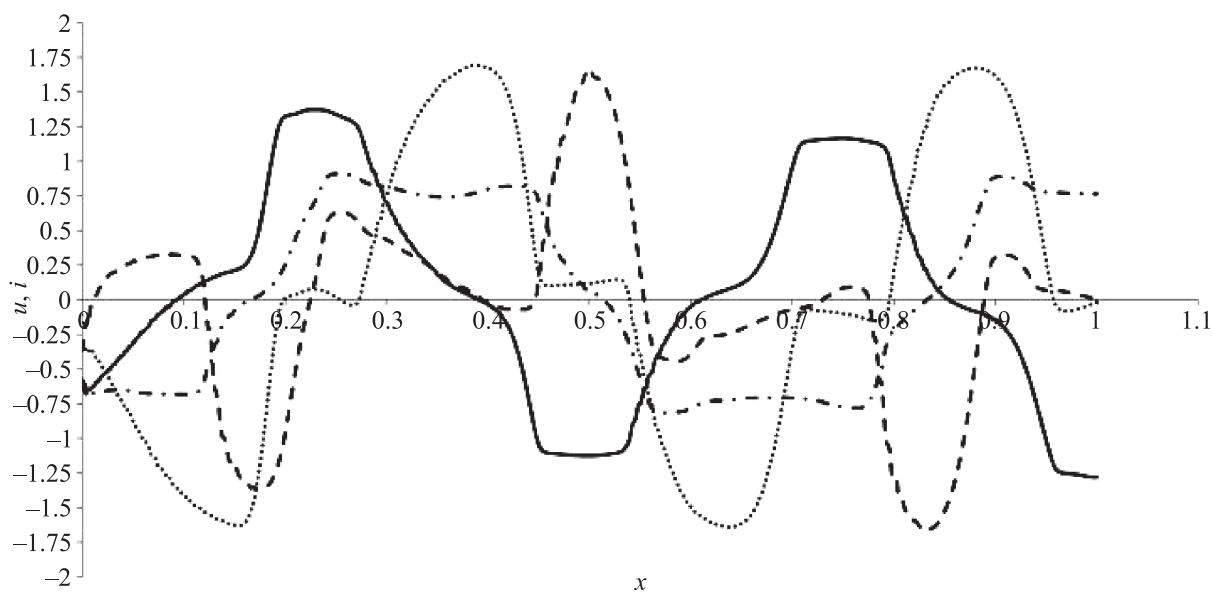


Рис. 2б. Заданная частота генератора $f=2.5$ меньше резонансной. Распределения безразмерных величин во второй ветви (ток — сплошная линия, напряжение — точечная линия) и в третьей ветви (ток — штрихпунктирная, напряжение — пунктирная линии) для того же времени. Видно появление участков с большими градиентами из-за отражения от нагрузки

Таким образом, показана применимость разработанных схем для описания процессов в однофазных линиях. Подход можно обобщить и для описания трехфазных линий электропередач. Как показано в [Бордонос и др., 2009] для несколько иного варианта построения схем расщепления, принципиальных трудностей такое обобщение не имеет. Для того чтобы предложенные методы стали элементами «конструктора», описывающего реальные электрические сети, модель необходимо дополнить уравнениями трансформаторов и генераторов, а также уравнениями, характеризующими энергопотребление некими интегральными пользователями (крупными промышленными и транспортными предприятиями или районами города).

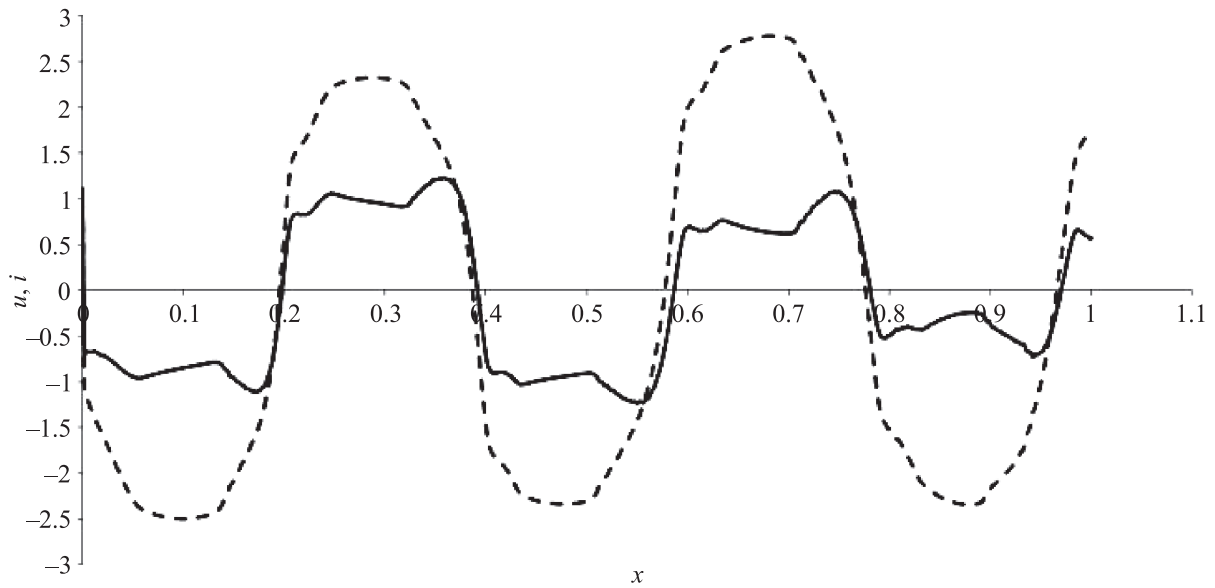


Рис. 3а. Распределение безразмерного тока и напряжения в ветви 1 для времени $T=4$, частота генератора $f=3$ близка к резонансной частоте по напряжению. Сплошная линия — ток, пунктирная — напряжение. Видно резкое возрастание амплитуды напряжения в первой ветви

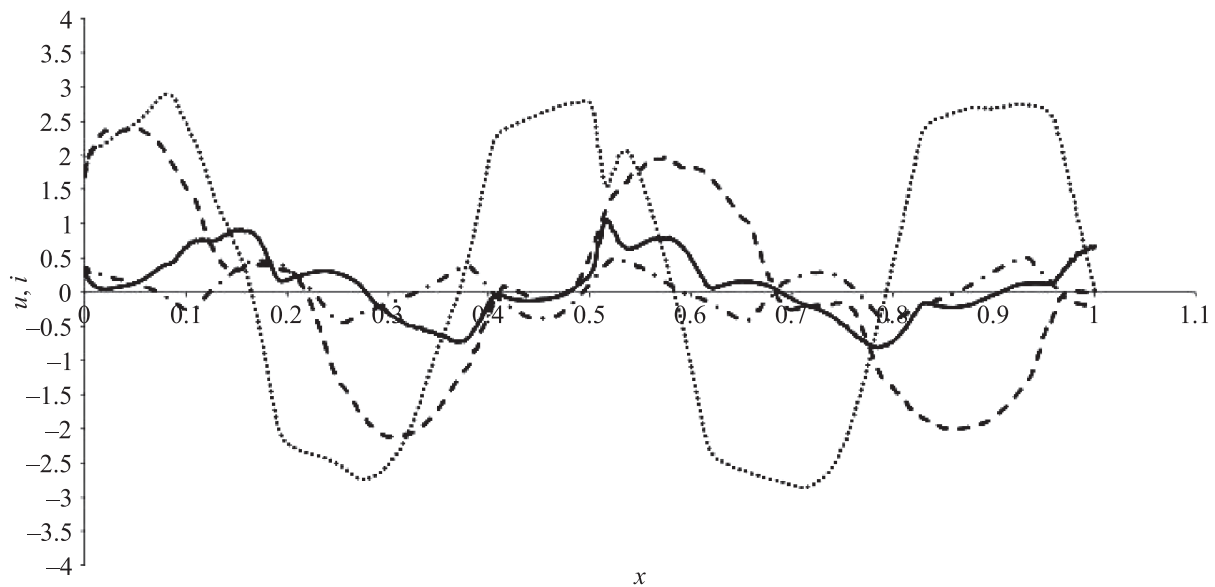


Рис. 3б. Распределения безразмерных величин во второй ветви (ток — сплошная линия, напряжение — точечная линия) и в третьей ветви (ток — штрихпунктирная, напряжение — пунктирная линии) для того же времени, частота генератора $f=3$ близка к резонансной частоте по напряжению

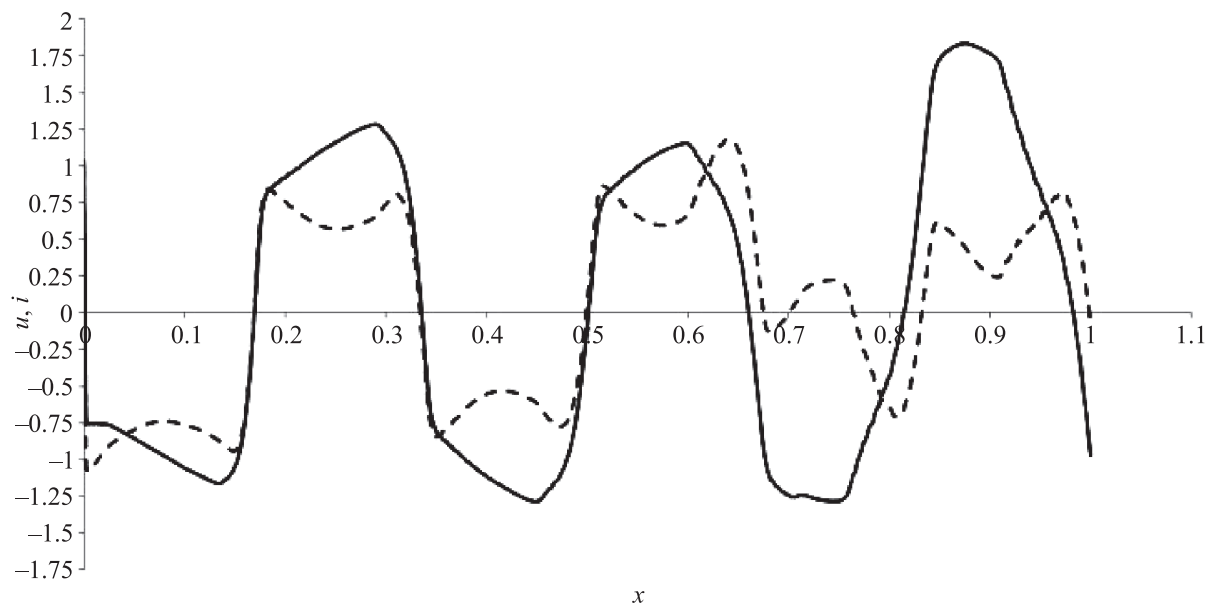


Рис. 4а. Распределение безразмерного тока и напряжения в ветви 1 для времени $T = 4$, частота генератора $f = 3.5$ больше резонансной частоты. Сплошная линия — ток, пунктирная — напряжение. Видно резкое уменьшение амплитуды напряжения по сравнению с предыдущими графиками. Из-за взаимодействия с отраженными волнами формируются участки с резкими градиентами решения.

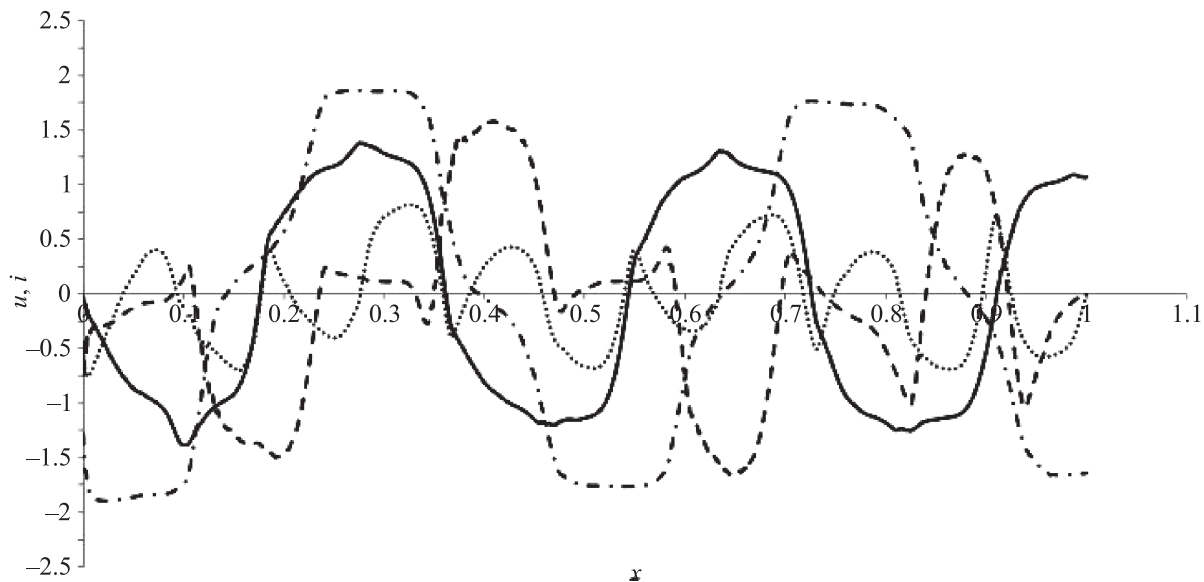


Рис. 4б. Распределения безразмерных величин во второй ветви (ток — сплошная линия, напряжение — точечная линия) и в третьей ветви (ток — штрихпунктирная, напряжение — пунктирная линии) для того же момента времени

Список литературы (References)

- Бордонос А. К., Холодов Я. А., Холодов А. С., Морозов И. И.* Моделирование глобальных энергетических сетей // Математическое моделирование. — 2009. — Т. 21, № 6. — С. 3–16.
Bordonos A. K., Kholodov Ya. A., Kholodov A. S., Morozov I. I. Modelirovanie global'nykh energeticheskikh setey [Modelling of the global high-voltage grids] // Matematicheskoe modelirovanie. — 2009. — Vol. 21, No. 6. — P. 3–16 (in Russian).
- Карпенко А. П., Кузьмина И. А.* Математическая модель распределительной городской сети электроснабжения с учетом ее перспективного развития // Наука и образование: электронное научное издание. МГТУ им. Н. Э. Баумана. — 2014. — No. 5. — С. 162–176. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://technomag.bmstu.ru/doc/7097811.html/> (дата обращения: 01.09.2020).
Karpenko A. P., Kuz'mina I. A. Matematicheskaya model' raspredelitel'noi gorodskoi seti elektrosnabgeniya s uchetom ee perspektivnogo razvitiya [Mathematical modelling of the city energy transfer line taking into account its perspective development] // Nauka i obrazovanie: elektronnoe nauchnoe izdanie MGTU im. N. E. Baumana. — 2014. — No. 5. — P. 162–176 (in Russian). Available at: <http://technomag.bmstu.ru/doc/7097811.html/> (accessed: 01.09.2020).
- Копылов И. П.* Электрические машины. — М.: Энергоатомзат, 1986.
Kopylov I. P. Elektricheskie mashiny [Electric engines]. — Moscow: Energoatomizdat, 1986 (in Russian).
- Лобанов А. И., Миров Ф. Х.* Гибридная разностная схема с обобщенным условием аппроксимации. Анализ в пространстве неопределенных коэффициентов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2018. — Т. 58, № 8. — С. 73–82.
Lobanov A. I., Mirov F. Kh. A Hybrid Difference Scheme under Generalized Approximation Condition in the Space of Undetermined Coefficients // Comput. Math. Math. Phys. — 2018. — Vol. 58, No. 8. — P. 1270–1279. — DOI: 10.1134/S0965542518080134. (Original Russian paper: *Lobanov A. I., Mirov F. Kh.* Gibridnaya raznostnaya shema s obobshchennym usloviem approksimatsii. Analiz v prostranstve neopredelennykh koeffitsientov // Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki. — 2018. — Vol. 58, No. 8. — P. 73–82.)
- Лобанов А. И., Миров Ф. Х.* Разностные схемы для уравнения переноса со стоком на основе анализа в пространстве неопределенных коэффициентов // Математическое моделирование. — 2020. — Т. 32, № 9. — С. 53–72. — DOI: 10.20948/mm-2020-09-04
Lobanov A. I., Mirov F. Kh. Raznostnye shemy dlua uravneniya perenosa so stokom na osnove analiza v prostranstve neopredelennykh koeffitsientov [Difference schemes for transport equation with drain based on the analysis in insufficient coefficients space] // Matematicheskoe modelirovanie. — 2020. — Vol. 32, No. 9. — P. 53–72 (in Russian).
- Морозов И. И., Холодов Я. А.* Моделирование режимов глобальных электрических сетей // Научно-технический вестник СПбГУИТМО. — 2008. — No. 47. — С. 170–178.
Morozov I. I., Kholodov Ya. A. Modelirovaniye rezhimov global'nykh elektricheskikh setey [Modeling modes of global electrical networks] // Nauchno-tehnicheskii vestnik ITMO. — 2008. — Vol. 47. — P. 170–178 (in Russian).
- Попов В. П.* Основы теории цепей. — М.: Высшая школа, 2000. — 575 с.
Popov V. P. Osnovy teorii tsepey [Basics of the electric chains theory]. — Moscow: Vyshaya shkola, 2000. — 575 p. (in Russian).
- Холодов А. С., Холодов Я. А.* О критериях монотонности разностных схем для уравнений гиперболического типа // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2006. — Т. 46, № 9. — С. 1638–1667.
Kholodov A. S., Kholodov Ya. A. Monotonicity criteria for difference schemes designed for hyperbolic equations // Computational mathematics and mathematical physics. — 2006. — Vol. 46, No. 9. — P. 1560–1588. — DOI: 10.1134/S0965542506090089. (Original Russian paper: *Kholodov A. S., Kholodov Ya. A.* O kriteriyah monotonnosti raznostnykh schem dlya uravnenii giperbolicheskogo tipa // Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki. — 2006. — Vol. 46, No. 9. — P. 1683–1667.)
- Холодов Я. А., Уткин П. С., Холодов А. С., Цыбулин И. В.* Монотонные разностные схемы высокого порядка аппроксимации для одномерных уравнений гиперболического типа. — М.: МФТИ, 2015. — 69 с.
Kholodov Ya. A., Utkin P. S., Kholodov A. S., Tsybulin I. V. Monotonnye raznostnye shemy vysokogo poriyadka approksimatsii dlya odnomernykh uravnenii giperbolicheskogo tipa. — Moscow: MIPT, 2015. — 69 p. (in Russian).

- Холодов Я. А.* Разработка сетевых вычислительных моделей для исследования нелинейных волновых процессов на графах // Компьютерные исследования и моделирование. — 2019. — Т. 11, № 5. — С. 777–814.
- Kholodov Ya. A.* Development of network computational models for the study of nonlinear wave processes on graphs // Computer research and modeling. — 2019. — Vol. 11, No. 5. — P. 777–814. — DOI: 10.20537/2076-7633-2019-11-5-777-814. (Original Russian paper: *Kholodov Ya. A.* Razrabotka setevykh vychislitel'nykh modeley dlya issledovaniya nelineinykh volnovykh protsessov na graphah // Computer research and modeling. — 2019. — Vol. 11, No. 5. — P. 777–814.)
- Czaban A., Lis M., Chrzan M., Szafraniec A., Levoniuk V.* Mathematical modelling of transient processes in power supply grid with distributed parameters // Przegląd elektrotechniczny. — 2018. — Vol. 94. — P. 17–20. — DOI: 10.15199/48.2018.01.05
- Heitkoetter W., Medjroubi W. et al.* Comparison of Open Source Power Grid Models — Combining a Mathematical, Visual and Electrical Analysis in an Open Source Tool // Energies. — 2019. — Vol. 12. — P. 4728. — DOI:10.3390/en12244728
- Kan B., Zhu Wendong et al.* Topology Modeling and Analysis of a Power Grid Network Using a Graph Database // International Journal of Computational Intelligence Systems. — 2017. — Vol. 10, No. 1. — P. 1355. — DOI 10.2991/ijcis.10.1.96
- Lis M., Chaban A., Szafraniec A., Figura R., Levoniuk V.* Mathematical model of a part of an opened extra-high voltage electrical grid // E3S Web of Conferences 84, 02005, 2019. — DOI: 10.1051/e3sconf/20198402005
- Nayir A.* Simulation of transient processes on overvoltage in electric transmission lines using ATP-EMTP // Turkish Journal of Electrical Engineering & Computer Sciences. — 2013. — No. 5. — P. 1553–1556. — DOI: 10.3906/elk-1108-8
- Parhyar N. R., Shah M. A., Lodro M. M.* Simulation and mathematical modelling of power line communication channel for high data transfer rate // Quaid-E-Awam University Research Journal Of Engineering, Science & Technology. — 2015. — Vol. 14, No. 2.
- Pinar A., Meza J. et al.* Optimization strategies for the vulnerability analysis of the electric power grid // SIAM J. OPTIM. — 2010. — Vol. 20, No. 4. — P. 1786–1810. — DOI: 10.1137/070708275