КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2020 Т. 12 № 5 С. 1123–1147
DOI: 10.20537/2076-7633-2020-12-5-1123-1147

МОДЕЛИ В ФИЗИКЕ И ТЕХНОЛОГИИ

УДК 536.46

Моделирование баллистики артиллерийского выстрела с учетом пространственного распределения параметров и противодавления

И. Г. Русяк[a], В. А. Тененев[b]

Ижевский государственный технический университет им. М. Т. Калашникова,
Россия, 426069, г. Ижевск, ул. Студенческая, д. 7

E-mail: [a] primat@istu.ru, [b] v.tenenev@gmail.com

Получено 18.05.2020, после доработки — 10.08.2020.
Принято к публикации 13.08.2020.

В работе приводится сравнительный анализ результатов, полученных при различных подходах к моделированию процесса артиллерийского выстрела. В этой связи дана постановка основной задачи внутренней баллистики и ее частного случая задачи Лагранжа в осредненных параметрах, где в рамках допущений термодинамического подхода впервые учтены распределения давления и скорости газа по заснарядному пространству для канала переменного сечения. Представлена также постановка задачи Лагранжа в рамках газодинамического подхода, учитывающего пространственное (одномерное и двумерное осесимметричное) изменение характеристик внутрибаллистического процесса. Для численного решения системы газодинамических уравнений Эйлера применяется метод контрольного объема. Параметры газа на границах контрольных объемов определяются с использованием автомодельного решения задачи о распаде произвольного разрыва. На базе метода Годунова предложена модификация схемы Ошера, позволяющая реализовать алгоритм численного расчета со вторым порядком точности по координате и времени. Проведено сравнение решений, полученных в рамках термодинамического и газодинамического подходов, при различных параметрах заряжания. Изучено влияние массы снаряда и уширения камеры на распределение внутрибаллистических параметров выстрела и динамику движения снаряда. Показано, что термодинамический подход, по сравнению с газодинамическим подходом, приводит к систематическому завышению расчетной дульной скорости снаряда во всем исследованном диапазоне изменения параметров, при этом различие по дульной скорости может достигать 35 %. В то же время расхождение результатов, полученных в рамках одномерной и двумерной газодинамических моделей выстрела в этом же диапазоне изменения параметров, составляет не более 1.3 %.

Дана пространственная газодинамическая постановка задачи о противодавлении, описывающая изменение давления перед ускоряющимся снарядом при его движении по каналу ствола. Показано, что учет формы передней части снаряда в рамках двумерной осесимметричной постановки задачи приводит к существенному различию полей давления за фронтом ударной волны по сравнению с решением в рамках одномерной постановки задачи, где форму передней части снаряда учесть невозможно. Сделан вывод, что это может существенно повлиять на результаты моделирования баллистики выстрела при высоких скоростях метания.

Ключевые слова: артиллерийская система, основная задача внутренней баллистики, задача Лагранжа, противодавление, математическое моделирование, термодинамический подход, газодинамический подход, вычислительный эксперимент, сравнение результатов

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-01-00072\20.

© 2020 Иван Григорьевич Русяк, Валентин Алексеевич Тененев
Статья доступна по лицензии Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Unported License.
Чтобы получить текст лицензии, посетите веб-сайт http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/
или отправьте письмо в Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

COMPUTER RESEARCH AND MODELING
2020 VOL. 12 NO. 5 P. 1123–1147
DOI: 10.20537/2076-7633-2020-12-5-1123-1147

MODELS IN PHYSICS AND TECHNOLOGY

UDC: 536.46

Modeling of ballistics of an artillery shot taking into account the spatial distribution of parameters and backpressure

I. G. Rusyak[a], V. A. Tenenev[b]

Kalashnikov Izhevsk State Technical University,
7 Studencheskaya st., Izhevsk, 426069, Russia

E-mail: [a] primat@istu.ru, [b] tenenev@ istu.ru

Received 18.05.2020, after completion — 10.08.2020.
Accepted for publication 13.08.2020.

The paper provides a comparative analysis of the results obtained by various approaches to modeling the process of artillery shot. In this connection, the main problem of internal ballistics and its particular case of the Lagrange problem are formulated in averaged parameters, where, within the framework of the assumptions of the thermodynamic approach, the distribution of pressure and gas velocity over the projectile space for a channel of variable cross section is taken into account for the first time. The statement of the Lagrange problem is also presented in the framework of the gas-dynamic approach, taking into account the spatial (one-dimensional and two-dimensional axisymmetric) changes in the characteristics of the ballistic process. The control volume method is used to numerically solve the system of Euler gas-dynamic equations. Gas parameters at the boundaries of control volumes are determined using a self-similar solution to the Riemann problem. Based on the Godunov method, a modification of the Osher scheme is proposed, which allows to implement a numerical calculation algorithm with a second order of accuracy in coordinate and time. The solutions obtained in the framework of the thermodynamic and gas-dynamic approaches are compared for various loading parameters. The effect of projectile mass and chamber broadening on the distribution of the ballistic parameters of the shot and the dynamics of the projectile motion was studied. It is shown that the thermodynamic approach, in comparison with the gas-dynamic approach, leads to a systematic overestimation of the estimated muzzle velocity of the projectile in the entire range of parameters studied, while the difference in muzzle velocity can reach 35%. At the same time, the discrepancy between the results obtained in the framework of one-dimensional and two-dimensional gas-dynamic models of the shot in the same range of change in parameters is not more than 1.3%.

A spatial gas-dynamic formulation of the backpressure problem is given, which describes the change in pressure in front of an accelerating projectile as it moves along the barrel channel. It is shown that accounting the projectile's front, considered in the two-dimensional axisymmetric formulation of the problem, leads to a significant difference in the pressure fields behind the front of the shock wave, compared with the solution in the framework of the one-dimensional formulation of the problem, where the projectile's front is not possible to account. It is concluded that this can significantly affect the results of modeling ballistics of a shot at high shooting velocities.

Keywords: artillery system, the main problem of internal ballistics, Lagrange problem, backpressure, mathematical modeling, thermodynamic approach, gas-dynamic approach, computational experiment, comparison of results

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2020, vol. 12, no. 5, pp. 1123–1147 (Russian).

The reported study was funded by RFBR, project number 20-01-00072\20.

© 2020 Ivan G. Rusyak, Valentin A. Tenenev
This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Unported License.
To view a copy of this license, visit http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/
or send a letter to Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

1. Введение

Актуальной задачей ствольной артиллерии является задача увеличения дульной скорости снаряда. Определение условий достижения максимальной скорости выстрела и соответствующих ей параметров заряжания, очевидно, будет зависеть от точности и адекватности используемых математических моделей.

Внутренняя баллистика как наука начала формироваться после того, как Резаль [Résal, 1864] ввел уравнение энергии, а Сарро [Sarrau, 1876] — уравнение горения, замкнувшие основную систему уравнений внутренней баллистики в ее классическом варианте. Наиболее существенными особенностями классического или термодинамического подхода к решению основной задачи внутренней баллистики (ОЗВБ) являются абстрагирование от конкретных конструкций заряда и использование в расчетах средних значений термодинамических величин в пределах всего заснарядного пространства [Серебряков, 1962]. Полагается, что горение пороха происходит при среднеобъемном давлении; при этом температура продуктов горения, а также суммарная плотность продуктов горения и несгоревших пороховых элементов (газопороховой смеси) в любой точке заснарядного объема в процессе выстрела одинаковы (зависят только от времени). Поскольку распределением параметров по координатам пренебрегается, то с точки зрения изучения пространственных течений такой подход естественно назвать нульмерным. Эти особенности определяют его универсальность и дают возможность с помощью относительно простых моделей определять интегральные характеристики широкого класса артиллерийских орудий, однако ограничивают его возможности при проектировании высокоскоростных пушек. Тем не менее на практике термодинамический метод до сих пор положен в основу баллистического проектирования артиллерийских систем [Захаренков, 2010].

Важным этапом на пути совершенствования теории расчета и моделирования внутрикамерных процессов в артиллерийских орудиях стала разработка газодинамического направления. Впервые ОЗВБ в одномерной газодинамической постановке была решена С. А. Бетехтиным в 1947 году [Бетехтин и др., 1957]. Используемые С. А. Бетехтиным математические модели базировались на гипотезе газопороховой смеси, согласно которой пороховые элементы движутся с той же скоростью, что и окружающие их газы. В 70-х года прошлого столетия появились более совершенные модели, основанные на принципах механики гетерогенных сред и взаимопроникающих континуумов, учитывающие раздельное движение и взаимодействие фаз [Хоменко и др., 1999; Русяк, Ушаков, 2001; Cough, 1979; Гофф, Шварц, 1979]. Влияние учета многомерности при изучении процессов, протекающих при срабатывании выстрела, имеет многоаспектный характер. Так, при исследовании процессов внутренней баллистики необходимо анализировать влияние геометрической и физической многомерности. К первой относится конструкция камеры и форма снаряда, ко второй — конструкция метательного заряда, включая конструкцию воспламенительных устройств. Вопросы моделирования физической многомерности [Семенов и др., 2010; Ищенко и др., 2009] выходят за рамки данной статьи. Отметим также, что процесс горения пороха в процессе выстрела моделируется весьма приближенно. Поэтому ни одна математическая модель в настоящее время не позволяет проводить прямое численное моделирование параметров процесса выстрела. Все модели требуют предварительной настройки на изучаемые объекты артиллерийских систем в части закона скорости горения. В этой связи наиболее адекватным с точки зрения геометрической многомерности является сравнение различных подходов, исключающее процесс горения из рассмотрения. Такую возможность представляет баллистическая задача Лагранжа. В рамках этой задачи, по крайней мере в чистом виде, можно проверить влияние размерности используемой модели на параметры выстрела.

Различные аспекты, связанные с баллистической задачей Лагранжа, рассматривались многими авторами [Seiler, Igra, 2016; Horák et al., 2014; Moradi, Ahmadikia, 2011; Gardiner et al., 2016; Быков, 2019]. Отмеченные работы в основном посвящены поиску приближенных аналитических решений и сравнению их с численными газодинамическими решениями для ствола постоянного сечения. В частности, в работах [Seiler, 2016; Быков, 2019] проведен сравнитель-

ный анализ приближенных аналитических решений одномерной газодинамической задачи в области простой волны и численного одномерного решения. Сравнение результатов расчета по одномерной и двумерной осесимметричной газодинамическим моделям для случая течения в легкогазовой пушке с сечением камеры, отличным от сечения канала ствола, проведено в работах [Хоменко и др., 1999; Moradi, Ahmadikia, 2011]. При этом в работе [Хоменко и др., 1999] при сравнении результатов, полученных при расчетах в одномерной и двумерной осесимметричной постановках, разница в величинах дульной скорости снаряда достигала 10 %. В то же время в работе [Moradi, Ahmadikia, 2011] показана адекватность газодинамического описания по одномерной и двумерной газодинамическим моделям. В этой связи представляет интерес выяснить влияние размерности газодинамической модели на результаты расчета в диапазоне изменения параметров заряжания, характерном для артиллерийских систем.

Представляет определенный интерес также исследование влияния противодавления на параметры выстрела, особенно для случаев, когда скорость снаряда существенно превосходит скорость звука в воздухе. Это относится к бронебойно-подкалиберным снарядам, для которых число Маха скорости их движения по каналу ствола может достигать 5-6 единиц. Исследованию задачи о противодавлении движению снаряда по каналу ствола до настоящего времени не уделялось должного внимания. Больше внимания уделяется численному моделированию дульного поля давления при выстреле снарядами различной формы [Mehmadagic et al., 2007; Semenov et al., 2013; Luo et al., 2020]. При этом задача о движении газа впереди снаряда в стволе рассматривается с точки зрения формирования начальных условий моделирования дульных процессов. Считалось, что противодавление незначительно влияет на скорость снаряда, поэтому оно учитывалось приближенно, с использованием аналитического решения, полученного для плоской ударной волны в трубе [Станюкович, 1971], либо рассчитывалось в рамках одномерной газодинамической модели. Однако в этих случаях не учитывается форма головной части снаряда. Для ее учета необходимо рассматривать двумерную осесимметричную газодинамическую модель задачи. В этой связи заметим, что уже при скорости снаряда 800 м/с при стрельбе на максимальную дальность изменение дульной скорости снаряда лишь на 1 % приводит к изменению дальности полета более чем на 200 м, что очень существенно при стрельбе на поражение точечных объектов.

Для оценки роли пространственного представления параметров ниже рассмотрены нульмерная термодинамическая модель, где впервые учтены распределения давления и скорости газа по заснарядному пространству для канала переменного сечения, а также одномерные и двумерные осесимметричные газодинамические модели.

Целью данного исследования является изучение влияния учета пространственного распределения параметров и противодавления на результаты моделирования баллистики выстрела и динамику движения снаряда.

Дополнительно будем придерживаться следующих условий и допущений, не влияющих на цели данной статьи: трением снаряда о поверхность канала ствола пренебрегается; потери энергии на теплоотдачу не учитываются; орудие считается безоткатным.

2. Постановка ОЗВБ в осредненных параметрах

2.1. Уравнение состояния пороховых газов

При давлениях p и температурах T, характерных для процесса артиллерийского выстрела, используют уравнение состояния в форме Дюпре:

$$p\left(\frac{1}{\rho}-\alpha\right)=RT, \tag{1}$$

где ρ, R, α — плотность, удельная газовая постоянная и коволюм пороховых газов соответственно.

Для замкнутого объема W, при отсутствии внешних работ и тепловых потерь, при постепенном сжигании пороха массой ω, из уравнения (1) следует

$$p = \frac{\omega\psi RT_v}{W - \alpha\omega\psi - \frac{\omega}{\delta}(1-\psi)}, \tag{2}$$

где T_v — температура пороховых газов при сжигании пороха в постоянном объеме, ψ — относительная доля сгоревшего пороха, δ — плотность материала пороха. В этом случае после полного сжигания $(\psi = 1)$ достигается максимальное давление в объеме W:

$$p_{\text{м}} = \frac{f\Delta}{1-\alpha\Delta}, \tag{3}$$

где $\Delta = \frac{\omega}{W}$ — плотность заряжания, $f = RT_v$ — сила пороха.

2.2. Уравнение движения снаряда

Поступательное движение снаряда в стволе (рис. 1) описывается уравнением

$$q\frac{dv_{\text{сн}}}{dt} = S_{\text{кн}}\left(p_{\text{сн}} - p_{\text{пр}}\right), \tag{4}$$

где t — время процесса, $v_{\text{сн}}$ — скорость снаряда, q — масса снаряда, $S_{\text{кн}}$ — площадь сечения канала ствола, $p_{\text{сн}}$ — давление, действующее на снаряд со стороны камеры, $p_{\text{пр}}$ — противодавление, действующее на снаряд при его движении по каналу ствола.

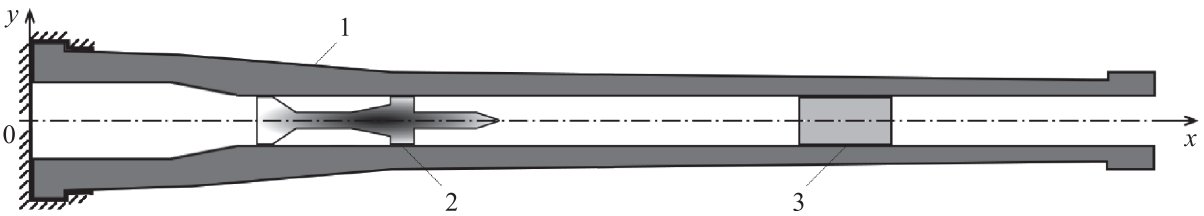

Рис. 1. Объект исследования и моделирования: 1 — артиллерийское орудие, 2 — снаряд реальной формы, 3 — эквивалентный по массе и объему цилиндрический поршень

Противодавление $p_{\text{пр}}$ приближенно можно определить из решения задачи о движении плоского поршня в трубе с постоянной скоростью, как давление за отошедшей ударной волной [Станюкович, 1971]:

$$p_{\text{пр}} = p_{\text{н}}\left(1 + \frac{k_{\text{в}}+1}{4}k_{\text{в}}\frac{v_{\text{сн}}^2}{c_{\text{в}}^2} + k_{\text{в}}\frac{v_{\text{сн}}}{c_{\text{в}}}\sqrt{1+\left(\frac{k_{\text{в}}+1}{4}\right)^2\frac{v_{\text{сн}}^2}{c_{\text{в}}^2}}\right), \tag{5}$$

где $c_{\text{в}} = \sqrt{\frac{k_{\text{в}}p_{\text{н}}}{\rho_{\text{н}}}}$ — скорость звука в воздухе; $k_{\text{в}}$, $p_{\text{н}}$, $\rho_{\text{н}}$ — показатель адиабаты, давление и плотность воздуха перед ударной волной соответственно.

2.3. Уравнение горения пороха

Процесс горения пороха будем рассматривать в рамках геометрического закона, сформулированного Вьелем [Vieille, 1890; Серебряков, 1962].

Введем относительную поверхность горения зерна: $\sigma(\psi) = S_{\text{т}}/S_0$ или $\sigma(z) = S_{\text{т}}/S_0$, где S_0, $S_{\text{т}}$ — первоначальная и текущая поверхность одного порохового зерна соответственно, $z = e/e_1$ — относительная толщина сгоревшего свода; $2e_1$, $2e$ — первоначальная и текущая толщина горящего свода порохового зерна соответственно. Тогда скорость газообразования определится из уравнения

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{S_0}{\Lambda_0}\sigma(\psi)u_k, \tag{6}$$

где Λ_0 — первоначальный объем порохового зерна, u_k — скорость горения пороха.

Геометрический закон горения дает возможность установить аналитическую связь между относительной толщиной сгоревшего свода порохового зерна z, сгоревшей частью зерна ψ и относительной поверхностью зерна $\sigma(\psi)$ или $\sigma(z)$. Для большинства пороховых элементов, применяемых в артиллерии, зависимость $\psi(z)$ описывается полиномом третьей степени вида [Серебряков, 1962]

$$\psi(z) = \kappa z\left(1 + \lambda z + \mu z^2\right), \tag{7}$$

при этом

$$\sigma(z) = 1 + 2\lambda z + 3\mu z^2, \tag{8}$$

где постоянные κ, λ, μ — характеристики формы порохового элемента.

Если в конце горения при $z = 1$ $\psi = 1$, то формула (7) обращается в равенство $1 = \kappa(1 + \lambda + \mu)$, служащее для проверки правильности расчета характеристик формы. В противном случае, например, для пороховых элементов с семью каналами имеем $\psi_{\text{р}} = \kappa(1 + \lambda + \mu)$, где $\psi_{\text{р}}$ — относительная доля сгоревшего пороха в момент распада зерна при $z = 1$. Если применяется зерненый порох, то после распада относительная поверхность горения может быть определена по формуле [Русяк и др., 2016]

$$\sigma(\psi) = (1 + 2\lambda + 3\mu)\sqrt{\frac{1-\psi}{1-\psi_{\text{р}}}}, \quad \psi_{\text{р}} \le \psi \le 1. \tag{9}$$

Таким образом, скорость газообразования можно определять из решения следующей системы уравнений, справедливой до распада пороховых элементов:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{S_0}{\Lambda_0}\sigma(z)u_k, \quad \sigma(z) = 1 + 2\lambda z + 3\mu z^2, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{u_k}{e_1}. \tag{10}$$

После распада необходимо воспользоваться уравнением (6) и зависимостью (9).

2.4. Уравнение энергии

В рамках принятых допущений второй закон термодинамики для процесса преобразования энергии при выстреле имеет вид

$$\omega\psi\frac{RT}{\theta} = \omega\psi\frac{RT_v}{\theta} - \int_0^{x_{\text{сн}}} \tilde{\rho}\frac{v^2}{2}Sdx - \int_0^{l_{\text{сн}}} S_{\text{кн}}p_{\text{сн}}dl, \tag{11}$$

где $\tilde{\rho} = \dfrac{\omega}{W_{\text{км}} + S_{\text{кн}} l_{\text{сн}}} = \dfrac{\omega}{W_{\text{сн}}}$ — плотность газопороховой смеси; v — скорость газопороховой смеси; $\theta = k - 1$; $k = \dfrac{c_p}{c_v}$ — показатель адиабаты продуктов горения; c_p, c_v — теплоемкости пороховых газов при постоянном объеме и давлении соответственно; $W_{\text{км}}$ — объем камеры заряжания; $l_{\text{сн}}$ — путь, пройденный снарядом к моменту времени t; $x_{\text{сн}} = L_{\text{км}} + l_{\text{сн}}$ — положение снаряда в момент времени t; $L_{\text{км}}$ — длина камеры орудия; $S = S(x)$ — переменная площадь сечения камеры и канала ствола.

Используя уравнение состояния в форме $p\left(W_{\text{св}} - \alpha\omega\psi\right) = \omega\psi RT$, где $W_{\text{св}} = W_{\text{км}} + S_{\text{кн}} l_{\text{сн}} - \dfrac{\omega}{\delta}\left(1-\psi\right) = W_{\text{сн}} - \dfrac{\omega}{\delta}\left(1-\psi\right)$, получим

$$p\left[W_{\text{сн}} - \frac{\omega}{\delta}\left(1-\psi\right) - \alpha\omega\psi\right] = \omega\psi f - \theta\int_0^{x_{\text{сн}}} \tilde{\rho}\frac{v^2}{2} S dx - \theta\int_0^{l_{\text{сн}}} S_{\text{кн}} p_{\text{сн}} dl. \tag{12}$$

Для дальнейших преобразований уравнения (12): учета работы на перемещение газопороховой смеси (предпоследний член уравнения (11)) и работы на перемещение снаряда (последний член уравнения (11)) — в стандартных термодинамических моделях используется так называемая приведенная длина камеры $\tilde{L}_{\text{км}} = W_{\text{км}} / S_{\text{кн}}$, коэффициент уширения $\chi = \tilde{L}_{\text{км}} / L_{\text{км}}$ и линейный относительно координаты x профиль скорости пороховых газов [Серебряков, 1962; Захаренков, 2010]. Нетрудно видеть, что в рамках такого подхода совершенно не учитываются геометрическая форма и характер уширения камеры. В этой связи, оставаясь строго в рамках допущений термодинамического подхода, для определения этих работ используем одномерные уравнения неразрывности и движения газопороховой смеси внутри ствола, учитывающие реальную геометрию камеры орудия [Русяк и др., 2016]:

$$\frac{\partial \tilde{\rho} S}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\rho} v S}{\partial x} = 0, \tag{13}$$

$$\tilde{\rho}\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{14}$$

При допущении о равномерном распределении газопороховой смеси по заснарядного объему из уравнения (13) можно найти

$$v(x,t) = -\frac{W(x)}{S(x)}\frac{d\ln\tilde{\rho}}{dt} = \frac{W(x)}{S(x)}\frac{S_{\text{кн}} v_{\text{сн}}}{W_{\text{сн}}}, \tag{15}$$

где $W(x) = \int_0^x S(\xi) d\xi$ — объем заснарядного пространства, занимаемый газопороховой смесью от дна канала до сечения x.

Вернемся к уравнению (12). С учетом (15) получаем $\theta\int_0^{x_{\text{сн}}} \tilde{\rho}\dfrac{v^2}{2} S dx = \theta\omega J_0 \dfrac{v_{\text{сн}}^2}{2}$, где обозначено $J_0 = \dfrac{S_{\text{кн}}^2}{W_{\text{сн}}^3}\int_0^{x_{\text{сн}}} \dfrac{W^2(x)}{S(x)} dx$. Воспользовавшись уравнением движения снаряда (4) без учета

противодавления, имеем $\theta\int_0^{l_{\text{сн}}} S_{\text{кн}} p_{\text{сн}} dl = \theta q \frac{v_{\text{сн}}^2}{2}$. Таким образом, уравнение (12) преобразуется к виду

$$p\left[W_{\text{сн}} - \frac{\omega}{\delta}(1-\psi) - \alpha\omega\psi\right] = \omega\psi f - \theta\left(1 + \frac{\omega}{q}J_0\right) q \frac{v_{\text{сн}}^2}{2}. \tag{16}$$

Для камеры без уширения $S(x) = S_{\text{кн}}$, и тогда $J_0 = \frac{1}{3}$.

2.5. Распределение давления по заснарядному пространству

Будем исходить из уравнения движения (14). Интегрируя его от 0 до x, получаем

$$p(x,t) = p_{\text{кн}}(t) - \tilde{\rho}\int_0^x \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) d\xi - \tilde{\rho}\int_0^x \left(v\frac{\partial v}{\partial \xi}\right) d\xi,$$

где $p_{\text{кн}}(t)$ — текущее давление на дно канала орудия. Используя выражение (15), найдем

$$p(x,t) = p_{\text{кн}}(t) - \left(\frac{\omega p_{\text{сн}}(t)}{q} - \omega\frac{v_{\text{сн}}^2}{W_{\text{сн}}}\right) J_1(x) - \frac{1}{2}\omega\frac{S_{\text{кн}}^2 v_{\text{сн}}^2}{W_{\text{сн}}^3}\frac{W^2(x)}{S^2(x)}, \tag{17}$$

где $J_1(x) = \frac{S_{\text{кн}}^2}{W_{\text{сн}}^2}\int_0^x \frac{W(\xi)}{S(\xi)} d\xi$. Учитывая $p(x_{\text{сн}}, t) = p_{\text{сн}}(t)$, из последнего уравнения следует

$$p_{\text{сн}}(t) = p_{\text{кн}}(t) - \left(\frac{\omega p_{\text{сн}}(t)}{q} - \omega\frac{v_{\text{сн}}^2}{W_{\text{сн}}}\right) J_1(x_{\text{сн}}) - \frac{1}{2}\omega\frac{v_{\text{сн}}^2}{W_{\text{сн}}}, \tag{18}$$

где $J_1(x_{\text{сн}}) = \frac{S_{\text{кн}}^2}{W_{\text{сн}}^2}\int_0^{x_{\text{сн}}} \frac{W(x)}{S(x)} dx$. Для камеры без уширения $S(x) = S_{\text{кн}}$ и $J_1(x_{\text{сн}}) = \frac{1}{2}$. Формула (18) в данном случае будет иметь вид $p_{\text{кн}}(t) = \left(1 + \frac{1}{2}\frac{\omega}{q}\right) p_{\text{сн}}(t)$.

Свяжем среднее давление в системе $p(t)$ с давлением на снаряд $p_{\text{сн}}(t)$. Очевидно,

$$p(t) = \frac{1}{W_{\text{сн}}}\int_0^{x_{\text{сн}}} p(x,t) S(x) dx, \tag{19}$$

откуда, воспользовавшись формулой (17), можно получить

$$p(t) = p_{\text{кн}}(t) - \left(\frac{\omega p_{\text{сн}}(t)}{q} - \omega\frac{v_{\text{сн}}^2}{W_{\text{сн}}}\right) J_2 - \frac{1}{2}\omega\frac{v_{\text{сн}}^2}{W_{\text{сн}}} J_0, \tag{20}$$

где $J_2 = \frac{S_{\text{кн}}^2}{W_{\text{сн}}^3}\int_0^{x_{\text{сн}}} \left(\int_0^x \frac{W(\xi)}{S(\xi)} d\xi\right) S(x) dx$.

С учетом (18) формула (20) преобразуется к виду

$$p(t)=p_{\text{сн}}(t)+\left(\frac{\omega p_{\text{сн}}(t)}{q}-\omega\frac{v_{\text{сн}}^2}{W_{\text{сн}}}\right)\left(J_1\left(x_{\text{сн}}\right)-J_2\right)+\frac{1}{2}\omega\frac{v_{\text{сн}}^2}{W_{\text{сн}}}\left(1-J_0\right). \tag{21}$$

Для камеры без уширения $S(x)=S_{\text{кн}}$ и $J_2=\frac{1}{6}$. В этом случае имеем $p(t)=\left(1+\frac{1}{3}\frac{\omega}{q}\right)p_{\text{сн}}(t)$.

2.6. Система уравнений ОЗВБ

Постановка основной задачи внутренней баллистики (без учета противодавления) имеет следующий вид.

1. Уравнение горения:

– до фазы распада пороховых элементов $z\le 1$ или $\psi\le\psi_{\text{р}}=\kappa\left(1+\lambda+\mu\right)$:

$$\frac{d\psi}{dt}=\frac{S_0}{\Lambda_0}\sigma(z)u_k,\quad \frac{dz}{dt}=\frac{u_k}{e_1},\quad \sigma(z)=1+2\lambda z+3\mu z^2; \tag{22}$$

– после распада пороховых элементов $\psi>\psi_{\text{р}}=\kappa\left(1+\lambda+\mu\right)$:

$$\frac{d\psi}{dt}=\frac{S_0}{\Lambda_0}\sigma\left(\psi\right)u_k,\quad \sigma(\psi)=\sigma(\psi_{\text{р}})\sqrt{\frac{1-\psi}{1-\psi_{\text{р}}}},\quad \psi_{\text{р}}\le\psi\le 1,\quad \sigma(\psi_{\text{р}})=1+2\lambda+3\mu. \tag{23}$$

2. Уравнение движения:

$$q\frac{dv_{\text{сн}}}{dt}=S_{\text{кн}}p_{\text{сн}},\quad \frac{dl_{\text{сн}}}{dt}=v_{\text{сн}}. \tag{24}$$

3. Уравнение энергии:

$$p\left[W_{\text{сн}}-\frac{\omega}{\delta}\left(1-\psi\right)-\alpha\omega\psi\right]=\omega\psi f-\left(1+\frac{\omega}{q}J_0\right)\theta q\frac{v_{\text{сн}}^2}{2}. \tag{25}$$

4. Уравнение состояния:

$$p\left[W_{\text{сн}}-\alpha\omega\psi-\frac{\omega}{\delta}\left(1-\psi\right)\right]=\omega\psi RT. \tag{26}$$

5. Дополнительное соотношение:

$$p_{\text{сн}}(t)=\frac{p(t)+\omega\frac{v_{\text{сн}}^2}{W_{\text{сн}}}\left[\left(J_1\left(x_{\text{сн}}\right)-J_2\right)-\frac{1}{2}\left(1-J_0\right)\right]}{1+\frac{\omega}{q}\left(J_1\left(x_{\text{сн}}\right)-J_2\right)}. \tag{27}$$

6. Начальные условия:

– при $t=0,\ 0\le x\le L_{\text{км}}$

$$p=p_{\text{ф}},\quad T=T_v,\quad v_{\text{сн}}=0,\quad l_{\text{сн}}=0,\quad \psi=\frac{p_{\text{ф}}\left(\frac{\delta}{\Delta}-1\right)}{f\delta+p_{\text{ф}}\left(\alpha\delta-1\right)},\quad \Delta=\frac{\omega}{W_{\text{км}}}, \tag{28}$$

где $p_{\text{ф}}$ — давление форсирования.

3. Задача Лагранжа в термодинамической постановке

Исследования о влиянии размерности задачи на результаты решения ОЗВБ проведем без учета противодавления в рамках задачи Лагранжа, которая отличается от задачи внутренней баллистики дополнительным допущением о мгновенном сгорании пороха в начальный момент времени: при $t \geq 0,\ \psi = 1.$ В таком случае имеем:

1) уравнение движения:

$$q\frac{dv_{\text{сн}}}{dt} = S_{\text{кн}} p_{\text{сн}}, \quad \frac{dl_{\text{сн}}}{dt} = v_{\text{сн}}; \tag{29}$$

2) уравнение энергии:

$$p\left(W_{\text{сн}} - \alpha\omega\right) = \omega f - \left(1 + \frac{\omega}{q} J_0\right)\theta q \frac{v_{\text{сн}}^2}{2}; \tag{30}$$

3) уравнение состояния:

$$p\left(W_{\text{сн}} - \alpha\omega\right) = \omega RT; \tag{31}$$

4) дополнительное соотношение — имеет вид (27);
5) начальные условия:
– при $t = 0,\ 0 \leq x \leq L_{\text{км}}$

$$p = p_{\text{м}}, \quad T = T_v, \quad v_{\text{сн}} = 0, \quad l_{\text{сн}} = 0, \quad p_{\text{м}} = \frac{f\Delta}{1 - \alpha\Delta}, \quad \Delta = \frac{\omega}{W_{\text{км}}}. \tag{32}$$

4. Задача Лагранжа в газодинамической постановке

Решение задачи будем рассматривать в приближении совершенного газа, течение которого подчиняется уравнениям Эйлера. В одномерном случае соответствующая система уравнений имеет вид

$$\begin{gathered} \frac{\partial \rho S}{\partial t} + \frac{\partial \rho v S}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \rho v S}{\partial t} + \frac{\partial\left(p + \rho v^2\right) S}{\partial x} = p\frac{\partial S}{\partial x}, \\ \frac{\partial e S}{\partial t} + \frac{\partial\left(e + p\right) v S}{\partial x} = 0, \end{gathered} \tag{33}$$

где ρ — плотность пороховых газов. $e = \rho\varepsilon + \rho\dfrac{v^2}{2}.$ $\varepsilon = c_v T.$ Уравнение состояния Дюпре (1) при решении ОЗВБ в газодинамической постановке представим в виде

$$\varepsilon = \frac{p\left(1 - \alpha\rho\right)}{\left(k - 1\right)\rho}. \tag{34}$$

Система уравнений (33)–(34) решается в области $t > 0,\ 0 < x < x_{\text{сн}}(t),$ где $L_{\text{км}} \leq x_{\text{сн}}(t) \leq$ $\leq L_{\text{км}} + L_{\text{д}};$ $L_{\text{д}}$ — длина ствола.

Начальные и граничные условия:
– при $t = 0,\ 0 \leq x \leq L_{\text{км}}$

$$v = 0, \quad \rho = \Delta, \quad p = p_{\text{м}}, \quad T = T_v, \quad v_{\text{сн}} = 0, \quad l_{\text{сн}} = 0, \quad p_{\text{м}} = \frac{f\Delta}{1 - \alpha\Delta}, \quad \Delta = \frac{\omega}{W_{\text{км}}}; \tag{35}$$

– при $t > 0,\ x = 0$

$$v = 0; \tag{36}$$

– при $t > 0,\ x = x_{\text{сн}}(t)$

$$q\frac{dv_{\text{сн}}}{dt} = S_{\text{кн}}p_{\text{сн}}, \quad v = v_{\text{сн}}, \quad \frac{dl_{\text{сн}}}{dt} = v_{\text{сн}}. \tag{37}$$

Для выяснения погрешности одномерного приближения рассмотрим уравнения течения в пространственной (двумерной осесимметричной) постановке. Соответствующая система газодинамических уравнений имеет вид

$$\begin{gathered}
\frac{\partial y\rho}{\partial t} + \frac{\partial y\rho v}{\partial x} + \frac{\partial y\rho u}{\partial y} = 0, \\
\frac{\partial y\rho v}{\partial t} + \frac{\partial y\left(p + \rho v^2\right)}{\partial x} + \frac{\partial y\rho vu}{\partial y} = 0, \\
\frac{\partial y\rho u}{\partial t} + \frac{\partial y\rho uv}{\partial x} + \frac{\partial y\left(p + \rho u^2\right)}{\partial y} = p, \\
\frac{\partial ye}{\partial t} + \frac{\partial y\left(e + p\right)v}{\partial x} + \frac{\partial y\left(e + p\right)u}{\partial y} = 0.
\end{gathered} \tag{38}$$

Здесь x — пространственная координата, направленная по оси канала ствола; y — радиальная координата; v, u — осевая и радиальная составляющие скорости газа соответственно; $e = \rho\varepsilon + \rho\dfrac{|\mathbf{V}|^2}{2}$; $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix}$.

Система уравнений (38) совместно с уравнением состояния (34) решается в области $t > 0$, $0 < x < x_{\text{сн}}(t)$, $0 \le y \le R(x)$, где $R(x)$ — переменный радиус камеры и канала ствола.

Начальные и граничные условия:

– при $t = 0,\ 0 \le x \le L_{\text{км}},\ 0 \le y \le R(x)$

$$\begin{gathered}
v = 0, \quad u = 0, \quad \rho = \Delta, \quad p = p_{\text{м}}, \quad T = T_v, \\
v_{\text{сн}} = 0, \quad l_{\text{сн}} = 0, \quad p_{\text{м}} = \frac{f\Delta}{1 - \alpha\Delta}, \quad \Delta = \frac{\omega}{W_{\text{км}}};
\end{gathered} \tag{39}$$

– при $t > 0,\ x = 0,\ 0 \le y \le R(x)$

$$v = 0; \tag{40}$$

– при $t > 0,\ x = x_{\text{сн}},\ 0 \le y \le R(x)$

$$q\frac{dv_{\text{сн}}}{dt} = S_{\text{кн}}p_{\text{сн}}, \quad v = v_{\text{сн}}, \quad \frac{dl_{\text{сн}}}{dt} = v_{\text{сн}}; \tag{41}$$

– при $t > 0,\ 0 < x < x_{\text{сн}},\ y = R(x)$

$$v_n = v\cos\beta - u\sin\beta = 0. \tag{42}$$

Здесь $\beta = -\operatorname{arctg}\dfrac{dR(x)}{dx}$.

5. Постановка задачи о противодавлении

При решении ОЗВБ чаще всего полагают, что противодавление, формирующееся бегущей впереди снаряда волной сжатия и ударной волной, пренебрежимо мало. Или определяют его по формуле (5), полученной из решения задачи о движении плоского поршня с постоянной сверхзвуковой скоростью в трубе. Для выяснения вопроса о том, насколько применима эта формула для оценки противодавления, рассмотрим течение газа (воздуха) впереди снаряда. Считаем, что снаряд имеет форму цилиндра с диаметром, равным диаметру канала; это позволяет рассматривать одномерное течение в канале ствола.

Система одномерных газодинамических уравнений, описывающая течение воздуха впереди снаряда в канале постоянного сечения, имеет вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho v}{\partial x}=0,\\ \frac{\partial\rho v}{\partial t}+\frac{\partial\left(p+\rho v^2\right)}{\partial x}=0,\\ \frac{\partial e}{\partial t}+\frac{\partial\left(p+e\right)v}{\partial x}=0,\\ p=\rho R_{\text{в}}T\ ^{1}.\end{gathered}\tag{43}$$

Здесь ρ — плотность воздуха; $e=\rho\varepsilon+\rho\dfrac{v^2}{2}$; $\varepsilon=c_{v\text{в}}T$; $c_{v\text{в}}$ — теплоемкость воздуха при постоянном объеме. Уравнение состояния при решении задачи о противодавлении в газодинамической постановке представим в форме

$$\varepsilon=\frac{p}{\left(k_{\text{в}}-1\right)\rho}.\tag{44}$$

Система уравнений (43)–(44) решается в области $t>0,\ L_{\text{км}}+\Delta_{\text{сн}}+l_{\text{сн}}\left(t\right)<x<L>L_{\text{км}}+L_{\text{д}}$, где $\Delta_{\text{сн}}$ — длина эквивалентного снаряда. Значение L выбирается так, чтобы ударная волна за время выстрела при $x_{\text{сн}}(t)=L_{\text{км}}+L_{\text{д}}$ не достигала правой границы $x=L.$ Влияние дульного среза на движение снаряда при этом не учитывается.

Начальные и граничные условия:

– при $t=0,\ x\geq L_{\text{км}}+\Delta_{\text{сн}}$

$$v=0,\ \rho=\rho_{\text{н}},\ p=p_{\text{н}},\ T=T_{\text{н}},\ v_{\text{сн}}=0,\ l_{\text{сн}}=0,\ p_{\text{н}}=0.981\cdot10^5\ \text{Па},\ \rho_{\text{н}}=\frac{0.981\cdot10^5}{R_{\text{в}}T_{\text{н}}}\ \text{кг}/\text{м}^3,\tag{45}$$

где $R_{\text{в}}$ — газовая постоянная воздуха, $T_{\text{н}}$ — начальная температура воздуха;

– при $t\geq0,\ x=L_{\text{км}}+\Delta_{\text{сн}}+l_{\text{сн}}$

$$q\frac{dv_{\text{сн}}}{dt}=S_{\text{кн}}\left(p_{\text{сн}}-p_{\text{пр}}\right),\quad v=v_{\text{сн}},\quad \frac{dl_{\text{сн}}}{dt}=v_{\text{сн}};\tag{46}$$

– при $t\geq0,\ x=L>>L_{\text{км}}+L_{\text{д}}$

$$v=0.\tag{47}$$

[1] В данном случае предполагаемый уровень давления впереди снаряда таков, что можно воспользоваться уравнением состояния Клапейрона–Менделеева.

Давление $p_{\text{сн}}$ в (46) определялось из решения баллистической задачи Лагранжа (33)–(37), которая решалась совместно с задачей противодавления, при этом вместо уравнения движения (37) использовалось уравнение движения в форме (46).

6. Вычислительные алгоритмы решения задач

Численное решение задачи Лагранжа в термодинамической постановке реализовано с использованием двухшаговой схемы Рунге–Кутты второго порядка точности [Бахвалов и др., 2011]. Для исследования сходимости численного решения использовали аналитическое решение задачи Лагранжа, справедливое для камеры без уширения $S(x) = S_{\text{кн}}$ [Русяк и др., 2016]:

$$v_{\text{сн}} = \sqrt{\frac{2f\omega}{\theta\left(1+\frac{1}{3}\frac{\omega}{q}\right)q}\left[1-\left(\frac{W_{\text{км}}-\alpha\omega}{l_{\text{сн}}S_{\text{кн}}+W_{\text{км}}-\alpha\omega}\right)^{\theta}\right]}. \tag{48}$$

При решении задачи Лагранжа в газодинамической постановке использовали метод Годунова [Годунов и др., 1976; Сафронов, Фомин, 2010; Прокопов, Северин, 2009]. Проведено исследование сеточной сходимости метода. Выбор шагов численного интегрирования, обеспечивающих в евклидовой норме точность расчета 0.1 %, осуществлялся путем последовательного удвоения делений сетки и сравнением результатов в соответствии с принципом Рунге [Самарский, Гулин, 2003]. Для одномерного приближения количество ячеек сетки в области интегрирования, обеспечивающих заданную точность, равнялось $N_x = 100$. Для двумерной осесимметричной задачи — $N = N_x \times N_y = 100 \times 16 = 1600$. Ортогонализированная сетка в двумерной осесимметричной задаче строилась на основе метода, изложенного в работе [Тененев и др., 1997].

Для численного решения системы газодинамических уравнений применялся метод контрольного объема. Параметры газа на границах контрольных объемов определялись с использованием автомодельного решения задачи о распаде произвольного разрыва. Выражение $p\frac{\partial S}{\partial x}$ в правой части уравнения импульсов системы уравнений (33) при заданной функции $S(x)$ рассматривалось как источниковый член. После интегрирования по контрольному объему принималось $\int p\frac{\partial S}{\partial x}dx \approx p_i\left(S_i - S_{i-1}\right)$, где p_i — давление в центре *i*-го контрольного объема.

Для возможности применения решения задачи Римана для уравнения состояния (34), отличающегося от уравнения (44) для идеального газа, используем локальную аппроксимацию уравнения (34) [Прокопов, Северин, 2009; Colella, Glaz, 1985]:

$$\gamma = 1 + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \varepsilon} = \frac{k-\alpha\rho}{1-\alpha\rho}. \tag{49}$$

Уравнение (34) принимает вид $\varepsilon = \frac{p}{(\gamma-1)\rho}$. Такая аппроксимация позволяет применять алгоритм решения задачи о распаде произвольного разрыва [Годунов и др., 1976] и использовать решение задачи Римана с локальным коэффициентом γ (49). При этом скорость звука определяется выражением [Colella, Glaz, 1985] $a = \sqrt{k\frac{p}{\rho}\frac{1}{1-\alpha\rho}}$. Для локальной модели уравнения состояния реального газа при приближенном решении задачи Римана величину коэффициента γ

следует брать в виде выражения $\gamma_S = \dfrac{k - \alpha\rho_S}{1 - \alpha\rho_S}$, где индексы $S = L, R$ соответствуют значениям слева и справа от границы раздела.

Для решения газодинамической задачи применялся метод С. К. Годунова со схемой решения задачи о распаде разрыва с двумя волнами разрежения (схема Ошера (P)). Для идеального газа эта схема позволяет вычислять давление на контактном разрыве по формуле без итераций [Toro, 2009], что уменьшает время расчета по сравнению с классической разностной схемой [Годунов и др., 1976].

Применительно к решению задачи о распаде разрыва по схеме с двумя волнами разрежения в случае локальной аппроксимации уравнения состояния с переменным коэффициентом γ [Colella, Glaz, 1985] имеем уравнение для давления на контактном разрыве:

$$\frac{2}{\gamma_{*L} - 1} a_L \left[1 - \left(\frac{P}{p_L} \right)^{\frac{2\gamma_{*L}}{\gamma_{*L} - 1}} \right] + \frac{2}{\gamma_{*R} - 1} a_R \left[1 - \left(\frac{P}{p_R} \right)^{\frac{2\gamma_{*R}}{\gamma_{*R} - 1}} \right] = v_R - v_L,$$

где $a_S = \sqrt{k \dfrac{p_S}{\rho_S} \dfrac{1}{1 - \alpha\rho_S}}$, $\hat{\gamma}_S = \gamma_S + \left(1 - \dfrac{\overline{\gamma}}{\overline{\Gamma}}\right)(\overline{\gamma} - 1) \dfrac{P - p_S}{0.5(p_L + p_R)}$, $\Gamma_S = \dfrac{k}{1 - \alpha\rho_S}$, $\overline{\gamma} = 0.5(\gamma_L + \gamma_R)$, $\overline{\Gamma} = 0.5(\Gamma_L + \Gamma_R)$, $\gamma_{*S} = \max(\gamma_{\min}, \min(\hat{\gamma}_S, \gamma_{\max}))$, $\gamma_{\min} = \min(\gamma_L, \gamma_R)$, $\gamma_{\max} = \max(\gamma_L, \gamma_R)$, P — давление на контактном разрыве.

Уравнение для давления $F(P) = q_L P^{\frac{2\gamma_{*L}}{\gamma_{*L} - 1}} + q_R P^{\frac{2\gamma_{*R}}{\gamma_{*R} - 1}} - \sigma_L - \sigma_R + v_R - v_L = 0$, где $\sigma_S = \dfrac{2}{\gamma_{*S} - 1} a_S$, $q_S = \sigma_S p_S^{\frac{2\gamma_{*S}}{1 - \gamma_{*S}}}$, решается методом секущих при начальном приближении: $P^0 = \left(\dfrac{\sigma_L + \sigma_R + v_L - v_L}{q_L + q_R} \right)^{\frac{\overline{\gamma} - 1}{2\overline{\gamma}}}$, $\gamma_{*S} = \gamma_S$.

Для условий проводимых расчетов (см. § 7) сделана проверка влияния точности определения давления в итерационном процессе на получаемые результаты. Оказалось, что достаточно начального приближения $P = P^0$. Конечные параметры выстрела практически не зависели от количества итераций. Например, для подкалиберного снаряда при $q = 15.0$ кг, $d_{\text{км}} = 0.3$ м при итерационном процессе до получения относительной разности между итерациями 10^{-6} получено значение дульной скорости снаряда, равное 2102.941 м/с, а при начальном приближении без итераций — 2102.932 м/с.

Рассмотренная схема имеет первый порядок аппроксимации по пространственным координатам и по времени, что приводит к сильному размазыванию скачков газодинамических величин. Для повышения порядка аппроксимации применяется монотонная схема MUSCL (monotone upwind schemes for conservation laws) второго порядка. Значения газодинамических параметров для решения задачи о распаде разрыва определяются с применением экстраполяции с ограничителем [Wesseling, 1991; van Albada et al., 1982]. Например, для направления по индексу i для правой грани:

– значения переменных $\varphi = (\rho, v, u, p)$ «справа» от поверхности разрыва определяются из выражений

$$\varphi_R = \varphi_{i+1j} + 0.5\psi(c)(\varphi_{ij} - \varphi_{i+1j}), \quad c = \frac{\varphi_{i+1j} - \varphi_{i+2j}}{\varphi_{ij} - \varphi_{i+1j}}, \quad \psi(c) = \frac{c^2 + c}{c^2 + 1};$$

– значения переменных «слева» от поверхности разрыва — из выражений

$$\varphi_L = \varphi_{ij} + 0.5\psi(c)\left(\varphi_{i+1j} - \varphi_{ij}\right), \quad c = \frac{\varphi_{ij} - \varphi_{i-1j}}{\varphi_{i+1j} - \varphi_{ij}}, \quad \psi(c) = \frac{c^2 + c}{c^2 + 1}.$$

По времени применяется двухшаговая схема Рунге–Кутты со вторым порядком точности.

Расщепление экстраполяции с ограничителем по направлениям нормали к грани ячейки может быть оправданным в случае разностной сетки, близкой к ортогональной и ориентированной по направлению течения. В качестве теста рассмотрим течение в сопле Лаваля. Экспериментальные результаты работы [Cuffel et al., 1969] несколько десятилетий используются для проверки различных численных методов. Расчеты проводились на последовательности сеток. Самая грубая сетка 32×32 представлена на рис. 2.

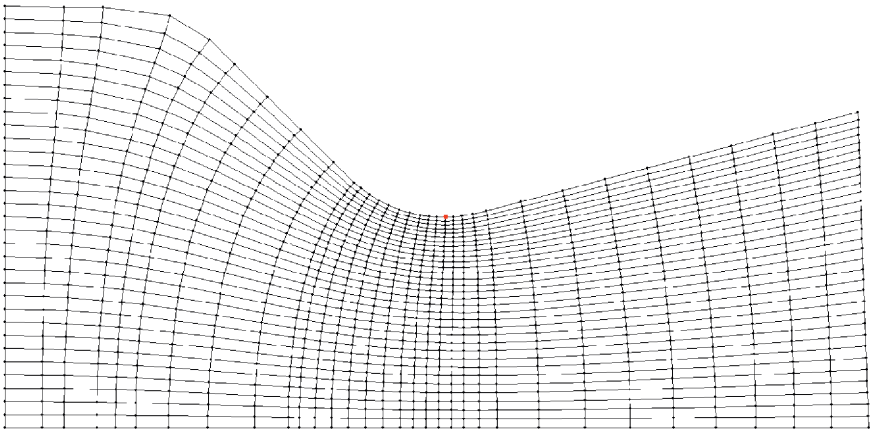

Рис. 2. Разностная сетка 32×32 в сопле Лаваля

Применялись сетки, полученные измельчением исходной до 256×256. Результаты исследования сходимости представлены на рис. 3. Схема первого порядка аппроксимации не выходит на «полку» даже для сетки 256×256. Схема повышенного порядка выходит на уровень $\varphi_2 = 0.9816$, начиная с сетки 128×128. Распределение числа Маха в различных сечениях сопла также удовлетворительно согласуется с экспериментом.

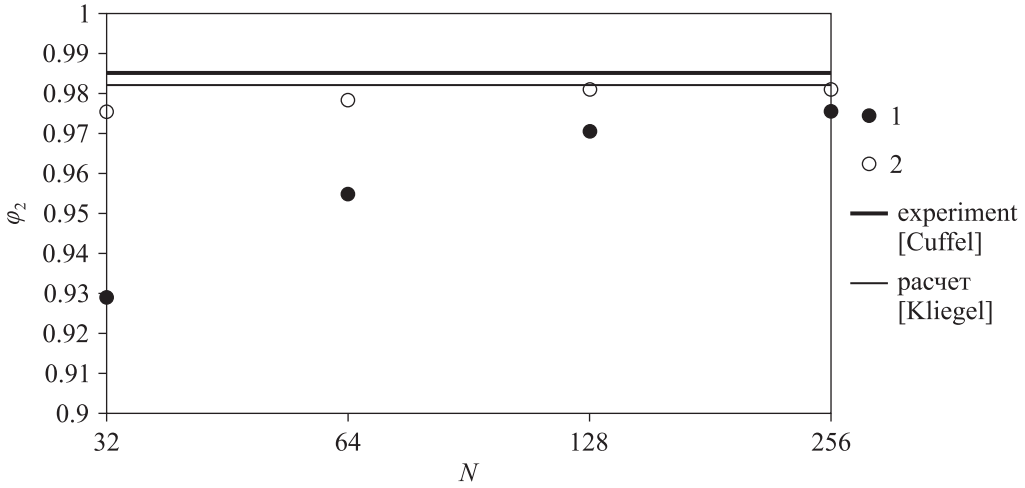

Рис. 3. Сходимость коэффициента расхода φ_2 на последовательности сеток: точки 1 — первый порядок аппроксимации, точки 2 — экстраполяция с ограничителем, тонкая линия — расчет [Kliegel, Levine, 1969], жирная линия — экспериментальное значение [Cuffel et al., 1969]

В качестве другого теста рассмотрим модифицированную задачу Сода [Toro, 2009] о течении совершенного газа в ударной круглой трубе, близкую к нашей задаче о противодавлении. Газ слева и справа от перегородки находится при различных начальных условиях, заданных в безразмерных параметрах. Сравним распределения параметров течения (давление p, плотность ρ и число Маха M), полученные с использованием аналитического и численных решений через время 0.15 после вскрытия перегородки, для варианта со следующими начальными значениями: $p_L = 1,\ \rho_L = 1,\ v_L = 0.75,\ p_R = 0.1,\ \rho_R = 0.125,\ v_R = 0.$

Как видно из представленных результатов (рис. 4), метод С. К. Годунова со схемой решения задачи о распаде разрыва с двумя волнами разрежения (схема Ошера (P)) и экстраполяцией с ограничителем по направлениям нормали к граням ячеек дает результаты, более приближенные к аналитическому решению на разрывах.

Расчетная область в рассматриваемой задаче имеет два блока: блок 1 — камера сгорания и ствол за снарядом, блок 2 — ствол перед снарядом. В блоке 1 уравнение состояния пороховых газов с учетом коволюма, во втором — уравнение для идеального газа. Шаг по времени определялся по условию Куранта–Фридрихса–Леви и выбирался минимальным значением для обоих блоков. Разностные сетки в блоках имели постоянное количество узлов. В блоке 1 (рис. 5) сетка растягивалась при движении снаряда по стволу. В блоке 2 сетка перемещалась вместе со снарядом. В расчетах не учитывается влияние дульного среза на движение снаряда. Поэтому разностная сетка выбрана такой длины, чтобы ударная волна находилась внутри расчетной области. Решение в обоих блоках строилось на сетках с подвижными границами. Связь между расчетными блоками определяется скоростью движения снаряда через граничные условия (46).

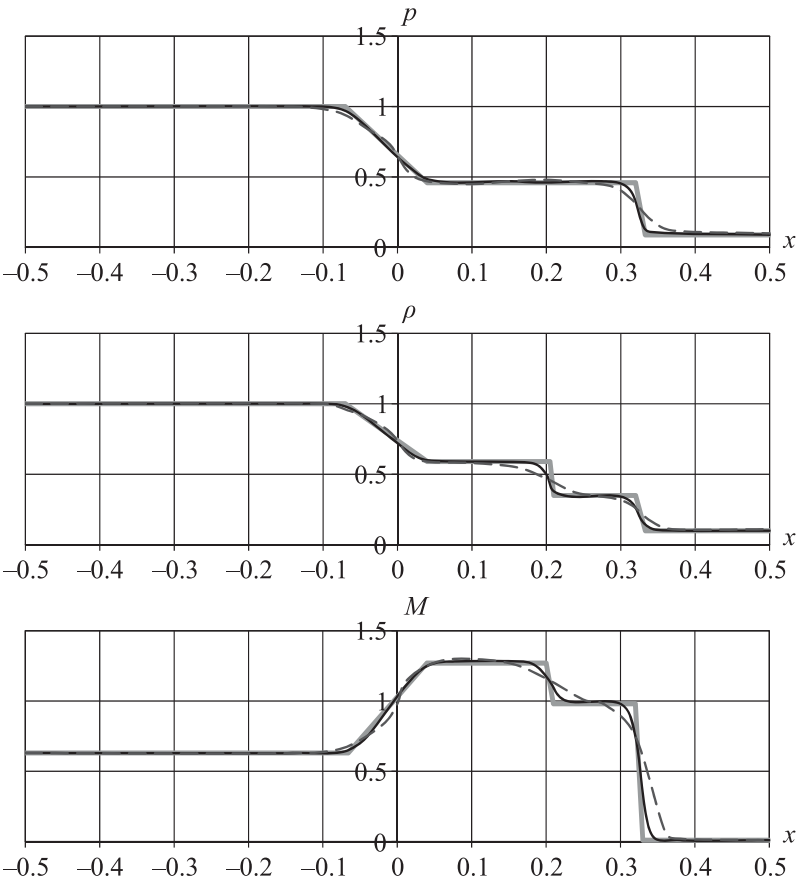

Рис. 4. Результаты сравнения расчетных значений распределения давления p, плотности газа ρ и числа Маха M по координате x в задаче Сода: ▬▬ — аналитическое решение, ——— — метод Годунова со схемой Ошера (P) и экстраполяцией, — — — — метод Годунова 1-го порядка

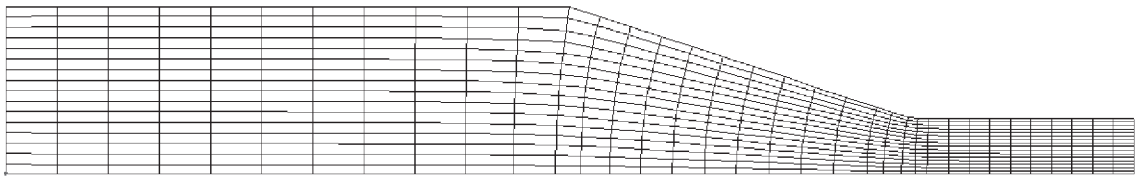

Рис. 5. Вид двумерной сетки в области решения основной задачи внутренней баллистики

В осесимметричном случае в блоке 1 количество слоев в радиальном направлении равнялось $N_y = 16$.

7. Численные результаты

Численные исследования проводились для артиллерийской системы со следующими геометрическими характеристиками: диаметр канала ствола $d_{\text{кн}} = 0.1$ м, длина камеры $L_{\text{км}} = 1$ м, начало $l_{\text{ну}} = 0.5$ м и конец $l_{\text{ку}} = 0.8$ м уширения камеры, длина ствола $L_{\text{д}} = 5$ м.

Переменная площадь сечения камеры и канала ствола задавалась следующим образом: $S(x) = S_{\text{км}} = 0.25\pi d_{\text{км}}^2$, если $0 \le x \le l_{\text{ну}}$; $S(x) = S_{\text{кн}} = 0.25\pi d_{\text{кн}}^2$, если $x \ge l_{\text{ку}}$; переменный диаметр уширения камеры при $l_{\text{ну}} < x < l_{\text{ку}}$ определялся линейной интерполяцией между диаметром камеры $d_{\text{км}}$ и диаметром канала ствола $d_{\text{кн}}$.

Теплофизические характеристики продуктов горения принимали значения: $f = 1 \cdot 10^6$ Дж/кг, $k = 1.25$, $R = 300$ Дж/кг·К, $\alpha = 0.001$ м^3/кг.

Теплофизические параметры воздуха принимали значения, соответствующие температуре $T_{\text{н}} = 273$ °К: $k_{\text{в}} = 1.40$, $R_{\text{в}} = 290$ Дж/кг·К.

Вес заряда ω задавался из условия, чтобы начальное давление в камере при любых геометрических размерах было равно

$$p_{\text{н}} = p_{\text{м}} = \frac{f\Delta}{1 - \alpha\Delta} = 2500 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Термодинамические и газодинамические решения сравнивались при $q = (45.0;\ 30.0;\ 15.0;\ 5.0;\ 2.5)$ кг и $d_{\text{км}} = (0.1;\ 0.3;\ 0.5)$ м.

Для оценки влияния формы камеры в термодинамической модели на характеристики выстрела проводились вычисления для различных форм камеры (варьировались диаметр камеры, начало и конец уширения) при условии $W_{\text{км}} = idem.$ Расчеты по предложенной в работе термодинамической модели в приведенном выше диапазоне параметров выявили изменение дульной скорости на 1–2 %, в то время как стандартная термодинамическая модель приводит к совершенно одинаковым результатам.

Результаты расчета ОЗВБ по термодинамической и газодинамической моделям представлены в таблице 1, где приведены значения параметров задачи в дульный момент времени: скорость снаряда $(v_{\text{сн}})_{\text{д}}$, давление на дно канала $(p_{\text{кн}})_{\text{д}}$, давление на снаряд $(p_{\text{сн}})_{\text{д}}$ и относительное изменение дульной скорости снаряда, полученной по различным моделям $\tilde{\delta}(v_{\text{сн}})_{\text{д}}$.

Расчеты показывают, что газодинамическое решение задачи существенно изменяет временные зависимости параметров выстрела (рис. 6) и распределения параметров течения по координате (рис. 7), что необходимо учитывать при решении сопряженных задач баллистики, например задач нагрева ствола и его напряженно-деформированного состояния.

Таблица 1. Сравнение результатов расчета ОЗВБ, полученных по термодинамической и газодинамическим моделям при различных параметрах заряжания

Параметры заряжания		Расчет по термодинамической модели			Расчет по одномерной газодинамической модели			Расчет по двумерной газодинамической модели		
q, кг	$d_{км}$, м	$(v_{сн})_д$, м/с $\tilde{\delta}(v_{сн})_д$, %	$(p_{кн})_д$, МПа	$(p_{сн})_д$, МПа	$(v_{сн})_д$, м/с $\tilde{\delta}(v_{сн})_д$, %	$(p_{кн})_д$, МПа	$(p_{сн})_д$, МПа	$(v_{сн})_д$, м/с $\tilde{\delta}(v_{сн})_д$, %	$(p_{кн})_д$, МПа	$(p_{сн})_д$, МПа
45.0	0.1	704.24 4.38	66.40	62.51	674.65 –	68.79	57.97	674.63 0.00	68.78	57.99
	0.3	1193.53 14.68	509.49	341.75	1040.71 –	605.60	229.52	1042.72 0.19	601.88	230.21
	0.5	1392.15 19.77	1087.37	553.20	1162.38 –	1232.76	343.85	1172.86 0.90	1216.81	350.52
30.0	0.1	853.98 6.69	67.05	61.32	800.43 –	70.87	54.17	800.43 0.00	70.90	54.15
	0.3	1401.16 17.80	529.67	303.04	1189.44 –	641.67	192.27	1192.19 0.23	636.94	192.84
	0.5	1597.89 22.24	1116.91	441.89	1307.19 –	1281.02	271.86	1320.24 1.00	1263.32	276.64
15.0	0.1	1173.77 10.93	68.75	57.92	1058.14 –	80.21	45.09	1058.14 0.00	80.17	45.09
	0.3	1776.88 22.75	572.41	224.07	1447.17 –	715.65	128.03	1450.88 0.26	709.32	128.31
	0.5	1934.33 24.83	1168.69	261.26	1549.58 –	1361.10	176.30	1565.61 1.03	1336.83	180.71
5.0	0.1	1839.36 22.47	73.99	47.40	1501.90 –	81.33	35.45	1501.70 0.01	81.33	35.48
	0.3	2304.56 23.18	642.70	105.79	1870.95 –	821.53	57.65	1877.05 0.33	814.62	57.44
	0.5	2329.17 20.34	1231.27	83.48	1935.43 –	1486.18	73.53	1957.39 1.13	1470.79	74.41
2.5	0.1	2306.32 34.15	79.06	37.25	1719.23 –	87.82	29.61	1719.07 0.01	87.84	29.56
	0.3	2530.46 19.83	674.96	57.65	2111.65 –	897.33	43.91	2119.35 0.36	895.44	44.30
	0.5	2472.53 14.43	1252.88	37.12	2160.71 –	1545.41	45.97	2188.61 1.29	1514.41	47.23

Что касается характера изменения давления по времени (см. рис. 6), то в газодинамической модели он определяется распространением мощной волны разряжения, инициируемой ускоряющемся снарядом в начальный момент времени и движущейся ко дну камеры. Пока волна разряжения не дошла до дна камеры, давление там не меняется. На эту волну разряжения накладывается уширение камеры, которая в данном примере по площади отличается от ствола в 9 раз. После прохождения уширения волна разряжения вовлекает в движение (разгоняет) большой слой газа, находящийся в камере. Набрав инерцию, двигаясь в сторону снаряда, пороховые газы в уширении ускоряются, способствуя замедлению падения давления у дна снаряда, который к этому моменту времени еще недалеко ушел. С этим связана «полка» на пунктирной кривой 2 (см. рис. 6). Отметим, что в камере без уширения данный эффект отсутствует; с ростом уширения он усиливается. После того как волна разряжения отражается от дна снаряда, начинается монотонное падение давления в заснарядном пространстве. Вторая волна уже не догоняет снаряд. В термодинамической модели волны разряжения не моделиру-

ются и характер изменения давления строго монотонный. Исследования показали, что разность давлений на границах объема в термодинамической модели меньше, чем в газодинамической. Этот факт обусловлен главным допущением термодинамической модели — осреднением плотности газа по заснарядному объему, что эквивалентно допущению о бесконечной скорости распространения возмущений в заснарядном пространстве. Это способствует более быстрому выравниванию давления и, следовательно, более быстрому нарастанию скорости снаряда. С другой стороны, предложенный подход к определению распределения давления и скорости приводит к хорошему качественному согласованию распределения давления и скорости пороховых газов по заснарядному пространству, в том числе и для пушек с большим уширением камеры (см. рис. 7).

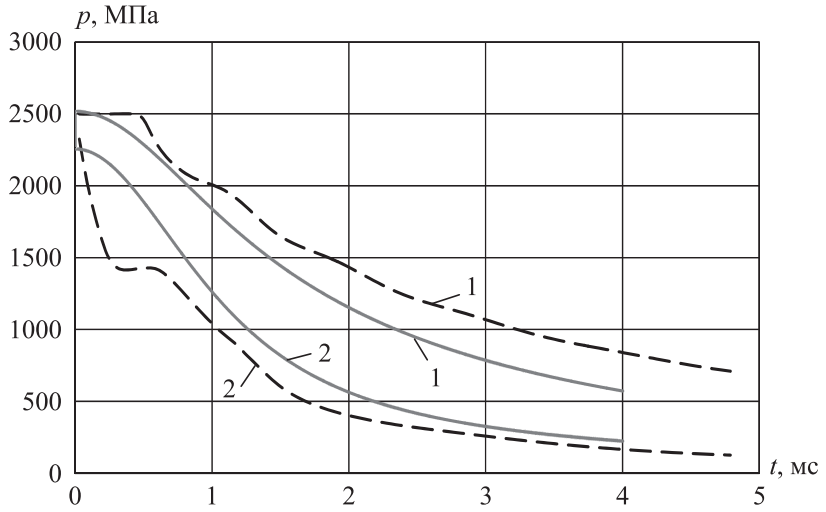

Рис. 6. Сравнение зависимостей давления на дно канала $p_{кн}$ (1) и дно снаряда $p_{сн}$ (2) от времени для различных подходов к решению задачи Лагранжа при $q = 15.0$ кг, $d_{км} = 0.3$ м: —— — расчет по термодинамической модели; – – – — расчет по одномерной газодинамической модели

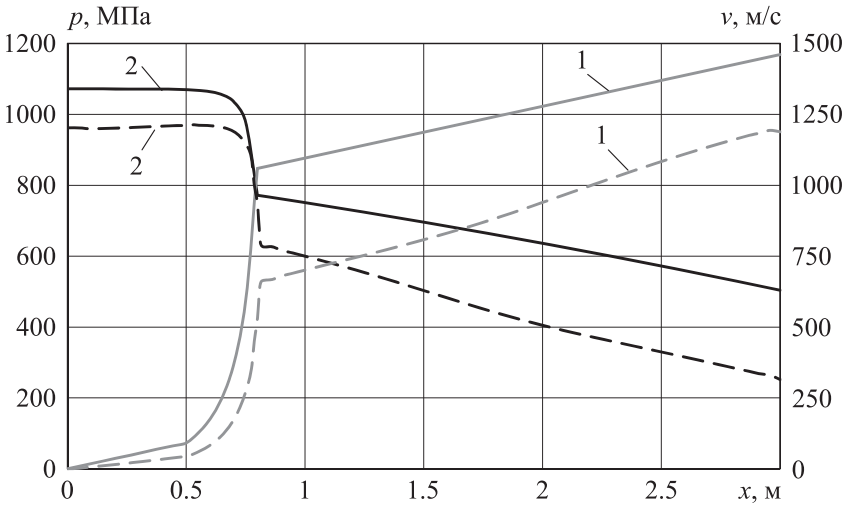

Рис. 7. Распределения скорости v (1) и давления p (2) газа по координате при $l_{сн} = 0.4\,L_д$ для различных подходов к решению задачи Лагранжа при $q = 15.0$ кг, $d_{км} = 0.3$ м: —— — расчет по термодинамической модели; – – – — расчет по одномерной газодинамической модели

Результаты расчетов баллистики с учетом противодавления представлены в таблице 2. Расчет по формуле (5) на большей части траектории снаряда в стволе приводит к занижению противодавления, действующего на снаряд, по сравнению с расчетами по модели (43)–(47). Отличие возрастает с увеличением скорости снаряда. Текущие расхождения могут доходить до 15 % (рис. 8). Однако это оказывает незначительное влияние на контрольные интегральные параметры выстрела.

Рассматривалось влияние учета геометрической формы передней части снаряда на величину противодавления на примере подкалиберного снаряда. В этом случае решение задачи о противодавлении проводилось в двумерной постановке, уравнения которой имеют вид (38) с уравнением состояния (44). Вид сетки в блоке 2 для этого случая представлен на рис. 9. Левая граница, образующая снаряда и внутренняя граница ствола непроницаемые, движущиеся со скоростью снаряда. На правой границе граничное условие экстраполяции. Как уже отмечалось, связь между расчетными блоками определяется скоростью движения снаряда через граничные условия на дно и головную часть снаряда с учетом противодавления.

Таблица 2. Влияние противодавления на результаты решения ОЗВБ при различных параметрах заряжания и условиях расчета

Параметры заряжания		Условия расчета	Расчетные значения			Расхождение
q, кг	$d_{км}$, м		$(v_{сн})_д$, м/с	$(p_{кн})_д$, МПа	$(p_{сн})_д$, МПа	$\tilde{\delta}(v_{сн})_д$, %
45.0	0.3	$p_{пр} = 0$	1040.71	605.60	229.52	–
		$p_{пр}$ по одномерной газодинамической модели	1039.83	605.43	229.94	0.08
		$p_{пр}$ по аналитической формуле	1039.91	605.44	229.91	0.08
30.0	0.3	$p_{пр} = 0$	1189.44	641.67	192.27	–
		$p_{пр}$ по одномерной газодинамической модели	1188.02	641.42	192.86	0.12
		$p_{пр}$ по аналитической формуле	1188.14	641.44	192.81	0.11
15.0	0.3	$p_{пр} = 0$	1447.17	715.65	128.03	–
		$p_{пр}$ по одномерной газодинамической модели	1443.97	715.12	128.99	0.22
		$p_{пр}$ по аналитической формуле	1444.25	715.17	128.91	0.20
5.0	0.3	$p_{пр} = 0$	1870.95	821.53	57.65	–
		$p_{пр}$ по одномерной газодинамической модели	1859.54	819.89	59.40	0.61
		$p_{пр}$ по аналитической формуле	1860.48	820.06	59.26	0.56
2.5	0.3	$p_{пр} = 0$	2111.65	897.33	43.91	–
		$p_{пр}$ по одномерной газодинамической модели	2090.50	894.28	46.33	1.00
		$p_{пр}$ по аналитической формуле	2092.34	894.62	46.13	0.91

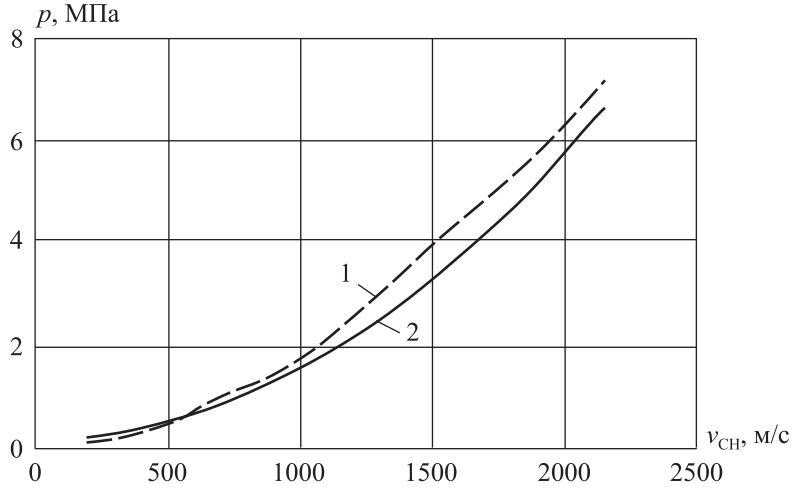

Рис. 8. Сравнение зависимостей противодавлений, действующих на снаряд, от скорости снаряда при $q = 2.5$ кг, $d_{км} = 0.3$ м: 1 — расчет по одномерной газодинамической модели, 2 — аналитическое решение

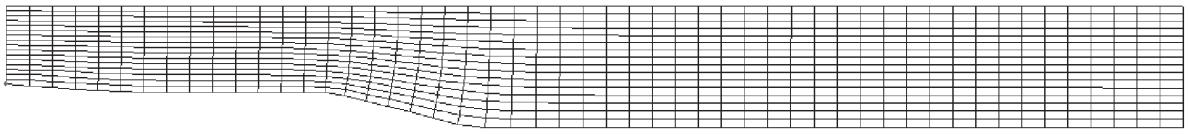

Рис. 9. Вид двумерной сетки в области решения задачи о противодавлении

На рис. 10 дано сравнение изобар полей давления двумерного решения, когда учитывается форма головной части снаряда (см. рис. 10, *а*), и одномерного решения, когда форму головной части учесть нельзя и снаряд представляется в виде цилиндра с плоской головной частью (см. рис. 10, *б*), при одинаковом положении снаряда в стволе. Как показывают расчеты, в одномерном случае инициируемая движением снаряда в стволе ударная волна имеет существенно более высокую скорость распространения, а за ее фронтом формируется более высокое давление, действующее на снаряд в качестве противодавления.

Дульная скорость снаряда в этих условиях составляет 1448.35 м/с, что на 4.38 м/с больше, чем для одномерного подхода (см. табл. 2). С увеличением скорости метания разница в дульных скоростях увеличивается. При высокоскоростном движении снаряда в ограниченном пространстве наблюдается сложная газодинамическая структура течения газа перед снарядом (рис. 11).

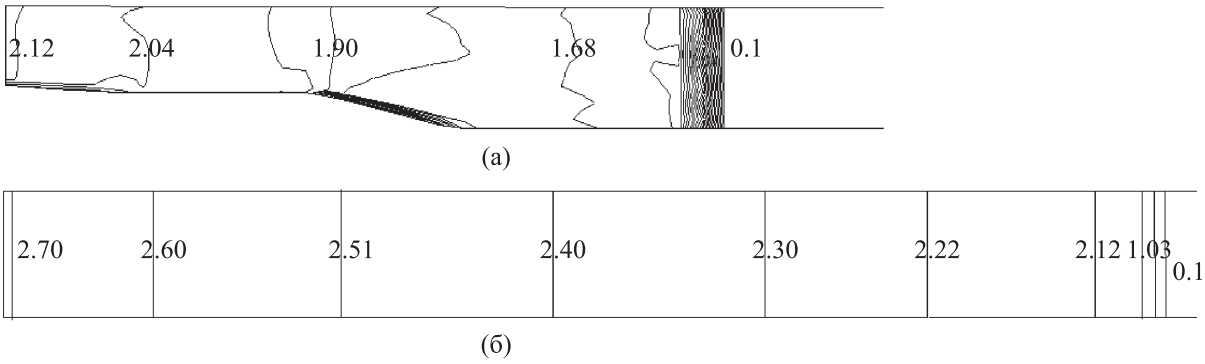

Рис. 10. Изобары полей давления (МПа) воздуха впереди снаряда при $l_{сн} = 0.5 L_д$ для различных подходов к решению задачи о противодавлении при $q = 15.0$ кг, $d_{км} = 0.3$ м: а) расчет по двумерной газодинамической модели; б) расчет по одномерной газодинамической модели

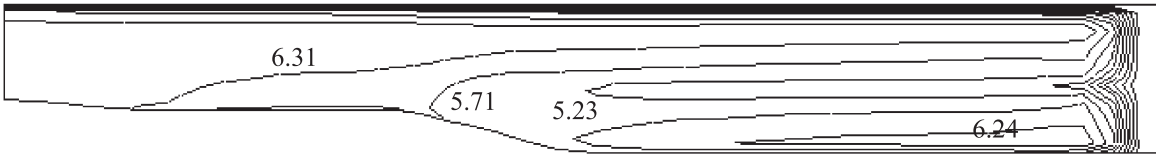

Рис. 11. Линии постоянных значений числа Маха впереди снаряда при $l_{\text{сн}} = 0.5 L_{\text{д}}$, $q = 2.5$ кг, $d_{\text{км}} = 0.3$ м

Дульная скорость при заданных параметрах заряжания $q = 2.5$ кг, $d_{\text{км}} = 0.3$ м равна 2102.93 м/с, что на 12.43 м/с больше, чем для одномерного расчета (см. табл. 2).

8. Заключение

Как следует из таблицы 1, с ростом уширения камеры $S_{\text{км}}/S_{\text{кн}}$, при больших отношениях ω/q наблюдается существенное отклонение контрольных параметров, вычисленных по термодинамической и газодинамическим моделям. При этом термодинамический подход дает систематическое завышение дульной скорости снаряда во всем исследованном диапазоне изменения параметров. В то же время расхождение результатов, полученных в рамках одномерной и двумерной газодинамических моделей выстрела, составляет не более 1.3 %. При малых ω/q и небольших уширениях камеры $S_{\text{км}}/S_{\text{кн}}$ погрешность термодинамического приближения составляет 4–7 %; при больших ω/q погрешность разнонаправленно зависит от уширения камеры и находится на уровне 14–35 %. Считалось до настоящего времени, что термодинамический подход с уменьшением ω/q дает лучшее приближение к газодинамическому подходу, однако, как показывают расчеты, это справедливо только при малых уширениях камеры.

Данные, представленные в таблице 2, показывают, что аналитическая формула (5) пригодна для учета противодавления в баллистических расчетах при метании цилиндрических тел с плоской головной частью. Погрешность ее применения в исследованном диапазоне изменения параметров, по отношению к одномерной нестационарной газодинамической модели, составила менее 0.1 % по параметру $(v_{\text{сн}})_{\text{д}}$. В случае формы снаряда с заостренной головной частью, как в бронебойном снаряде, отклонение величины дульной скорости для параметров заряжания $q = 15.0$ кг, $d_{\text{км}} = 0.3$ м при одномерном расчете противодавления от двумерного расчета составило 0.30 %, что намного превосходит расхождение между расчетом с использованием аналитической формулы (5) и расчетом по одномерной модели (43)–(47) (см. табл. 2). С ростом скоростей метания влияние формы передней части снаряда на величину противодавления усиливается. При $q = 2.5$ кг, $d_{\text{км}} = 0.3$ м отличие величины дульной скорости составляет уже 0.59 %. Учет формы передней части снаряда, в рамках пространственной постановки задачи о противодавлении, показывает существенное различие полей параметров за фронтом ударной волны, по сравнению с решением в рамках одномерной постановки задачи, и может оказать значительное влияние на результаты моделирования динамики движения снаряда при высоких скоростях метания.

Список литературы (References)

Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. — М.: Бином. Лаборатория знаний, 2011. — 640 с.

Bakhvalov N. S., Zhidkov N. P., Kobelkov G. M. Numerical methods [Chislennye metody]. — Moscow: Binom. Laboratory of Knowledge, 2011. — 640 p. (in Russian).

Бетехтин С. А., Виницкий А. М., Горохов М. С., Станюкович К. П., Федотов И. Д. Газодинамические основы внутренней баллистики. — М.: Оборонгиз, 1957. — 386 с.
Betekhtin S. A., Vinitsky A. M., Gorokhov M. S., Stanyukovich K. P., Fedotov I. D. Gazodinamicheskie osnovy vnutrennej ballistiki [Gas-dynamic foundations of internal ballistics]. — Moscow: Oborongiz, 1957. — 386 p. (in Russian).

Быков Н. В. Сравнительный анализ численного и приближенных аналитических решений задачи о разгоне поршня в трубе сжатым газом // Инженерный журнал: наука и инновации. — 2019. — Вып. 2. — DOI: 10.18698/2308-6033-2019-2-1852
Bykov N. V. Sravnitel'nyj analiz chislennogo i priblizhennyh analiticheskih reshenij zadachi o razgone porshnya v trube szhatym gazom [Comparative analysis of numerical and approximate analytical solutions to the problem of accelerating a piston in a pipe with compressed gas] // Engineering Journal: Science and Innovation. — 2019. — No. 2. — DOI: 10.18698/2308-6033-2019-2-1852 (in Russian).

Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. — М.: Наука, 1976. — 400 с.
Godunov S. K., Zabrodin A. V., Ivanov M. Ya., Krajko A. N., Prokopov G. P. Chislennoe reshenie mnogomernyh zadach gazovoj dinamiki [Numerical solution of multidimensional problems of gas dynamics]. — Moscow: Nauka, 1976. — 400 p. (in Russian).

Гофф П. С., Шварц Ф. Дж. Создание математической модели течения гетерогенной двухфазной реагирующей смеси // РТиК. — 1979. — Т. 17, № 1. — С. 19–29.
Goff P. S., Schwartz F. J. Sozdanie matematicheskoj modeli techeniya geterogennoj dvuhfaznoj reagiruyushchej smesi [Creation of a mathematical model of the flow of a heterogeneous two-phase reacting mixture] // RTiK. — 1979. — Vol. 17, No. 1. — P. 19–29 (in Russian).

Ищенко А. Н., Касимов В. З., Ушакова О. В. Расчет функционирования модульных метательных зарядов в осесимметричной постановке // Материалы Всероссийской научной конференции «Современная баллистика и смежные вопросы механики». Томск, 17–19 ноября 2009. — Томск: Томский государственный университет, 2010. — С. 85–86.
Ischenko A. N., Kasimov V. Z., Ushakova O. V. Raschet funkcionirovaniya modul'nyh metatel'nyh zaryadov v osesimmetrichnoj postanovke [Calculation of the functioning of modular propellant charges in an axisymmetric formulation] // Materials of the All-Russian Scientific Conference “Modern Ballistics and Related Problems of Mechanics”. Tomsk, November 17–19, 2009. — Tomsk: Tomsk State University, 2010. — P. 85–86 (in Russian).

Захаренков В. Ф. Внутренняя баллистика и автоматизация проектирования артиллерийских орудий. — СПб.: Изд-во БГТУ, 2010. — 276 с.
Zakharenkov V. F. Vnutrennyaya ballistika i avtomatizaciya proektirovaniya artillerijskih orudij [Internal ballistics and automation of artillery design]. — St. Petersburg: Publishing House of BSTU, 2010. — 276 p. (in Russian).

Прокопов Г. П., Северин А. В. Экономичная реализация метода Годунова // Препринты ИПМ имени М. В. Келдыша. — Москва, 2009. — № 29. — 24 с. — URL: https://keldysh.ru/papers/2009/prep29/prep2009_29.pdf
Prokopov G. P., Severin A. V. Ekonomichnaya realizaciya metoda Godunova [Cost-effective implementation of the Godunov method] // KIAM Preprint. — Moscow, 2009. — No. 29. — 24 p. — URL: https://keldysh.ru/papers/2009/prep29/prep2009_29.pdf (in Russian).

Русяк И. Г., Липанов А. М., Ушаков В. М. Физические основы и газовая динамика горения порохов в артиллерийских системах: монография. — М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2016. — 456 с.
Rusyak I. G., Lipanov A. M., Ushakov V. M. Fizicheskie osnovy i gazovaya dinamika goreniya porohov v artillerijskih sistemah: monografiya [Physical basis and gas dynamics of combustion of gunpowders in artillery systems]. — Moscow–Izhevsk: Institute of Computer Sciences, 2016. — 456 p. (in Russian).

Русяк И. Г., Ушаков В. М. Внутрикамерные гетерогенные процессы в ствольных системах: монография. — Екатеринбург: УрО РАН, 2001. — 259 с.
Rusyak I. G., Ushakov V. M. Vnutrikamernye geterogennye processy v stvol'nyh sistemah: monografiya [Intra-chamber heterogeneous processes in the stem systems: monograph]. — Yekaterinburg: Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 2001. — 259 p. (in Russian).

Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы математической физики. — М.: Научный мир, 2003. — 316 с.
Samarskij A. A., Gulin A. V. Chislennye metody matematicheskoj fiziki [Numerical methods of mathematical physics]. — Moscow: Nauchnyj mir, 2003. — 316 p. (in Russian).

Сафронов А. В., Фомин Ю. В. Метод численного решения уравнений газодинамики с помощью соотношения на разрывах // Труды МФТИ. — 2010. — Т. 2, № 2. — С. 137–148.
Safronov A. V., Fomin Yu. V. A method for the numerical solution of gas dynamics equations using a discontinuity relation [Metod chislennogo resheniya uravnenij gazodinamiki s pomoshch'yu sootnosheniya na razryvah] // Proceedings of the Moscow Institute of Physics and Technology. — 2010. — Vol. 2, No. 2. — P. 137–148 (in Russian).

Семенов И. В., Меньшов И. С., Уткин П. С., Ахмедьянов И. Ф., Марков В. В. Разработка программного комплекса для решения многомерных задач внутренней баллистики на многопроцессорных ЭВМ // Труды 13-й Всероссийской научно-практической конференции РАРАН «Актуальные проблемы защиты и безопасности». Санкт-Петербург, 5–8 апреля 2010 г. — Т. 1. — СПб.: НПО Специальных материалов, 2010. — С. 632–636.
Semenov I. V., Menshov I. S., Utkin P. S., Akhmedyanov I. F., Markov V. V. Razrabotka programmnogo kompleksa dlya resheniya mnogomernyh zadach vnutrennej ballistiki na mnogoprocessornyh EVM [Development of a software complex for solving multidimensional problems of internal ballistics on multiprocessor computers] // Proceedings of the 13th All-Russian Scientific and Practical Conference RARAN “Actual Problems of Protection and Security”. St. Petersburg, April 5–8, 2010. — Vol. 1. — St. Petersburg: NGO Special Materials, 2010. — P. 632–636 (in Russian).

Серебряков М. Е. Внутренняя баллистика ствольных систем и пороховых ракет. — М.: Оборонгиз, 1962. — 703 с.
Serebryakov M. E. Vnutrennyaya ballistika stvol'nyh sistem i porohovyh raket [Internal ballistics of barrel systems and powder rockets]. — Moscow: Oborongiz, 1949. — 703 p. (in Russian).

Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. — М.: Наука, 1971. — 854 с.
Stanyukovich K. P. Neustanovivshiesya dvizheniya sploshnoj sredy [Unsteady motion of a continuous medium]. — Moscow: Nauka, 1971. — 854 p. (in Russian).

Тененев В. А., Горохов М. М., Русяк И. Г. Численное исследование горения частиц в двухфазном потоке // Математическое моделирование. — 1997. — Т. 9, № 5. — С. 87–96.
Tenenev V.A., Gorokhov M.M., Rusyak I.G. Chislennoe issledovanie goreniya chastic v dvuhfaznom potoke [Numerical study of particle combustion in a two-phase flow] // Mathematical modeling. — 1997. — Vol. 9, No. 5. — P. 87–96 (in Russian).

Хоменко Ю. П., Ищенко А. Н., Касимов В. З. Математическое моделирование внутрибаллистических процессов в ствольных системах. — Новосибирск: Издательство СО РАН, 1999. — 256 с.
Khomenko Yu. P., Ischenko A. N., Kasimov V. Z. Matematicheskoe modelirovanie vnutriballisticheskih processov v stvol'nyh sistemah [Mathematical modeling of ballistic processes in stem systems]. — Novosibirsk: Publishing House of the SB RAS, 1999. — 256 p. (in Russian).

van Albada G. D., van Leer B., Roberts W. Jr. A comparative study of computational methods in cosmic gas dynamics // Astronomy and Astrophysics. — 1982. — Vol. 108, No. 1. — P. 76–84.

Colella P., Glaz H. M. Efficient Solution Algorithms for the Riemann Problem for Real Gases // Journal of Computational Physics. — 1985. — Vol. 59. — P. 264–289.

Cough P. S. Modeling of Two-Phase Flows in Guns // Interior Ballistics of Guns. — N. Y., 1979. — Vol. 66. — P. 176–196.

Cuffel R. F., Back L. H., Massier P. F. Transonic Flowfield in a Supersonic Nozzle with Small Throat Radius of Curvature // AIAA Journal. — 1969. — Vol. 7, No. 7. — P. 1364–1366.

Gardiner P. A., Egawa Y., Watanabe K. Performance evaluation of single stage diaphragmless vertical gas gun for nitrogen and helium gas propellants // Mechanical Engineering Journal. — 2016. — Vol. 3 (6). — P. 16–00273.

Horák V., Do Duc L., Vítek R., Beer S., Mai Q. H. Prediction of the Air Gun Performance // Advances in Military Technology. — 2014. — Vol. 9 (1). — P. 31–44.

Kliegel J. R., Levine J .N. Transonic Flow in Small Throat Radius of Curvature Nozzles // AIAA Journal. — 1969. — Vol. 7, No. 7. — P. 1375–1378.

Luo Y., Xu D., Li H. Analysis of the dynamic characteristics of the muzzle flow field and investigation of the influence of projectile nose shape // Applied Sciences. — 2020. — Vol. 10. — Paper 1468.

Mehmadagic I., Carlucci D., Thangam S. Computational study of the flow around a projectile moving through a gun barrel // Proceedings of 23rd International Symposium on Ballistics. Tarragona, Spain, 16–20 April 2007. — P. 507–514.

Moradi A., Ahmadikia H. One-Dimensional and Axisymmetric Numerical Simulation of a Single-Stage Gas Gun // Adv. Theor. Appl. Mech. — 2011. — Vol. 4 (3). — P. 101–111.

Résal H. Recherches sur le mouvement des projectiles dans les armes á feu. — Paris, 1864. — 40 p.

Sarrau E. Les effects de la poudre dans les armes. — Paris, 1876.

Seiler F., Igra O., ed. Hypervelocity Launchers. — Springer, 2016. — 300 p.

Semenov I., Utkin P., Akhmedyanov I., Menshov I., Pasynkov P. Numerical investigation of near-muzzle blast levels for perforated muzzle brake using highperformance computing // Collection of scientific papers of International Conference “Parallel and Distributed Computing Systems” (PDCS 2013). Kharkiv, Ukraine, March 13–14, 2013. — P. 281–289.

Toro E. F. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. — 3rd ed. — Springer, 2009. — DOI: 10.1007/978-3-540-49834-6

Vieille P. Mémorials des poudres et salpetres. — Paris. 1890. V. 3, 6.

Wesseling P. Dr. Principles of computational fluid dynamics / Pieter Wesseling. p. cm. (Springer series in computational mathematics, ISSN 0179-3632; 29) Mathematics Subject Classification (1991): 76M, 65M, XII, 644 p. — DOI: 10.1007/978-3-642-05146-3