

УДК: 519.8

Методика расчета аэродинамических характеристик винтов вертолета на основе реберно-ориентированных схем в комплексе программ NOISEtte

В. Г. Бобков^a, И. В. Абалакин^b, Т. К. Козубская^c

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН,
Россия, 125047, г. Москва, Миусская пл., д. 4

E-mail: ^a vbobkov@keldysh.ru, ^b ilya.abalakin@gmail.com, ^c tatiana.kozubskaya@gmail.com

Получено 04.07.2020, после доработки — 30.08.2020.

Принято к публикации 07.09.2020.

В статье дается детальное описание численной методики моделирования турбулентного обтекания вращающихся винтов вертолета и расчета аэродинамических характеристик винта. В качестве базовой математической модели используется система осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье – Стокса для вязкого сжимаемого газа, замкнутая моделью турбулентности Спаларта – Аллмараса. Итоговая модель формулируется в неинерциальной вращающейся системе координат, связанной с винтом. Для задания граничных условий на поверхности винта используются пристеночные функции.

Численное решение полученной системы дифференциальных уравнений проводится на гибридных неструктурированных сетках, включающих призматические слои вблизи поверхности обтекаемого тела. Численный метод строится на основе оригинальных вершинно-центрированных конечно-объемных EBR-схем. Особенностью этих схем является их повышенная точность, которая достигается за счет использования реберно-ориентированной реконструкции переменных на расширенных квазиодномерных шаблонах, и умеренная вычислительная стоимость, позволяющая проводить серийные расчеты. Для приближенного решения задачи о распаде разрыва используются методы Роу и Лакса – Фридрихса. Метод Роу корректируется в случае низкоскоростных течений. При моделировании разрывов или решений с большими градиентами используется квазиодномерная WENO-схема или локальное переключение на квазиодномерную TVD-реконструкцию. Интегрирование по времени проводится по неявной трехслойной схеме второго порядка аппроксимации с линеаризацией по Ньютону системы разностных уравнений. Для решения системы линейных уравнений используется стабилизированный метод сопряженных градиентов.

Численная методика реализована в составе исследовательского программного комплекса NOISEtte согласно двухуровневой MPI–OpenMP-модели, позволяющей с высокой эффективностью проводить расчеты на сетках, состоящих из сотен миллионов узлов, при одновременном задействовании сотен тысяч процессорных ядер современных суперкомпьютеров.

На основе результатов численного моделирования вычисляются аэродинамические характеристики винта вертолета, а именно сила тяги, крутящий момент и их безразмерные коэффициенты.

Валидация разработанной методики проводится путем моделирования турбулентного обтекания двухлопастного винта Caradonna – Tung и четырехлопастного модельного винта КНИТУ-КАИ на режиме висения, рулевого винта в кольце, а также жесткого несущего винта в косом потоке. численные результаты сравниваются с имеющими экспериментальными данными.

Ключевые слова: винт вертолета, турбулентное течение, уравнения Навье – Стокса, RANS, гибридная неструктурированная сетка, неинерциальная вращающаяся система координат, реберно-ориентированная реконструкция, схема повышенной точности, валидация, NOISEtte

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект 20-41-09018.

Method for prediction of aerodynamic characteristics of helicopter rotors based on edge-based schemes in code NOISEtte

V. G. Bobkov^a, I. V. Abalakin^b, T. K. Kozubskaya^c

Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences),
4 Miusskaya sq., Moscow, 125047, Russia

E-mail: ^a vbobkov@keldysh.ru, ^b ilya.abalakin@gmail.com, ^c tatiana.kozubskaya@gmail.com

Received 04.07.2020, after completion — 30.08.2020.

Accepted for publication 07.09.2020.

The paper gives a detailed description of the developed methods for simulating the turbulent flow around a helicopter rotor and calculating its aerodynamic characteristics. The system of Reynolds-averaged Navier–Stokes equations for a viscous compressible gas closed by the Spalart–Allmaras turbulence model is used as the basic mathematical model. The model is formulated in a non-inertial rotating coordinate system associated with a rotor. To set the boundary conditions on the surface of the rotor, wall functions are used.

The numerical solution of the resulting system of differential equations is carried out on mixed-element unstructured grids including prismatic layers near the surface of a streamlined body. The numerical method is based on the original vertex-centered finite-volume EBR schemes. A feature of these schemes is their higher accuracy which is achieved through the use of edge-based reconstruction of variables on extended quasi-one-dimensional stencils, and a moderate computational cost which allows for serial computations. The methods of Roe and Lax–Friedrichs are used as approximate Riemann solvers. The Roe method is corrected in the case of low Mach flows. When dealing with discontinuities or solutions with large gradients, a quasi-one-dimensional WENO scheme or local switching to a quasi-one-dimensional TVD-type reconstruction is used. The time integration is carried out according to the implicit three-layer second-order scheme with Newton linearization of the system of difference equations. To solve the system of linear equations, the stabilized conjugate gradient method is used.

The numerical methods are implemented as a part of the in-house code NOISEtte according to the two-level MPI–OpenMP parallel model, which allows high-performance computations on meshes consisting of hundreds of millions of nodes, while involving hundreds of thousands of CPU cores of modern supercomputers.

Based on the results of numerical simulation, the aerodynamic characteristics of the helicopter rotor are calculated, namely, trust, torque and their dimensionless coefficients.

Validation of the developed technique is carried out by simulating the turbulent flow around the Caradonna–Tung two-blade rotor and the KNRTU-KAI four-blade model rotor in hover mode mode, tail rotor in duct, and rigid main rotor in oblique flow. The numerical results are compared with the available experimental data.

Keywords: helicopter rotor, turbulent flow, Navier–Stokes equations, RANS, mixed-element unstructured mesh, non-inertial reference frame, edge-based reconstruction, higher-accuracy scheme, NOISEtte

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2020, vol. 12, no. 5, pp. 1097–1122 (Russian).

This work was supported by Russian Science Foundation, project 20-41-09018.

1. Введение

В настоящее время методы математического моделирования активно внедряются в промышленные приложения и начинают широко использоваться, если говорить об авиационной промышленности, при создании новых летательных аппаратов. Численный расчет становится мощным средством, позволяющим повысить эффективность инженерных исследований, направленных на выбор оптимальных конфигураций летательных аппаратов и определение оптимальных режимов эксплуатации. Для обеспечения возможности использования вычислительного эксперимента при конструировании винта вертолета необходимо корректное математическое описание всех существенных газодинамических процессов, а также развитие максимально точных и вычислительно недорогих численных методов и реализующего их программного обеспечения, позволяющего с высокой эффективностью проводить расчеты на многопроцессорных системах. Практически все существующие и реализованные в коммерческих пакетах прикладных программ методы и алгоритмы для расчета аэродинамических и акустических характеристик винтов ориентированы на использование многоблочных структурированных сеток и обеспечивают точность численного результата не выше второго порядка. Методика, описанная в данной работе и реализованная в исследовательском параллельном программном комплексе NOISEtte [Gorobets, 2018; Абалакин и др., 2012], подразумевает полное газодинамическое описание среды в неинерциальной вращающейся системе координат, под которым мы понимаем систему уравнений Навье–Стокса для вязкого сжимаемого газа или построенные на ее основе модели турбулентных течений.

За рамками рассмотрения в данной работе остаются вихреразрешающие подходы к моделированию турбулентного течения, дающие возможность численно предсказывать характеристики, связанные с нестационарностью течения: например, пульсационные нагрузки на поверхность лопасти или спектральные характеристики генерируемых винтом акустических полей. Вихреразрешающие методы также реализованы в комплексе программ NOISEtte и успешно опробованы на ряде задач. Корректность численных результатов при использовании этих методов во многом определяется подробностью и качеством расчетной сетки, а также длиной физического времени расчета. В связи с этим вихреразрешающие расчеты требуют пока слишком больших вычислительных ресурсов, чтобы массово использовать их в процессе разработки и конструирования летательных аппаратов. Однако рост производительности современных вычислительных систем постепенно открывает возможность к их более широкому использованию, в том числе для более точного моделирования турбулентного течения вблизи винта вертолета.

Представленная в статье методика предполагает использование неструктурированных гибридных сеток, позволяющих моделировать обтекание объектов сложной геометрической формы, и созданных для таких сеток оригинальных вершинно-центрированных конечно-объемных EBR (edge-based reconstruction) схем, обеспечивающих повышенную точность численного результата за счет лежащих в ее основе квазиодномерных реберно-ориентированных реконструкций потоковых переменных [Abalakin et al., 2015; Bakhvalov, Kozubskaya, 2017].

Работ, посвященных численному исследованию обтекания вращающегося винта вертолета, в отечественной литературе не так много. К ним можно отнести статьи [Карабасов, 2006; Копьев и др., 2014], в которых описаны сеточные методы для расчетов аэродинамических характеристик несущего винта вертолета на основе газодинамической системы уравнений Эйлера, а также приведены результаты вычислительных экспериментов. В работах [Игнаткин, Константинов, 2012; Garipova et al., 2016; Копьев и др., 2017] представлены результаты решения подобных задач также с использованием численного моделирования, где в качестве математической модели для описания движения вязкого турбулентного потока сжимаемого газа выбрана система осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса, замкнутая различными моделями турбулентности.

В данной работе в наиболее полном объеме представлена реализованная в программном комплексе NOISEtte методика расчета аэродинамических характеристик винта вертолета на основе моделирования осредненного турбулентного течения, формируемого винтом при взаимодействии с набегающим потоком. В той или иной степени она уже использовалась авторами при проведении расчетов аэродинамических характеристик конкретных винтов [Абалакин и др., 2015; Абалакин и др., 2016; Абалакин и др., 2020], однако ее полное описание, а также результаты расчетов валидационных задач моделирования обтекания модельного винта Caradonna – Tung и определения пульсаций давления вблизи модельного несущего винта приводятся впервые.

2. Математическая модель

2.1. Уравнения Навье – Стокса в неинерциальной системе координат

Для расчета внешнего обтекания потоком газа винта, вращающегося с угловой скоростью ω , используется осредненная по Рейнольдсу система уравнений Навье – Стокса для сжимаемого газа с замыканием по модели турбулентности Спаларта – Аллмараса [Spalart, Allmaras, 1992]. Система уравнений рассматривается в неинерциальной вращающейся системе координат. Вращение осей координат происходит вокруг неподвижной оси винта с постоянной угловой скоростью, равной скорости вращения лопасти. Это означает, что обтекаемые потоком газа лопасти винта неподвижны, а направление внешнего потока меняется в зависимости от азимутального угла ψ .

Для записи системы осредненных уравнений Навье – Стокса в виде законов сохранения введем вектор консервативных переменных

$$\mathbf{Q} = (\rho, \rho \mathbf{u}, E, \rho \tilde{v})^T,$$

где $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ — вектор скорости в абсолютной системе координат, ρ — плотность, $E = \rho \mathbf{u}^2 / 2 + p \varepsilon$ — полная энергия, ε — удельная внутренняя энергия, связанная с давлением p уравнением состояния совершенного газа — $p = \rho \varepsilon (\gamma - 1)$, $\gamma = 1.4$ есть показатель адиабаты. Величина \tilde{v} — эволюционная переменная, через которую, согласно модели Спаларта – Аллмараса, определяется коэффициент турбулентной вязкости μ_T :

$$\mu_T = \rho \tilde{v} \frac{\chi^3}{\chi^3 + 357.911}, \quad \chi = \frac{\rho \tilde{v}}{\mu},$$

где μ — коэффициент динамической молекулярной вязкости.

Введем также вектор линейной скорости вращения $\mathbf{V} = (V_1, V_2, V_3)^T = \omega \times \mathbf{r}$, определяемый вектором угловой скорости ω и радиус-вектором точки среды. Тогда систему осредненных уравнений Навье – Стокса в неинерциальной вращающейся системе координат можно записать в следующем векторном виде¹:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathcal{F}^C(\mathbf{Q}) - \mathcal{F}^R(\mathbf{Q}) - \mathcal{F}^D(\mathbf{Q}, \nabla \mathbf{Q})) = \mathcal{S}(\mathbf{Q}, \nabla \mathbf{Q}). \quad (2.1)$$

В системе (2.1) введены составные векторы \mathcal{F}^C , \mathcal{F}^R и \mathcal{F}^D , каждая компонента которых — \mathbf{F}_i^C , \mathbf{F}_i^R и \mathbf{F}_i^D — в координатном направлении x_i ($i = 1, 2, 3$) представляет собой вектор потока конвективного переноса, вектор вращательного переноса и вектор потока диффузии соответственно. Оператор $(\nabla \cdot)$ есть оператор взятия дивергенции по каждой компоненте составного вектора.

¹ Краткий вывод системы уравнений Навье – Стокса и ее покомпонентный вид для сжимаемого газа в неинерциальной вращающейся системе координат, записанной относительно вектора абсолютной скорости, более удобной для последующего численного решения, приведены в работе [Абалакин и др., 2016].

Векторы потоков конвективного переноса и вращательного переноса задаются как функции физических переменных ρ , \mathbf{u} , p следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_i^C(\mathbf{Q}) &= (\rho u_i, \rho u_i \mathbf{u} + p \mathbf{I}, (E + p) u_i, \rho \tilde{v} u_i)^T, \\ \mathbf{F}_i^R(\mathbf{Q}) &= (\rho V_i, \rho u_i \mathbf{V}, E V_i, \rho \tilde{v} V_i)^T, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где \mathbf{I} — единичная матрица. Векторы потоков диффузии определяются как функции физических переменных и их градиентов по формуле

$$\mathbf{F}_i^V(\mathbf{Q}, \nabla \mathbf{Q}) = \left(0, \tau_{i1}, \tau_{i2}, \tau_{i3}, \tau_{ij} u_j + q_i, \frac{3}{2} (\mu + \rho \tilde{v}) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_i} \right)^T, \quad (2.3)$$

где компоненты тензора вязких напряжений τ_{ij} и вектора теплового потока q_i имеют вид

$$\tau_{ij} = (\mu + \mu_T) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right), \quad q_i = \left(\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_T}{Pr_T} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i}, \quad (2.4)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, μ — коэффициент молекулярной вязкости, $Pr = 0.72$, $Pr_T = 1$ — молекулярное и турбулентное числа Прандтля.

Вектор $\mathbf{S}(\mathbf{Q}, \nabla \mathbf{Q})$ представляет собой источниковый член, описывающий влияние внешних сил, не связанных с процессами переноса искоемых переменных \mathbf{Q} :

$$\mathbf{S}(\mathbf{Q}, \nabla \mathbf{Q}) = (0, \rho(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}), 0, P_v(\mathbf{Q}, \nabla \mathbf{Q}) - Y_v(\mathbf{Q}, \nabla \mathbf{Q}) + 0.992 \rho \nabla \tilde{v} \cdot \nabla \tilde{v})^T. \quad (2.5)$$

Вид членов $P_v(\mathbf{Q}, \nabla \mathbf{Q})$, $Y_v(\mathbf{Q}, \nabla \mathbf{Q})$, описывающих соответственно генерацию и диссипацию турбулентности, приведен в статье [Spalart, Allmaras, 1992]. Квадрат градиента переменной \tilde{v} есть часть определения диффузионного члена в последнем уравнении системы (2.2), имеющая неди-вергентный вид и поэтому перенесенная в источниковый член.

С точки зрения наблюдателя, находящегося в неподвижной системе координат, система уравнений, определенная уравнениями (2.2)–(2.5), описывает изменение консервативных переменных за счет их конвективного и диффузного переноса во вращающейся со скоростью \mathbf{V} среде, влияния градиента давления и поворота вектора скорости на азимутальный угол $\psi(t) = -|\boldsymbol{\omega}|t$.

2.2. Граничные условия на свободной границе

На границах покоящейся расчетной области задаются параметры внешнего невозмущенного потока — вектор внешнего потока \mathbf{U}_0 , значения плотности ρ_0 и давления p_0 . Вообще говоря, задание параметров невозмущенного потока на внешней границе не всегда корректно, так как на границе реальной расчетной области течение всегда будет слабооднородным из-за приходящих возмущений из источниковой зоны в силу ограниченности размеров расчетной зоны. Поэтому на внешней границе расчетной области необходимо задавать искусственные или численные граничные условия. В данной работе на внешних границах используются граничные условия на основе расщепленных по направлению характеристических скоростей потоков, связывающие значения газодинамических параметров внутри расчетной области ρ_i , \mathbf{U}_i , p_i и их значений в удаленном потоке ρ_∞ , \mathbf{U}_∞ , p_∞ .

Под значениями газодинамических величин ρ_∞ , \mathbf{U}_∞ , p_∞ в удаленном потоке будут пониматься либо невозмущенные значения:

$$\rho_\infty = \rho_0, \quad \mathbf{U}_\infty = \mathbf{U}_0, \quad p_\infty = p_0, \quad (2.6)$$

либо значения, определяемые характеристическими соотношениями

$$\rho_{\infty} = \rho_i \left(\frac{p_{\infty}}{p_i} \right)^{1/\gamma}, \quad p_{\infty} = p_0, \quad U_{\infty} = U_i + \frac{2}{\gamma - 1} \left[\left(\gamma \frac{p_i}{\rho_i} \right)^{1/2} - \left(\gamma \frac{p_{\infty}}{\rho_{\infty}} \right)^{1/2} \right] \cdot n. \quad (2.7)$$

Для определения значений скалярных физических переменных на внешней границе вращающейся расчетной области справедливы выражения (2.6)–(2.7), в то время как вектор абсолютной скорости на внешней границе поворачивается в направлении, противоположном направлению вращения области, и определяется как

$$U_0^R = U_0 + (e_{\omega} \times U_0) \sin \psi + ((e_{\omega} \times U_0) \times e_{\omega}) (\cos \psi - 1), \quad (2.8)$$

где $e_{\omega} = -\omega / |\omega|$ — единичный вектор, относительно которого происходит вращение, $\psi = |\omega| t$ — азимутальный угол поворота.

2.3. Граничные условия на твердой границе

В случае использования моделей на основе уравнений Навье – Стокса (2.1) на твердой границе ставится условие прилипания, то есть условие равенства нулю величины вектора скорости. При этом для поверхности вращающегося винта это условие формулируется с учетом линейной скорости вращения $V = \omega \times r$ (см. [Абалакин и др., 2016]) как

$$u - V = 0, \quad (2.9)$$

а для неподвижных в абсолютной системе координат — как

$$u = 0. \quad (2.10)$$

Для корректной постановки граничных условий на твердой поверхности при наличии турбулентного пограничного слоя в каждом сеточном узле, лежащем на поверхности, должна быть известна величина пристеночного числа Рейнольдса:

$$y^+ = \frac{\rho u_* h_{nw}}{\mu},$$

где h_{nw} — характерный размер по нормали к твердой поверхности пристеночных ячеек, а u_* — динамическая скорость, определяемая через напряжение трения на стенке τ_w как

$$u_* = \sqrt{\frac{1}{\rho_w} \tau_w}. \quad (2.11)$$

Для всех используемых в расчетах сеток величина y^+ была больше единицы. Это означает, что постановка граничных условий прилипания (скорость жидкости на поверхности совпадает со скоростью движения самой поверхности) не корректна, так как невозможно правильное определение градиентов компонент вектора скорости на твердой стенке. Поэтому в данной ситуации используется механизм пристеночных функций [Белов, Исаев, 2001; Wilcox, 2006], определяющий поле скорости турбулентного потока, которое моделирует течение в неразрешенной сеткой части пограничного слоя. Реализация механизма пристеночных функций зависит от используемых методов дискретизации уравнений Навье – Стокса. Далее приведена конкретная реализация, используемая в представленных расчетах.

Определим вязкую составляющую потока импульса на граничной поверхности через напряжение трения на стенке или с учетом соотношения (2.11) через динамическую скорость следующим образом:

$$F_w^{wl} = \rho u_*^2 u_t^e, \quad (2.12)$$

где \mathbf{u}_t^e — единичный вектор тангенциальной скорости на граничной поверхности, равный

$$\mathbf{u}_t^e = \mathbf{u}_t / |\mathbf{u}_t|, \quad \mathbf{u}_t = \mathbf{u} - u_n \mathbf{n},$$

а u_n — нормальная скорость на граничной поверхности, которая полагается равной нормальной компоненте скорости движения стенки $V_n = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}$.

Таким образом, для определения вязкой составляющей потока необходимо знать величину динамической скорости, которую можно определить, решая следующее нелинейное уравнение:

$$|\mathbf{u}_t| - u_* f \left(\frac{u_* \rho h_{nw}}{\mu} \right) = 0, \quad (2.13)$$

где *пристеночная функция* $f(y^+)$, определяющая профиль скорости в вязком, буферном и логарифмическом подслое, задается законом Райхардта [Reichard, 1951]:

$$f(y^+) = \frac{1}{0.41} \ln(1 + 0.41y^+) + 7.8 \left(1 - e^{-\frac{y^+}{11}} - \frac{y^+}{11} e^{-\frac{y^+}{3}} \right).$$

Нелинейное уравнение (2.13) решается методом Ньютона. На каждой итерации метода Ньютона значения \mathbf{u}_t , μ , ρ берутся в узлах граничной поверхности. Нулевое приближение динамической скорости выбирается равным $u_f^0 = \tau_w^0 / |\mathbf{u}_t|$, где напряжение трения на твердой стенке τ_w^0 вычисляется через нормальную производную от модуля тангенциальной скорости с использованием первой разности $\tau_w = \mu |\mathbf{u}_t| / \delta$. Величина $\delta = h_w / 2$ определяет расстояние до твердой стенки, на которой выполняются условия прилипания, а тангенциальная скорость задается на граничной поверхности.

Окончательное выражение для вектора потока импульса на граничной поверхности представляет собой сумму потока (2.12) с учетом приграничных функций и конвективной составляющей потока, учитывающей условие $u_n = V_n$:

$$\mathbf{F}_w = p\mathbf{n} + \mathbf{F}_w^{wl}. \quad (2.14)$$

Описанная техника пристеночных функций используется при проведении расчетов в программном комплексе NOISEtte.

2.4. Особенности моделирования обтекания осесимметричных конфигураций на режиме осевого обтекания

Обычно при численном моделировании вращающегося винта вертолета на произвольном режиме в расчете используется полная конфигурация, включающая все лопасти винта. Однако на режиме осевого обтекания, когда проекции составляющих скорости внешнего потока (вектора скорости полета вертолета) на плоскость вращения винта равны нулю и течение в области моделирования обусловлено исключительно потоком воздуха, индуцированного винтом и, возможно, вертикальным движением (вертикальным снижением или набором высоты) вертолета, при выполнении некоторых дополнительных требований моделируемая конфигурация может быть существенно упрощена.

В случае если выполняются следующие три условия:

- невращающиеся поверхности в моделируемой конфигурации винта являются телами вращения с осью, совпадающей с осью вращения винта;
- лопасти винта идентичны и установлены под одним углом;
- ось конуса вращения винта совпадает с осью вращения винта,

возможно рассмотрение не полной конфигурации, а лишь сектора с одной лопастью (см. рис. 1).

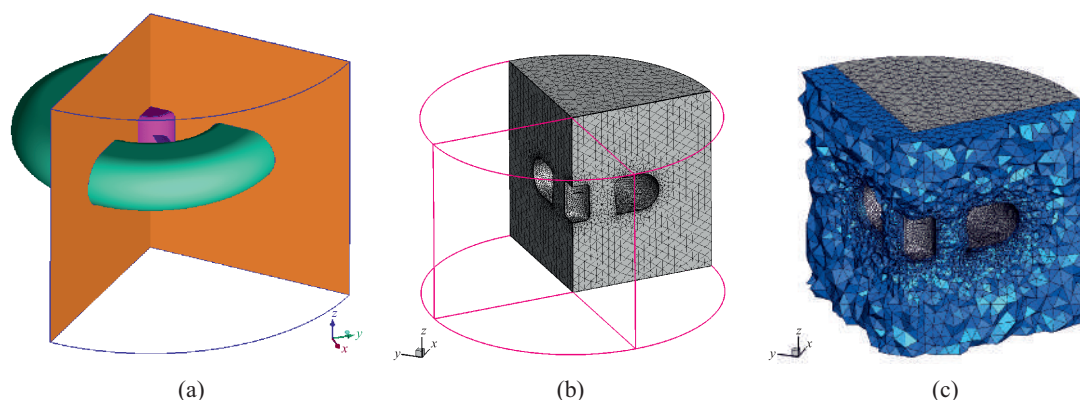


Рис. 1. Построение сектора с лопастью: полная конфигурация (а), расчетная сетка в секторе с лопастью (b), расчетная сетка с достроенным периодическим замыканием (с)

Описание задачи в секторе, помимо свободных граничных условий (2.6)–(2.8) и граничных условий на вращающихся и невращающихся твердых поверхностях (2.9)–(2.10), (2.14), требует реализации дополнительных граничных условий, а именно периодических условий на азимутальных границах сектора, заключающихся в топологическом замыкании сетки на двух азимутальных плоскостях сектора.

При численной реализации такое замыкание строится следующим образом: из исходной геометрической конфигурации выделяется сектор с одной лопастью (см. рис. 1, а) и в нем строится расчетная сетка таким образом, чтобы узлы на двух азимутальных плоскостях сектора совпадали с точностью до поворота на угол раствора этого сектора (см. рис. 1, b). Далее для «совпадающих» узлов на этих плоскостях строится соответствие «образ – прообраз», то есть происходит топологическое замыкание границ сектора. При этом для связанных узлов достраиваются на необходимую глубину топологические связи между этими узлами. На рис. 1, с условно изображено такое замыкание: синим цветом выделена зона достроенных топологических связей «образ – прообраз».

Такой подход позволяет существенно сократить вычислительную трудоемкость задачи, а реализация периодических условий позволяет вести сквозной счет и практически не влияет на общее время счета.

2.5. Аэродинамические характеристики

В задачах численного моделирования винта вертолета одними из основных параметров, характеризующих свойства исследуемой конфигурации, являются коэффициенты аэродинамических сил, а именно коэффициенты силы тяги и крутящего момента.

Определим аэродинамические силы лопасти, следуя монографии [Джонсон, 1983]. Рассмотрим две системы координат: неподвижную систему координат (x, y, z) и систему координат (x', y', z') , связанную с вращающимся винтом. Так как расчет проводится во вращающейся вокруг оси Oz системе координат (см. рис. 2, а), то можно отождествить оси z и z' неподвижной и вращающейся систем координат. Таким образом, неинерциальная вращающаяся система координат характеризуется поворотом неподвижной системы координат на угол $\psi(t) + \pi/2$ вокруг оси Oz , где азимутальный угол $\psi(t)$ определяется как $\psi(t) = -|\omega|t = -\omega t$.

Главный вектор силы \mathbf{R} , действующий на лопасть, и главный момент \mathbf{M} определяются поверхностными интегралами

$$\mathbf{R} = \oint (p\mathbf{n} - \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}) ds, \quad \mathbf{M} = \oint \mathbf{r} \times (p\mathbf{n} - \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}) ds,$$

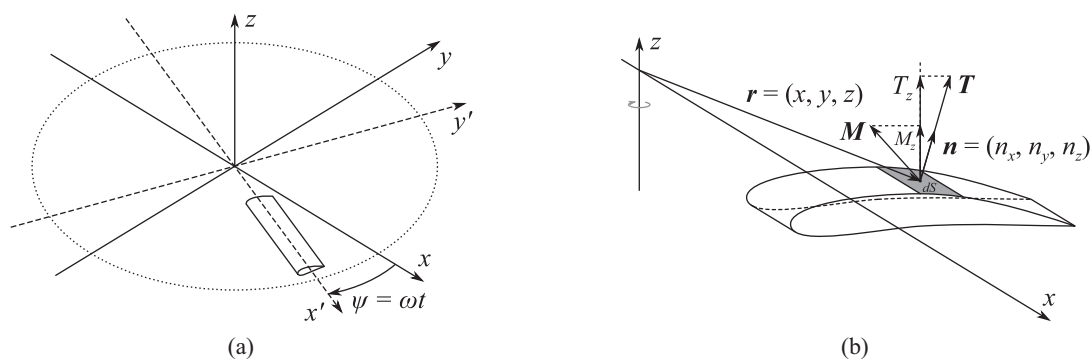


Рис. 2. Вращающаяся система координат (a) и схема расчета сил, действующих на лопасть винта (b)

где p и τ есть распределения давления и тензора вязких напряжений по поверхности винта S , а вектор \mathbf{n} — внешняя к поверхности S единичная нормаль с компонентами n_x, n_y, n_z (см. рис. 2, b), \mathbf{r} — радиус-вектор (рычаг).

Сила тяги винта T определяется как проекция на ось z главного вектора силы \mathbf{R} , действующей на лопасть, и вычисляется следующим образом:

$$T(t) = \oint (pn_z - \tau_{zi}n_i) ds, \quad i = x, y, z.$$

Моменты силы винта определяется проекциями главного момента \mathbf{M} на оси неподвижной системы координат (x, y, z) . Откуда следует выражение для аэродинамического крутящего момента винта:

$$M_k(t) = \oint [x(pn_y - \tau_{yi}n_i) - y(pn_x - \tau_{xi}n_i)] ds, \quad i = x, y, z.$$

Коэффициент силы тяги c_T и коэффициент аэродинамического крутящего момента m_k вычисляются обезразмериванием силы тяги и крутящего момента:

$$c_T(t) = \frac{2T(t)}{\rho_0 A (\omega R)^2}, \quad m_k(t) = \frac{2M_k(t)}{\rho_0 A (\omega R)^2 R},$$

где ρ_0 — плотность невозмущенного воздуха, $A = \pi R^2$ — площадь диска винта, R — радиус винта, а ω — модуль угловой скорости лопасти.

Также введем коэффициент нормальной силы c_n :

$$c_n = \frac{1}{\rho_0 A (\omega R)^2} \int_L p n'_z dl,$$

определяемый в нормальном сечении лопасти L , где $n'_z = n'_x \cos \varphi - n'_y \sin \varphi$ — компонента нормали в системе координат, связанной с лопастью.

3. Численная методика и расчетные сетки

3.1. Реберно-ориентированные схемы повышенной точности

Пространственная дискретизация в программном комплексе NOISEtte базируется на вершинно-центрированной формулировке, означающей, что все искомые переменные определены в узлах гибридной сетки¹, вокруг которых построены расчетные ячейки, образующие

¹ Здесь под гибридной сеткой подразумевается сетка, состоящая из следующих элементов: гексаэдров, треугольных призм (в области пограничного слоя), тетраэдров и четырехугольных пирамид (вне пограничного слоя).

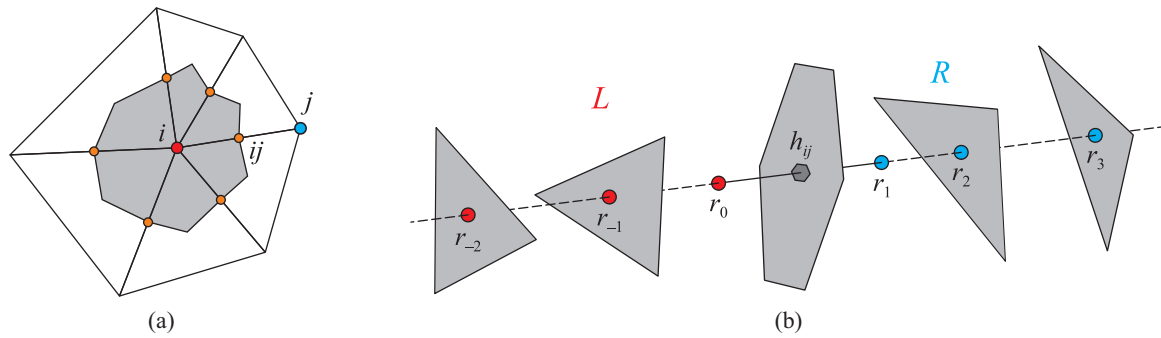


Рис. 3. Пример медианного контрольного объема для треугольной сетки (a) и пространственного шаблона реберно-ориентированной схемы EBR5 (b)

дуальную сетку. Для аппроксимации конвективных потоков системы уравнений Навье–Стокса используется метод конечных объемов. Под конечным объемом понимается ячейка дуальной сетки. Аппроксимацию системы уравнений Навье–Стокса (2.1) будем проводить на основе интегральной формы записи этой системы. Запишем систему (2.1) в дискретном виде для контрольного объема (расчетной ячейки) K_i (рис. 3, a), построенного вокруг сеточного узла i в рамках вершинно-центрированной формулировки, следующим образом:

$$\int_{K_i} \frac{d\mathbf{Q}}{dt} dV + \int_{\partial K_i} (\mathcal{F}^C(\mathbf{Q}) \cdot \mathbf{n} - (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{Q}) dS = \int_{K_i} \mathbf{S}(\mathbf{Q}, \nabla \mathbf{Q}) dV,$$

где ∂K_i — граница контрольного объема (или ячейки) K_i , \mathbf{n} — единичная внешняя нормаль к границе ∂K_i . Численная схема метода конечных объемов при этом строится как

$$\frac{d\mathbf{Q}_i}{dt} = -\frac{1}{|K_i|} \sum_{j \in N_1(i)} h_{ij} + \mathbf{S}(\mathbf{Q}_i, (\nabla \mathbf{Q})_i), \quad h_{ij} = h_{ij}^{C,R} + h_{ij}^D,$$

где $|K_i|$ — объем ячейки K_i , $N_1(i)$ — множество сеточных узлов, соседних по отношению к узлу i , h_{ij} — численный поток, аппроксимирующий физический поток на границе между узлами i и j и состоящий из аппроксимации конвективных и вязких потоков $h_{ij}^{C,R}$ и h_{ij}^D соответственно. Аппроксимация конвективного потока строится с использованием того или иного приближенного метода решения задачи о распаде разрыва. В настоящей работе используется метод Роу, при котором численный конвективный поток можно представить в виде суммы двух членов, соответствующих центрально-разностной и противопотоковой аппроксимациям, которые, в свою очередь, отвечают за перенос и диффузию соответственно:

$$h_{ij}^{C,R}(t) = \underbrace{\frac{\mathcal{F}(\mathbf{Q}_i) + \mathcal{F}(\mathbf{Q}_j)}{2} \cdot n_{ij} - V_{ij} \frac{\mathbf{Q}_i + \mathbf{Q}_j}{2}}_{\text{перенос}} - \underbrace{\frac{\delta}{2} \mathbf{S}^{-1} |\Lambda_{ij} - V_{ij} \mathbf{I}| \mathbf{S}(\mathbf{Q}_j - \mathbf{Q}_i)}_{\text{диффузия}}, \quad (3.1)$$

$$V_{ij} = \frac{1}{|n_{ij}|} \int_{\partial K_i(t) \cap K_j(t)} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS, \quad A_{ij}^C = \frac{d\mathcal{F}}{d\mathbf{Q}}(\mathbf{Q}_{ij}) = \mathbf{S}_{ij} \Lambda_{ij} \mathbf{S}_{ij}^{-1},$$

где Λ_{ij} есть матрица Якоби, зависящая от значения вектора консервативных переменных \mathbf{Q}_{ij} , определенного на интерфейсе (или середине ребра) ij , Λ_{ij} — диагональная матрица собственных значений матрицы Якоби A_{ij} , n_{ij} — ориентированная площадь грани ij , δ — параметр, контролирующий численную диссипацию.

Для повышения пространственного порядка аппроксимации конвективного потока схемы (3.1) используется квазиодномерная реберно-ориентированная реконструкция на расширенном шаблоне [Бахвалов, Козубская, 2017]. При таком подходе переменные Q_i и Q_j в (3.1) заменяются реконструированными слева и справа от грани ячейки значениями Q_{ij}^L и Q_{ij}^R , а матрицы S и Λ не изменяются. Способ вычисления значений Q_{ij}^L и Q_{ij}^R на шаблоне $\{S_{ij}^{(n,0)}\}$, определенном в $2n+2$ точках $\{r_k\}$, где $k = -n, \dots, n+1$ ¹, задает конкретную реберно-ориентированную схему EBR($2n+1$) [Abalakin et al., 2015]. Значения в точках $\{r_k\}$, не совпадающих с узлами сетки, определяются линейной интерполяцией на соответствующих гранях сеточных элементов, имеющих пересечение с прямой линией, содержащей ребро ij (см. рис. 3, *b*).

Операторы реконструкции \mathbb{R}_{ij}^L и \mathbb{R}_{ij}^R произвольной сеточной функции $\{Y_k\}$ на шаблоне $\{S_{ij}^{(n,m)}\}$, смещенном относительно шаблона $\{S_{ij}^0\}$ на m точек ($m \in \mathbb{Z}$), можно записать через первые конечные разности $\Delta Y_{k+1/2} = \frac{(Y_{k+1} - Y_k)}{\Delta r_{k+1/2}}$, где $\Delta r_{k+1/2} = |r_{k+1} - r_k|$, в следующем виде:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}_{ij}^{EBR(2n+1),m,L}(\{Y\}) &= Y_i + \frac{\Delta r_{1/2}}{2} \sum_{k=-n}^{n-1} \alpha_k^{(n,m)} \Delta Y_{k+1/2+m}, \\ \mathbb{R}_{ij}^{EBR(2n+1),m,R}(\{Y\}) &= Y_j - \frac{\Delta r_{1/2}}{2} \sum_{k=-n}^{n-1} \alpha_{-k-1}^{(n,m)} \Delta Y_{k+3/2+m},\end{aligned}\quad (3.2)$$

где коэффициенты $\alpha_k^{(n,m)}$ удовлетворяют соотношению $\sum_{k=-n}^{n-1} \alpha_k^{(n,m)} = 1$, соответствующему точному определению градиента линейной функции вдоль заданного направления, и выбираются из условия получения максимального порядка аппроксимации в узле i схемы с направленной разностью и реконструкцией переменной для одномерного линейного уравнения переноса.

Таким образом, для схемы EBR5, которая была использована при проведении расчетов, представленных в настоящей статье, значения реконструированных переменных определяются как $Q_{ij}^{L/R} = \mathbb{R}_{ij}^{EBR5,0,L/R}(\{Q\})$. На трансляционно-инвариантных сетках (то есть сетках, переходящих сами в себя при переносе на вектор любого ребра) схема EBR5 в линейном случае совпадает с конечно-разностным методом высокого порядка точности (до 6-го порядка включительно). Как конечно-объемный метод на произвольной неструктурированной сетке схема имеет теоретический порядок аппроксимации не выше второго, однако ее точность в смысле величины ошибки на используемой сетке оказывается заметно выше той, которая обеспечивается широко используемыми схемами годуновского типа второго порядка. Это происходит за счет использования реконструкций на расширенных шаблонах и подтверждается, в частности, тестовыми расчетами задач, имеющих аналитическое точное решение [Abalakin et al., 2015].

3.2. Монотонизация

Достаточно сложные течения, формируемые вблизи винта вертолета, характеризуются наличием областей с большими перепадами газодинамических параметров, в том числе возможностью появления скачков. Соответствующие численные решения с высокими градиентами и разрывами приводят к неустойчивости численного метода и требуют оснащения базовой схемы дополнительными техниками. Отметим, что неустойчивость алгоритма может порождать и сетка плохого качества или, например, ее отдельные участки с большим перепадом размера соседних

¹ Здесь вводится локальная нумерация узлов реконструкции: узлу i соответствует номер 0, узлу j — номер 1. При такой нумерации определяются n интерполяционных точек реконструкции, расположенных слева от узла i , и n точек, расположенных справа от узла j .

элементов, которых трудно избежать при работе с реальными геометриями. Во всех этих случаях применяются те или иные алгоритмы монотонизации.

В большинстве случаев оказывается достаточным перейти на схему WENO-EBR, которая строится также на основе квазиодномерного подхода, но с использованием не одной реберно-ориентированной реконструкции на расширенном шаблоне, а взвешенной суммы нескольких реконструкций на шаблонах укороченной длины аналогично тому, как это делается при выводе классической одномерной конечно-разностной схеме WENO:

$$\mathbb{R}_{ij}^{WENO-EBR5,L/R}(\{Y\}) = \sum_{k=-1}^1 \omega_k^{L/R} \mathbb{R}_{ij}^{EBR3,k,L/R}(\{Y\}),$$

где $\mathbb{R}_{ij}^{EBR3,k,L/R}$ — операторы левой или правой реконструкции на 3-точечных шаблонах $\{S_{ij}^{(1,k)}\}$, $\omega_k^{L/R}$ — весовые коэффициенты. Важно отметить, что WENO-EBR-схема записывается через характеристические переменные $Y = S^{-1}Q$ или их потоки, которые, соответственно, подвергаются реконструкциям, а вместо приближенного метода распада разрыва используется метод расщепления потоков. Подробно схема WENO-EBR описана в статье [Bakhvalov, Kozubskaya, 2017].

Дополнительно в особо сложных случаях разрывных решений и сеточных изъянов разработанный численный метод оснащен возможностью локального переключения на квазиодномерную TVD-реконструкцию:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_{ij}^{TVD,L/R}(\{Y\}) &= Q_i \pm \frac{\Delta r_{1/2}}{2} \text{minmod}(\Delta Y_{-1/2}, \Delta Y_{1/2}), \\ \mathbb{R}_{ij}^{L/R}(\{Q\}, \{Y\}) &= s \mathbb{R}_{ij}^{EBR3,0,L/R}(\{Q\}) + (1-s) \mathbb{R}_{ij}^{TVD,L/R}(\{Y\}), \end{aligned}$$

где вес s определяется тем или иным сенсором [Duben, Kozubskaya, 2019].

3.3. Коррекция схемы для течений с малыми числами Маха

Моделирование вращающихся лопастей винта характеризуется наличием в расчетной области зон с существенно разными скоростями течения, так как скорость движения точек поверхности лопасти при фиксированной скорости вращения винта линейно растет с удалением от оси вращения винта. Таким образом, при расчете течения по всему радиусу лопасти надо учитывать влияние практически несжимаемой, слабо сжимаемой и сжимаемой среды, что приводит к необходимости применять алгоритмы, работающие в широком диапазоне чисел Маха.

Для течений с малыми числами Маха в программном комплексе NOISEtte используются модификации схемы типа (3.1), базирующиеся на приближенном решении задачи Римана (схемы с направленными разностями при $\delta = 1$). Известно, что решения уравнений Эйлера сходятся к решениям несжимаемых уравнений при стремлении к нулю числа Маха M потока, набегающего на обтекаемое тело. Схемы с направленными разностями не воспроизводят эту сходимость, так как искусственная вязкость (численная диффузия) имеет порядок $O(1/M)$, что приводит к потере точности при $M \rightarrow 0$. Асимптотический анализ дифференциальной системы уравнений Эйлера и ее дискретного аналога [Viozat, 1997; Guillard, Viozat, 1999; Rieper, 2011], основанного на схеме Роу, выделяет несколько факторов причин потери сходимости. Их устранение приводит к различным модификациям схемы Роу.

Так, первая модификация (схема LM-Roe), реализованная в программном комплексе NOISEtte [Абалакин и др., 2017], состоит в масштабировании скачка нормальной к грани ячейки скорости $\Delta u_n \sim 1/M$ (это приращение входит в компоненты вектора $S^{-1}\Delta Q$) [Rieper, 2011] на некоторую функцию $f(M)$ от локального числа Маха. На функцию $f(M)$ накладываются следующие требования: $f(M)\Delta u_n \sim 1$ при малых числах Маха — устранение нежелательного скачка,

$f(M) \rightarrow 1$ при $M \rightarrow 1$ и $f(M) = 1$ при $M \geq 1$ — возвращение к исходной схеме Роу при умеренных и сверхзвуковых числах Маха.

Вторая модификация схемы Роу конструируется на основе следующего представления матрицы Якоби конвективного потока с учетом вращения: $A^{CR} = d(\mathcal{F} - V\mathbf{I})/d\mathbf{Q}$. Так, в случае малых чисел Маха скорости распространения энтропийной и вихревой волны становятся сопоставимыми со скоростями распространения акустических волн, следовательно, матрица $\mathbf{D} = |A^{CR}|$ плохо обусловлена, что означает

$$K(\mathbf{D}) = \frac{\max_k |\lambda_k|}{\min_k |\lambda_k|} = \left| \frac{u'_n + c \operatorname{sgn}(u'_n)}{u'_n} \right| = 1 \pm \frac{1}{M} \text{ при } M \rightarrow 0,$$

где λ_k ($k = 1, \dots, 5$) — набор собственных значений матрицы A^{CR} , $u'_n = (\mathbf{u} - \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n}$ — нормальная составляющая относительной скорости, C — скорость звука. Плохая обусловленность матрицы приводит к увеличению численной диффузии в схеме Роу и потере точности. Если видоизменить матрицу, входящую в диффузионный член схемы Роу так, чтобы ее число обусловленности $K(\mathbf{D})$ было ограничено при любых числах Маха, то численная диффузия будет иметь порядок $O(1)$. Для этого согласно работам [Viozat, 1997; Guillard, Viozat, 1999] матрица \mathbf{D} полагается равной $\mathbf{P}^{-1} |\mathbf{P} A^{CR}|$, где введена матрица предобуславливания Туркеля \mathbf{P} , компоненты которой зависят от локального числа Маха. Заметим, что в такой модификации схемы Роу (схема Роу – Туркеля) корректируются собственные значения матрицы \mathbf{D} , соответствующие скоростям распространения акустических волн.

3.4. Временная дискретизация

Интегрирование по времени проводится по неявной трехслойной схеме второго порядка аппроксимации с последующей линеаризацией по Ньютону разностной по пространству системы уравнений. На каждой ньютоновской итерации применяется стабилизированный метод би-сопряженных градиентов (BiCGSTAB) [Saad, 2003] для решения системы линейных уравнений.

Более подробные выкладки и аспекты применения данного подхода в вычислительных экспериментах освещены в работе [Абалакин и др., 2017].

3.5. Аппроксимация вязких потоков и источникового члена

Аппроксимация вязких потоков \mathbf{h}_{ij}^D в уравнениях Навье – Стокса проводится методом Галёркина на основе полиномов 1-го порядка. Производные переменных $(\nabla \mathbf{Q})_i$ в источниковом члене \mathbf{S} аппроксимируются дискретными «узловыми» градиентами, определенными как взвешенная сумма градиентов по элементам сетки, имеющим общую вершину в узле i [Абалакин, Козубская, 2013].

3.6. Расчетные сетки

В расчетной области строится неструктурированная гибридная сетка, измельченная в областях, требующих подробного моделирования газодинамических эффектов. Так, наиболее подробная треугольная сетка строится на поверхности лопастей винта вблизи передней и задней кромок, а также на торцевой части лопасти и в областях примыкания лопастей к центральному телу. От поверхности винта внутри расчетной области строятся слои призматической сетки с увеличивающейся в геометрической прогрессии высотой. С удалением от твердых поверхностей по достижении призм изотропных размеров объемная сетка становится тетраэдральной, причем высота тетраэдров увеличивается с удалением от винта.

Как правило, при решении задачи численного моделирования обтекания винта строится несколько расчетных сеток и проводится серия предварительных расчетов. Их целью является обеспечение нужного разрешения как в пограничном слое вблизи поверхности винта — для корректной работы используемой методики пристеночных функций, описанной выше, так и в следе за лопастью и в области под винтом. О пригодности расчетной сетки для корректного моделирования течения вблизи поверхности лопастей можно судить по фактической величине пристеночного числа Рейнольдса y^+ на поверхности, а эволюция ядра концевой вихря по времени (или, что то же самое, по азимутальному углу) позволяет судить о качестве расчетной сетки вниз по потоку за винтом.

4. Численные результаты

4.1. Моделирование обтекания двухлопастного винта Caradonna – Tung на режиме висения

В качестве первой задачи для валидации разработанной методики была выбрана задача о моделировании аэродинамических характеристик модельного двухлопастного винта Caradonna – Tung [Caradonna, Tung, 1981] в режиме осевого обтекания.

Эта задача примечательна тем, что для нее имеются достаточно подробные экспериментальные данные не только по интегральным аэродинамическим характеристикам, но и по распределенным — в виде распределения коэффициента давления вдоль хорды лопасти для различных его сечений. Также для данной постановки имеются экспериментально измеренные положения ядра концевой вихря в пространстве.

Моделируемая конфигурация представляла собой двухлопастной винт радиусом 1.143 м, с лопастями на основе профиля NACA-0012 с хордой $b = 0.1905$ м без крутки и углом установки 8° . Исследовался режим осевого обтекания винта при скорости вращения 650 об/мин, что соответствовало концевой скорости лопасти $V_{tip} = 77.8$ м/с и концевому числу Маха $M = 0.228$. Общий вид моделируемой конфигурации винта приведен на рис. 4, а. Значение числа Рейнольдса определялось в расчете по хорде лопасти и ее концевой скорости как $Re = \rho_0 V_{tip} b / \mu_0$ при значениях $\rho_0 = 1.239$ кг/м³ и $\mu_0 = 1.822 \times 10^{-5}$ Н·с/м², соответствующих плотности и динамической вязкости воздуха при температуре 16 °С, и принимало значение $Re = 1.01 \times 10^6$.

Как было описано ранее, благодаря симметрии винта и осевому режиму обтекания было возможно моделировать не весь винт, а сектор с одной лопастью с постановкой периодических граничных условий на меридиональных плоскостях сектора. Расчет проводился с использованием RANS-подхода с моделью турбулентности Спаларта–Аллмараса. Сетка вблизи лопасти строилась следующим образом: на поверхности лопасти была построена треугольная сетка с наибольшим измельчением на передней и задней кромках; от поверхности лопасти внутрь расчетной области строилась призматическая сетка, состоящая из 30 слоев треугольных призм с увеличивающейся в геометрической прогрессии высотой с фактором 1.17; далее строилась неструктурированная тетраэдральная сетка, причем высота тетраэдров увеличивалась с удалением от лопасти. Высота пристеночных ячеек при этом была подобрана таким образом, чтобы сеточное значение числа Рейнольдса y^+ не превышало значения 10, что подразумевало применение в расчете пристеночных функций. В результате была построена гибридная неструктурированная расчетная сетка, содержащая около 7М узлов и 37.5М элементов.

На графиках на рис. 4, b–f представлены распределения коэффициента давления в разных сечениях поверхности лопасти винта, полученные в результате расчета, и аналогичные распределения, полученные в эксперименте. Видно, что результаты вычислительного эксперимента хорошо согласуются с экспериментальными данными.

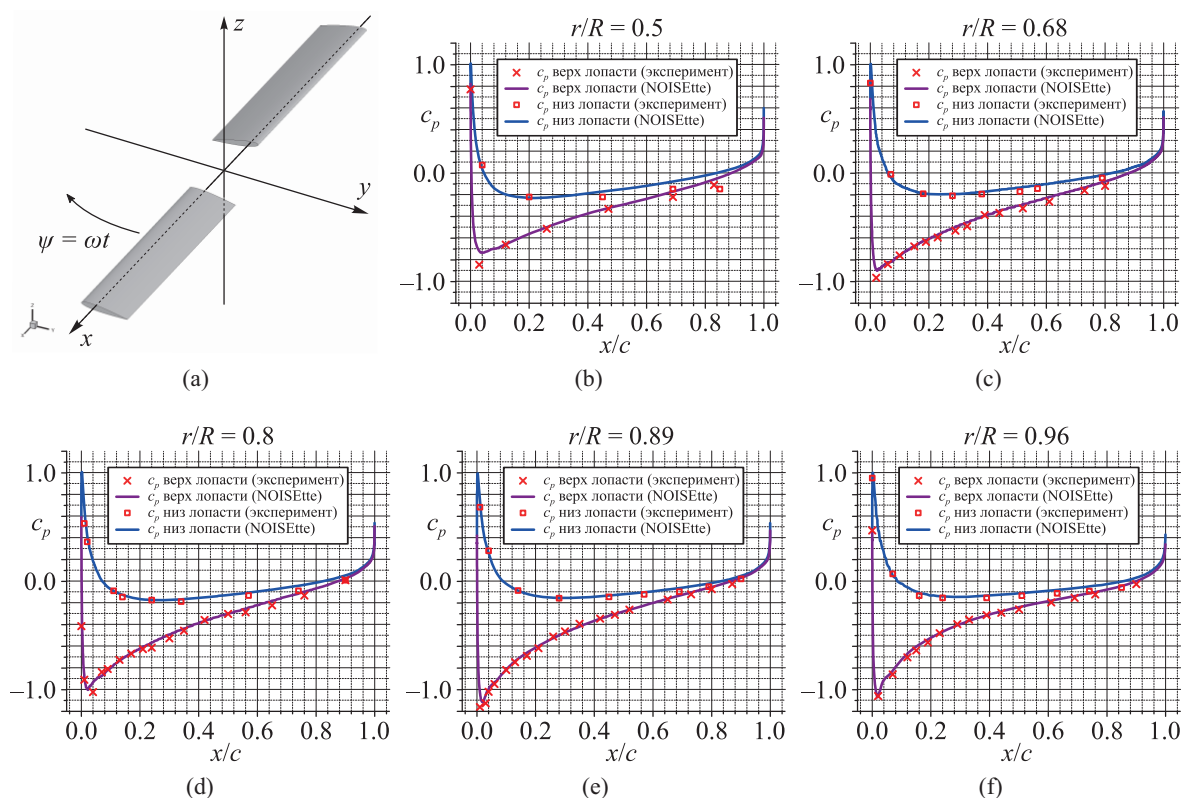


Рис. 4. Общий вид винта Caradonna–Tung (a) и распределение коэффициента давления в различных сечениях лопасти (b–f)

На рис. 5, а представлено поле модуля скорости течения и линии тока в сечении xOz . На графиках видно, что максимум скорости наблюдается непосредственно под концевой частью лопасти и далее вниз по конусу спуска концевых вихрей. Направление линий тока соответствует физике процесса: над винтом и сбоку от винта наблюдается зона всасывания, скорость течения в которой увеличивается с приближением к диску винта, причем интенсивность течения падает с приближением к оси вращения винта, где вблизи комлевых частей лопастей наблюдаются низкоскоростные турбулентные структуры. Под винтом скорость потока достигает своего максимума в конусе под концевыми областями лопастей и падает с дальнейшим удалением вниз от плоскости винта.

На рис. 5, b–c представлено поле модуля завихренности в сечениях xOz и xOy . Видно, что наиболее мощные турбулентные структуры здесь — концевые вихри, сходящиеся с законцовок лопастей и закручивающиеся в характерные сужающиеся спирали, смещающиеся вниз по потоку под плоскость вращения винта. По результатам расчета видно, что с удалением от плоскости винта вниз по потоку интенсивность турбулентных структур падает, а разрешение их ухудшается. Это связано со структурой используемой сетки, в которой размер сеточных элементов увеличивается с удалением от винта. Увеличение размера элемента влечет за собой рост численной диссипации и уменьшение разрешения турбулентных структур вниз по потоку.

Визуализация турбулентных структур на основе Q -критерия¹ подтверждает это (см. рис. 6, a): с удалением от диска винта размер сеточных элементов увеличивается и, соответственно, ухудшается разрешение турбулентных структур. Несмотря на это, видно, что концевые вихри, сходящиеся с лопастей, разрешаются достаточно хорошо.

¹ Q -критерий является мерой дисбаланса между величиной тензора скоростей деформации S и величиной тензора завихренности Ω : $Q = \|\Omega\| - \|S\| > 0$, где норма тензора определяется как $\|A\| = \sqrt{\text{tr } A^T A}$ [Hunt et al., 1988].

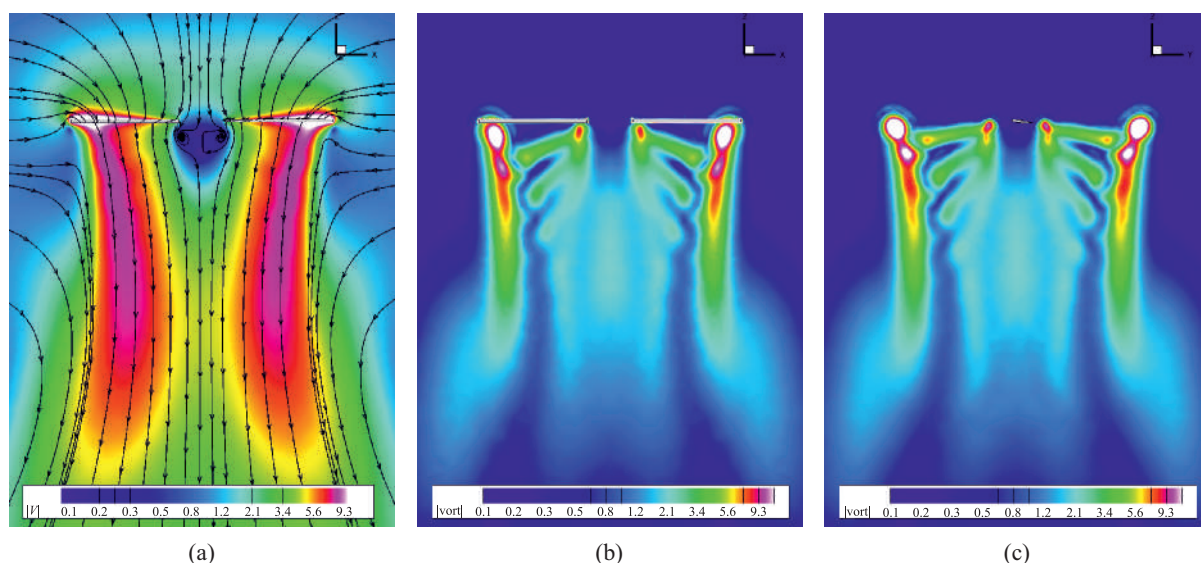


Рис. 5. Поле модуля скорости в плоскости xOz (a) и поле модуля завихренности в плоскостях xOz (b) и xOy (c)

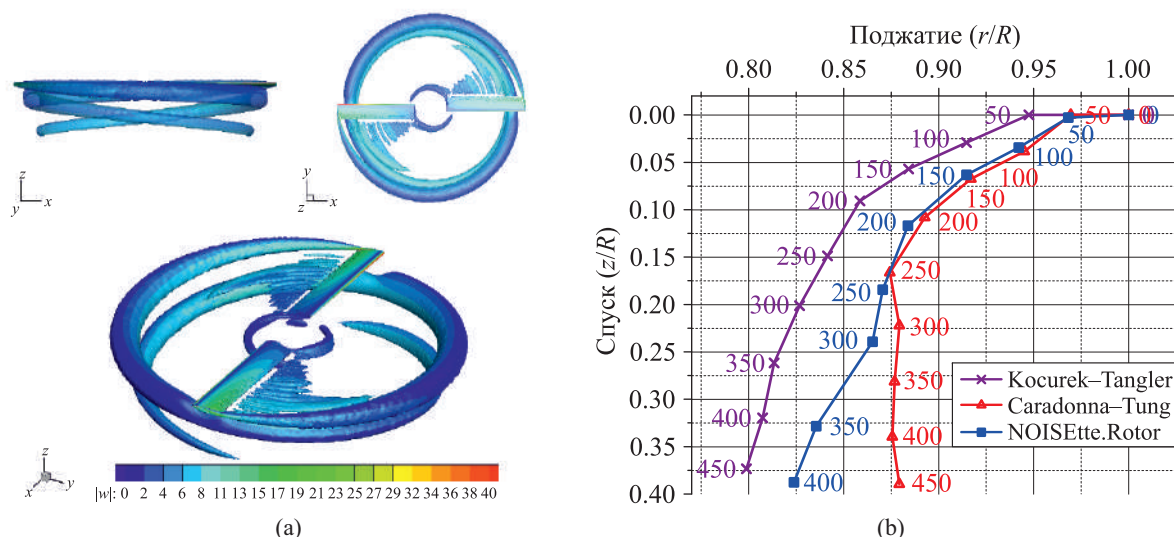


Рис. 6. Турбулентные структуры: изоповерхность Q-критерия, раскрашенная по модулю вертикальной составляющей скорости (a) и эволюция положения ядра концевой вихря (b)

Факт корректного моделирования концевых вихрей и влияния разрешения расчетной сетки на него также подтверждается анализом положения ядра концевой вихря. На рис. 6, b приведено сравнение положения ядра концевой вихря на разные моменты времени (или, что то же самое, для разных азимутальных углов поворота винта), полученного в расчете, в эксперименте и в соответствии с теоретической оценкой приведенной в работе [Kocurek, Tangler, 2016]. По горизонтальной оси отложено относительное смещение вихря к оси вращения винта — длина радиус-вектора положения вихря, приведенная к радиусу винта. По вертикальной оси отложено смещение вихря вниз по потоку вдоль оси вращения винта, также отнесенное к радиусу винта. Надписи на точках отсчетов соответствуют величине азимутального угла в градусах. Видно, что, пока вихрь находится в зоне достаточного сеточного разрешения, его положение хорошо согласуется с экспериментальными данными вплоть до азимутального угла 250° .

4.2. Моделирование обтекания четырехлопастного винта на режиме висения

В качестве второй задачи для валидации выбрана задача об осевом обтекании модельного винта вертолета в соответствии с физическим экспериментом, проведенным на базе кафедры аэрогидродинамики Казанского национального исследовательского технического университета им. А. Н. Туполева (КНИТУ-КАИ).

Цель данного вычислительного эксперимента — оценить колебания давления вблизи модельного несущего четырехлопастного винта (далее — модельного винта), испытанного в аэродинамической трубе Т-1К с акустической шумопоглощающей камерой кафедры аэрогидродинамики КНИТУ-КАИ.

В эксперименте с помощью массива микрофонов измерялись пульсации давления в ближнем поле (см. рис. 7). Решетка с шагом 150 мм, состоящая из трех линий по 13 микрофонов, была расположена на расстоянии 208 мм от края диска винта таким образом, что верхняя линия микрофонов лежала в плоскости вращения винта, и центральный микрофон («mic06» на рис. 7) находился ближе всех к оси вращения винта и законцовки лопасти.

Параметры винта и моделируемого режима соответствовали параметрам экспериментальной установки. Геометрия конструкции представляла собой масштабную модель четырехлопастного несущего винта вертолета. Радиус винта составлял $b = 0.8$ м, хорда лопасти — 0.065 м. Лопасти винта — прямоугольные в плане, построены на базе профиля NACA0012 без крутки. Общий шаг лопастей составлял 8° . Моделировался режим осевого обтекания винта при скорости вращения винта 911 об/мин, что соответствует концевой скорости лопасти $V_{tip} = 76.34$ м/с и концевому числу Маха $M = 0.224$. Значение числа Рейнольдса определялось в расчете по хорде лопасти и ее концевой скорости как $Re = \rho_0 V_{tip} b / \mu_0$ при значениях $\rho_0 = 1.185$ кг/м³ и $\mu_0 = 1.822 \times 10^{-5}$ Н·с/м², соответствующим плотности и динамической вязкости воздуха при температуре 24 °С, и принимало значение $Re = 0.322 \times 10^6$.

В силу симметрии винта и осевого режима обтекания было возможно моделировать не весь винт, а сектор с одной лопастью с постановкой периодических граничных условий на меридиональных плоскостях сектора.

На поверхности лопасти была построена треугольная сетка, с измельчением на передней и задней кромках. От поверхности лопасти внутрь расчетной области строилась призматическая

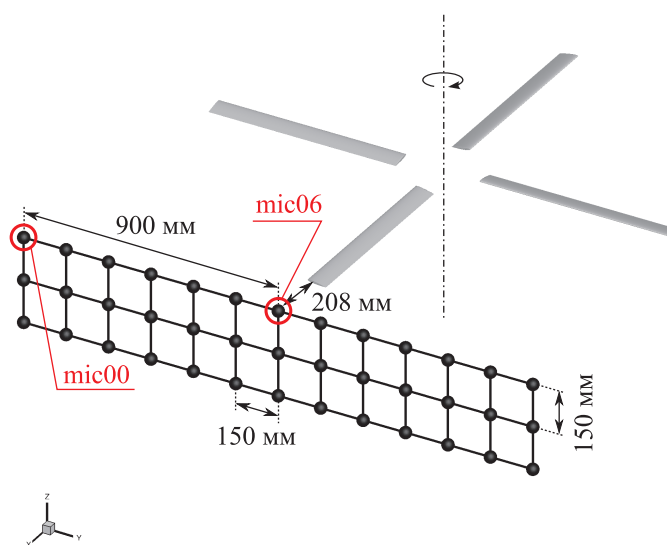


Рис. 7. Схема расположения массива микрофонов вблизи винта

сетка, состоящая из 30 слоев треугольных призм с увеличивающейся в геометрической прогрессии высотой с фактором 1.12. Далее к ней примыкала неструктурированная тетраэдральная сетка с увеличением высоты тетраэдров при удалении от лопасти. Итоговая расчетная сетка содержала 3.7M узлов и 17M элементов.

Расчет был проведен с использованием RANS-подхода с моделью турбулентности Спаларта – Аллмараса. На рис. 8 приведены результаты этого сравнения для двух микрофонов: «mic00» и «mic06» (см. рис. 7), где голубая зона определяет величину дисперсии измеренного в эксперименте сигнала. Видно, что результат расчета хорошо согласуется с измерениями, проведенными в эксперименте.

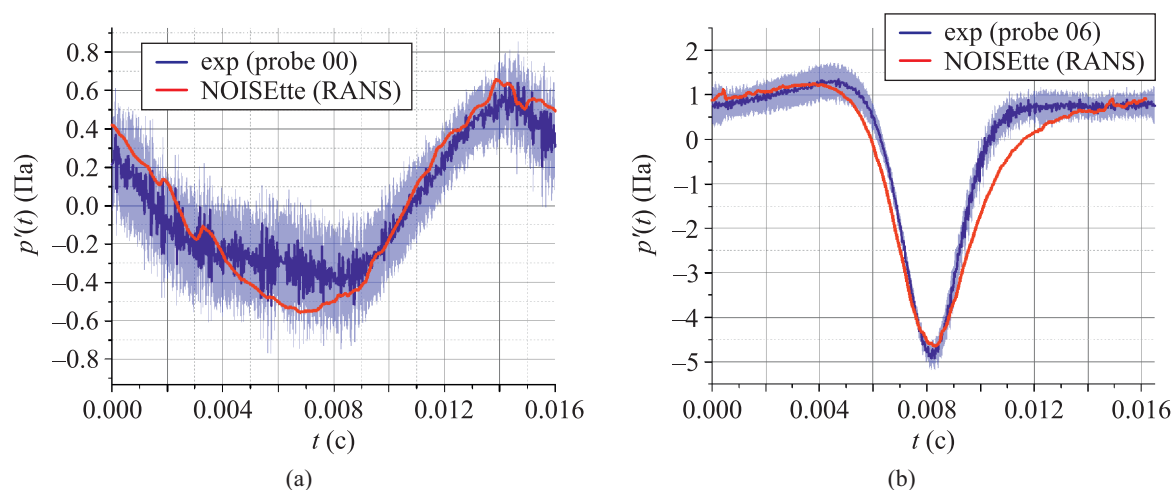


Рис. 8. Сигналы в микрофонах «00» (a), «06» (b)

Расчеты выполнялись с использованием схемы EBR5 повышенной точности. Для демонстрации преимуществ этой схемы на той же расчетной сетке был проведен расчет с помощью схемы первого порядка аппроксимации по пространству без введения реберно-ориентированных реконструкций.

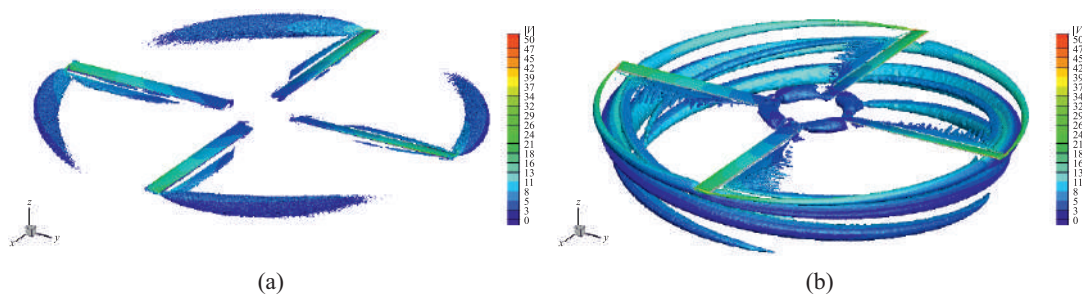


Рис. 9. Изоповерхность Q -критерия для значения 0.005 для полей, полученных в результате использования схемы первого порядка (a) и схемы EBR5 повышенной точности (b)

На рис. 9 приведена визуализация турбулентных структур (изоповерхность Q -критерия) для двух вариантов расчетов: с использованием схемы первого порядка (рис. 9, a) и схемы EBR5 повышенной точности (рис. 9, b). Очевидно, что результат использования схемы первого порядка непригоден для анализа вихревой структуры течения и, как следствие, для анализа акустических свойств винта.

4.3. Моделирование обтекания винта в кольце

Еще одной, уже более сложной, задачей было моделирование осевого обтекания и определение аэродинамических характеристик модельного винта в кольце, воспроизводящего схему рулевого винта типа Фенестрон, применяемую на некоторых моделях вертолетов. Постановка данной задачи примечательна присутствием как подвижных аэродинамических поверхностей (лопастей винта), так и неподвижных (поверхности кольца).

Геометрия конструкции представляла собой четырехлопастной рулевой винт вертолета в кольце торроидальной формы (см. рис. 10, *b*). Моделируемая в численном эксперименте геометрия максимально соответствовала конфигурации физического эксперимента, проведенного на открытом стенде КБ «Камов»: в канале был установлен одиночный винт без деталей механизации винта, канал (кольцо), в котором вращается винт, представлял собой осесимметричное тело вращения. При этом центральное тело имело форму цилиндра со скругленными торцами. Лопасть была построена на основе профиля ЦАГИ СВ-11 с линейной круткой.

В численном эксперименте моделировалось осевое обтекание винта при вращении винта с частотой 1166.4 об/мин (19.44 Гц), что соответствовало линейной скорости конца лопасти $V_{tip} = 73.3$ м/с, при этом угол установки лопасти принимал значения 10, 20, 30 и 40°, а хорда лопасти была $b = 0.13$ м. Число Рейнольдса определялось в расчете по хорде лопасти и ее концевой скорости как $Re = \rho_0 V_{tip} b / \mu_0$ при значениях $\rho_0 = 1.2041$ кг/м³ и $\mu_0 = 1.827 \times 10^{-5}$ Н·с/м², соответствующих плотности и динамической вязкости воздуха при температуре 20 °С, и принимало значение $Re = 0.628 \times 10^6$.

В расчетной области была построена неструктурированная тетраэдральная сетка с призматическим пограничным слоем на поверхности винта и кольца. Сетка измельчалась в областях, требующих подробного моделирования газодинамических эффектов. Так, наиболее подробная сетка строилась на передней и задней кромках лопасти, а также на законцовке лопасти. Наиболее подробная сетка строилась в области зазора между торцом лопасти и внутренней поверхностью кольца. В результате для каждого угла установки лопасти была построена расчетная сетка для сектора винта с одной лопастью и соответствующего сектора кольца с раствором $\pi/4$, содержащая порядка 2.3–2.5M узлов и 13.5–15M элементов.

Полученные в вычислительных экспериментах картины течения соответствуют результатам физических экспериментов. Общий вид течения приведен на рис. 11. Видно, что наибольшая скорость потока наблюдается в струе непосредственно под диском винта, при этом скорость потока быстро убывает с удалением от кольца. Также наблюдается увеличение скорости и ширины струи за винтом с увеличением угла установки лопасти, хотя общий характер течения существенно не меняется: в верхней полуплоскости над кольцом формируется зона всасывания, в нижней

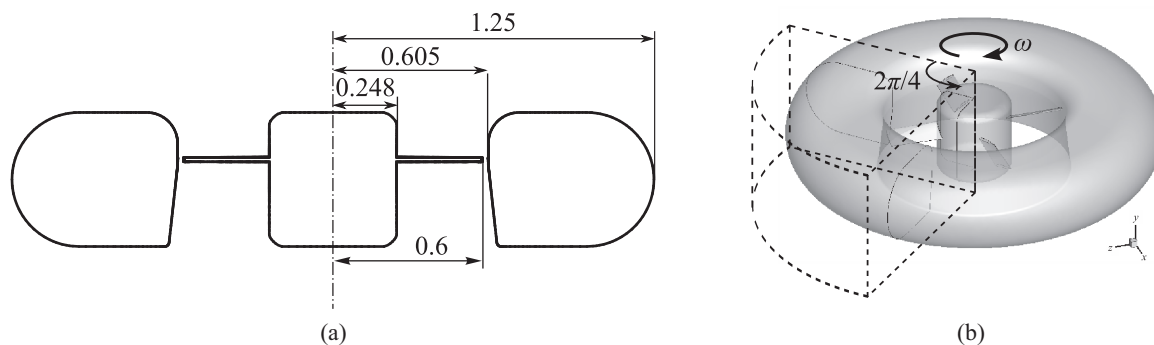


Рис. 10. Геометрия задачи «винт в кольце»: размеры (а) и общий вид геометрии и моделируемого сектора с одной лопастью (б)

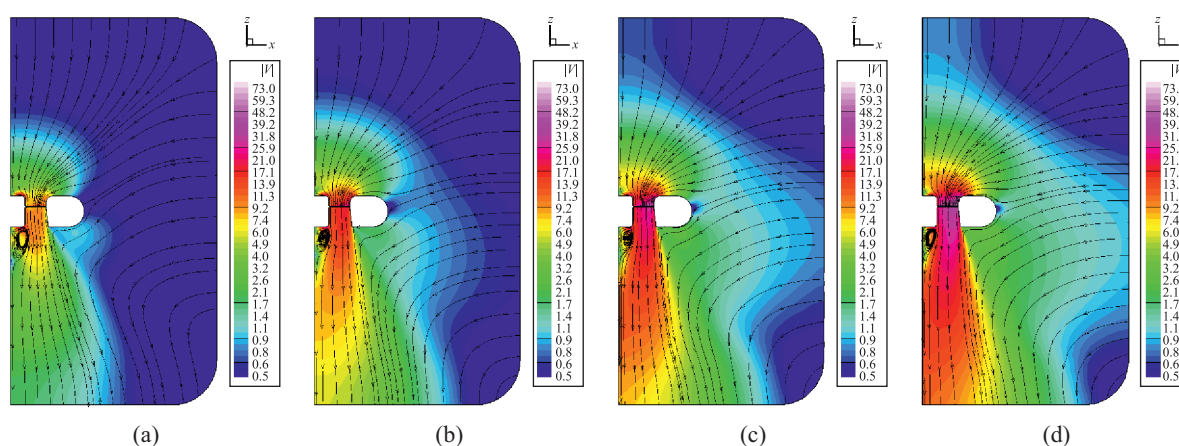


Рис. 11. Поле модуля абсолютной скорости и линии тока в меридиональном сечении при угле установки лопасти 10° (a), 20° (b), 30° (c), 40° (d)

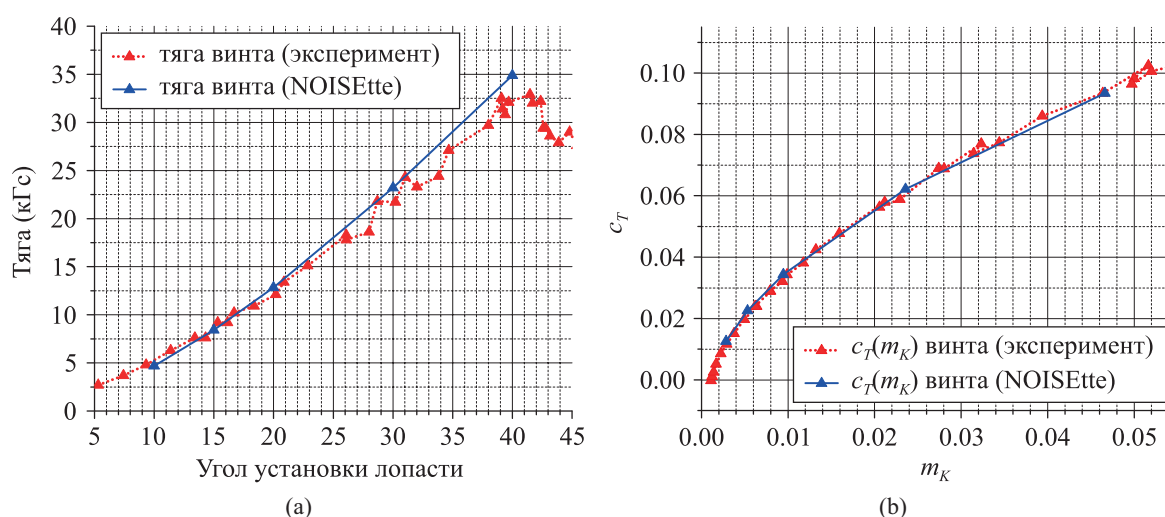


Рис. 12. Зависимость тяги винта от угла установки лопасти (a) и поляра винта (b)

полуплоскости, непосредственно под диском винта, — зона истечения струи, а в удалении от оси вращения — зона спутного потока, вызванного струйным течением.

На рис. 12, *a* приведены значения тяги винта при различных углах установки лопасти, а на рис. 12, *b* приведено сравнение графика зависимости коэффициента тяги винта от коэффициента крутящего момента винта (поляра винта), вычисленные по полученным в расчетах распределениям давления на поверхностях. Как видно из графиков, полученные зависимости аэродинамических характеристик от угла установки лопастей хорошо согласуются с результатами физических экспериментов. Более подробное описание и анализ полученных результатов приведены авторами в работах [Абалакин и др., 2015; Абалакин и др., 2016].

4.4. Моделирование обтекания жесткого винта в косом потоке

Для проверки применимости разработанной методики для моделирования течения вблизи винта на режиме горизонтального полета была выбрана задача о моделировании обтекания жесткого винта в косом потоке.

Моделируемая конфигурация соответствовала конфигурации, испытанной в серии экспериментов ЦАГИ им. проф. Н. Е. Жуковского, и представляла собой четырехлопастный жесткий

несущий винт вертолета с комплектом плоских лопастей прямоугольной формы в плане, жестких на изгиб и кручение без крутки.

Лопасты были построены на базе аэродинамического профиля NACA-0012, хорда лопасти составляла $b = 0.15$ м, общий шаг лопастей составлял 8° . Радиус винта составлял 1.2 м, центральное тело представляло собой эллипсоид вращения, имеющий горизонтальный и вертикальный радиусы $r_1 = 0.04$ и $r_2 = 0.2$ м соответственно. Скорость вращения винта равнялась 360 об/мин, что соответствует концевой скорости лопасти $V_{\text{tip}} = 45.24$ м/с. В задаче исследовалось три режима обтекания с различными скоростями набегающего потока $V_{\text{flow}} = 6.79, 11.31$ и 20.36 м/с с нулевым углом атаки винта. Физические параметры невозмущенного потока были выбраны следующими: плотность воздуха $\rho_0 = 1.225$ кг/м³, давление 103025 Па, температура воздуха 23°C . Число Рейнольдса в расчете определялось как $Re = \rho_0 V_{\text{tip}} b / \mu_0$. При значении динамической вязкости воздуха $\mu_0 = 1.827 \times 10^{-5}$ Н·с/м², соответствующей температуре 20°C , число Рейнольдса равнялось $Re = 0.455 \times 10^6$.

В косом потоке форма вихревого следа за винтом сложная и неоднородная. В возмущенной винтом турбулентной среде присутствуют концевые вихри. Их форма зависит от криволинейного движения лопасти, характеризуемого отношением поступательной скорости к окружной, и количества лопастей. Без взаимного влияния форма концевых вихрей совпадала бы с траекториями движения концов лопастей.

Обтекание вращающегося винта характеризуется наличием взаимодействия лопастей и турбулентных структур. В силу присутствия внешнего потока и вращательного движения винта распределение давления на поверхности лопасти существенным образом зависит от ее азимутального положения. В качестве результатов ниже приводятся зависимости характеристик от азимутального угла и их распределения для некоторых фиксированных азимутальных положений винта.

Общая картина течения во многом определяется сходящими с лопастей концевыми вихрями, сносящимися вниз по потоку и взаимодействующими как с набегающими лопастями, так и с присутствующими в потоке вихревыми структурами. При этом положения ядер концевых вихрей повторяют траектории движения концов лопастей с учетом вращения винта и набегающего потока. Это можно видеть на рис. 13, где приведена визуализация вихрей многокрязовой изоповерхностью Q -критерия и траектории концов лопастей в абсолютной системе координат в плоскости вращения винта Oxy в фиксированные моменты времени, соответствующие азимутальным углам $\psi = 0$ (рис. 13, *a*) и $\psi = 45^\circ$ (рис. 13, *b*). Также на рис. 13 изображены контуры избыточного давления p_g на поверхности винта.

Распределения коэффициента давления в разных сечениях лопастей винта, полученные в вычислительном эксперименте с использованием кодов NOISEtte и ANSYS CFX (см. рис. 14), хорошо согласуются друг с другом на всей хорде лопасти, за исключением незначительных расхождений в зоне задней кромки лопасти, связанных с разным разрешением расчетной сетки в этой области.

Более подробно результаты расчета данной задачи представлены в статье [Абалакин и др., 2020].

5. Заключение

В статье приводится полное описание реализованной в программном комплексе NOISEtte методики численного моделирования турбулентного течения вязкого сжимаемого газа вблизи жесткого винта вертолета при различных эксплуатационных режимах. Получаемые численные результаты могут использоваться для расчета аэродинамических характеристик винта при разработке новых конструкций. Представленное описание подразумевает использование в качестве

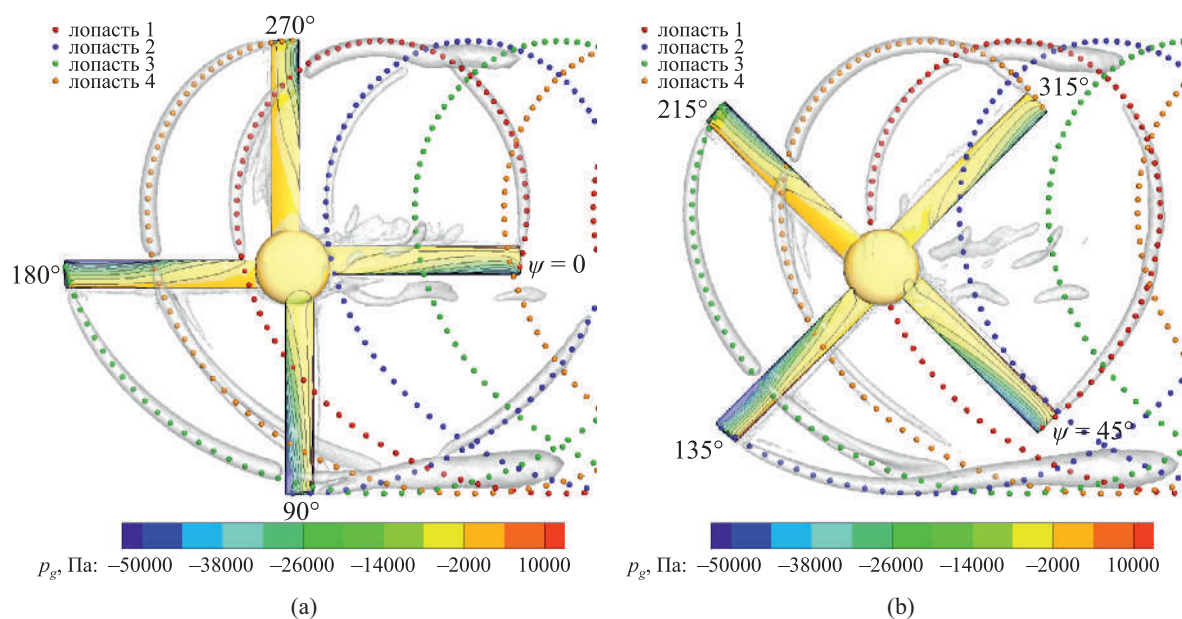


Рис. 13. Траектории концевых вихрей — траектории концов лопастей и визуализация изоповерхности Q -критерия при разных азимутальных положениях лопастей: $\psi = 0$ (a) и $\psi = 45^\circ$ (b)

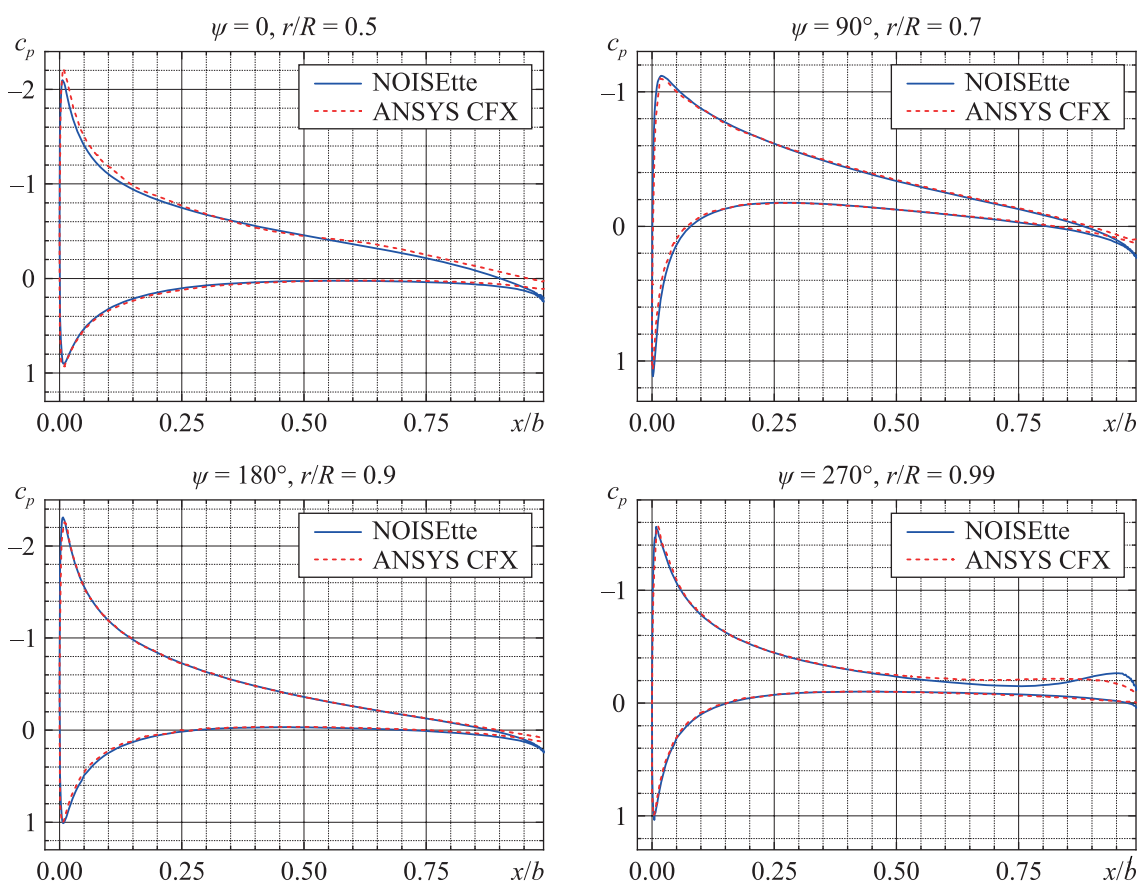


Рис. 14. Распределения коэффициента давления вдоль хорды лопасти, полученные с использованием NOISEtte и ANSYS CFX при различных значениях азимутального угла ψ и относительного радиуса r/R

базовой математической модели осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье – Стокса. В качестве замыкания при этом используется модель турбулентности Спаларта – Аллмараса. Следует отметить, что в коде NOISEtte реализованы и другие модели турбулентности, такие как $k - \omega$ и SST модель Ментера, которые также могут использоваться при моделировании воздушного течения вблизи винта.

Особенностью разработанного и реализованного в комплексе NOISEtte численного метода является использование оригинальных реберно-ориентированных схем на неструктурированных сетках. Они обеспечивают повышенную точность результата при умеренных вычислительных затратах, в то время как применение неструктурированных сеток создает удобство в работе с геометрией реального винта. Параллельная реализация всего численного алгоритма выполнена на основе гибридной MPI/OpenMP-модели и позволяет с высокой эффективностью задействовать в расчетах вычислительные системы с числом процессорных ядер порядка сотен тысяч.

Валидация разработанной численной методики и реализующего ее программного комплекса NOISEtte проведена на основе расчетов четырех описанных в статье задач, которые моделируют течение возле винта вертолета на разных эксплуатационных режимах, а именно на режиме висения при осевом обтекании и на режиме горизонтального полета. При этом рассмотрены как несущие винты с двумя и четырьмя лопастями, так и рулевой винт в конфигурации «винт в кольце». Полученные численные результаты для всех рассмотренных постановок хорошо согласуются с имеющимися экспериментальными данными. Следует отметить, что разработанная методика применима не только для моделирования воздушного течения вблизи вертолетных винтов. Она может быть использована для решения широкого круга прикладных задач и, в частности, для численного исследования аэродинамики винтокрылых машин (конвертопланов, квадрокоптеров, ветровых энергоустановок), а также турбовинтовых самолетов.

Работа была выполнена с использованием оборудования центра коллективного пользования «Комплекс моделирования и обработки данных исследовательских установок мега-класса» НИЦ «Курчатовский институт» (<http://ckp.nrcki.ru>).

Список литературы (References)

- Абалакин И. В., Аникин В. А., Бахвалов П. А., Бобков В. Г., Козубская Т. К. Численное исследование аэродинамических и акустических свойств винта в кольце // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. — 2016. — № 3. — С. 130–145. — DOI: 10.7868/S0568528116030026
- Abalakin I. V., Anikin V. A., Bakhvalov P. A., Bobkov V. G., Kozubskaya T. K. Numerical investigation of the aerodynamic and acoustical properties of a shrouded rotor // Fluid Dynamics. — 2016. — Vol. 51, No. 3. — P. 419–433. — DOI: 10.1134/S0015462816030145. (Original Russian paper: Abalakin I. V., Anikin V. A., Bakhvalov P. A., Bobkov V. G., Kozubskaya T. K. Chislennoe issledovanie aehrodinamicheskikh i akusticheskikh svoistv vinta v kol'tse // Izvestiya Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika zhidkosti i gaza. — 2016. — No. 3. — P. 130–145.)
- Абалакин И. В., Бобков В. Г., Козубская Т. К. Разработка метода расчета течений с малыми числами Маха на неструктурированных сетках в программном комплексе NOISEtte // Матем. моделирование. — 2017. — Т. 29, № 4. — С. 101–112.
- Abalakin I. V., Bobkov V. G., Kozubskaya T. K. Implementation of the low Mach number method for calculating flows in the NOISEtte software package // Math Models Comput Simul. — 2017. — No. 9. — P. 688–696. — DOI: 10.1134/S2070048217060023. (Original Russian paper: Abalakin I. V., Bobkov V. G., Kozubskaya T. K. Razrabotka metoda rascheta techenii s malymi chislami Makha na nestrukturirovannykh setkakh v programmnom komplekse NOISEtte // Matem. modelirovanie. — 2017. — Vol. 29, No. 4. — P. 101–112.)
- Абалакин И. В., Бобков В. Г., Козубская Т. К., Вершков В. А., Крицкий Б. С., Миргазов Р. М. Численное моделирование обтекания жесткого винта в косом потоке // Изв. РАН. МЖГ. — 2020. — № 4. — С. 105–116. — DOI: 10.31857/S0568528120040015
- Abalakin I. V., Bobkov V. G., Kozubskaya T. K., Vershkov V. A., Kritsky B. S., Mirgazov R. M. Numerical Simulation of Flow around Rigid Rotor in Forward Flight // Fluid Dynamics. — 2020. — Vol. 55, No. 4. — P. 534–544. —

- DOI: 10.1134/S0015462820040011. (Original Russian paper: *Abalakin I. V., Bobkov V. G., Kozubskaya T. K., Vershkov V. A., Kritsky B. S., Mirgazov R. M.* Chislennoe modelirovanie obtekaniya zhestkogo vinta v kosom potoke // *Izvestiya Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika zhidkosti i gaza*. — 2020. — No. 4. — P. 105–116.)
- Абалакин И. В., Бахвалов П. А., Бобков В. Г., Козубская Т. К., Аникин В. А.* Численное моделирование аэродинамических и акустических характеристик винта в кольце // *Матем. моделирование*. — 2015. — Т. 27, № 10. — С. 125–144.
- Abalakin I. V., Bahvalov P. A., Bobkov V. G., Kozubskaya T. K., Anikin V. A.* Numerical simulation of aerodynamic and acoustic characteristics of a ducted rotor // *Mathematical Models and Computer Simulations*. — 2016. — Vol. 8, No. 3. — P. 309–324. — DOI: 10.1134/s2070048216030030. (Original Russian paper: *Abalakin I. V., Bakhvalov P. A., Bobkov V. G., Kozubskaya T. K., Anikin V. A.* Chislennoe modelirovanie aehrodinamicheskikh i akusticheskikh kharakteristik vinta v kol'tse // *Matem. modelirovanie*. — 2015. — Vol. 27, No. 10. — P. 125–144.)
- Абалакин И. В., Горобец А. В., Дубень А. П., Козубская Т. К., Бахвалов П. А.* Параллельный программный комплекс NOISETTE для крупномасштабных расчетов задач аэродинамики и аэроакустики // *Вычислительные методы и программирование*. — 2012. — № 13. — С. 110–125.
- Abalakin I. V., Gorobets A. V., Duben A. P., Kozubskaya T. K., Bakhvalov P. A.* Parallel'nyi programnyi kompleks NOISETTE dlya krupnomasshtabnykh raschetov zadach aehrodinamiki i aehroakustiki [Parallel research code NOISETte for large-scale CFD and CAA simulations] // *Vychislitel'nye metody i programmirovaniye*. — 2012. — No. 13. — P. 110–125 (in Russian).
- Абалакин И. В., Козубская Т. К.* Схема на основе реберно-ориентированной квазиодномерной реконструкции переменных для решения задач аэродинамики и аэроакустики на неструктурированных сетках // *Матем. моделирование*. — 2013. — Т. 25, № 8. — С. 109–136.
- Abalakin I. V., Kozubskaya T. K.* Skhema na osnove reberno-orientirovannoi kvaziodnomernoi rekonstruktsii peremennykh dlya resheniya zadach aehrodinamiki i aehroakustiki na nestrukturirovannykh setkakh [A scheme based on an edge-oriented quasi-one-dimensional reconstruction of variables for solving problems of aerodynamics and aero-acoustics on unstructured grids] // *Matem. modelirovanie*. — 2013. — Vol. 25, No. 8. — P. 109–136 (in Russian).
- Бахвалов П. А.* Схема с квазиодномерной реконструкцией переменных на сетках из выпуклых многоугольников для решения задач аэроакустики // *Матем. моделирование*. — 2013. — Т. 25, № 9. — С. 95–108.
- Bakhvalov P. A.* Quasi one-dimensional reconstruction scheme on convex polygonal meshes for solving aeroacoustics problems // *Mathematical Models and Computer Simulations*. — 2014. — Vol. 6, No. 2. — P. 192–202. — DOI: 10.1134/s2070048214020021. (Original Russian paper: *Bakhvalov P. A.* Skhema s kvaziodnomernoi rekonstruktsiei peremennykh na setkakh iz vypuklykh mnogougol'nikov dlya resheniya zadach aehroakustiki // *Matem. modelirovanie*. — 2013. — Vol. 25, No. 9. — P. 95–108.)
- Бахвалов П. А., Козубская Т. К.* О построении реберно-ориентированных схем, обеспечивающих точность на линейной функции, для решения уравнений Эйлера на гибридных неструктурированных сетках // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2017. — Т. 57, № 4. — С. 682–701. — DOI: 10.7868/S0044466917040032
- Bakhvalov P. A., Kozubskaya T. K.* Construction of edge-based 1-exact schemes for solving the Euler equations on hybrid unstructured meshes // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. — 2017. — Vol. 57, No. 4. — P. 680–697. — DOI: 10.1134/s0965542517040030. (Original Russian paper: *Bakhvalov P. A., Kozubskaya T. K.* O postroenii reberno-orientirovannykh skhem, obespechivayushchikh tochnost' na lineinoi funktsii, dlya resheniya uravnenii Ehilera na gibridnykh nestrukturirovannykh setkakh // *Zh. vychisl. matem. i matem. fiz.* — 2017. — Vol. 57, No. 4. — P. 682–701.)
- Белов И., Исаев С.* Моделирование турбулентных течений: учебное пособие. — СПб.: Балт. гос. техн. ун-т, 2001. — 108 с.
- Belov I., Isaev S.* Modelirovanie turbulentnykh techenii: uchebnoye posobie [Modeling Turbulent Flows: A Tutorial]. — St.-Petersburg: Balt. gos. tekhn. un-t., 2001. — 108 p. (in Russian).
- Игнтакин Ю. М., Константинов С. Г.* Исследование аэродинамических характеристик несущего винта вертолета методом CFD // *Труды МАИ*. — 2012. — Вып. 57.
- Igntakin Yu. M., Konstantinov S. G.* Issledovanie aehrodinamicheskikh kharakteristik nesushchego vinta vertoleta metodom CFD [Investigation of the aerodynamic characteristics of the rotor of a helicopter by CFD] // *Trudy MAI*. — 2012. — Iss. 57 (in Russian).
- Джонсон У.* Теория вертолета (в 2-х томах). — Т. 1. — М.: Мир, 1983.
- Johnson W.* Helicopter Theory. — Princeton (N. J.), Guildford (Sy): Princeton univ. press, 1980. (Russ. ed.: *Dzhonson U.* Teoriya vertoleta (v 2-kh tomakh). — Vol. 1. — Moscow: Mir, 1983.)
- Карabasов С. А.* Использование гибридного метода для моделирования шума от высокоскоростных лопастей вертолета // *Математическое моделирование*. — 2006. — Т. 18, № 2. — С. 2–23.

- Karabasov S. A.* Ispol'zovanie gibridnogo metoda dlya modelirovaniya shuma ot vysokoskorostnykh lopastei vertoleta [Application of a hybrid approach for far-field sound prediction from high-speed helicopter blades] // *Matematicheskoe modelirovanie*. — 2006. — Vol. 18, No 2. — P. 2–23 (in Russian).
- Копьев В. Ф., Зайцев М. Ю., Воронцов В. И., Карабасов С. А., Аникин В. А.* Расчет шума несущего винта вертолета и его экспериментальная проверка на режиме висения // *Акустический журнал*. — 2017. — Т. 63, № 6. — С. 651–664. — DOI: 10.7868/S0320791917060077
- Kopiev V. F., Zaitsev M. Y., Vorontsov V. I., Karabasov S. A., Anikin V. A.* Helicopter noise in hover: Computational modelling and experimental validation // *Acoust. Phys.* — 2017. — Vol. 63. — P. 686–698. — DOI: 10.1134/S1063771017060070. (Original Russian paper: *Kop'ev V. F., Zaitsev M. Yu., Vorontsov V. I., Karabasov S. A., Anikin V. A.* Raschet shuma nesushchego vinta vertoleta i ego ehksperimental'naya proverka na rezhime viseniya // *Akusticheskii zhurnal*. — 2017. — Vol. 63, No. 6. — P. 651–664.)
- Копьев В. Ф., Титарев В. А., Беляев И. В.* Разработка методологии расчета шума винтов с использованием суперкомпьютеров // *Ученые записки ЦАГИ*. — 2014. — Т. XLV, № 2. — С. 78–106.
- Kop'ev V. F., Titarev V. A., Belyaev I. V.* Razrabotka metodologii rascheta shuma vintov s ispol'zovaniem superkomp'yutеров [Development of a methodology for calculating rotor noise using supercomputers] // *Uchenye zapiski TSAGI*. — 2014. — Vol. XLV, No. 2. — P. 78–106 (in Russian).
- Abalakin I., Bakhvalov P., Kozubskaya T.* Edge-based reconstruction schemes for prediction of near field flow region in complex aeroacoustics problems // *Int. J. Aeroacoust.* — 2014. — Vol. 13, No. 3-4. — P. 207–234. — DOI: 10.1260/1475-472X.13.3-4.207
- Abalakin I., Bakhvalov P., Kozubskaya T.* Edge-based reconstruction schemes for unstructured tetrahedral meshes // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. — 2015. — Vol. 81, No. 6. — P. 331–356. — DOI: 10.1002/fld.4187
- Bakhvalov P., Kozubskaya T.* EBR-WENO scheme for solving gas dynamics problems with discontinuities on unstructured meshes // *Computers and Fluids*. — 2017. — Vol. 157. — P. 312–324. — DOI: 10.1016/j.compfluid.2017.09.004
- Caradonna F. X., Tung C.* Experimental and analytical studies of a model helicopter rotor in hover // NASA. — Ames Research Center, Moffett Field, California, 09/1981. — No. NASA-TM-81232.
- Duben A. P., Kozubskaya T. K.* Evaluation of Quasi-One-Dimensional Unstructured Method for Jet Noise Prediction // *AIAA Journal*. — 2019. — Vol. 57, No. 12. — P. 5142–5155. — DOI: 10.2514/1.j058162
- Garipova L., Batrakov A., Kusyumov A., Mikhaylov S., Barakos G.* Aerodynamic and acoustic analysis of helicopter main rotor blade tips in hover // *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow*. — 2016. — Vol. 26, No. 7. — P. 2101–2118. — DOI: 10.1108/HFF-08-2015-0348
- Gorobets A.* Parallel Algorithm of the NOISEtte Code for CFD and CAA Simulations // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. — 2018. — Vol. 39, No. 4. — P. 524–532. — DOI: 10.1134/S1995080218040078
- Guillard H., Viozat C.* On the behaviour of upwind schemes in the low Mach number limit // *Computers and Fluids*. — 1999. — Vol. 28, No. 1. — P. 63–86. — DOI: 10.1016/S0045-7930(98)00017-6
- Hunt J. C. R., Wray A. A., Moin P.* Eddies, streams, and convergence zones in turbulent flows // *Studying Turbulence Using Numerical Simulation Databases*. — 1981. — P. 192–208.
- Kocurek J. D., Tangler J. L.* A Prescribed Wake Lifting Surface Hover Performance Analysis // *Journal of the American Helicopter Society*. — 1977. — Vol. 22, No. 1. — P. 24–35. — DOI: 10.4050/JAHS.22.24
- Menter F. R.* Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications // *AIAA Journal*. — 1994. — DOI: 10.2514/3.12149
- Reichard H.* Vollständige darstellung der turbulenten geschwindigkeitsverteilung in glatten leitungen // *ZAMM — Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für An-*

- gewandte Mathematik und Mechanik. — 1951. — Vol. 31. — P. 208–219 (in German). — DOI: 10.1002/zamm.19510310704
- Rieber F.* A low-Mach number fix for Roe’s approximate Riemann solver // J. Comput. Phys. — 2011. — Vol. 230, Iss. 13. — P. 5263–5287. — DOI: 10.1016/j.jcp.2011.03.025
- Saad Y.* Iterative methods for sparse linear systems. — Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003. — 528 p.
- Spalart P. R., Allmaras S. R.* A one-equation turbulence model for aerodynamic flows // 30th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Aerospace Sciences Meetings. — AIAA Paper 1992-0439. — DOI: 10.2514/6.1992-439
- Viozat C.* Implicit Upwind Schemes for Low Mach Number Compressible Flows // INRIA Rapport de Recherche. — 1997. — No. 3084. — Available at: <https://hal.inria.fr/inria-00073607>
- Wilcox D. C.* Turbulence Modeling for CFD, Third edition. — La Canada, California: DCW Industries, 2006. — 522 p.