

УДК: 519.8

## Моделирование процесса истощения газоконденсатного пласта

А. В. Волохова<sup>1,a</sup>, Е. В. Земляная<sup>1,2,b</sup>, В. В. Качалов<sup>3,c</sup>,  
В. С. Рихвицкий<sup>1,d</sup>

<sup>1</sup>Объединенный институт ядерных исследований,  
Россия, 141980, Московская область, г. Дубна, ул. Жолио-Кюри, д. 6

<sup>2</sup>Государственный университет «Дубна»,  
Россия, 141980, Московская область, г. Дубна, ул. Университетская, д. 19

<sup>3</sup>Объединенный институт высоких температур РАН,  
Россия, 125412, г. Москва, ул. Ижорская, д. 13, стр. 2

E-mail: <sup>a</sup> volokhova@jinr.ru, <sup>b</sup> elena@jinr.ru, <sup>c</sup> ongk@mail.ru, <sup>d</sup> rqvtsk@mail.ru

Получено 08.04.2020, после доработки — 08.07.2020.

Принято к публикации 03.09.2020.

Одна из трудностей разработки газоконденсатных месторождений обусловлена тем, что часть углеводородов газозоносного слоя присутствует в нем в виде конденсата, который застревает в порах пласта и извлечению не подлежит. В этой связи активно ведутся исследования, направленные на повышение извлекаемости углеводородов в подобных месторождениях. В том числе значительное количество публикаций посвящено развитию методов математического моделирования прохождения многокомпонентных газоконденсатных смесей через пористую среду в различных условиях.

В настоящей работе в рамках классического подхода, основанного на законе Дарси и законе неразрывности потоков, сформулирована математическая постановка начально-граничной задачи для системы нелинейных дифференциальных уравнений, описывающая прохождение многокомпонентной газоконденсатной смеси через пористую среду в режиме истощения. Разработанная обобщенная вычислительная схема на основе конечно-разностной аппроксимации и метода Рунге–Кутты четвертого порядка может использоваться для расчетов как в пространственно одномерном случае, соответствующем условиям лабораторного эксперимента, так и в двумерном случае, когда речь идет о моделировании плоского газозоносного пласта с круговой симметрией.

Численное решение упомянутой системы уравнений реализовано на основе комбинированного использования C++ и Maple с применением технологии параллельного программирования MPI для ускорения вычислений. Расчеты выполнены на кластере HybriLIT Многофункционального информационно-вычислительного комплекса Лаборатории информационных технологий Объединенного института ядерных исследований.

Численные результаты сопоставлены с данными о динамике выхода девятикомпонентной углеводородной смеси в зависимости от давления, полученными на лабораторной установке (ВНИИГАЗ, Ухта). Расчеты проводились для двух типов пористого наполнителя в лабораторной модели пласта: терригенного (при 25 °С) и карбонатного (при 60 °С). Показано, что используемый подход обеспечивает согласие полученных численных результатов с экспериментальными данными. Путем подгонки к экспериментальным данным по истощению лабораторной модели пласта получены значения параметров, определяющих коэффициент межфазного перехода для моделируемой системы. С использованием тех же параметров было проведено компьютерное моделирование истощения тонкого газозоносного слоя в приближении круговой симметрии.

Ключевые слова: компьютерное моделирование, многокомпонентная система углеводородов

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 17-08-01270А).

## Simulation of the gas condensate reservoir depletion

A. V. Volokhova<sup>1,a</sup>, E. V. Zemlyanaya<sup>1,2,b</sup>, V. V. Kachalov<sup>3,c</sup>,  
V. S. Rikhvitsky<sup>1,d</sup>

<sup>1</sup>Joint Institute for Nuclear Research,  
6 Joliot-Curie st., Dubna, Moscow Region, 141980, Russia

<sup>2</sup>State University “Dubna”,

19 Universitetskaya st., Dubna, Moscow Region, 141980, Russia

<sup>3</sup>Joint Institute for High Temperatures of Russian Academy of Sciences,  
13/2 Izhorskaya st., Moscow, 125412, Russia

E-mail: <sup>a</sup> volokhova@jinr.ru, <sup>b</sup> elena@jinr.ru, <sup>c</sup> ongc@mail.ru, <sup>d</sup> rqvtsk@mail.ru

*Received 08.04.2020, after completion — 08.07.2020.*

*Accepted for publication 03.09.2020.*

One of problems in developing the gas condensate fields lies on the fact that the condensed hydrocarbons in the gas-bearing layer can get stuck in the pores of the formation and hence cannot be extracted. In this regard, research is underway to increase the recoverability of hydrocarbons in such fields. This research includes a wide range of studies on mathematical simulations of the passage of gas condensate mixtures through a porous medium under various conditions.

In the present work, within the classical approach based on the Darcy law and the law of continuity of flows, we formulate an initial-boundary value problem for a system of nonlinear differential equations that describes a depletion of a multicomponent gas-condensate mixture in porous reservoir. A computational scheme is developed on the basis of the finite-difference approximation and the fourth order Runge–Kutta method. The scheme can be used for simulations both in the spatially one-dimensional case, corresponding to the conditions of the laboratory experiment, and in the two-dimensional case, when it comes to modeling a flat gas-bearing formation with circular symmetry.

The computer implementation is based on the combination of C++ and Maple tools, using the MPI parallel programming technique to speed up the calculations. The calculations were performed on the HybriLIT cluster of the Multifunctional Information and Computing Complex of the Laboratory of Information Technologies of the Joint Institute for Nuclear Research.

Numerical results are compared with the experimental data on the pressure dependence of output of a nine-component hydrocarbon mixture obtained at a laboratory facility (VNIIGAZ, Ukhta). The calculations were performed for two types of porous filler in the laboratory model of the formation: terrigenous filler at 25 °C and carbonate one at 60 °C. It is shown that the approach developed ensures an agreement of the numerical results with experimental data. By fitting of numerical results to experimental data on the depletion of the laboratory reservoir, we obtained the values of the parameters that determine the inter-phase transition coefficient for the simulated system. Using the same parameters, a computer simulation of the depletion of a thin gas-bearing layer in the circular symmetry approximation was carried out.

Keywords: computer simulations, multicomponent hydrocarbon system

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2020, vol. 12, no. 5, pp. 1081–1095 (Russian).

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (Grant No. 17-08-01270A).

## Введение

Настоящая работа направлена на исследование прохождения многокомпонентной газоконденсатной смеси через газоносный пласт в режиме истощения на основе данных эксперимента, моделирующего этот процесс на лабораторной установке во ВНИИГАЗ, г. Ухта. [Волков и др., 2016]. Актуальность таких исследований обусловлена необходимостью оптимизации углеводородоотдачи в нетрадиционных газоконденсатных месторождениях путем снижения конденсации [Качалов и др., 2019].

При моделировании прохождения (фильтрации) многокомпонентных газоконденсатных смесей через пористую среду классическим считается подход на базе закона Дарси и законов сохранения, подробно описанный как в российских изданиях (см., например, [Пономарева, Мордвинов, 2009; Митлин, 1991; Басниев и др., 1993]), так и в зарубежной литературе (включая классическую книгу [Aziz, Settary, 1979] и современные издания [Henk, 2016; Vafai, 2005; Masoodi, Pillai, 2013]). В рамках этого общего подхода, с учетом целей исследования, особенностей моделируемых процессов, конфигурации и физико-химических параметров изучаемых систем, получаются различные по форме математические постановки начально-граничных задач для многопараметрических систем нелинейных дифференциальных уравнений, включая задачи параболического (например, [Директор и др., 2000]) и гиперболического типа (например, [Булгакова и др., 2006]), стационарные задачи (см., например, [Волохова и др., 2018]). При необходимости моделирование проводится с учетом температурной динамики (как, например, в [Luchagin, Roop, 2019]) и сохранения энергии в системе (см., например, [Duyunova et al., 2019]). Рассматриваются как однофазные процессы (например, в [Sochi, 2010]), так и различные типы фазовых переходов (см., например, [Sanaei et al., 2014]). В работе [Yortsos, Stubos, 2001] проведено численное исследование влияния геометрии пор и относительной проницаемости на типы фазовых переходов, в [Shen et al., 2010] изучается влияние различных факторов на отклонение от закона Дарси и на выход газоконденсата в неравновесных системах. Обзоры работ по данной тематике представлены в [Григорьев и др., 2017; Ковалёв, Шеберстов, 2018].

Нужно отметить, что при значительном числе публикаций в указанной области исследований лишь в относительно небольшом количестве работ проводится сопоставление получаемых численных результатов с данными натурных и лабораторных измерений. Между тем численный анализ результатов лабораторных экспериментов представляется актуальным с точки зрения проверки адекватности модели и численного подхода, дает основу для сравнения различных моделей и оценки перспективы их использования для прогностических расчетов, позволяет понять, какие факторы являются наиболее существенным для реалистичного описания конкретных моделируемых процессов. Также обычно не все значения физико-химических параметров, входящих в математическую постановку задачи, известны, так что сравнение расчетных и экспериментальных данных позволяет получить эти неизвестные значения. В качестве примера можно назвать работу [Волохова и др., 2018], где на основе численного решения сформулированной стационарной системы уравнений получено согласие результатов компьютерного моделирования с экспериментальными данными из [Vo, 2010] по стабилизации прохождения двухкомпонентного газоконденсата через пористую среду. Отметим также работу [Зайченко и др., 2012], где измеренные на экспериментальной установке значения давления в разные моменты времени для трехкомпонентной газоконденсатной смеси сопоставляются с результатами численного моделирования, работу [Григорьев и др., 2019] по численному анализу фазового поведения изотермической газоконденсатной смеси при различных фильтрационных моделях пласта, работу [Glover, Luo, 2020] по численному и лабораторному исследованию пористости и проницаемости бинарных смесей, а также работу [Булгакова и др., 2006], где получена согласующаяся с опытными данными динамика перепадов давления и объема вытесненной нефти.

Предварительные результаты по компьютерному моделированию динамики извлечения многокомпонентной углеводородной смеси в режиме истощения на основе лабораторного эксперимента ВНИИГАЗ [Волков и др., 2016] были представлены в наших работах [Волохова и др., 2019; Volokhova et al., 2019]. В работе [Волохова и др., 2019] вычислительные эксперименты проведены в упрощенном случае, а именно — в приближении однородного пространственного распределения давления и плотности. В работе [Volokhova et al., 2019] разработанный подход обобщен на случай учета зависимости физических характеристик системы от координаты и получены согласующиеся с экспериментом результаты по распределению выхода углеводородов в зависимости от давления при температуре 25 °С. При этом, в связи с длительным временем счета, использовалась дискретная сетка с относительно крупными шагами по координате и по времени.

В настоящей работе, как и в [Волохова и др., 2019; Volokhova et al., 2019], за основу взята математическая модель, описываемая законом Дарси, законом неразрывности потоков и формулой Пенга – Робинсона для давления. Численное решение сформулированной в [Волохова и др., 2019] начально-граничной задачи для системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных реализовано в виде комплекса программ на базе C++ и Maple с применением технологии MPI для ускорения вычислений за счет параллелизма. Это позволило провести высокопроизводительное компьютерное моделирование и получить адекватное согласие численных результатов с полной совокупностью экспериментальных данных из [Волков и др., 2016] по выходу тяжелых и легких углеводородов в лабораторной модели пласта для температур 25 и 60 °С. С учетом особенностей лабораторного эксперимента расчеты проводились для пространственно одномерного случая. Путем фитирования к экспериментальным данным получены значения параметров, определяющих коэффициент межфазного перехода для моделируемой системы. Далее, с использованием этих значений проведены вычислительные эксперименты для пространственно двумерного случая, моделирующего тонкий газонесный пласт в приближении круговой симметрии. Показано, что динамика истощения пласта в окрестности скважины, через которую производится отбор газоконденсата, близка по своим характеристикам к динамике, наблюдаемой в лабораторной модели пласта.

В работе описаны особенности моделируемого лабораторного эксперимента [Волков и др., 2016], дана математическая постановка задачи, представлена вычислительная схема, представлены результаты тестовых расчетов с разным числом MPI-процессов, подтверждающие эффективность параллельной реализации, демонстрируются результаты компьютерного моделирования в сравнении с экспериментальными данными. Расчеты проведены на кластере HybriLIT Многофункционального информационно-вычислительного комплекса Лаборатории информационных технологий Объединенного института ядерных исследований.

## Особенности лабораторного эксперимента

В работе [Волков и др., 2016] представлены результаты экспериментов по лабораторной имитации процесса естественного истощения месторождения для двух различных моделей пласта. Целью экспериментального исследования являлось изучение влияния пористой среды на фазовое поведение газоконденсатной системы и на изменение компонентного состава при низких давлениях.

В эксперименте [Волков и др., 2016] лабораторная модель пласта (МП) представляет собой термостатический цилиндр с размещенной внутри узкой трубой (кернадержателем) диаметром 3 см и длиной 93.27 см. На начальном этапе эксперимента в трубу, заполненную пористым материалом, нагнетается при давлении 35 МПа девятикомпонентная углеводородная смесь, состоящая из  $\text{CH}_4$ ,  $\text{C}_3\text{H}_8$ ,  $\text{nC}_4\text{H}_{10}$ ,  $\text{nC}_6\text{H}_{14}$ ,  $\text{nC}_7\text{H}_{16}$ ,  $\text{nC}_9\text{H}_{20}$ ,  $\text{nC}_{10}\text{H}_{22}$ ,  $\text{nC}_{12}\text{H}_{26}$ ,  $\text{nC}_{16}\text{H}_{34}$  соответственно

в молярных концентрациях 87.01 %, 7.00 %, 1.11 %, 0.70 %, 0.86 %, 1.19 %, 0.94 %, 1.02 %, 0.17 %, и оба конца трубы закрываются. Далее, после установления в МП фазового равновесия один конец трубы приоткрывается, тем самым обеспечивается постепенный выход вещества через этот конец при сохранении постоянной скорости его расхода за счет регулирования темпа снижения давления не более 0.2 МПа/ч.

В эксперименте измерялся выход тяжелых ( $C_{5+}$ ) и легких ( $C_{2-4}$ ) углеводородов в жидкой и газовой фазах в зависимости от давления. Совокупность  $C_{5+}$  включает компоненты  $nC_6H_{14}$ ,  $nC_7H_{16}$ ,  $nC_9H_{20}$ ,  $nC_{10}H_{22}$ ,  $nC_{12}H_{26}$ ,  $nC_{16}H_{34}$  исследуемой углеводородной смеси, а совокупность  $C_{2-4}$  — компоненты  $C_3H_8$ ,  $nC_4H_{10}$ . Эксперименты проводились при двух значениях температуры с использованием двух типов пористого наполнителя: в эксперименте при  $T = 25$  °C использовалась терригенная смесь с коэффициентом пористости  $m = 0.1377$ ; в эксперименте при  $T = 60$  °C использовалась карбонатная смесь с пористостью  $m = 0.1844$ .

## Математическая постановка задачи

Как сказано во введении в общем случае динамический процесс фильтрации  $n$ -компонентной газоконденсатной смеси углеводородов через пористую среду описывается системой уравнений (см., например, [Басниев и др., 1993])

$$u_\alpha = -\frac{k_\alpha}{\mu_\alpha} \nabla P_\alpha, \quad (1a)$$

$$\frac{\partial \rho_{i\alpha}}{\partial t} + \nabla(u_\alpha \rho_{i\alpha}) = V_{i\alpha}. \quad (1b)$$

Здесь уравнение (1a) — закон Дарси, описывающий скорость течения потока, уравнение (1b) — закон неразрывности потоков. В процессе участвуют  $n$  компонент с номерами  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), которые находятся при давлении  $P_\alpha$  в  $\alpha$ -фазе, где  $\alpha = L$  соответствует жидкой фазе, а  $\alpha = G$  — газообразной фазе.

В системе (1)  $u_\alpha$  — линейная скорость течения в фазе  $\alpha$ ;  $V_{i\alpha}$  — скорость межфазного перехода  $i$ -й компоненты в фазе  $\alpha$ ;  $k_\alpha$  и  $\mu_\alpha$  — соответственно проницаемость и параметр вязкости фазы  $\alpha$ ;  $\rho_{i\alpha}$  — молярная плотность  $i$ -й компоненты в фазе  $\alpha$ , определяемая как локальное среднее по объему.

Внутри газа и жидкости давление описывается формулой Пенга–Робинсона [Peng, Robinson, 1976]:

$$P_\alpha = P_\alpha(v_\alpha) = \frac{RT}{v_\alpha - b_{m\alpha}} - \frac{a_{m\alpha}}{v_\alpha(v_\alpha + b_{m\alpha}) + b_{m\alpha}(v_\alpha - b_{m\alpha})}. \quad (2)$$

Здесь  $R$  — газовая постоянная,  $T$  — температура,  $v_\alpha$  — молярный объем с учетом пористости  $m$  и насыщенности  $S_\alpha$ :

$$v_\alpha = \frac{mS_\alpha}{\rho_\alpha}, \quad \rho_\alpha = \sum_{i=1}^n \rho_{i\alpha}. \quad (3)$$

Константы  $a_{m\alpha}$  и  $b_{m\alpha}$  определяются согласно [Лысов, Рыков, 2014; Брусиловский, 2002] следующими выражениями:

$$a_{m\alpha} = \frac{R^2 T^2}{P_\alpha} A_{m\alpha}, \quad b_{m\alpha} = \frac{RT}{P_\alpha} B_{m\alpha}, \quad (4)$$

$$A_{m\alpha} = \sum_{i,j=1}^n (1 - k_{ij})(A_{i\alpha} A_{j\alpha})^{1/2} C_{i\alpha} C_{j\alpha}, \quad B_{m\alpha} = \sum_{i=1}^n B_{i\alpha} C_{i\alpha}, \quad (5)$$

$$A_{i\alpha} = 0.4572355 \frac{P_{i\alpha}^r}{T_i^r} \left[ (0.37464 + 1.5422\omega_i - 0.02699\omega_i^2)(1 - (T_i^r)^{1/2}) + 1 \right]^2, \quad (6)$$

$$B_{i\alpha} = 0.077796074 \frac{P_{i\alpha}^r}{T_i^r}, \quad P_{i\alpha}^r = P_{i\alpha} / P_i^{\text{crit}}, \quad T_i^r = T / T_i^{\text{crit}}. \quad (7)$$

Здесь  $\omega_i$  — ацентрический фактор  $i$ -й компоненты,  $k_{ij}$  — коэффициенты бинарного взаимодействия молекул (см. [Лысов, Рыков, 2014; Директор и др., 2000]),  $P_i^{\text{crit}}$  и  $T_i^{\text{crit}}$  — критические давление и температура. Газонасыщенность  $S_G$  определяется как максимальный корень уравнения

$$P_G = P_G \left( \frac{mS_G}{\rho_G} \right) = P_L \left( \frac{m(1 - S_G)}{\rho_L} \right) + P_{\text{capillar}}, \quad S_G + S_L = 1, \quad 0 \leq S_\alpha \leq 1. \quad (8)$$

Мольные доли компонент в жидкой и газовой фазах  $C_{i\alpha}$  вычисляются как

$$C_{i\alpha} = \frac{\rho_{i\alpha}}{\rho_\alpha}. \quad (9)$$

Скорости межфазных переходов удовлетворяют условию

$$V_{iG} + V_{iL} = 0 \quad (10)$$

и определяются из следующего соотношения:

$$V_{i\alpha} = \eta_i (\phi_i^{\bar{\alpha}} - \phi_i^\alpha), \quad \text{где } \bar{G} = L, \bar{L} = G, \quad (11)$$

где  $\phi_i^L, \phi_i^G$  — химические потенциалы Гиббса  $i$ -й компоненты,  $\eta_i$  — коэффициент межфазного перехода. Для химических потенциалов используются формулы, выведенные в [Брусиловский, 2002] из выражения (2):

$$\frac{\phi_i^\alpha}{RT} = \ln(P_\alpha C_{i\alpha}) + \frac{B_{i\alpha}}{B_{m\alpha}} (Z_\alpha - 1) - \ln(Z_\alpha - B_{m\alpha}) + \quad (12)$$

$$+ \frac{A}{\sqrt{2}B_{m\alpha}} \left( \frac{\sum_{j=1}^n (1 - k_{ij})(A_{i\alpha}A_{j\alpha})^{1/2} C_{j\alpha}}{A_{m\alpha}} - \frac{B_{i\alpha}}{2B_{m\alpha}} \right) \times \quad (13)$$

$$\times \ln \left( \frac{Z_\alpha + (1 - \sqrt{2})B_{m\alpha}}{Z_\alpha + (1 + \sqrt{2})B_{m\alpha}} \right), \quad Z_\alpha = \frac{P_\alpha V_\alpha}{RT}.$$

Коэффициент межфазного перехода  $\eta_i$  зависит от многих факторов, в том числе от структуры породы и состава газоконденсатной смеси (см., например, [Кнаке, Странский, 1959]). Метод расчета этой величины для равновесных систем описан, например, в [Лысов, Рыков, 2014]. Варианты моделирования межфазного перехода в неравновесных процессах, предлагаемые разными авторами, рассмотрены в [Ковалёв, Шеберстов, 2018]. В настоящей работе для вычисления  $\eta_i$  используются соотношение, предполагающее пропорциональную зависимость этой величины от пористости среды  $m$ , а также взаимосвязь скорости межфазного перехода и размера молекул, входящих в газоконденсатную смесь:

$$\eta_i = \eta_0 M_i^\kappa \cdot m. \quad (14)$$

Здесь  $M_i$  — молярная масса  $i$ -компоненты,  $\eta_0$  и  $\kappa$  — константы, определяемые из сравнения с экспериментальными данными. Их значения даны в следующем разделе.

В эксперименте [Волков и др., 2016], где газоконденсатная смесь проходит через длинную трубу малого диаметра, наполненную пористым веществом, естественно рассматривать пространственно *одномерный* случай ( $d = 1$ ) единственной координатой  $x \in [0, L_{\text{max}}]$  вдоль длины трубы. При этом оператор дифференцирования в (1) будет иметь вид  $\nabla f = \frac{\partial}{\partial x} f$ .

В случае обобщения на *двумерный* случай ( $d = 2$ ) для моделирования тонкого газоносного пласта с круговой симметрией с учетом перехода в полярную систему координат для  $\nabla P_\alpha$  в (1a)

сохраняется формула  $\nabla f = \frac{\partial}{\partial x} f$ . Что касается выражения  $\nabla(u_\alpha \rho_{i\alpha})$  в (1b), здесь оператор дифференцирования принимает вид  $\nabla f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rf)$ , поскольку в приближении круговой симметрии ненулевой является только радиальная компонента.

В *одномерном* случае будем для определенности полагать, что правый конец трубы  $x = L_{\max}$  всегда закрыт, а извлечение газоконденсата производится через левый конец  $x = 0$ . Тогда краевое условие на закрытом (правом) конце для  $u_\alpha$  имеет вид  $u_\alpha|_{x=L_{\max}} = 0$ . Что касается левого конца  $x = 0$ , он также закрыт до момента  $t = 0$ . При  $t > 0$ , с учетом достигнутого по условиям эксперимента фазового равновесия и постоянного выхода вещества, граничное условие формулируется в виде  $(u_\alpha \rho_\alpha)|_{x=0} = q_\alpha|_{x=0}$ , где  $q_\alpha|_{x=0}$  — заданная константа. Начальные условия для функций  $\rho_{i\alpha}$  выбираются так, чтобы давление  $P$  в начальный момент времени  $t = 0$  составляло 35 МПа.

При моделировании плоского газоносного пласта в форме круга предполагается, что отбор газоконденсата происходит через стенку скважины радиусом  $r_0$ , расположенной в центре круга, в то время как выхода вещества через внешнюю границу  $r = r_0 + L_{\max}$  не происходит. Это дает основание в *двумерном* случае использовать для радиальной составляющей функции  $u_\alpha$  граничные условия, аналогичные вышеприведенным:  $u_\alpha|_{r=r_0+L_{\max}} = 0$  и  $(u_\alpha \rho_\alpha)|_{r=r_0} = q_\alpha|_{r=r_0}$ . Начальные условия выбираются так же, как в случае ( $d = 1$ ).

## Вычислительная схема и программная реализация

Сначала рассмотрим вычислительную схему для пространственно *одномерного* случая ( $d = 1$ ), соответствующего лабораторному эксперименту. Поскольку время  $t$  и координата  $x$  не входят явно в уравнения (1), переходим к условным единицам, полагая, в частности,  $x \in [0, 1]$ , т. е.  $L_{\max} = 1$ , где, как уже сказано выше, конец  $x = 1$  всегда закрыт, а через точку  $x = 0$  производится извлечение смеси.

Для численного решения системы уравнений (1), (9) вводится дискретная сетка по координате  $x$  вдоль длины МП с шагом  $h_x = 1/N$ , с  $N$  основными узлами  $x_k = h_x/2 + (k - 1) \cdot h_x$  ( $k = 1, \dots, N$ ) и с промежуточными узлами  $x_{k\pm 1/2} = x_k \pm h_x/2$ .

Разностные уравнения для системы (1), (9) в узлах  $x_k$  имеют вид

$$u_\alpha^{(k\pm 1/2)} = -\frac{k_\alpha}{\mu_\alpha} \frac{P_\alpha^{(k\pm 1)} - P_\alpha^{(k)}}{x_{k\pm 1} - x_k}, \tag{15a}$$

$$\frac{\partial \rho_{i\alpha}^{(k)}}{\partial t} + \frac{u_\alpha^{(k+1/2)} \rho_{i\alpha}^{(k+1/2)} - u_\alpha^{(k-1/2)} \rho_{i\alpha}^{(k-1/2)}}{(x_{k+1/2} - x_{k-1/2})} = V_{i\alpha}^{(k)}, \tag{15b}$$

$$\rho_{i\alpha}^{(k\pm 1/2)} = \frac{1}{2}(\rho_{i\alpha}^{(k)} + \rho_{i\alpha}^{(k\pm 1)}). \tag{15c}$$

Здесь  $u_\alpha^{(k)} = u(t, x_k)_\alpha$ ,  $\rho_{i\alpha}^{(k)} = \rho(t, x_k)_{i\alpha}$ ,  $k$  — номер узла по координате.

Отметим, что разностные уравнения (15) можно интерпретировать как моделирование исходного (пространственно одномерного) объекта в виде совокупности ячеек  $x \in [x_{k-1/2}, x_{k+1/2}]$ , в каждой из которых  $\rho_{i\alpha}^{(k)}$ ,  $P_\alpha^{(k)}$  и  $S_\alpha^{(k)}$  — соответственно средние значения плотности  $i$ -компонент, давления и насыщенности фазы  $\alpha$  внутри каждой ячейки, а  $\rho_{i\alpha}^{(k\pm 1/2)}$  и  $u_{i\alpha}^{(k\pm 1/2)}$  — соответственно плотность  $i$ -компонент на границах между ячейками и линейная скорость движения  $i$ -компонент через границы.

Система (15) с учетом граничных и начальных условий, сформулированных в конце предыдущего параграфа, представляет собой задачу Коши относительно значений функций  $u_\alpha$  и  $\rho_{i\alpha}^{(k)}$

в узлах дискретной сетки. Численное решение этой задачи осуществляется на основе явного метода Рунге–Кутты четвертого порядка (см., например, [Корн, Корн, 1973]). Программная реализация основана на комбинированном применении инструментов Maple, C++ и MPI. Ввод данных, фитирование и визуализация результатов выполнены на Maple, а, собственно, численное решение системы (15) написано на C++ с использованием технологии параллельного программирования MPI для высокопроизводительных вычислений. Схема распараллеливания дана в следующем разделе. Расчеты проводились на кластере HybriLIT Многофункционального информационно-вычислительного комплекса Лаборатории информационных технологий Объединенного института ядерных исследований.

Как и в предыдущих работах [Волохова и др., 2019; Volokhova et al., 2019], вычислительный эксперимент продолжался до тех пор, пока давление в результате истощения МП не достигнет атмосферного. Представленные ниже расчеты проводились с шагом по координате 0.02 и с шагом по времени 0.00001. В расчетах полагали  $P_G = P_L$ .

Значения параметров, отражающих физико-химические свойства углеводородов в составе исследуемой смеси, взяты из [Директор и др., 2000] и приведены в табл. 1.

Таблица 1. Физическо-химические характеристики компонент газоконденсатной смеси

$i$	Вещество	$P_i^{\text{crit}}$ (бар)	$T_i^{\text{crit}}$ (К)	$\omega_i$	$M_i$ (г/моль)
1	CH <sub>4</sub>	45.80	190.65	0.0074	16.042
2	C <sub>3</sub> H <sub>8</sub>	42.10	369.99	0.1542	44.094
3	nC <sub>4</sub> H <sub>10</sub>	37.47	425.16	0.2008	58.120
4	nC <sub>6</sub> H <sub>14</sub>	29.92	507.85	0.3007	86.172
5	nC <sub>7</sub> H <sub>16</sub>	27.01	540.16	0.3507	100.198
6	nC <sub>9</sub> H <sub>20</sub>	25.50	595.15	0.4478	128.250
7	nC <sub>10</sub> H <sub>22</sub>	20.86	619.15	0.4916	142.276
8	nC <sub>12</sub> H <sub>26</sub>	17.96	659.15	0.5807	170.328
9	nC <sub>16</sub> H <sub>34</sub>	14.06	725.15	0.7667	226.432

В формуле (14) коэффициента межфазного перехода константы  $\eta_0$  и  $\kappa$  варьировались с целью достижения адекватного воспроизведения экспериментальных данных.

Также фитировались отношения параметров вязкости и проницаемости в  $L$ - и  $G$ -фазах в уравнении (1a):  $\lambda_L = \frac{k_L}{\mu_L}$  и  $\lambda_G = \frac{k_G}{\mu_G}$ .

Наилучшее согласие с совокупностью экспериментальных данных, представленных в [Волков и др., 2016] для случая  $T = 25$  °С,  $m = 0.1377$ , получено при  $\eta_0 = 0.0017$ ,  $\kappa = 1.37$ ,  $\lambda_L = 0.00463 \cdot 10^{-7}$ ,  $\lambda_G = 2.07 \cdot 10^{-7}$ , а для случая  $T = 60$  °С,  $m = 0.1844$  — при  $\eta_0 = 0.0015$ ,  $\kappa = 1.58$ ,  $\lambda_L = 0.00233 \cdot 10^{-7}$ ,  $\lambda_G = 0.662 \cdot 10^{-7}$ .

Отметим, что при  $T = 25$  °С значения фитированных параметров согласуются с результатами [Volokhova et al., 2019], полученными при расчетах на более грубой сетке с шагом по координате 0.1 и шагом по времени 0.0001.

Подгонка параметров  $\eta_0$ ,  $\mu_\alpha$ ,  $\kappa$  достигалась минимизацией функционала  $\chi^2$  к совокупности трех наборов экспериментальных точек из [Волков и др., 2016] для величин  $M_{C_{5+}}^{\text{exp}}$ ,  $C_{2-4}^{\text{exp}}$ ,  $C_{5+}^{\text{exp}}$  при разных значениях давления  $P$ :

$$\chi^2 = \frac{1}{N_{M_{C_{5+}}^{\text{exp}}}} \chi_{M_{C_{5+}}^{\text{exp}}}^2 + \frac{1}{N_{C_{2-4}^{\text{exp}}}} \chi_{C_{2-4}^{\text{exp}}}^2 + \frac{1}{N_{C_{5+}^{\text{exp}}}} \chi_{C_{5+}^{\text{exp}}}^2, \quad (16)$$

где

$$\chi_{M_{C_{5+}}}^2 = \sum_{M_{C_{5+}}^{\text{exp}}} [\ln(M_{C_{5+}}) - \ln(M_{C_{5+}}^{\text{exp}})]^2, \quad (17a)$$

$$\chi_{C_{2-4}}^2 = \sum_{C_{2-4}^{\text{exp}}} [\ln(C_{2-4}) - \ln(C_{2-4}^{\text{exp}})]^2, \quad (17b)$$

$$\chi_{C_{5+}}^2 = \sum_{C_{5+}^{\text{exp}}} [\ln(C_{5+}) - \ln(C_{5+}^{\text{exp}})]^2. \quad (17c)$$

Расчет содержания тяжелых компонент в составе извлекаемой смеси при атмосферном давлении выполнен по формуле

$$M_{C_{5+}} = \frac{\sum_{\alpha} \sum_{i \in 5+} \frac{\rho_{i\alpha}}{\rho_{\alpha}} q_{\alpha} M_i}{\sum_{\alpha} q_{\alpha} Z_{0\alpha} \frac{RT}{P_0}}. \quad (18)$$

Здесь  $M_i$  — молярная масса,  $Z_{0\alpha} = \frac{P_{\alpha} v_{\alpha}}{RT}$  — коэффициенты сверхсжимаемости при атмосферном давлении  $P_{\alpha}(v_{\alpha}) = P_0 = 0.1$  МПа. Для расчета  $C_{2-4}$  и  $C_{5+}$  использовалась формула (9).

В случае обобщения схемы (15) на пространственно *двумерный* случай ( $d = 2$ ) в приближении круговой симметрии используется дискретная сетка вдоль радиальной координаты  $r$ , имеющая, как и в одномерном случае, основные узлы  $r_k = h_r/2 + (k - 1) \cdot h_r$  ( $k = 1, \dots, N$ ) и промежуточные узлы  $r_{k \pm 1/2} = r_k \pm h_r/2$ . Здесь  $h_r = 1/N$  — шаг по  $r$ ,  $N$  — количество основных узлов.

В этом случае разностные уравнения для системы (1), (9) в узлах  $r_k$  принимают вид

$$u_{\alpha}^{(k \pm 1/2)} = -\frac{k_{\alpha}}{\mu_{\alpha}} \frac{P_{\alpha}^{(k \pm 1)} - P_{\alpha}^{(k)}}{r_{k \pm 1} - r_k}, \quad (19a)$$

$$\frac{\partial \rho_{i\alpha}^{(k)}}{\partial t} + \frac{r_{k+1/2} u_{\alpha}^{(k+1/2)} \rho_{i\alpha}^{(k+1/2)} - r_{k-1/2} u_{\alpha}^{(k-1/2)} \rho_{i\alpha}^{(k-1/2)}}{(r_{k+1/2}^2 - r_{k-1/2}^2)/2} = V_{i\alpha}^{(k)}, \quad (19b)$$

$$\rho_{i\alpha}^{(k \pm 1/2)} = \frac{1}{2}(\rho_{i\alpha}^{(k)} + \rho_{i\alpha}^{(k \pm 1)}), \quad (19c)$$

где  $u_{\alpha}^{(k)} = u(t, r_k)_{\alpha}$ ,  $\rho_{i\alpha}^{(k)} = \rho(t, r_k)_{i\alpha}$ ,  $k$  — номер узла по радиальной координате  $r$ .

Как и в случае  $d = 1$ , решение задачи Коши, определяемой разностной системой (19) и граничными и начальными условиями в конце предыдущего параграфа, осуществлялось на основе явного метода Рунге–Кутты четвертого порядка. Использовались приведенные выше для случая  $d = 1$  значения параметров, вычисления продолжались до достижения внутри пласта атмосферного давления.

## Параллельная реализация

Параллельный алгоритм основан на разбиении совокупности узлов дискретной сетки по координате на сегменты, количество которых соответствует количеству MPI-процессов, задействованных при выполнении задачи. На каждом шаге по времени каждый MPI-процесс с номером  $P_M$  выполняет вычисления в узлах назначенного ему сегмента в соответствии с разностной схемой (15). Поскольку для вычисления производных в крайних узлах своего сегмента каждому  $P_M$ -процессу требуются результаты, полученные MPI-процессами с номерами  $P_M - 1$  и  $P_M + 1$

в крайних узлах своих сегментов, на каждом шаге по времени осуществляется обмен необходимыми данными между соседними процессами. Исключение составляют MPI-процессы с нулевым и максимальным номером: процесс с нулевым номером обменивается только с процессом номер 1, процесс с максимальным номером — только с процессом, имеющим номер на единицу меньше максимального. Существенный объем пересылок не позволяет рассчитывать на сверхвысокие ускорения вычислений. Тем не менее, как видно на рис. 1, даже при относительно небольшом количестве узлов дискретной сетки по координате ( $N = 50$ ) удается получить шестикратное уменьшение времени счета по сравнению с последовательными вычислениями. В целом этот результат согласуется с данными работы [Башашин и др., 2016], где аналогичная схема параллельной реализации метода Рунге–Кутты применена к начально-граничной задаче в рамках модели стека длинных джозефсоновских переходов. Можно ожидать, что увеличение числа узлов дискретной сетки по координате приведет к более высоким значениям ускорения, как это наблюдается в [Башашин и др., 2016].

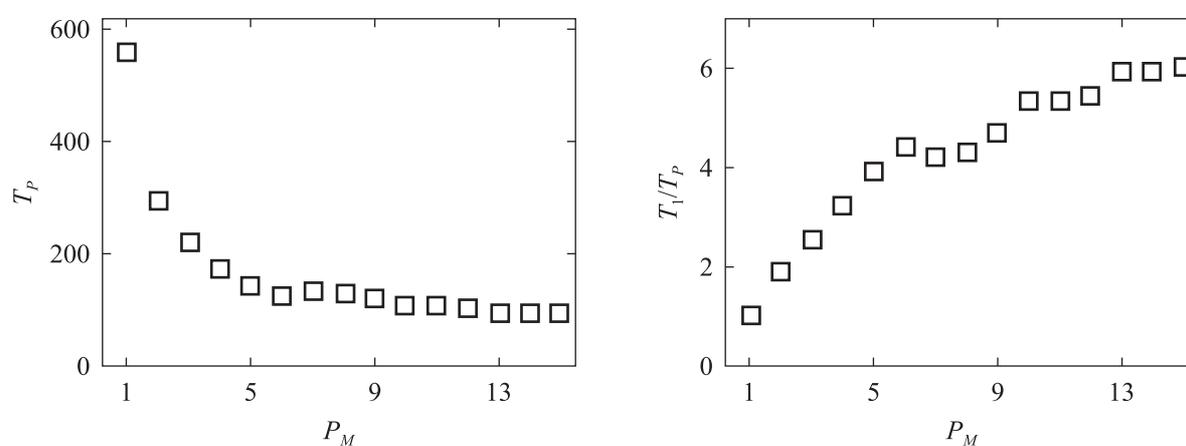


Рис. 1. Продолжительность вычислительного процесса  $T_p$  в секундах (слева) и ускорение вычислений  $T_1/T_p$  по сравнению с последовательным режимом счета (справа) в зависимости от количества  $P_M$  задействованных параллельных MPI-процессов при расчетах на дискретной сетке с числом узлов по координате  $N = 50$

## Результаты компьютерного моделирования

### Случай $d = 1$ : моделирование лабораторного эксперимента

На рис. 2 представлены графики выхода тяжелых и легких углеводородов в зависимости от давления в сравнении с данными лабораторного эксперимента [Волков и др., 2016] при  $T = 25$  °С и  $T = 60$  °С. Видно, что реализованный подход обеспечивает адекватное согласие с данными измерений, включая наблюдаемое в эксперименте некоторое повышение углеводородоотдачи при низком давлении. Как уже отмечалось в [Волохова и др., 2019; Volokhova et al., 2019], представленные зависимости являются результатом сложной динамики всего набора углеводородных компонент, фазовое поведение каждой из которых имеет свои особенности в режиме истощения. С понижением давления происходит переход разных компонент углеводородной смеси из жидкой фазы в газовую фазу, что приводит к «всплескам» на графиках плотности, представленных в этих работах. Поскольку «всплески» плотности происходят при разных давлениях и имеют разное распределение по координате, общая зависимость совокупной извлекаемости  $C_{5+}$  и  $C_{2-4}$  от давления на рис. 2 не имеет резких скачков.

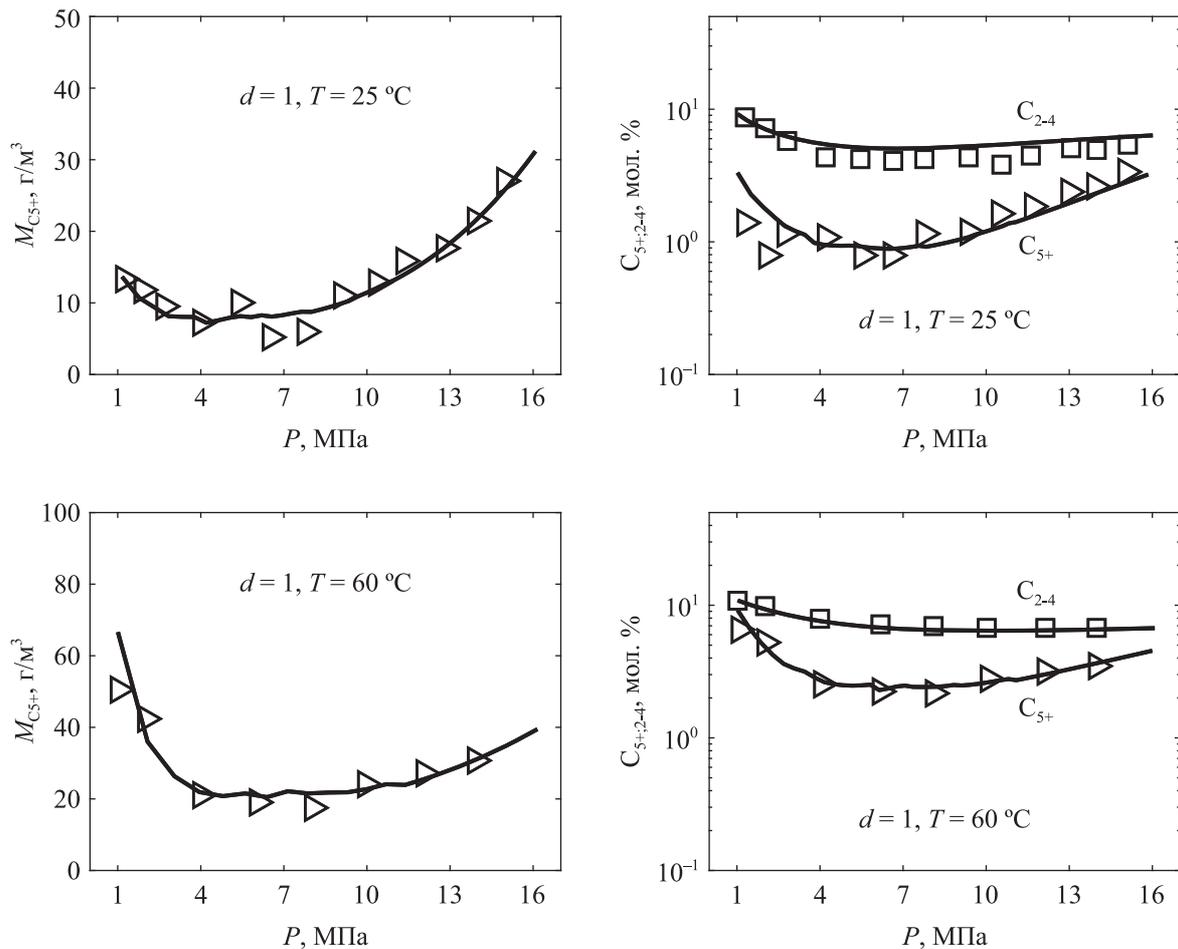


Рис. 2. Содержание ( $\text{г/м}^3$ ) тяжелых углеводородов  $\text{C}_{5+}$  (слева) и мольная доля в % тяжелых углеводородов  $\text{C}_{5+}$  и легких углеводородов  $\text{C}_{2-4}$  в зависимости от давления на выходе из МП в режиме истощения при температуре  $25\text{ }^\circ\text{C}$  (вверху) и  $60\text{ }^\circ\text{C}$  (внизу) в сравнении с экспериментальными данными [Волков и др., 2016]

### Случай $d = 2$ : моделирование отбора газоконденсата в центре тонкого газоносного слоя с круговой симметрией

На рис. 3 показаны результаты моделирования истощения тонкого газоносного пласта в приближении круговой симметрии в режиме, соответствующем условиям лабораторного эксперимента [Волков и др., 2016]. На графиках представлены те же расчетные кривые по выходу тяжелых ( $\text{C}_{5+}$ ) и легких ( $\text{C}_{2-4}$ ) углеводородов в зависимости от давления, что и на рис. 2 для пространственно одномерного случая. Из сравнения рис. 2 и 3 видно, что результаты моделирования при  $d = 1$  и  $d = 2$  близки между собой. Несмотря на некоторое расхождение расчетной кривой и экспериментальных данных на рис. 3 для температуры  $60\text{ }^\circ\text{C}$ , видно, что расчеты для случая  $d = 2$  в целом согласуются с экспериментальными данными, полученными в [Волков и др., 2016] для лабораторной МП. Это дает основание полагать, что в достаточно тонком реальном пласте в области с радиусом, близким к длине МП (около 1 м), и с физико-химическими параметрами, аналогичными лабораторной МП, динамика извлекаемости тяжелых ( $\text{C}_{5+}$ ) и легких ( $\text{C}_{2-4}$ ) углеводородов в зависимости от давления окажется близкой к наблюдаемой в лабораторных условиях.

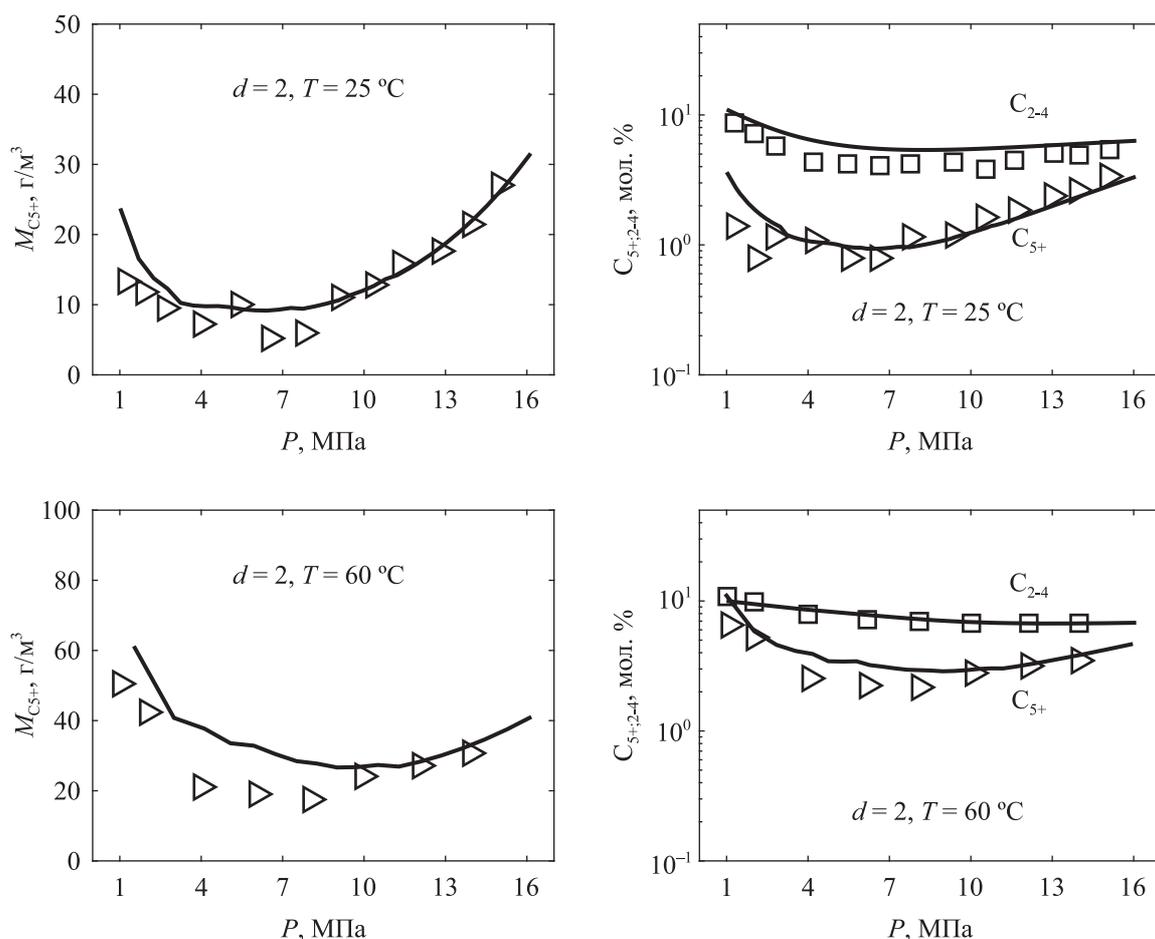


Рис. 3. Выход ( $\text{г/м}^3$ ) тяжелых углеводородов  $C_{5+}$  (слева) и мольная доля в % тяжелых углеводородов  $C_{5+}$  и легких углеводородов  $C_{2-4}$  (справа) в зависимости от давления при отборе из центра тонкого изотермического газоносного слоя с пористостью  $m = 0.1377$  при температуре  $25\text{ }^\circ\text{C}$  (вверху) и при температуре  $60\text{ }^\circ\text{C}$  и пористости  $m = 0.1844$  (внизу) в сравнении с данными лабораторного эксперимента [Волков и др., 2016]

## Заключение

В работе сформулирована математическая постановка задачи и разработана компьютерная Maple/C++/MPI-программа для моделирования процесса извлечения многокомпонентной углеводородной газоконденсатной смеси в режиме истощения. В результате компьютерного моделирования на основе разработанного подхода получено адекватное согласие с экспериментальными данными, полученными на лабораторной модели пласта во ВНИИГАЗ (Ухта) [Волков и др., 2016], по измерению выхода тяжелых и легких углеводородов в зависимости от давления при температурах  $25\text{ }^\circ\text{C}$  и  $60\text{ }^\circ\text{C}$ . Моделирование проводилось в пространственно одномерном и двумерном случаях. Вычислительные эксперименты подтверждают некоторое повышение извлекаемости углеводородов при низком давлении, происходящее за счет перехода части конденсата в газообразное состояние. Параллельная реализация в рамках созданного Maple/C++/MPI-кода, обеспечившая шестикратное ускорение вычислений, позволила эффективно провести компьютерное моделирование.

Отметим, что в связи с ориентацией в первую очередь на конкретный лабораторный эксперимент расчеты в данной работе проводились в изотермическом приближении. Не учитывались

также капиллярное давление и перенос энергии в системе. Полученное при этом количественное воспроизведение характеристик наблюдаемого в лабораторных условиях процесса позволяет заключить, что сформулированный подход является достаточным для моделирования основных особенностей моделируемого процесса и может быть взят за основу при рассмотрении реальных пластов. Безусловно, в дальнейших исследованиях требуется пошаговое усложнение модели с сопоставлением на каждом этапе получаемых результатов моделирования с ранее сделанными расчетами и с результатами лабораторных экспериментов и натурных измерений, что позволит оценить влияние различных факторов на механизмы фильтрации в газоносных слоях и в перспективе выработать рекомендации по оптимизации разработки газоконденсатных месторождений.

Авторы благодарят В. Н. Сокотущенко за полезные обсуждения.

## Список литературы (References)

- Басниев К. С., Кочина И. Н., Максимов В. М.* Подземная гидромеханика. — М.: Недра, 1993. — 416 с.  
*Basniev K. S., Kochina I. N., Maksimov V. M.* Podzemnaya gidromekhanika [Underground hydromechanics]. — Moscow: Nedra, 1993. — 416 p. (in Russian).
- Башишин М. В., Земляная Е. В., Рахмонов И. Р., Шукринов Ю. М., Атанасова П. Х., Волохова А. В.* Вычислительная схема и параллельная реализация для моделирования системы длинных джозефсоновских переходов // Компьютерные исследования и моделирование. — 2016. — Т. 8, вып. 4. — С. 593–604.  
*Bashashin M. V., Zemlyanaya E. V., Rakhmonov I. R., Shukrinov Yu. M., Atanasova P. H., Volokhova A. V.* Vychislitel'naya skhema i parallel'naya realizatsiya dlya modelirovaniya sistemy dlinnykh dzhozefsonovskikh perekhodov [Computational scheme and parallel implementation for modeling a system of long Josephson transitions] // Computer Research and Modeling. — 2016. — Vol. 8, No. 4. — P. 593–604 (in Russian).
- Брусиловский А. И.* Фазовые превращения при разработке месторождений нефти и газа. — М.: Грааль, 2002. — 575 с.  
*Brusilovsky A. I.* Fazovye prevrashcheniya pri razrabotke mestorozhdenii nefiti i gaza [Phase transformations in the development of oil and gas fields]. — Moscow: Grail, 2002. — 575 p. (in Russian).
- Булгакова Г. Т., Файзуллин Т. А., Жибер А. В.* Неравновесная двухфазная фильтрация // Математическое моделирование. — 2006. — Т. 18, вып. 10. — С. 19–38.  
*Bulgakova G. T., Fayzullin T. A., Zhiber A. V.* Neravnovesnaya dvukhfaznaya fil'tratsiya [Non-Equilibrium two-phase filtration] // Matematicheskoe modelirovanie [Mathematical modeling]. — 2006. — Vol. 18, No. 10. — P. 19–38 (in Russian).
- Волков А. Н., Лапшин В. И., Поляков А. В.* Моделирование фазового поведения газоконденсатной системы в пористой среде // Газовая промышленность. — 2016. — Вып. 10. — С. 26–31.  
*Volkov A. N., Lapshin V. I., Polyakov A. V.* Modelirovanie fazovogo povedeniya gazokondensatnoi sistemy v poristoi srede [Modeling of the phase behavior of a gas condensate system in a porous medium] // Gazovaya promyshlennost' [Gas industry]. — 2016. — Vol. 10. — P. 26–31 (in Russian).
- Волохова А. В., Земляная Е. В., Качалов В. В., Сокотущенко В. Н., Рихвицкий В. С.* Численное исследование фильтрации газоконденсатной смеси в пористой среде // Компьютерные исследования и моделирование. — 2018. — Т. 10, вып. 2. — С. 209–219.  
*Volokhova A. V., Zemlyanaya E. V., Kachalov V. V., Sokotuschenko V. N., Rikhvitsky V. S.* Chislennoe issledovanie fil'tratsii gazokondensatnoi smesi v poristoi srede [Numerical study of gas condensate mixture filtration in a porous medium] // Computer research and modeling. — 2018. — Vol. 10, No. 2. — P. 209–219 (in Russian).
- Волохова А. В., Земляная Е. В., Качалов В. В., Рихвицкий В. С., Сокотущенко В. Н.* Численное моделирование динамики извлечения многокомпонентной газоконденсатной углеводородной смеси в режиме истощения фильтрационной модели пласта // Геоинформатика. — 2019. — Вып. 3. — С. 27–33.  
*Volokhova A. V., Zemlyanaya E. V., Kachalov V. V., Rikhvitsky V. S., Sokotuschenko V. N.* Chislennoe modelirovanie dinamiki izvlecheniya mnogokomponentnoi gazokondensatnoi uglevodородnoi smesi v rezhime istoshcheniya fil'tratsionnoi modeli plasta [Numerical modeling of the dynamics of extraction of a multicomponent gas-condensate hydrocarbon mixture in the depletion mode of the reservoir filtration model] // Geoinformatika [Geoinformatics]. — 2019. — Vol. 3. — P. 27–33 (in Russian).

- Григорьев Б. А., Качалов В. В., Пазюк Ю. В., Сокотущенко В. Н.* Обзор работ по теории фильтрации углеводородных систем // Вести газовой науки. — 2017. — Т. 30, вып. 2. — С. 186–206.  
*Grigoriev B. A., Kachalov V. V., Pazyuk Yu. V., Sokotushchenko V. N.* Obzor rabot po teorii fil'tratsii uglevodorodnykh sistem [Review of works on the theory of filtration of hydrocarbon systems] // Vesti gazovoi nauki. — 2017. — Vol. 30, No. 2. — P. 186–206 (in Russian).
- Григорьев Е. Б., Качалов В. В., Сокотущенко В. Н.* Анализ фазового поведения газоконденсатной смеси при различных фильтрационных моделях пласта // Вести газовой науки. — 2019. — Вып. 1 (38). — С. 188–196.  
*Grigoriev E. B., Kachalov V. V., Sokotushchenko V. N.* Analiz fazovogo povedeniya gazokondensatnoi smesi pri razlichnykh fil'tratsionnykh modelyakh plasta [Analysis of the phase behavior of a gas-condensate mixture for different reservoir filtration models] // News of gas science. — 2019. — Iss. 1 (38). — P. 188–196 (in Russian).
- Директор Л. Б., Качалов В. В., Майков И. Л., Сквородько С. В.* Одномерная нестационарная модель двухфазной фильтрации газоконденсатной смеси // Препринт 2-441. — М.: ОИВТ РАН, 2000.  
*Director L. B., Kachalov V. V., Maikov I. L., Skovorodko S. V.* Odnomernaya nestatsionarnaya model' dvukhfaznoi fil'tratsii gazokondensatnoi smesi [One-Dimensional non-stationary model of two-phase filtration of a gas-condensate mixture] // Preprint, OIVT RAN, No. 2-441. — Moscow, 2000 (in Russian).
- Зайченко В. М., Майков И. Л., Смолкин А. К., Сокол Г. Ф., Торчинский В. М.* Экспериментальная установка для моделирования двухфазного течения углеводородных смесей в пористых пластах // Приборы и техника эксперимента. — 2012. — Вып. 5. — С. 95–98.  
*Zaichenko V. M., Maikov I. L., Smolkin A. K., Sokol G. F., Torchinsky V. M.* Eksperimental'naya ustanovka dlya modelirovaniya dvukhfaznogo techeniya uglevodorodnykh smesei v poristykh plastakh [Experimental setup for modeling two-phase flow of hydrocarbon mixtures in porous formations] // Pribory i tekhnika eksperimenta [Devices and experimental techniques]. — 2012. — Vol. 5. — P. 95–98 (in Russian).
- Качалов В. В., Сокотущенко В. Н., Земляная Е. В., Волохова А. В.* Обзор методов повышения компонентоотдачи при разработках газоконденсатных месторождений // Наука. Инновации. Технологии. — 2019. — Вып. 2. — С. 23–52.  
*Kachalov V. V., Sokotushchenko V. N., Zemlyanaya E. V., Volokhova A. V.* Obzor metodov povysheniya komponentootdachi pri razrabotkakh gazokondensatnykh mestorozhdenii [Review of methods for improving component recovery in gas condensate field development] // Nauka. Innovatsii. Tekhnologii [Science. Innovations. Technologies]. — 2019. — Vol. 2. — P. 23–52 (in Russian).
- Кнаке О., Странский И. Н.* Механизм испарения // Успехи физических наук. — 1959. — Т. LXVIII, вып. 2. — С. 261–305.  
*Knake O., Stransky I. N.* Mekhanizmi spareniya [Evaporation Mechanism] // Uspekhi fizicheskikh nauk [Successes of physical Sciences]. — 1959. — Vol. LXVIII, Iss. 2. — P. 261–305 (in Russian).
- Ковалёв А. Л., Шеберстов Е. В.* Численное моделирование локально-неравновесной фильтрации в газоконденсатных пластах // Вести газовой науки. — 2018. — Т. 37, вып. 5. — С. 65–171.  
*Kovalev A. L., Sheberstov E. V.* Chislennoe modelirovanie lokal'no-neravnovesnoi fil'tratsii v gazokondensatnykh plastakh [Numerical simulation of locally nonequilibrium filtration in gas-condensate reservoirs] // Vesti gazovoi nauki. — 2018. — Vol. 37, Iss. 5. — P. 65–171 (in Russian).
- Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1973. — 832 с.  
*Korn G., Korn T.* Mathematical Handbook for scientists and engineers. — New York: McGraw-Hill Book Co, 1968. (Russ. ed.: *Korn G., Korn T.* Spravochnik po matematike dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov. — Moscow: Nauka, 1973. — 832 p.
- Лысов В. Г., Рыков Ю. Г.* О вычислении фазового равновесия в задачах многокомпонентной фильтрации // Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. — М., 2014. — No. 94.  
*Lysov V. G., Rykov Yu. G.* O vychislenii fazovogo ravnovesiya v zadachakh mnogokomponentnoi fil'tratsii [On calculating phase equilibrium in multicomponent filtration problems] // Preprint, IPM im. M. V. Keldysh, Russian Academy of Sciences. — Moscow, 2014. — No. 94 (in Russian).
- Митлин В. С.* Подземная гидромеханика сложных углеводородных смесей. — М.: ВИНТИ, 1991. — Т. 4. — С. 154–222.  
*Mitlin V. S.* Podzemnaya gidromekhanika slozhnykh uglevodorodnykh smesei [Underground hydro-mechanics of complex hydrocarbon mixtures]. — Moscow: VINITI, 1991. — Vol. 4. — P. 154–222 (in Russian).
- Пономарева И. Н., Мордвинов В. А.* Подземная гидромеханика. — Пермь: Пермский государственный технический университет, 2009. — 103 с.

- Ponomareva I.N., Mordvinov V.A.* Podzemnaya gidromekhanika [Underground hydromechanics]. — Perm: Perm state technical University, 2009. — 103 p. (in Russian).
- Aziz K., Settary A.* Petroleum reservoir simulation. — London: Applied Science Publishers Ltd., 1979. — 476 p.
- Duyunova A., Lychagin V., Tychkov S.* Non-stationary adiabatic filtration of gases in porous media. — arXiv:1908.09316 [math-ph], 2019.
- Glover P.W.J., Luo M.* The Porosity and Permeability of Binary Grain Mixtures // Transport in Porous Media. — 2020. — Vol. 132. — P. 1–37.
- Henk H.* Fluids in Porous Media. Transport and phase changes. — Morgan & Claypool Publishers, 2016. — 89 p.
- Lychagin V., Roop M.* Steady filtration of Peng-Robinson gas in a porous medium. — arXiv:1904.08387 [math-ph], 2019.
- Masoodi R., Pillai K.M.* Wicking in Porous Materials: Traditional and Modern Modeling Approaches. — New York: CRC Press Taylor & Francis Group, 2013. — 380 p.
- Peng B.Y., Robinson D.B.* A New Two-Constant Equation of State, Industrial and Engineering Chemistry // Fundamentals 15. — 1976. — P. 59–64.
- Sanaei A., Jamili A., Calard J.* Effects of non-Darcy flow and pore proximity on gas condensate production from nanopore unconventional resources // Proc. of 5th International conference on porous media and their applications in science, engineering and industry (June 22–27, Kona, Hawaii, 2014), ECI Symposium Series 33, 2014.
- Shen P., Zhu Bin, Li Xian-Bin et al.* An experimental study of the influence of interfacial tension on water-oil two-phase relative permeability // Transp. Porous Med. — 2010. — No. 85. — P. 505–520.
- Sochi T.* Non-Newtonian flow in porous media // Polymer. — 2010. — Vol. 51. — P. 5007–5023.
- Vafai K.* Handbook of porous media (2nd edition). — New York: CRC Press Taylor & Francis Group, 2005. — 742 p.
- Vo H.X.* Composition Variation During Flow of Gas-Condensate Wells // A report submitted to the Department of energy resources engineering of Stanford University, 2010. — 441 p.
- Volokhova A.V., Zemlyanaya E.V., Kachalov V.V., Rikhvitsky V.S., Sokotushchenko V.N.* Simulation of a gas-condensate mixture passing through a porous medium in depletion mode // Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science. — 2019. — No. 27 (3). — P. 205–216.
- Yoresos Ya., Stubos A.K.* Athanassios stubos phase change in porous media // Current Opinion in Colloid and Interface Science. — 2001. — No. 6. — P. 208–216.

