

УДК: 517.958

Применимость приближения однократного рассеяния при импульсном зондировании неоднородной среды

П. А. Ворновских^a, А. Ким^b, И. В. Прохоров^c

Институт прикладной математики ДВО РАН,
Россия, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, д. 7

E-mail: ^a vornovskikh.polina@gmail.com, ^b pinkslot@mail.ru, ^c prokhorov@iam.dvo.ru

Получено 27.04.2020, после доработки — 11.06.2020.

Принято к публикации 23.06.2020.

В работе рассмотрена математическая модель, основанная на линейном интегро-дифференциальном уравнении Больцмана, описывающая перенос излучения в рассеивающей среде, подвергающейся импульсному облучению точечным источником. Сформулирована обратная задача для уравнения переноса, заключающаяся в определении коэффициента рассеяния по временно-угловому распределению плотности потока излучения в заданной точке пространства. При исследовании обратной задачи анализируется представление решения уравнения в виде ряда Неймана. Нулевой член ряда описывает нерассеянное излучение, первый член ряда — однократно рассеянное поле, остальные члены — многократно рассеянное поле. Для областей с небольшой оптической толщиной и невысоким уровнем рассеяния при нахождении приближенного решения уравнения переноса излучения широкое распространение получило приближение однократного рассеяния. При использовании этого подхода к задаче с дополнительными ограничениями на исходные данные получена аналитическая формула для нахождения коэффициента рассеяния. Для проверки адекватности полученной формулы построен и программно реализован весовой метод Монте-Карло решения уравнения переноса, учитывающий многократное рассеяние в среде и пространственно-временную сингулярность источника излучения. Применительно к проблемам высокочастотного акустического зондирования в океане проведены вычислительные эксперименты. Показано, что применение приближения однократного рассеяния оправдано по крайней мере на дальности зондирования порядка ста метров, причем основное влияние на погрешность формулы вносят двукратно и трехкратно рассеянные поля. Для областей большего размера приближение однократного рассеяния в лучшем случае дает лишь качественное представление о структуре среды, иногда не позволяя определить даже порядок количественных характеристик параметров взаимодействия излучения с веществом.

Ключевые слова: уравнение переноса излучения, обратная задача, коэффициент рассеяния, приближение однократного рассеяния, метод Монте-Карло

Работа выполнена в рамках государственного задания № 075-01095-20-00 при финансовой поддержке РФФИ (проект 20-01-00173).

UDC: 517.958

The applicability of the approximation of single scattering in pulsed sensing of an inhomogeneous medium

P. A. Vornovskikh^a, A. Kim^b, I. V. Prokhorov^c

Institute of Applied Mathematics FEB RAS,
7 Radio st., Vladivostok, 690041, Russia

E-mail: ^a vornovskikh.polina@gmail.com, ^b pinkslot@mail.ru, ^c prokhorov@iam.dvo.ru

Received 27.04.2020, after completion — 11.06.2020.

Accepted for publication 23.06.2020.

The mathematical model based on the linear integro-differential Boltzmann equation is considered in this article. The model describes the radiation transfer in the scattering medium irradiated by a point source. The inverse problem for the transfer equation is defined. This problem consists of determining the scattering coefficient from the time-angular distribution of the radiation flux density at a given point in space. The Neumann series representation for solving the radiation transfer equation is analyzed in the study of the inverse problem. The zero member of the series describes the unscattered radiation, the first member of the series describes a single-scattered field, the remaining members of the series describe a multiple-scattered field. When calculating the approximate solution of the radiation transfer equation, the single scattering approximation is widespread to calculate an approximate solution of the equation for regions with a small optical thickness and a low level of scattering. An analytical formula is obtained for finding the scattering coefficient by using this approximation for problem with additional restrictions on the initial data. To verify the adequacy of the obtained formula the Monte Carlo weighted method for solving the transfer equation is constructed and software implemented taking into account multiple scattering in the medium and the space-time singularity of the radiation source. As applied to the problems of high-frequency acoustic sensing in the ocean, computational experiments were carried out. The application of the single scattering approximation is justified, at least, at a sensing range of about one hundred meters and the double and triple scattered fields make the main impact on the formula error. For larger regions, the single scattering approximation gives at the best only a qualitative evaluation of the medium structure, sometimes it even does not allow to determine the order of the parameters quantitative characteristics of the interaction of radiation with matter.

Keywords: radiative transfer equation, inverse problem, scattering coefficient, single scattering approximation, Monte Carlo method

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2020, vol. 12, no. 5, pp. 1063–1079 (Russian).

The work was performed as part of the state assignment No. 075-01095-20-00 and funded by RFBR, project number 20-01-00173.

*Светлой памяти замечательного человека
Рэма Георгиевича Баранцева*

Введение

Вопросы разработки методов численного решения кинетических уравнений, описывающих физические процессы различной природы, уже достаточно давно являются предметом пристального внимания специалистов [Чандрасекар, 1950; Черчиньяни, 1978; Исимару, 1981; Гермогенова, 1986; Веденяпин, 2000; Val, 2005]. Это связано не только с решением прямых задач, но и с изучением обратных задач для кинетических уравнений, имеющих значительно большую прикладную ценность [Аниконов и др., 2000; Anikonov, 2001; Val, 2009]. Одним из типичных представителей кинетических уравнений является интегро-дифференциальное уравнение переноса излучения, называемое также линейным уравнением Больцмана. Область применения уравнения переноса достаточно обширна — от моделирования диффузии нейтронов и электронов в веществе до описания процессов распространения высокочастотного электромагнитного и акустического излучения в рассеивающих средах.

Предмет исследования данной работы — обратная задача для нестационарного уравнения переноса излучения, заключающаяся в нахождении коэффициента рассеяния по угловому распределению интенсивности излучения на всем промежутке времени в некоторой точке неограниченного пространства. Решение обратных задач для интегро-дифференциальных уравнений переноса в общем виде представляет собой достаточно сложную, порой неразрешимую математическую проблему [Аниконов и др., 2000]. Зачастую удается доказать единственность решения обратных задач только при некоторых ограничениях на исходные данные типа «малости» [Прилепко, Иванков, 1985]. Несмотря на указанные трудности, теория обратных задач для уравнений переноса излучения постоянно привлекает внимание специалистов. Развитие теории обратных задач идет как по пути создания новых методов их исследования, так и по пути усложнения существующих моделей переноса излучения [Val, 2009; Acosta, 2013; Wang, Zhou, 2018; Bellassoued, Boughanja, 2019; Dahmen et al., 2020; Li, Sun, 2020].

При конструктивном решении обратных задач такого рода широкое применение получили методы, базирующиеся на приближении однократного рассеяния. Использование приближения существенно облегчает исследование обратных задач, иногда позволяя получать аналитические решения [Florescu et al., 2010; Kleinboehl et al., 2011; Vornovskikh, Sushchenko, 2017; Moon et al., 2018]. Однако вопросы точности решения при применении приближения однократного рассеяния авторы стараются обходить стороной либо ограничиваются общими положениями.

Мы будем рассматривать нестационарное уравнение переноса излучения применительно к акустическому зондированию флуктуирующих неоднородных сред [Мендус, Постнов, 1993; Андреева, Белоусов, 1996; Val, 2005; Прохоров и др., 2011; Прохоров, Сушенко, 2015; Vornovskikh, Sushchenko, 2017]. Цель работы — проверить допустимость приближения однократного рассеяния для решения задачи определения коэффициента объемного рассеяния звука в океане. В статье [Андреева, Белоусов, 1996] проводился упрощенный анализ применимости приближения однократного рассеяния акустических волн в задачах о скоплениях гидробионтов в стационарном случае. С использованием весьма жестких ограничений было показано, что при достаточно большой плотности гидробионтов в воде и высокой частоте зондирующего излучения (порядка 10–100 кГц) приближение однократного рассеяния бывает недостаточным для решения прямых и обратных задач.

В настоящей работе изучаются вопросы допустимости приближения однократного в нестационарном случае. Нас в первую очередь будет интересовать не близость решения прямой задачи и его приближения, а близость решений соответствующих обратных задач. Для достижения поставленных целей построен метод Монте-Карло для численного нахождения решения прямой задачи. Его отличительной чертой является тот факт, что статистическим методом рассчитывается

плотность потока излучения, соответствующая кратности рассеяния не ниже двух, а однократное рассеянное излучение находится аналитически. Проведены вычислительные эксперименты, демонстрирующие влияние многократного рассеяния при реконструкции неизвестной среды.

Постановка задач

Нестационарный процесс распространения высокочастотных волновых полей в изотропно рассеивающей среде может быть описан следующим интегро-дифференциальным уравнением [Исимару, 1981; Мендус, Постнов, 1993; Андреева, Белоусов, 1996; Val, 2009; Прохоров и др., 2011; Прохоров, Сущенко, 2015]:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t} + \mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} I(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) + \mu I(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \frac{\sigma(\mathbf{r})}{2\pi} \int_{\Omega} I(\mathbf{r}, \mathbf{k}', t) d\mathbf{k}' + J(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t), \quad (1)$$

где $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$, $t \in [0, T]$ и волновой вектор \mathbf{k} принадлежит единичной окружности $\Omega = \{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^2: |\mathbf{k}| = 1\}$. Функция $I(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)$ интерпретируется как плотность потока энергии волны в момент времени t в точке \mathbf{r} , распространяющейся в направлении \mathbf{k} со скоростью c . Величины μ и σ имеют смысл коэффициентов затухания и рассеяния, а функция J описывает источники звукового поля.

Присоединим к уравнению (1) начальное условие

$$I(\mathbf{r}, \mathbf{k}, 0) = 0, \quad (\mathbf{r}, \mathbf{k}) \in G \times \Omega, \quad (2)$$

и будем предполагать, что функция J описывает точечный источник излучения, сосредоточенный в начале координат, излучающий в момент времени $t = 0$ импульс единичной мощности:

$$J(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \delta(\mathbf{r})\delta(t), \quad (3)$$

где δ — дельта-функция Дирака и $I^{\pm}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} I(\mathbf{r} \pm \epsilon \mathbf{k}, \mathbf{k}, t \pm \epsilon)$.

Предположение (3) о структуре источника излучения не только оправдано с физической точки зрения, но и позволяет существенно упростить исследование широкого круга задач математической физики [Романов, 1984; Кузнецов и др., 2009; Прохоров, Сущенко, 2015; Кан, Прохоров, 2018; Яровенко, Прохоров, 2018].

Прямой задачей для уравнения переноса (1) называется задача определения функции I из уравнения (1) и начального условия (2) при всех заданных коэффициентах (c , μ , σ , J). В работе предполагается, что c и μ — скалярные величины, а $\sigma(\mathbf{r})$ — кусочно-непрерывная функция в \mathbb{R}^2 , причем $\sigma(\mathbf{r}) \leq \mu$.

Наряду с прямой задачей будем рассматривать обратную задачу, заключающуюся в определении функции σ из соотношений (1), (2), (3) и дополнительного условия

$$I^+(0, \mathbf{k}, t) = P(\mathbf{k}, t), \quad (4)$$

в которых величины c , μ и функция P известны.

Представление решения прямой задачи в виде ряда Неймана

Решение задачи Коши (1), (2) эквивалентно решению уравнения интегрального типа, которое для неограниченной области имеет следующий вид [Прохоров, Сущенко, 2015; Прохоров, Сущенко, 2018]:

$$I(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \int_0^{ct} \exp(-\mu\tau) \left(\frac{\sigma(\mathbf{r} - \tau\mathbf{k})}{2\pi} \int_{\Omega} I\left(\mathbf{r} - \tau\mathbf{k}, \mathbf{k}', t - \frac{\tau}{c}\right) d\mathbf{k}' + J\left(\mathbf{r} - \tau\mathbf{k}, \mathbf{k}, t - \frac{\tau}{c}\right) \right) d\tau. \quad (5)$$

Решение уравнения (5) может быть найдено в виде ряда Неймана [Ким, Прохоров, 2018]

$$I(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t), \tag{6}$$

где

$$I_n(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \int_0^{ct} \exp(-\mu\tau) \frac{\sigma(\mathbf{r} - \tau\mathbf{k})}{2\pi} \int_{\Omega} I_{n-1}\left(\mathbf{r} - \tau\mathbf{k}, \mathbf{k}', t - \frac{\tau}{c}\right) d\mathbf{k}' d\tau, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{7}$$

$$I_0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \int_0^{ct} \exp(-\mu\tau) J\left(\mathbf{r} - \tau\mathbf{k}, \mathbf{k}, t - \frac{\tau}{c}\right) d\tau. \tag{8}$$

С учетом вида (3) источника излучения J сингулярная компонента I_0 ряда Неймана (6) содержит произведение дельта-функций, остальные члены ряда не содержат дельта-функций, и в этом смысле сумма $I_1 + I_2 + \dots$ представляет собой регулярную часть.

Вычислим первую компоненту ряда Неймана I_1 , чтобы впоследствии использовать ее в качестве начального приближения. Из соотношений (7), (8) получаем

$$\begin{aligned} I_1(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{ct} \exp(-\mu\tau) \sigma(\mathbf{r} - \tau\mathbf{k}) \times \\ &\times \int_{\Omega} \int_0^{ct-\tau} \exp(-\mu\tau') J\left(\mathbf{r} - \tau\mathbf{k} - \tau'\mathbf{k}', \mathbf{k}', t - \frac{\tau + \tau'}{c}\right) d\tau' d\mathbf{k}' d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_0^{ct} \exp(-\mu\tau) \sigma(\mathbf{r} - \tau\mathbf{k}) \times \\ &\times \int_{\Omega} \int_0^{\infty} \chi_{ct-\tau}(\tau') \exp(-\mu\tau') J\left(\mathbf{r} - \tau\mathbf{k} - \tau'\mathbf{k}', \mathbf{k}', t - \frac{\tau + \tau'}{c}\right) d\tau' d\mathbf{k}' d\tau, \end{aligned} \tag{9}$$

где $\chi_{ct-\tau}(\tau')$ – характеристическая функция интервала $[0, ct - \tau]$.

Сделаем замену $\mathbf{x} = \mathbf{r} - \tau'\mathbf{k}'$, определенную системой неявных уравнений

$$F_i(\mathbf{x}, \mathbf{k}', t) = x_i - r_i + \tau'k'_i = 0, \quad i = 1, 2, \quad F_3(\mathbf{k}') = |\mathbf{k}'| - 1 = 0$$

с Якобианом перехода

$$\left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial F_1}{\partial k'_1} & \frac{\partial F_2}{\partial k'_1} & \frac{\partial F_3}{\partial k'_1} \\ \frac{\partial F_1}{\partial k'_2} & \frac{\partial F_2}{\partial k'_2} & \frac{\partial F_3}{\partial k'_2} \\ \frac{\partial F_1}{\partial \tau'} & \frac{\partial F_2}{\partial \tau'} & \frac{\partial F_3}{\partial \tau'} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} \tau' & 0 & k'_1 \\ 0 & \tau' & k'_2 \\ k'_1 & k'_2 & 0 \end{array} \right\| = (\tau')|\mathbf{k}'| = |\mathbf{r} - \mathbf{x}|.$$

Из (9) находим

$$\begin{aligned} I_1(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{ct} \exp(-\mu\tau) \sigma(\mathbf{r} - \tau\mathbf{k}) \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{ct-\tau}(|\mathbf{r} - \mathbf{x}|) \frac{\exp(-\mu|\mathbf{r} - \mathbf{x}|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} \delta(\mathbf{x} - \tau\mathbf{k}) \delta\left(t - \frac{\tau + |\mathbf{r} - \mathbf{x}|}{c}\right) d\mathbf{x} d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{ct} \chi_{ct-\tau}(|\mathbf{r} - \tau\mathbf{k}|) \exp(-\mu\tau) \sigma(\mathbf{r} - \tau\mathbf{k}) \frac{\exp(-\mu|\mathbf{r} - \tau\mathbf{k}|)}{|\mathbf{r} - \tau\mathbf{k}|} \delta\left(t - \frac{\tau + |\mathbf{r} - \tau\mathbf{k}|}{c}\right) d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \chi_{ct-\tau}(\tau) \chi_{ct-\tau}(|\mathbf{r} - \tau\mathbf{k}|) \frac{\exp(-\mu(\tau + |\mathbf{r} - \tau\mathbf{k}|))}{|\mathbf{r} - \tau\mathbf{k}|} \sigma(\mathbf{r} - \tau\mathbf{k}) \delta\left(t - \frac{\tau + |\mathbf{r} - \tau\mathbf{k}|}{c}\right) d\tau. \end{aligned} \tag{10}$$

После замены переменных

$$s = (\tau + |\mathbf{r} - \tau\mathbf{k}|)/c = (\tau + \sqrt{(\mathbf{r} - \tau\mathbf{k}, \mathbf{r} - \tau\mathbf{k})})/c = (\tau + \sqrt{|\mathbf{r}|^2 - 2\tau(\mathbf{r}, \mathbf{k}) + \tau^2})/c, \quad (11)$$

$$\tau(\mathbf{r}, \mathbf{k}, s) = \frac{1}{2} \frac{(cs)^2 - |\mathbf{r}|^2}{cs - (\mathbf{r}, \mathbf{k})}, \quad \frac{\partial \tau(\mathbf{r}, \mathbf{k}, s)}{ds} = \frac{c((cs)^2 - 2cs(\mathbf{r}, \mathbf{k}) + |\mathbf{r}|^2)}{2(cs - (\mathbf{r}, \mathbf{k}))^2} = \frac{c}{2} \frac{|\mathbf{r} - cs\mathbf{k}|^2}{(cs - (\mathbf{r}, \mathbf{k}))^2}, \quad (12)$$

из (10) получаем

$$\begin{aligned} I_1(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \chi_{ct}(\tau(\mathbf{r}, \mathbf{k}, s)) \chi_{ct-\tau(\mathbf{r}, \mathbf{k}, s)}(cs - \tau(\mathbf{r}, \mathbf{k}, s)) \sigma(\mathbf{r} - \tau(\mathbf{r}, \mathbf{k}, s)\mathbf{k}) \frac{\exp(-\mu cs)}{|\mathbf{r} - \tau(\mathbf{r}, \mathbf{k}, s)\mathbf{k}|} \delta(t - s) \frac{\partial \tau}{ds} ds = \\ &= \chi_{ct}(\tau(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)) \chi_{ct-\tau(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)}(ct - \tau(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)) \frac{\exp(-\mu ct)}{2\pi(ct - \tau(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t))} \frac{\partial \tau(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)}{ds} \sigma(\mathbf{r} - \tau(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)\mathbf{k}) = \\ &= \chi_{ct}(\tau(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)) \frac{\exp(-\mu ct)}{2\pi} \frac{2(ct - (\mathbf{r}, \mathbf{k}))}{(ct)^2 - 2ct(\mathbf{r}, \mathbf{k}) + |\mathbf{r}|^2} \frac{c((ct)^2 - 2ct(\mathbf{r}, \mathbf{k}) + |\mathbf{r}|^2)}{2(ct - (\mathbf{r}, \mathbf{k}))^2} \sigma(\mathbf{r} - \tau(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)\mathbf{k}) = \\ &= \chi_{ct}(\tau(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)) \frac{c \exp(-\mu ct)}{2\pi(ct - (\mathbf{r}, \mathbf{k}))} \sigma(\mathbf{r} - \tau(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)\mathbf{k}). \end{aligned} \quad (13)$$

Формула (13), дающая аналитическое выражение для плотности потока однократно рассеянных частиц в любой точке \mathbf{r} , является базовой в версии метода Монте-Карло, рассматриваемой в следующем разделе. Имея аналитическое выражение для функции I_1 , найдем остальные I_n . При $n = 2$ получаем

$$\begin{aligned} I_2(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) &= \int_0^{ct} \exp(-\mu\tau_1) \frac{\sigma(\mathbf{r} - \tau_1\mathbf{k})}{2\pi} \int_{\Omega} I_1\left(\mathbf{r} - \tau_1\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, t - \frac{\tau_1}{c}\right) d\mathbf{k}_1 d\tau_1 = \\ &= \int_0^{ct} \int_{\Omega} \exp(-\mu\tau_1) \exp(-\mu(ct - \tau_1)) \sigma(\mathbf{r}_1) \sigma(\mathbf{r}_1 - \tau(\mathbf{r}_1, \mathbf{k}_1, t_1)\mathbf{k}_1) \frac{c\chi_{ct_1}(\tau(\mathbf{r}_1, \mathbf{k}_1, t_1)) d\mathbf{k}_1 d\tau_1}{(2\pi)^2(ct_1 - (\mathbf{r}_1, \mathbf{k}_1))} = \\ &= \frac{c \exp(-\mu ct)}{(2\pi)^2} \int_0^{ct} \int_{\Omega} \chi_{ct_1}(\tau(\mathbf{r}_1, \mathbf{k}_1, t_1)) \frac{\sigma(\mathbf{r}_1) \sigma(\bar{\mathbf{r}}_1)}{ct_1 - (\mathbf{r}_1, \mathbf{k}_1)} d\mathbf{k}_1 d\tau_1, \end{aligned}$$

где $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} - \tau_1\mathbf{k}$, $\bar{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{r}_1 - \tau(\mathbf{r}_1, \mathbf{k}_1, t_1)\mathbf{k}_1$, $t_1 = t - \tau_1/c$. Неравенство $\tau(\mathbf{r}_1, \mathbf{k}_1, t_1) > 0$ справедливо при $ct_1 > |\mathbf{r}_1|$, поэтому $\tau_1 < \tau(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)$. Это обстоятельство с учетом определения функции χ_{ct} предопределяет уменьшение интервала интегрирования в предыдущем выражении для функции I_2 . Следовательно,

$$I_2(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \frac{c \exp(-\mu ct)}{(2\pi)^2} \int_0^{\tau(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)} \int_{\Omega} \frac{\sigma(\mathbf{r}_1) \sigma(\bar{\mathbf{r}}_1)}{ct_1 - (\mathbf{r}_1, \mathbf{k}_1)} d\mathbf{k}_1 d\tau_1. \quad (14)$$

Из (14) получим выражение для функции I_3 :

$$\begin{aligned} I_3(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) &= \int_0^{ct} \int_{\Omega} \exp(-\mu\tau_1) \sigma(\mathbf{r}_1) \int_{\Omega} I_2(\mathbf{r}_2, \mathbf{k}_2, t_2) d\mathbf{k}_2 d\tau_2 d\mathbf{k}_1 d\tau_1 = \\ &= \frac{c \exp(-\mu ct)}{(2\pi)^3} \int_0^{\tau(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)} \int_{\Omega} \int_0^{\tau(\mathbf{r}_1, \mathbf{k}_1, t_1)} \int_{\Omega} \frac{\sigma(\mathbf{r}_1) \sigma(\mathbf{r}_2) \sigma(\bar{\mathbf{r}}_2)}{ct_2 - (\mathbf{r}_2, \mathbf{k}_2)} d\mathbf{k}_2 d\tau_2 d\mathbf{k}_1 d\tau_1, \end{aligned} \quad (15)$$

где $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 - \tau_2 \mathbf{k}_1$, $\bar{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{r}_2 - \tau(\mathbf{r}_2, \mathbf{k}_2, t_2) \mathbf{k}_2$, $t_2 = t_1 - \tau_2/c$. В общем случае для произвольного $n \geq 3$ выражения для функций I_n можно записать в следующем виде:

$$I_n(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \frac{c \exp(-\mu ct)}{(2\pi)^n} \int_0^{\tau(\mathbf{r}_0, \mathbf{k}_0, t_0)} \int_{\Omega} \dots \int_0^{\tau(\mathbf{r}_{n-2}, \mathbf{k}_{n-2}, t_{n-2})} \int_{\Omega} \prod_{i=1}^{n-1} \sigma(\mathbf{r}_i) \times \\ \times \frac{\sigma(\bar{\mathbf{r}}_{n-1})}{ct_{n-1} - (\mathbf{r}_{n-1}, \mathbf{k}_{n-1})} d\mathbf{k}_{n-1} d\tau_{n-1} \dots d\mathbf{k}_1 d\tau_1, \quad (16)$$

где $\bar{\mathbf{r}}_{n-1} = \mathbf{r}_{n-1} - \tau(\mathbf{r}_{n-1}, \mathbf{k}_{n-1}, t_{n-1}) \mathbf{k}_{n-1}$ и

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{i-1} - \tau_i \mathbf{k}_{i-1}, \quad \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}, \quad \mathbf{k}_0 = \mathbf{k}, \quad t_i = t_{i-1} - \tau_i/c, \quad t_0 = t, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Из представления (3) для источника излучения вытекает $I_0^+(0, \mathbf{k}, t) = 0$, поэтому решение задачи Коши в точке $\mathbf{r} = 0$ может быть найдено в виде ряда Неймана:

$$I^+(0, \mathbf{k}, t) = I_1^+(0, \mathbf{k}, t) + \frac{c \exp(-\mu ct)}{2\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^{\tau(\mathbf{r}_0, \mathbf{k}_0, t_0)} \int_{\Omega} \dots \int_0^{\tau(\mathbf{r}_{n-2}, \mathbf{k}_{n-2}, t_{n-2})} \int_{\Omega} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{\sigma(\mathbf{r}_i)}{2\pi} \times \\ \times \frac{\sigma(\bar{\mathbf{r}}_{n-1})}{ct_{n-1} - (\mathbf{r}_{n-1}, \mathbf{k}_{n-1})} d\mathbf{k}_{n-1} d\tau_{n-1} \dots d\mathbf{k}_1 d\tau_1. \quad (17)$$

В (17) в первом члене суммы ($n = 2$) интегрирование осуществляется только по переменным \mathbf{k}_1, τ_1 точно так же, как в соотношении (14).

Метод Монте-Карло для решения прямой задачи

Для вычисления многократных интегралов в (17) воспользуемся методом Монте-Карло [Михайлов, Медведев, 2011; Прохоров, Жуплев, 2013; Пригарин, 2016; Kim, Prokhorov, 2016; Ким, Прохоров, 2018]. Обозначим через $\mathbb{E}[\Theta]$ математическое ожидание случайной величины Θ , тогда для функций I_n в точке $(\mathbf{r}_0, \mathbf{k}_0, t_0)$ можно записать следующие выражения:

$$I_1^+(\mathbf{r}_0, \mathbf{k}_0, t_0) = \frac{c \exp(-\mu ct_0)}{2\pi} \frac{\sigma(\bar{\mathbf{r}}_0)}{ct_0 - (\mathbf{r}_0, \mathbf{k}_0)}, \quad (18)$$

$$I_n^+(\mathbf{r}_0, \mathbf{k}_0, t_0) = \frac{c \exp(-\mu ct_0)}{2\pi} \mathbb{E} \left[\frac{\sigma(\bar{\mathbf{r}}_{n-1})}{ct_{n-1} - (\mathbf{r}_{n-1}, \mathbf{k}_{n-1})} \prod_{i=1}^{n-1} \sigma(\mathbf{r}_i) \tau(\mathbf{r}_{i-1}, \mathbf{k}_{i-1}, t_{i-1}) \right], \quad n \geq 2. \quad (19)$$

В выражениях (18), (19) точки траектории

$$(\mathbf{r}_0, \mathbf{k}_0, t_0), (\mathbf{r}_1, \mathbf{k}_1, t_1), \dots, (\mathbf{r}_{n-1}, \mathbf{k}_{n-1}, t_{n-1}) \quad (20)$$

определяются следующим образом:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{i-1} - \tau_i \mathbf{k}_{i-1}, \quad t_i = t_{i-1} - \tau_i/c, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad \bar{\mathbf{r}}_{n-1} = \mathbf{r}_{n-1} - \tau(\mathbf{r}_{n-1}, \mathbf{k}_{n-1}, t_{n-1}) \mathbf{k}_{n-1}, \quad (21)$$

где \mathbf{k}_i — случайный вектор, равномерно распределенный на единичной окружности Ω ; τ_i — случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0, \tau(\mathbf{r}_{i-1}, \mathbf{k}_{i-1}, t_{i-1})]$.

С учетом соотношений (18), (19) выражение для функции $I^+(0, \mathbf{k}, t)$ принимает вид

$$I^+(\mathbf{r}_0, \mathbf{k}_0, t_0) = \sum_{n=1}^{\infty} I_n^+(\mathbf{r}_0, \mathbf{k}_0, t_0) = I_1^+(\mathbf{r}_0, \mathbf{k}_0, t_0) + \frac{c \exp(-\mu ct_0)}{2\pi} \mathbb{E} \left[\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sigma(\bar{\mathbf{r}}_{n-1})}{ct_{n-1} - (\mathbf{r}_{n-1}, \mathbf{k}_{n-1})} \theta_{n-1} \right], \quad (22)$$

где случайные величины θ_n определяются рекуррентным образом:

$$\theta_n = \theta_{n-1} \sigma(\mathbf{r}_n) \tau(\mathbf{r}_{n-1}, \mathbf{k}_{n-1}, t_{n-1}), \quad \theta_0 = 1, \quad n = 1, 2, \dots$$

При вычислении суммы в (22) ограничимся N слагаемыми, что соответствует учету всех актов рассеяния в среде порядка не выше чем N . Тогда схема вычисления плотности потока I , отвечающей усеченной сумме ряда Неймана (22), приобретает следующий вид. Строится траектория (20) и вычисляется случайная величина

$$\Theta_N = \frac{c \exp(-\mu c t_0)}{2\pi} \sum_{n=1}^N \frac{\sigma(\bar{\mathbf{r}}_{n-1})}{c t_{n-1} - (\mathbf{r}_{n-1}, \mathbf{k}_{n-1})} \theta_{n-1}. \quad (23)$$

Повторяя описанную процедуру M раз, получим выборку размером M для случайной величины Θ_N . Среднее значение выборки дает нам оценку для математического ожидания случайной величины Θ_N и, следовательно, приближенное значение I в точке $(\mathbf{r}_0, \mathbf{k}_0, t_0)$.

Решение обратной задачи в приближении однократного рассеяния и численный анализ искажений, обусловленных многократным рассеянием

В точке $\mathbf{r} = 0$ функция $\tau(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = ct/2$, поэтому формула (18) для плотности однократно рассеянного потока излучения приобретает вид

$$I_1^+(0, \mathbf{k}, t) = \frac{\exp(-\mu c t)}{2\pi t} \sigma\left(-\frac{ct}{2}\mathbf{k}\right). \quad (24)$$

При заданном $I_1^+(0, \mathbf{k}, t)$ из (24) можно найти функцию σ . Действительно, при $\mathbf{k} = -\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$ и $t = \frac{2|\mathbf{r}|}{c}$ из соотношения (24) получаем

$$\sigma(\mathbf{r}) = I_1^+\left(0, -\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}, \frac{2|\mathbf{r}|}{c}\right) \left(\frac{c \exp(-2\mu|\mathbf{r}|)}{4\pi|\mathbf{r}|}\right)^{-1}. \quad (25)$$

Формула (25) дает явное решение обратной задачи в приближении однократного рассеяния [Vor-novskikh, Sushchenko, 2017].

Согласно условию (4) в постановке обратной задачи, считается известным полный поток излучения $P(\mathbf{k}, t) = I^+(0, \mathbf{k}, t)$ в точке $\mathbf{r} = 0$, поэтому вычисление функции $\sigma(\mathbf{r})$ по формуле

$$\sigma(\mathbf{r}) = P\left(-\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}, \frac{2|\mathbf{r}|}{c}\right) \left(\frac{c \exp(-2\mu|\mathbf{r}|)}{4\pi|\mathbf{r}|}\right)^{-1} \quad (26)$$

приведет к искажениям томографических изображений коэффициента рассеяния. Основная цель настоящего параграфа — это провести количественный и качественный анализ искажений при расчете функции σ по формуле (25) в зависимости от исходных данных задачи. Прежде всего — от уровня рассеяния в среде, дальности зондирования, размера и взаимного расположения включений.

Для удобства описания численных результатов обозначим через σ_n коэффициент объемного рассеяния, вычисляемый по формуле

$$\sigma_n(\mathbf{r}) = P_n\left(-\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}, \frac{2|\mathbf{r}|}{c}\right) \left(\frac{c \exp(-2\mu|\mathbf{r}|)}{4\pi|\mathbf{r}|}\right)^{-1}, \quad (27)$$

где P_n — решение уравнения переноса излучения в приближении n -кратного рассеяния, вычисляемое по формулам (18), (19) в точке $(0, 0)$. Таким образом, согласно (25) $\sigma_n = \sigma$ только при $n = 1$, а остальные функции σ_n , $n \geq 2$, представляют собой приближения коэффициента σ , искаженные влиянием многократного рассеяния в среде.

Для количественного и качественного анализа модельных томографических изображений были проведены численные эксперименты с исходными данными, которые соответствуют описанию процесса акустического зондирования морской среды импульсным источником на частоте порядка 100 кГц [Прохоров, Сущенко, 2015]. Область зондирования точечным источником звука, сосредоточенным в начале координат, имела размеры $160 \text{ м} \times 80 \text{ м}$ ($r_1 \in [-80, 80]$, $r_2 \in [0, -80]$). Скорость звука и коэффициент затухания имели следующие значения: $c = 1500 \text{ м/с}$, $\mu = 0.018 \text{ м}^{-1}$. Отношение σ/μ в основной водной среде составляло 0.1 [Мендус, Постнов, 1993], а во включениях менялось в диапазоне от 0 до 1. На рис. 1 в графическом виде представлена карта значений коэффициента рассеяния в области зондирования. Большим значениям функции σ отвечают более светлые оттенки серого цвета. Напомним, что в силу (25) и (27) значения функций σ и σ_1 совпадают.

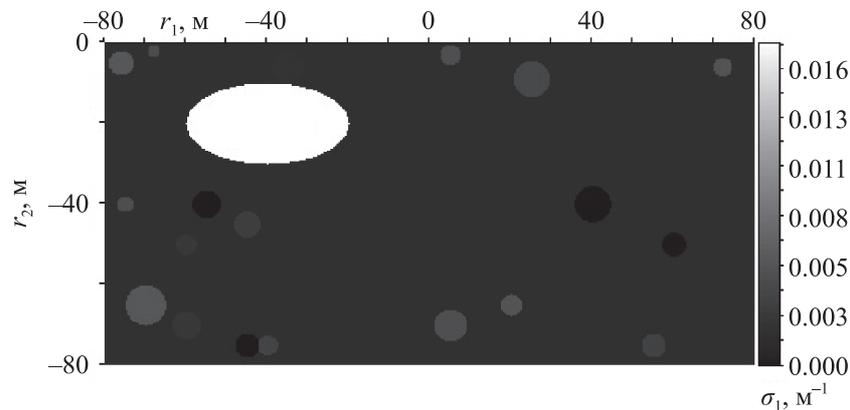


Рис. 1. Карта распределения функции $\sigma_1(r_1, r_2)$ при облучении точечным источником, сосредоточенным в точке с координатами $(0, 0)$, области размером $160 \text{ м} \times 80 \text{ м}$, где $r_1 \in [-80, 80]$, $r_2 \in [0, -80]$. В приближении однократного рассеяния функция σ_1 является точным решением обратной задачи и совпадает с коэффициентом объемного рассеяния σ . Справа приведена полутоновая шкала значений функции σ_1

Количественной оценкой качества изображений, получаемых при моделировании процесса излучения с учетом рассеяния n -ой кратности, была выбрана нормированная среднеквадратичная ошибка:

$$\varepsilon_n = \sqrt{\frac{\sum_i \sum_j (\sigma_n(r_{1,i}, r_{2,j}) - \sigma(r_{1,i}, r_{2,j}))^2}{\sum_i \sum_j \sigma^2(r_{1,i}, r_{2,j})}}, \quad (28)$$

достаточно адекватно отражающая качество изображений в целом.

При вычислении функции $P\left(-\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}, \frac{2|\mathbf{r}|}{c}\right)$ с помощью описанного в предыдущем разделе алгоритма Монте-Карло мы разыгрывали 200 траекторий для каждой точки $\mathbf{r} = (r_{1,i}, r_{2,j})$ на сетке размером 400×200 . Выбор такого сравнительно небольшого числа траекторий осуществлялся отчасти экспериментально, исходя из условия монотонной стабилизации интегральной ошибки ε_n при достаточно больших n . То есть количество реализаций M случайной величины Θ_n выбиралось так, чтобы обеспечить монотонное убывание последовательности $|\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}|$, $n = 2, 3, \dots$. Традиционные способы определения числа моделируемых траекторий, например путем построения доверительных интервалов для случайной величины Θ_n , не всегда удобны при решении обратных задач. Отметим, что вычислительная сложность алгоритма решения обратной задачи невысокая, поскольку для нахождения ее решения фактически используется явная формула. Трудоемкая часть экспериментов заключалась в численном решении прямой задачи для уравнения переноса излучения. В зависимости от исходных данных эксперимента на решение прямой

задачи методом Монте-Карло уходило от часа до трех часов времени работы программы на персональном компьютере. При решении задачи акустической томографии на практике расчет функции P проводить не нужно. Она известна из результатов физических измерений акустического поля с помощью многоканальных приемных антен.

На рис. 2, 3 представлены результаты восстановления функций σ_n , $n = 2, 5$, по формуле (27). Несмотря на появление «засветки» от самого большого сильно рассеивающего включения ($\sigma/\mu = 1$), на томографических изображениях можно достаточно четко различить восстанавливаемую структуру среды. Изображения для функций σ_3 и σ_4 качественно не отличались от изображений для коэффициентов σ_2 и σ_5 , поэтому мы не стали их приводить.

Таблица 1 содержит вычисленные значения нормированных среднеквадратичных ошибок ε_n в зависимости от n . Из таблицы видно, что ошибка увеличивается с ростом n , достигая значения 0.534, причем для $n > 3$ рост ошибок ε_n очень быстро стабилизируется. Это свидетельствует о том, что основной вклад в погрешность восстановления функции σ оказывает паразитное влияние двукратно и трехкратно рассеянное поле.

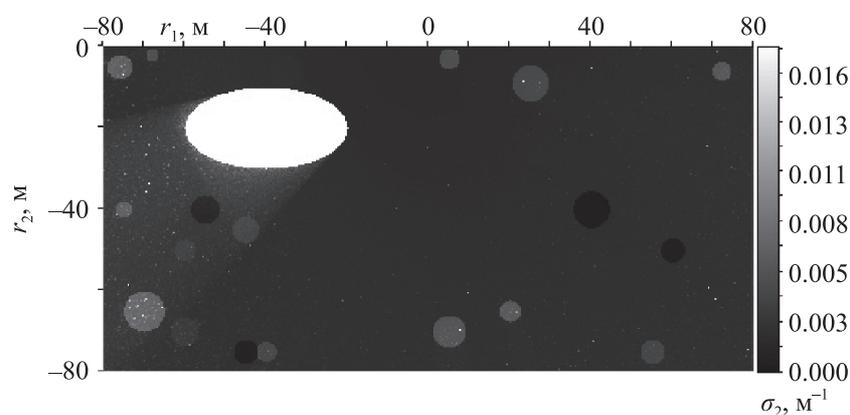


Рис. 2. Карта распределения функции $\sigma_2(r_1, r_2)$ при облучении точечным источником в точке $(0, 0)$. Функция σ_2 является приближенным решением обратной задачи. Отклонение функции σ_2 от точного решения σ обусловлено влиянием двукратно рассеянного поля, не учитываемого в приближении однократно рассеяния. Справа приведена шкала значений функции σ_2

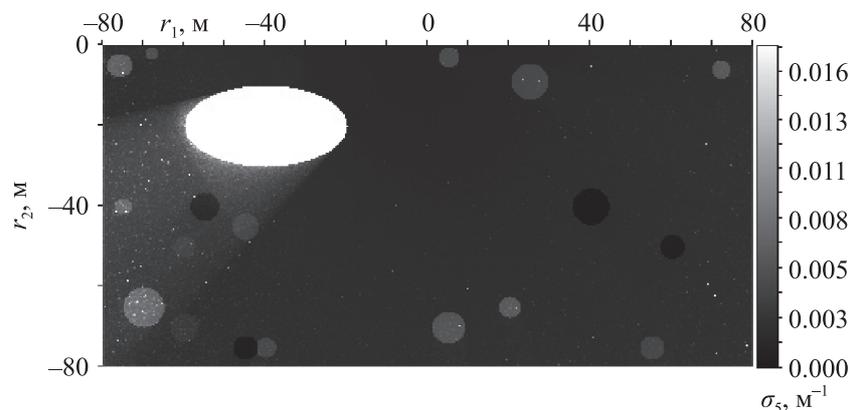


Рис. 3. Карта распределения функции $\sigma_5(r_1, r_2)$ при облучении точечным источником. Отклонение приближенного решения обратной задачи σ_5 от точного σ обусловлено влиянием многократно рассеянного поля с кратностью рассеяния 2, 3, 4, 5. Качественная картина восстановления функции σ_5 близка к графическому изображению функции σ_2

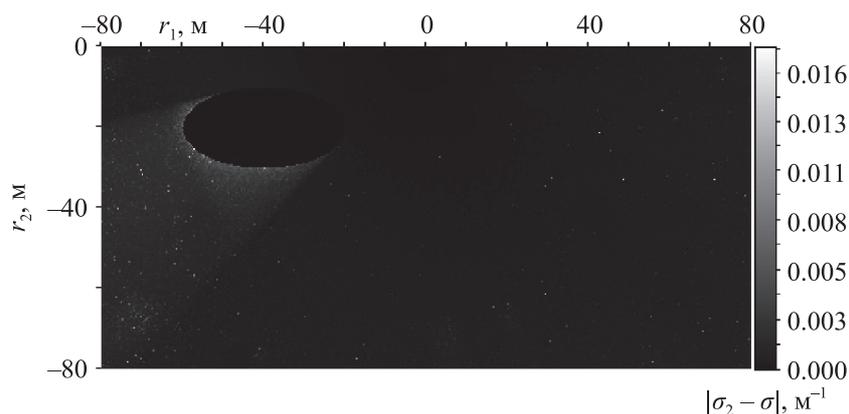
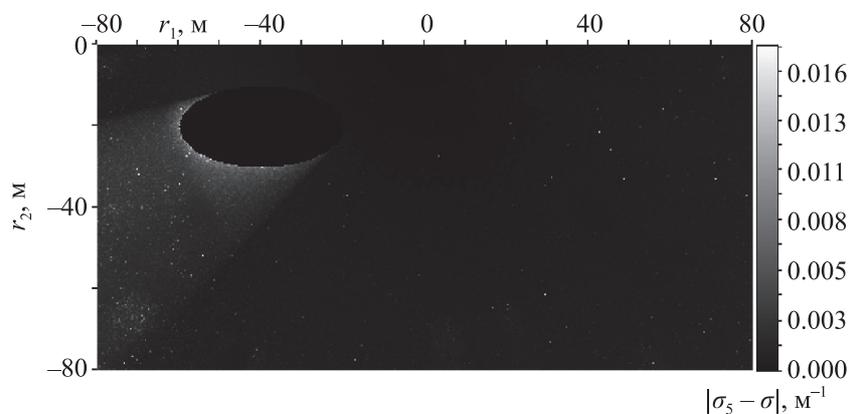
Таблица 1. Нормированная среднеквадратичная ошибка ε_i для разной кратности рассеяния i

ε_1	ε_2	ε_3	ε_4	ε_5
0	0.400	0.510	0.531	0.534

Для наглядности на рис. 4 представлено пространственное распределение абсолютной ошибки восстановления $|\sigma_2(r_1, r_2) - \sigma(r_1, r_2)|$, обусловленной влиянием двукратного рассеяния, а на рис. 5 изображена карта распределения ошибки $|\sigma_5(r_1, r_2) - \sigma(r_1, r_2)|$ для случая, когда учитываются все кратности рассеяния до 5 включительно. На рисунках визуально можно увидеть, что основное влияние ошибок проявляется в виде шлейфа от сильно рассеивающего включения, причем для разности $|\sigma_5(r_1, r_2) - \sigma(r_1, r_2)|$ это влияние более отчетливо нежели для $|\sigma_2(r_1, r_2) - \sigma(r_1, r_2)|$.

Таким образом, при акустическом зондировании в океане на дальности порядка 100 метров приближение однократного рассеяния позволяет воссоздавать качественную структуру среды, а получение гарантированных количественных оценок коэффициента объемного рассеяния остается под вопросом.

Во втором эксперименте рассмотрена та же самая модельная структура облучаемой среды, но коэффициенты μ и σ пропорционально увеличены в пять раз относительно значений

Рис. 4. Пространственное распределение абсолютной ошибки восстановления $|\sigma_2(r_1, r_2) - \sigma(r_1, r_2)|$, обусловленной влиянием двукратного рассеяния в средеРис. 5. Карта распределения ошибки восстановления $|\sigma_5(r_1, r_2) - \sigma(r_1, r_2)|$, обусловленной влиянием многократно рассеянного поля с кратностью рассеяния 2, 3, 4, 5

коэффициентов в первом эксперименте. С физической точки зрения такая замена эквивалентна рассмотрению процесса излучения с теми же параметрами μ и σ в области, линейные размеры которой увеличены в 5 раз ($r_1 \in [-400, 400]$, $r_2 \in [0, -400]$).

На рис. 6, 7, 8 представлены результаты восстановления функций σ_n , $n = 2, 6, 12$ по формуле (27). Здесь мы наблюдаем значительное ухудшение качества томографических изображений, что подтверждается количественными оценками среднеквадратичной ошибки (см. табл. 2).

В этом эксперименте нормированная среднеквадратичная ошибка достигает значений, равных 15, причем, как видно из таблицы, стабилизация роста ошибки начинается только с $n = 7$. В сравнении с первым экспериментом карта распределения коэффициента σ_2 отличается от изображений, соответствующих функциям σ_6 и σ_{12} , не только количественно, но качественно. Вклад многократно рассеянного излучения на изображениях наблюдается визуально в виде усиления «засветки» от сильно рассеивающего большого включения.

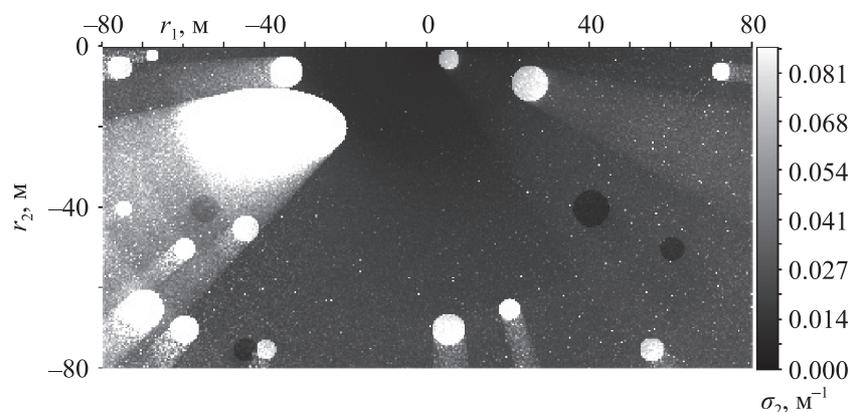


Рис. 6. Карта распределения функции $\sigma_2(r_1, r_2)$ для второго численного эксперимента, когда коэффициенты ослабления μ и объемного рассеяния σ увеличены в 5 раз по сравнению с первым экспериментом (см. рис. 1). С физической точки зрения восстановление функции 5σ эквивалентно восстановлению функции σ в области, линейные размеры которой увеличены в 5 раз. Качество реконструкции значительно понизилось относительно изображения, представленного на рис. 2

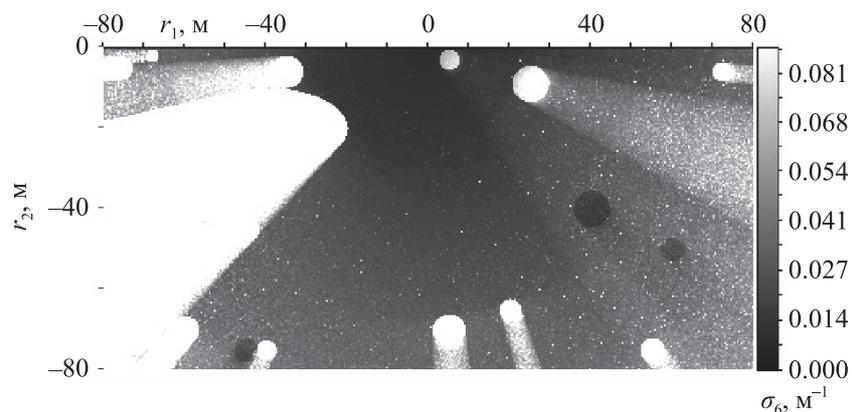


Рис. 7. Карта распределения функции $\sigma_6(r_1, r_2)$ для второго численного эксперимента. Отклонение приближенного решения σ_6 от точного решения σ обусловлено влиянием многократно рассеянного поля с кратностью рассеяния $2, \dots, 6$. В отличие от первого эксперимента наблюдается изменение качественной картины восстановления функции σ_6 в сравнении с изображением функции σ_2 , представленным на рис. 6

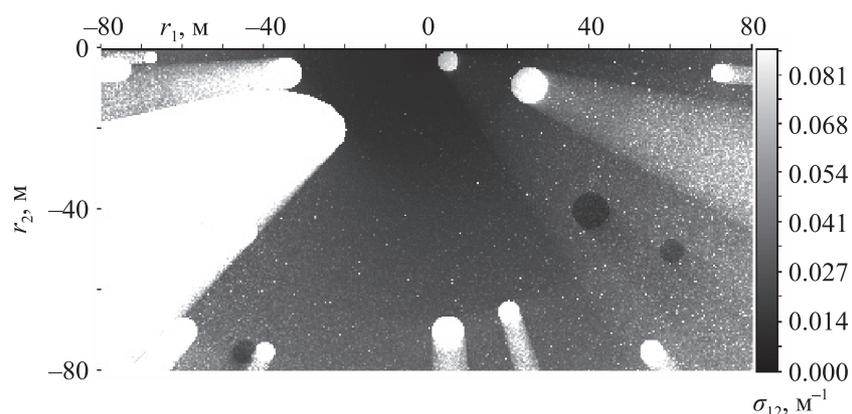


Рис. 8. Карта распределения функции $\sigma_{12}(r_1, r_2)$, полученная при восстановлении коэффициента σ с учетом 12-кратного рассеяния в среде. Качество изображений функций σ_6 и σ_{12} визуально отличаются незначительно

Таблица 2. Нормированная среднеквадратичная ошибка ε_i для разной кратности рассеяния i

ε_1	ε_2	ε_3	ε_4	ε_5	ε_6	ε_7	ε_8	ε_9	ε_{10}	ε_{11}	ε_{12}
0	2.421	5.198	8.656	11.68	13.81	14.76	15.22	15.44	15.49	15.51	15.52

На рис. 9, 10 представлено графическое распределение абсолютных ошибок $|\sigma_2(r_1, r_2) - \sigma(r_1, r_2)|$ и $|\sigma_{12}(r_1, r_2) - \sigma(r_1, r_2)|$ соответственно. Графическое представление функции $|\sigma_6(r_1, r_2) - \sigma(r_1, r_2)|$ визуально слабо отличается от карты распределения функции $|\sigma_{12}(r_1, r_2) - \sigma(r_1, r_2)|$, поэтому мы его не приводим. Как и в первом численном эксперименте, наблюдается усиление влияния многократно рассеянного поля при увеличении учитываемой кратности рассеяния в измеряемом сигнале.

Несмотря на большие среднеквадратичные ошибки ε_n , представленные в таблице 2, относительно хорошее качество изображений 6, 7, 8 можно объяснить тем, что при визуализации результатов экспериментов мы воспользовались априорной информацией о максимальном значении σ ($\max \sigma(\mathbf{r}) = \mu$). Учет информации о $\max \sigma(\mathbf{r})$ позволяет отфильтровать anomalously большие значения функций σ_n . Такая пороговая фильтрация значительно повысила качество изображений структуры исследуемой среды.

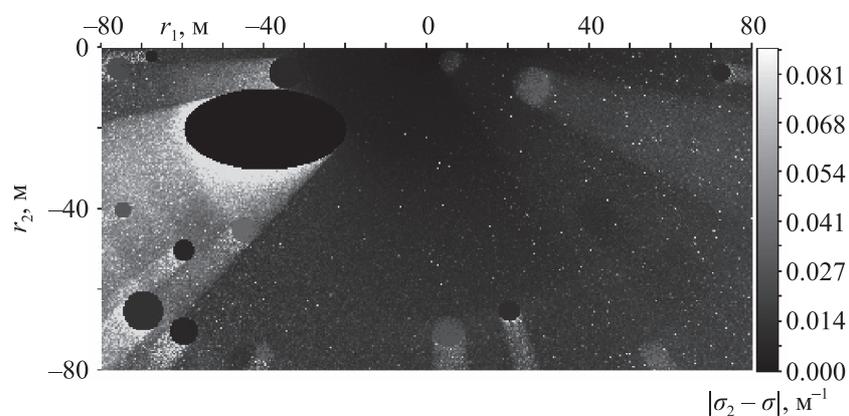


Рис. 9. Пространственное распределение ошибки $|\sigma_2(r_1, r_2) - \sigma(r_1, r_2)|$, обусловленной влиянием двукратно рассеянного поля, во втором вычислительном эксперименте

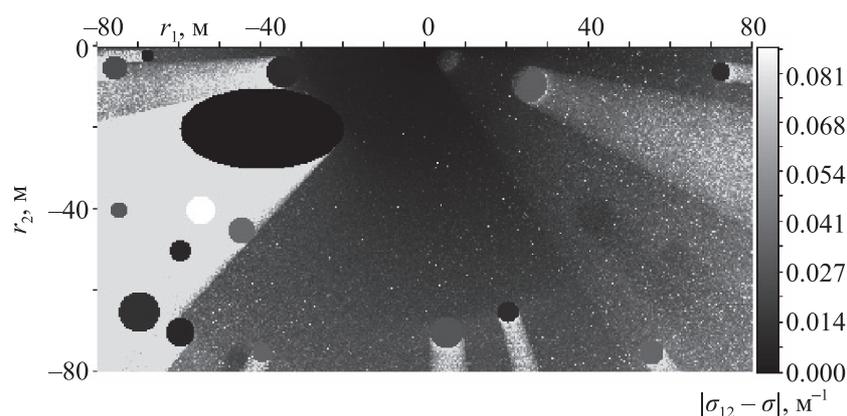


Рис. 10. Распределение ошибки $|\sigma_{12}(r_1, r_2) - \sigma(r_1, r_2)|$, обусловленной влиянием многократно рассеянного поля с кратностью рассеяния от 2 до 12 включительно

Заключение

На основе интегро-дифференциального уравнения переноса в работе построена модель импульсного облучения неоднородной рассеивающей среды и проведен численный анализ применимости приближения однократного рассеяния при нахождении коэффициента рассеяния. Результаты численных экспериментов показали, что приближение однократного рассеяния применимо при высокочастотном акустическом зондировании морской среды на дальности порядка 100 метров. Для больших областей указанное приближение в лучшем случае дает лишь качественное представление о структуре среды, не позволяя определить количественные характеристики параметров взаимодействия излучения с веществом.

В дальнейшем мы намерены исследовать задачу определения коэффициента рассеяния в трехмерной области, что физически более оправдано. С математической точки зрения здесь мы не ожидаем особых трудностей. Определенные вычислительные проблемы могут возникнуть при реализации достаточно трудоемкого в трехмерной области метода Монте-Карло. Отметим, что в трехмерном случае появляются дополнительные возможности для реализации новых схем сканирования и визуализации результатов томографии среды.

Перспективы дальнейших исследований мы также связываем с частичным решением обратной задачи — определение не самой функции σ , а только лишь поверхностей, где эта функция терпит разрыв [Аниконов и др., 2000]. Мы намерены предложить и обосновать метод определения сингулярного носителя функции σ при любом уровне рассеяния в среде.

Список литературы (References)

- Андреева И. Б., Белоусов А. В. О допустимости использования приближения однократного рассеяния акустических волн в задачах о скоплениях гидробионтов // Акустический журнал. — 1996. — Т. 42, № 4. — С. 560–562.
- Andreeva I. B., Belousov A. V. Applicability of the single-scattering approximation to problems of acoustic scattering from clusters of sea creatures // Acoustical Physics. — 1996. — Vol. 42, No. 4. — P. 495–496. (Original Russian paper: Андреева И. Б., Белоусов А. В. О допустимости использования приближения однократного рассеяния акустических волн в задачах о скоплениях гидробионтов // Акустический журнал. — 1996. — Т. 42, № 4. — С. 560–562.)
- Аниконов Д. С., Ковтаныук А. Е., Прохоров И. В. Использование уравнения переноса в томографии. — М.: Логос, 2000.
- Anikonov D. S., Kovtanyuk A. E., Prokhorov I. V. Transport Equation and Tomography. — Utrecht-Boston: VSP, 2002. (Russ.ed.: Анниконов Д. С., Ковтаныук А. Е., Прохоров И. В. Использование уравнения переноса в томографии. — Moscow: Logos, 2000.)

- Веденяпин В. В.* Кинетические уравнения Больцмана и Власова. — М.: Физматлит, 2001.
Vedenyapin V.V. Kineticheskie uravneniya Bol'tsmana i Vlasova [Kinetic Equations of Boltzmann and Vlasov]. — Moscow: Fizmatlit, 2001 (in Russian).
- Гермогенова Т. А.* Локальные свойства решений уравнения переноса. — М.: Наука, 1986.
Germodgenova T.A. Lokal'nye Svoistva Reshenii Uravneniya Perenosa [Local Properties of Solutions to the Transport Equation]. — Moscow: Nauka, 1986 (in Russian).
- Исимару А.* Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. — М.: Мир, 1981.
Ishimaru A. Wave Propagation and Scattering in Random Media. — New York: Academic Press, 1978. (Russ.ed.: *Isimaru A.* Rasprostranenie i rasseyaniye voln v sluchaino-neodnorodnykh sredakh. — Moscow: Mir, 1981.)
- Кан В. А., Прохоров И. В.* Определение диффузно отражающей поверхности при импульсном облучении // Дальневосточный математический журнал. — 2018. — Т. 18, № 2. — С. 206–215.
Kan V.A., Prokhorov I.V. Opredelenie diffuzno otrazhayushchei poverkhnosti pri impul'snom obluchenii [Determination of a diffuse reflecting surface under pulsed irradiation] // Dal'nevostochnyi matematicheskii zhurnal [Far Eastern Mathematical Journal]. — 2018. — Vol. 18, No. 2. — P. 206–215 (in Russian).
- Ким А., Прохоров И. В.* Теоретический и численный анализ начально-краевой задачи для уравнения переноса излучения с френелевскими условиями сопряжения // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2018. — Т. 58, № 5. — С. 762–777.
Kim A., Prokhorov I.V. Theoretical and Numerical Analysis of an Initial-Boundary Value Problem for the Radiative Transfer Equation with Fresnel Matching Conditions // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2018. — Vol. 58, No. 5. — P. 735–749. — DOI: 10.1134/S0965542518050135 (Original Russian paper: *Kim A., Prokhorov I.V.* Teoreticheskii i chislennyi analiz nachal'no-kraevoi zadachi dlya uravneniya perenosa izlucheniya s frenelevskimi usloviyami sopryazheniya // Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki. — 2018. — Vol. 58, No. 5. — P. 762–777.)
- Кузнецов В. С., Николаева О. В., Басс Л. П., Быков А. В., Приезжев А. В.* Моделирование распространения ультракороткого импульса света через сильно рассеивающую среду // Математическое моделирование. — 2009. — Т. 21, № 4. — С. 3–14.
Kuznetsov V.S., Nikolaeva O.V., Bass L.P., Bykov A.V., Priezzhev A.V. Mathematical simulation of ultrashort light pulse propagation in a highly scattering medium // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2010. — Vol. 2, No. 1. — P. 22–32. (Original Russian paper: *Kuznetsov V.S., Nikolaeva O.V., Bass L.P., Bykov A.V., Priezzhev A.V.* Modelirovanie rasprostraneniya ul'trakorotkogo impul'sa sveta cherez sil'no rasseivayushchuyu sredyu // Matematicheskoe modelirovanie. — 2009. — Vol. 21, No. 4. — P. 3–14.)
- Марчук Г. И., Михайлов Г. А., Назаралиев М. А. и др.* Метод Монте-Карло в атмосферной оптике. — Новосибирск: Наука, 1976.
Marchuk G.I., Mikhailov G.A., Nazaraliev M.A. et al. The Monte Carlo Methods in Atmospheric Optics. — Berlin: Springer-Verlag, 1980. (Russ. ed.: *Marchuk G.I., Mikhailov G.A., Nazaraliev M.A. et al.* Metod Monte-Karlo v atmosfernoii optike. — Novosibirsk: Nauka, 1976.)
- Мендус В. И., Постнов Г. А.* Об угловом распределении высокочастотных динамических шумов океана // Акустический журнал. — 1993. — Т. 39, № 6. — С. 1107–1116.
Mendus V.I., Postnov G.A. Ob uglovom raspredelenii vysokochastotnykh dinamicheskikh шумов океана [On Angular Intensity Distribution of High-Frequency Ambient Dynamic Noise of the Ocean] // Akust. Zh. — 1993. — Vol. 39, No. 6. — P. 1107–1116 (in Russian).
- Михайлов Г. А., Медведев И. Н.* Оптимизация весовых алгоритмов статистического моделирования. — Новосибирск: Омега Принт, 2011.
Mikhailov G.A., Medvedev I.N. Optimizatsiya vesovykh algoritmov statisticheskogo modelirovaniya [Optimization of Weighted Algorithms of Statistical Solution]. — Novosibirsk: Omega Print, 2011 (in Russian).
- Пригарин С. М.* Статистическое моделирование эффектов, связанных с многократным рассеянием импульсов наземных и космических лидаров в облачной атмосфере // Оптика атмосферы и океана. — 2016. — Т. 29, № 9. — С. 747–751.
Prigarin S.M. Monte Carlo simulation of the effects caused by multiple scattering of ground-based and spaceborne lidar pulses in clouds // Atmospheric and Oceanic Optics. — 2017. — Vol. 30, No. 1. — P. 79–83. — DOI: 10.1134/S1024856017010110 (Original Russian paper: *Prigarin S.M.* Statisticheskoe modelirovanie effektov, svyazannykh s mnogokratnym rasseyaniem impul'sov nazemnykh i kosmicheskikh lidarov v oblachnoi atmosfere // Optika atmosfery i okeana. — 2016. — Vol. 29, No. 9. — P. 747–751.)

- Прилепко А. В., Иванков А. Л.* Обратные задачи определения коэффициента, индикатрисы рассеяния и правой части нестационарного многоскоростного уравнения переноса // Дифференциальные уравнения. — 1985. — Т. 21, № 5. — С. 870–885.
Prilepko A. I., Ivankov A. L. Obratnye zadachi opredeleniya koeffitsienta, indikatrissy rasseyaniya i pravoi chasti nestatsionarnogo mnogoskorostnogo uravneniya perenosa [Inverse problems of determining the scattering coefficient, the scattering indicatrix, and the right-hand side of the nonstationary multi-velocity transport equation] // Diff. Uravn. — 1985. — Vol. 21, No. 5. — P. 870–885 (in Russian).
- Прохоров И. В., Золотарев В. В., Агафонов И. Б.* Задача акустического зондирования во флуктуирующем океане // Дальневосточный математический журнал. — 2011. — Т. 11, № 1. — С. 76–87.
Prokhorov I. V., Zolotarev V. V., Agafonov I. B. Zadacha akusticheskogo zondirovaniya vo fluktuiruyushchem okeane [The Cauchy problem for the radiative transfer equation in an unbounded medium] // Dal'nevostochnyi matematicheskii zhurnal [Far Eastern Mathematical Journal]. — 2011. — Vol. 11, No. 1. — P. 76–87 (in Russian).
- Прохоров И. В., Жуплев А. С.* Об эффективности методов максимального сечения в теории переноса излучения // Компьютерные исследования и моделирование. — 2013. — Т. 5, № 4. — С. 573–582.
Prokhorov I. V., Zhuplev A. S. Ob effektivnosti metodov maksimal'nogo secheniya v teorii perenosa izlucheniya [On the efficiency of the maximum cross section method in radiation transport theory] // Computer Research and Modeling. — 2013. — Vol. 5, No. 4. — P. 573–582 (in Russian).
- Прохоров И. В., Сущенко А. А.* Исследование задачи акустического зондирования морского дна методами теории переноса излучения // Акустический журнал. — 2015. — Т. 61, № 3. — С. 400–408.
Prokhorov I. V., Sushchenko A. A. Studying the problem of acoustic sounding of the seabed using methods of radiative transfer theory // Acoustical Physics. — 2015. — Vol. 61, No. 3. — P. 368–375. — DOI:10.1134/S1063771015020104 (Original Russian paper: *Prokhorov I. V., Sushchenko A. A.* Issledovanie zadachi akusticheskogo zondirovaniya morskogo dna metodami teorii perenosa izlucheniya // Akusticheskii zhurnal. — 2015. — Vol. 61, № 3. — P. 400–408.)
- Прохоров И. В., Сущенко А. А.* Задача Коши для уравнения переноса излучения в неограниченной среде // Дальневосточный математический журнал. — 2018. — Т. 18, № 1. — С. 101–111.
Prokhorov I. V., Sushchenko A. A. Zadacha Koshi dlya uravneniya perenosa izlucheniya v neogranichennoi srede [The Cauchy problem for the radiative transfer equation in an unbounded medium] // Dal'nevostochnyi matematicheskii zhurnal [Far Eastern Mathematical Journal]. — 2018. — Vol. 18, No. 1. — P. 101–111 (in Russian).
- Романов В. Г.* Обратные задачи математической физики. — М.: Наука, 1984.
Romanov V. G. Inverse Problems of Mathematical Physics. — Utrecht: VNU Science Press, 1987. (Russ. ed.: *Romanov V. G.* Obratnye zadachi matematicheskoi fiziki. — Moscow: Nauka, 1984.)
- Чандрасекар С.* Перенос лучистой энергии. — М.: ИЛ, 1953.
Chandrasekhar S. Radiative transfer. — London: Oxford University Press, 1950. (Russ. ed.: *Chandrasekar S.* Perenos luchistoi energii. — Moscow: IL, 1953.)
- Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. — М.: Мир, 1978.
Cercignani C. Theory and Application of the Boltzmann Equation. — New York: Elsevier, 1975. (Russ. ed.: *Cherchin'yan K.* Teoriya i prilozheniya uravneniya Bol'tsmana. — Moscow: Mir, 1978.)
- Яровенко И. П., Прохоров И. В.* Определение показателей преломления слоистой среды при импульсном режиме облучения // Оптика и спектроскопия. — 2018. — Т. 124, № 4. — С. 534–541.
Yarovenko I. P., Prokhorov I. V. Determination of refractive indices of a layered medium under pulsed irradiation // Optics and Spectroscopy. — 2018. — Vol. 124, No. 4. — P. 567–574. — DOI: 10.1134/S0030400X18040203 (Original Russian paper: *Yarovenko I. P., Prokhorov I. V.* Opredelenie pokazatelei prelomleniya sloistoi sredy pri impul'snom rezhime oblucheniya // Optika i spektroskopiya. — 2018. — Vol. 124, № 4. — P. 534–541.)
- Acosta S.* Time reversal for radiative transport with applications to inverse and control problems // Inverse Problems. — 2013. — Vol. 29. — art. number 085014.
- Anikonov Yu. E.* Inverse Problems for Kinetic and Other Evolution Equations. — Utrecht: VSP, 2001.
- Bal G.* Kinetics of scalar wave fields in random media // Wave Motion. — 2005. — Vol. 43. — P. 132–157.
- Bal G.* Inverse transport theory and applications // Inverse Problems. — 2009. — Vol. 25, No. 5. — art. number 025019.

- Bellassoued M., Boughanja Y.* An inverse problem for the linear Boltzmann equation with a time-dependent coefficient // *Inverse Problems*. — 2019. — Vol. 35. — art. number 085003.
- Dahmen W., Gruber F., Mula O.* An adaptive nested source term iteration for radiative transfer equations // *Math. Comp.* — 2020. — Vol. 89. — P. 1605–1646.
- Florescu L., Markel V.A., Schotland J.C.* Single-scattering optical tomography: simultaneous reconstruction of scattering and absorption // *Phys. Rev. E*. — 2010. — Vol. 81. — art. number 016602.
- Kim A., Prokhorov I.V.* Monte Carlo method for non-stationary radiative transfer equation in inhomogeneous media // *Proceedings of SPIE — The International Society for Optical Engineering*. — 2016. — Vol. 10035. — art. number 100350Z. — DOI: 10.1117/12.2247997
- Kleinboehl A., Schofield J.T., Abdou W.A., Irwin P.G.J., de Kok R.J.* A single-scattering approximation for infrared radiative transfer in limb geometry in the Martian atmosphere // *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*. — 2011. — Vol. 112, Iss. 10. — P. 1568–1580.
- Li Q., Sun W.* Applications of kinetic tools to inverse transport problems // *Inverse Problems*. — 2020. — Vol. 36. — art. number 035011.
- Moon S., Hristova Y., Kwon B.* Single scattering tomography with curved detectors // *Journal Biomedical Physics and Engineering Express*. — 2018. — Vol. 4. — art. number 045040.
- Vornovskikh P.A., Sushchenko A.A.* Remote sensing problem with multiple scattering effect // *Proceedings of SPIE — The International Society for Optical Engineering*. — 2017. — Vol. 10466. — art. number 104661Y. — DOI: 10.1117/12.2288673
- Wang C., Zhou T.* A hybrid reconstruction approach for absorption coefficient by fluorescence photoacoustic tomography // *Inverse Problems*. — 2018. — Vol. 35. — art. number 025005.

