**КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2020 Т. 12 № 5 С. 1023–1038**
DOI: 10.20537/2076-7633-2020-12-5-1023-1038

УДК: 536.24: 621.396

Кластерный метод математического моделирования интервально-стохастических тепловых процессов в электронных системах

А. Г. Мадера

Научно-исследовательский институт системных исследований РАН,
Россия, 117218, г. Москва, Нахимовский просп., д. 36, корп. 1

E-mail: agmprof@mail.ru

Получено 21.05.2020, после доработки — 23.06.2020.
Принято к публикации 17.07.2020.

В работе разработан кластерный метод математического моделирования интервально-стохастических тепловых процессов в сложных технических, в частности электронных, системах (ЭС). В кластерном методе конструкция сложной ЭС представляется в виде тепловой модели, являющейся системой кластеров, каждый из которых содержит ядро, объединяющее в себе тепловыделяющие элементы, попадающие в данный кластер, оболочку кластера и поток среды, протекающий через кластер. Состояние теплового процесса в каждом кластере и в каждый момент времени характеризуется тремя интервально-стохастическими переменными состояния, а именно температурами ядра, оболочки и потока среды. При этом элементы каждого кластера, а именно ядро, оболочка и поток среды, находятся в тепловом взаимодействии между собой и элементами соседних кластеров. В отличие от существующих методов кластерный метод позволяет моделировать тепловые процессы в сложных ЭС с учетом неравномерного распределения температуры в потоке среды нагнетаемой в ЭС, сопряженного характера теплообмена между потоком среды в ЭС, ядрами и оболочками кластеров и интервально-стохастического характера тепловых процессов в ЭС, вызванного статистическим технологическим разбросом изготовления и монтажа электронных элементов в ЭС, и случайными флуктуациями тепловых параметров окружающей среды. Математическая модель, описывающая состояния тепловых процессов в кластерной тепловой модели, представляет собой систему интервально-стохастических матрично-блочных уравнений с матричными и векторными блоками, соответствующими кластерам тепловой модели. Решением интервально-стохастических уравнений являются статистические меры переменных состояния тепловых процессов в кластерах — математические ожидания, ковариации между переменными состояния и дисперсии. Методика применения кластерного метода показана на примере реальной ЭС.

Ключевые слова: математическое моделирование, тепловая модель, кластер, электронная система, стохастический, тепловой процесс, статистические меры, математические ожидания, ковариации, дисперсии

Исследование выполнено в рамках государственного задания ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН (Фундаментальные исследования 47 ГП) по теме № 0065-2019-0001 (АААА-А19-119011790077-1).

COMPUTER RESEARCH AND MODELING
2020 VOL. 12 NO. 5 P. 1023–1038
DOI: 10.20537/2076-7633-2020-12-5-1023-1038

MODELS IN PHYSICS AND TECHNOLOGY

UDC: 536.24: 621.396

Cluster method of mathematical modeling of interval-stochastic thermal processes in electronic systems

A. G. Madera

Scientific Research Institute for System Analysis, Russia Academy of Sciences,
36 Nakhimovsky pr., build. 1, Moscow, 117218, Russia

E-mail: agmprof@mail.ru

Received 21.05.2020, after completion — 23.06.2020.
Accepted for publication 17.07.2020.

A cluster method of mathematical modeling of interval-stochastic thermal processes in complex electronic systems (ES), is developed. In the cluster method, the construction of a complex ES is represented in the form of a thermal model, which is a system of clusters, each of which contains a core that combines the heat-generating elements falling into a given cluster, the cluster shell and a medium flow through the cluster. The state of the thermal process in each cluster and every moment of time is characterized by three interval-stochastic state variables, namely, the temperatures of the core, shell, and medium flow. The elements of each cluster, namely, the core, shell, and medium flow, are in thermal interaction between themselves and elements of neighboring clusters. In contrast to existing methods, the cluster method allows you to simulate thermal processes in complex ESs, taking into account the uneven distribution of temperature in the medium flow pumped into the ES, the conjugate nature of heat exchange between the medium flow in the ES, core and shells of clusters, and the interval-stochastic nature of thermal processes in the ES, caused by statistical technological variation in the manufacture and installation of electronic elements in ES and random fluctuations in the thermal parameters of the environment. The mathematical model describing the state of thermal processes in a cluster thermal model is a system of interval-stochastic matrix-block equations with matrix and vector blocks corresponding to the clusters of the thermal model. The solution to the interval-stochastic equations are statistical measures of the state variables of thermal processes in clusters - mathematical expectations, covariances between state variables and variance. The methodology for applying the cluster method is shown on the example of a real ES.

Keywords: mathematical modeling, thermal model, cluster, electronic system, stochastic, thermal process, statistical measures, mathematical expectations, covariances, variances

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2020, vol. 12, no. 5, pp. 1023–1038 (Russian).

Publication is made as part of national assignment for SRISA RAS (fundamental scientific research 47 GP) on the topic No. 0065-2019-0001 (AAAA-A19-119011790077-1).

1. Введение

Тепловое проектирование сложных электронных систем (ЭС) может быть адекватным при условии, что методы математического и компьютерного моделирования тепловых процессов в ЭС позволяют моделировать [Сергеев, Хадаков, 2012; Kuuse et al., 2005; Мадера, Кандалов, 2016; Мадера, 2018; Мадера, 2019]:

- сложные конструкции ЭС, отличающиеся конструктивным разнообразием и большим количеством как электронных (активных) тепловыделяющих элементов (процессоры, микросхемы (МС), электро-радиоэлементы (ЭРЭ)), так и конструктивных (пассивных) элементов, только рассеивающих тепло (электроразъемы, не потребляющие мощность ЭРЭ, элементы крепления и пр.);
- физические процессы, возникающие при функционировании ЭС, а именно тепловые процессы и обусловленные ими тепловая обратная связь, термонапряжения, а также теплообмен в потоке среды;
- воздействие дестабилизирующих (химических, радиационных, вибрационных и механических) и климатических факторов,
- тепловые и электрические процессы в условиях интервально-стохастической неопределенности определяющих эти процессы физических и конструкционных факторов.

Математическая модель, описывающая тепловые и сопутствующие им физические процессы в сложных ЭС, представляет собой систему нестационарных, нелинейных, интервально-стохастических дифференциальных уравнений в частных производных, включая уравнения движения и энергии в потоке охлаждающей среды как внутри, так и вне ЭС. Учитывая, что количество уравнений в математической модели сравнимо с количеством элементов в ЭС, ее решение представляет собой чрезвычайно сложную проблему как в математическом, так вычислительном аспектах даже с применением современных суперкомпьютеров. Разработанный в [Мадера, 2019] иерархический метод моделирования тепловых процессов в сложных ЭС позволяет преодолеть указанные трудности и существенно упростить математическую модель, сократить количество уравнений, в том числе объем компьютерных вычислений и затраты оперативной памяти.

Тепловые процессы в конструкции ЭС определяются как мощностями энергопотребления активных (тепловыделяющих) элементов, так и теплообменом активных и пассивных элементов в потоке охлаждающей среды (воздушной или жидкостной), протекающей внутри ЭС. В то время как математическое моделирование жидкостного охлаждения ЭС потоком жидкости, нагнетаемой по каналам конструкции, разработано достаточно полно [Ellison, 2011; Дульнев, 1971; Spolding et al., 1990; Schlichting, Gersten, 2017], математическое моделирование теплообмена элементов ЭС в потоке воздушной среды, нагнетаемой через корпус ЭС, еще требует своего разрешения и доведения до методического уровня проектирования ЭС. При проектировании ЭС, несмотря на неоднородное распределение мощности тепловыделения в пространстве ЭС, как правило, принимается, что температура потока среды распределена по конструкции ЭС равномерно либо линейно. В первом случае температура среды считается изотермической и равной некоей усредненной температуре, определяемой как среднеарифметическое между температурами на входе и выходе ЭС [Ellison, 2011; Дульнев, 1971]. Во втором случае априори принимается линейный характер зависимости температуры воздушной среды от расстояния, проходимого потоком среды от входа до выхода в ЭС [Мадера, 2019]. При малых скоростях потока и небольших габаритах ЭС допущение об осредненной температуре среды или линейном распределении ее температуры внутри ЭС может в ряде случаев давать приемлемые для практики теплового проектирования результаты, однако при больших скоростях среды (но с числом Маха, меньшим единицы), а также при увеличении размеров ЭС распределение температуры в потоке воздушной среды может существенно отличаться от линейного и тем более изотермического.

Необходимо отметить, что сложность математического моделирования теплообмена между нагнетаемым через ЭС потоком среды и активными элементами обусловливается, во-первых, чрезвычайно сложным хаотическим движением потока среды, проходящего через образованную конструктивными и электронными элементами ЭС разветвленную сеть каналов с самой разнообразной формой, направлениями, сечением, во-вторых, интервально-стохастическим характером теплообмена в потоке среды и, в-третьих, сопряженным характером теплообмена, при котором взаимодействие между нагретым элементом и энтальпией потока является взаимообусловленным, замыкая тем самым петлю обратной связи.

Поток воздушной среды, проходя через сеть каналов между тепловыделяющими активными и пассивными элементами в ЭС, аккумулирует тепло, увеличивая тем самым свою энтальпию (теплосодержание), которая затем переносится и передается элементам ЭС, приводя как к дополнительному их нагреванию, так и к увеличению энтальпии потока. Поэтому распределение температуры в потоке среды, проходящей через элементы ЭС от входа до выхода ЭС, будет существенно отличаться как от изотермического, так и от линейного.

В настоящей работе разработан кластерный метод математического моделирования сопряженных интервально-стохастических тепловых процессов в сложных ЭС. Метод основан на представлении сложной конструкции ЭС тепловой моделью в виде системы кластеров, каждый из которых состоит из ядра, объединяющего в себе все тепловыделяющие элементы, вошедшие в кластер, оболочки кластера и потока среды, проходящего через него. При этом состояние теплового процесса в каждом кластере характеризуется тремя переменными состояния: температурой ядра, температурой оболочки и температурой потока среды в кластере. Кластерный подход позволяет моделировать распределение температуры в нагнетаемой через ЭС воздушной среде, температуру активных тепловыделяющих и пассивных рассеивающих тепло элементов ЭС, а также распределение температуры в корпусе ЭС. Анализ интервально-стохастических тепловых процессов осуществляется с помощью авторского метода получения уравнений относительно статистических мер теплового процесса — математических ожиданий, ковариаций и дисперсий. Применение метода продемонстрировано на примере моделирования интервально-стохастического теплового процесса в реальной ЭС (вычислительной системе). Получаемые разработанным методом статистические меры легко программируются и встраиваются в системы автоматизированного теплового проектирования ЭС [Мадера, Решетников, 2017].

2. Кластерные тепловая и математическая модели интервально-стохастических тепловых процессов в ЭС

Тепловая модель ЭС, используемая при анализе и моделировании тепловых режимов в сложных ЭС, представляет собой систему N изотермических тел (рис. 1, *а*) [Ellison, 2011; Дульнев, 1971; Мадера, Кандалов, 2016], в которой изотермическими являются как твердотельные активные и пассивные элементы конструкции ЭС, так и среда внутри корпуса ЭС, температура которой полагается равной среднему арифметическому температур потока среды на входе и выходе в ЭС. При незначительных скоростях и габаритах ЭС такое допущение вполне оправдано для инженерной практики теплового проектирования ЭС, однако при больших скоростях среды (но с числом Маха, меньшим единицы) или габаритах ЭС распределение температуры в потоке воздушной среды может существенно отличаться от изотермического.

В кластерной тепловой модели сложная конструкция ЭС разбивается на кластеры, $k = 1, 2, \ldots, K$ (рис. 1, *б*), каждый из которых содержит ядро, объединяющее активные элементы, попавшие в его объем, его оболочку и среду, омывающую ядро и оболочку. В реальных конструкциях ЭС активные и пассивные элементы находятся в кондуктивном тепловом взаимодействии между собой, которое осуществляется через многочисленные твердотельные элементы соединений, крепления и монтажа (печатные платы, электроразъемы, теплоотводы и пр.), а также конвективном теплообмене с потоком нагнетаемой через кластер среды и лучистом теплообмене между собой и потоком среды в кластере, при этом с внешней поверхности оболочки кластера осуществляется также конвективный и лучистый теплообмен с окружающей средой. В силу этого в локальных объемах конструкции ЭС происходит интенсивное перемешивание и выравнивание температуры элементов и среды, поэтому объем и форма каждого отдель-

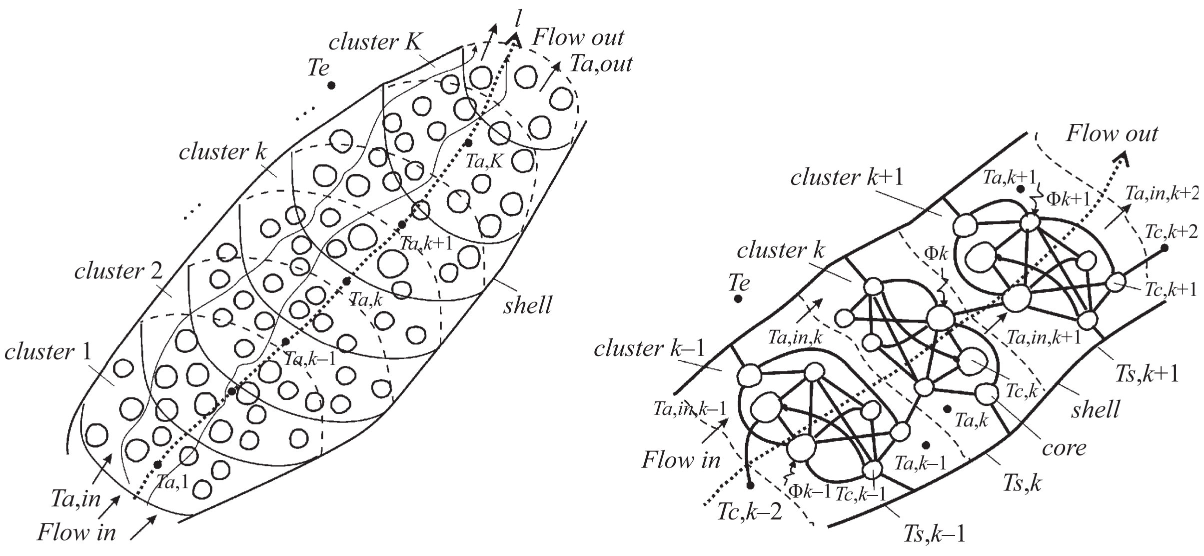

Рис. 1. Кластерная тепловая модель ЭС (а) и фрагмент системы из k – 1, k, k + 1-го кластеров (б). Обозначения: $T_{c,k}(t,\omega)$, $T_{s,k}(t,\omega)$, $T_{a,k}(t,\omega)$ — интервально-стохастические изотермические температуры ядра k-го кластера, оболочки кластера и потока среды внутри кластера; $T_{a,in,k}(t,\omega)$, $T_{a,in}(\omega)$, $T_e(\omega)$ — интервально-стохастические температуры среды на входе в k-й кластер, на входе в ЭС и окружающей среды вне оболочки кластера; l — направление потока среды; $\Phi_k(\omega)$ — полная интервально-стохастическая мощность тепловыделения в k-м кластере, $k = 1, 2, \ldots, K$

ного кластера могут быть выбраны таким образом, чтобы с достаточной для инженерной практики точностью можно было считать, что температуры ядра, оболочки и среды в пределах одного кластера являются изотермическими. Разбиение сложной конструкции ЭС на кластеры и выбор их размеров осуществляются исходя из конкретных особенностей конструкции рассматриваемой ЭС, целей, принятой точности моделирования и таким образом, чтобы в полученных кластерах температуры ядра, оболочки и потока среды, проходящей через кластер, можно было с достаточной для инженерной практики точностью считать изотермическими.

Состояние теплового процесса в каждом кластере k, $k = 1, 2, \ldots, K$, в любой момент времени полностью определяется тремя переменными состояния, а именно температурами ядра, оболочки и среды. Тепловые процессы в реальных ЭС, как показано в работах [Мадера, Кандалов, 2016; Madera, Kandalov, 2020], в силу статистического технологического разброса изготовления и монтажа электронных элементов в ЭС, а также случайных флуктуаций тепловых параметров окружающей среды, являются интервально-стохастическими. Поэтому изотермические температуры ядра, оболочки и среды в k-м кластере являются интервально-стохастическими и равными $T_{c,k}(t,\omega)$, $T_{s,k}(t,\omega)$, $T_{a,k}(t,\omega)$ соответственно, где ω — элементарные события из пространства элементарных событий Ω на вероятностном пространстве $\{\Omega, U, P\}$, U — σ-алгебра подмножеств Ω, P — вероятность на U [Adomian, 1983; Пугачев, 1962]. Поток среды поступает на вход k-го кластера и выходит из него с интервально-стохастическими температурами $T_{a,in,k}(t,\omega)$ и $T_{a,out,k}(t,\omega)$ соответственно. Ядро каждого k-го кластера, будучи объединением активных тепловыделяющих элементов, потребляет суммарную интервально-стохастическую мощность $\Phi_k(\omega)$, равномерно распределенную по объему ядра кластера.

Ядро, оболочка и поток среды находятся в тепловом взаимодействии не только между собой в пределах кластера (рис. 1, *б*), но также с ядром, оболочкой и средой соседних с ним кластеров, а также окружающей средой вне оболочки с интервально-стохастической температурой $T_e(\omega)$.

Тепловое взаимодействие между ядрами и между торцами контактирующих между собой оболочек соседних кластеров, k, $k-1$ и k, $k+1$, обусловливается кондуктивным теплообменом, осуществляемым через твердотельные связи и соединения, и, кроме того, конвективным и лучистым теплообменом с общим потоком среды, протекающим через кластеры. Это обусловливается тем, что в результате взаимодействия нагретых ядер и оболочек с проходящим через кластерную систему потоком среды энтальпия (теплосодержание) среды возрастает и далее переносится и передается следующим по направлению потока кластерам. Это приводит как к дополнительному нагреванию ядер и оболочек кластеров и приращению энтальпии потока среды, так и к корреляционной связи между интервально-стохастическими тепловыми процессами, развивающимися в кластерах системы.

Математическая модель, описывающая интервально-стохастические тепловые процессы в кластерной тепловой модели (рис. 1), основывается на следующих условиях:

- среда внутри оболочки кластера является несжимаемой, скорость потока среды изменяется вдоль направления движения (l, рис. 1) и постоянна по сечению, конвективный тепловой поток в среде значительно превышает тепловой поток теплопроводности, внутренние источники тепла, обусловленные вязкостью среды, пренебрежимо малы по сравнению с мощностью тепловыделения активных элементов ЭС;
- излучение между кластерами, их ядрами, оболочками и средой внутри и вне кластеров незначительно и не учитывается, поскольку максимальная температура элементов в реальных ЭС не превышает 125 °C;
- зависимость от температуры теплофизических параметров материалов твердотельных элементов ЭС и среды внутри и вне кластеров в реальном диапазоне рабочих температур функционирования ЭС (не превышающем 125 °C) пренебрежимо мала и не учитывается;
- интервально-стохастические величины мощностей тепловыделения в ядрах кластера $\Phi_k(\omega)$, температуры окружающей среды $T_e(\omega)$ и потока среды на входе в ЭС $T_{a,in}(\omega)$ являются статистически независимыми с известными из исходных входных данных математическими ожиданиями $\overline{\Phi}_k$, $\overline{T}_e$ и $\overline{T}_{a,in}$ и дисперсиями D_{Φ_k}, D_{T_e} и $D_{T_{a,in}}$;
- интервально-стохастические тепловые процессы в кластерах, состояние которых определяется температурами $T_{c,k}(t,\omega)$, $T_{s,k}(t,\omega)$, $T_{a,k}(t,\omega)$, независимы между собой для любых кластеров с несовпадающими номерами k и i, $k \neq i$ $(k, i = 1, 2, \ldots, K)$ и моментов времени, в то же время интервально-стохастические температуры $T_{c,k}(t,\omega)$, $T_{s,k}(t,\omega)$, $T_{a,k}(t,\omega)$, относящиеся к данному кластеру k, являются зависимыми.

При этих условиях математическая модель сопряженных интервально-стохастических тепловых процессов в k-м кластере для каждого $\omega \in \Omega$ будет иметь следующий вид [Мадера, 2019]:

- для ядра k-го кластера с изотермической температурой $T_{c,k}(t,\omega)$ в состоянии кондуктивного теплообмена с оболочкой кластера с изотермической температурой $T_{s,k}(t,\omega)$, конвективного теплообмена с потоком среды с изотермической температурой $T_{a,k}(t,\omega)$ в кластере, кондуктивного теплообмена между ядрами и оболочками соседних кластеров $k-1$ и $k+1$

$$h_{c,k}\frac{dT_{c,k}(t,\omega)}{dt} + J_{c-s,k}\left(T_{c,k}, T_{s,k}, t, \omega\right) + J_{c-a,k}\left(T_{c,k}, T_{a,k}, t, \omega\right) -$$
$$- J_{c,k-1-c,k}\left(T_{c,k-1}, T_{c,k}, t, \omega\right) + J_{c,k-c,k+1}\left(T_{ck}, T_{c,k+1}, t, \omega\right) = \Phi_k(\omega), \quad (1)$$
$$T_{c,k}(t=0,\omega) = T_e(\omega),$$

где $h_{c,k} = \rho_{c,k} c_{c,k} V_{c,k}$ — полная теплоемкость ядра *k*-го кластера плотностью $\rho_{c,k}$, удельной теплоемкостью $c_{c,k}$, объемом $V_{c,k}$; $\Phi_k(\omega)$ — суммарная мощность внутренних источников тепла (мощностей потребления активных элементов) в ядре *k*-го кластера;

$$J_{c-s,k}\left(T_{c,k}, T_{s,k}, t, \omega\right) = g_{c-s,k}^{cond} \cdot \left(T_{c,k}\left(t, \omega\right) - T_{s,k}\left(t, \omega\right)\right)$$

— кондуктивный тепловой поток между ядром *k*-го кластера и его оболочкой, переносимый через кондуктивную тепловую проводимость $g_{c-s,k}^{cond}$, при отсутствии кондуктивного контакта между ядром и оболочкой $g_{c-s,k}^{cond} = 0$;

$$J_{c-a,k}\left(T_{c,k}, T_{a,k}, t, \omega\right) = g_{c-a,k}^{conv} \cdot \left(T_{c,k}\left(t, \omega\right) - T_{a,k}\left(t, \omega\right)\right)$$

— конвективный тепловой поток между ядром *k*-го кластера и нагнетаемой через *k*-й кластер потоком среды, $g_{c-a,k}^{conv} = \alpha_{c-a,k} S_{c-a,k}$ — конвективная тепловая проводимость, $\alpha_{c-a,k}$ — коэффициент теплоотдачи [Ellison, 2011; Spolding et al., 1990], $S_{c-a,k}$ — теплоотдающая поверхность ядра *k*-го кластера;

$$J_{c,k-1-c,k}\left(T_{c,k-1}, T_{c,k}, t, \omega\right) = g_{c,k-1-c,k}^{cond} \cdot \left(T_{c,k-1}\left(t, \omega\right) - T_{c,k}\left(t, \omega\right)\right),$$
$$J_{c,k-c,k+1}\left(T_{ck}, T_{c,k+1}, t, \omega\right) = g_{c,k-c,k+1}^{cond} \cdot \left(T_{c,k}\left(t, \omega\right) - T_{c,k+1}\left(t, \omega\right)\right)$$

— кондуктивные тепловые потоки между ядрами $k-1$-го и *k*-го кластеров и между *k*-м и $k+1$-м кластерами, $g_{c,k-1-c,k}^{cond}$ и $g_{c,k-c,k+1}^{cond}$ — кондуктивные тепловые проводимости, при отсутствии кондуктивного теплового контакта между соседними ядрами двух кластеров тепловые проводимости $g_{c,k-1-c,k}^{cond}$ и $g_{c,k-c,k+1}^{cond}$ равны нулю; напротив, если тепловой контакт между соседними ядрами идеальный, то равны нулю контактные тепловые сопротивления $R_{c,k-1-c,k}^{cond} = 1/g_{c,k-1-c,k}^{cond}$ и $R_{c,k-c,k+1}^{cond} = 1/g_{c,k-c,k+1}^{cond}$;

- для оболочки *k*-го кластера с изотермической температурой $T_{s,k}\left(t, \omega\right)$ в состоянии кондуктивного теплообмена с ядром *k*-го кластера с усредненной температурой $T_{c,k}\left(t, \omega\right)$, конвективного теплообмена с потоком среды внутри *k*-го кластера с изотермической температурой $T_{a,k}\left(t, \omega\right)$, конвективного теплообмена с окружающей средой с температурой $T_e(\omega)$, кондуктивного теплообмена с оболочками соседних кластеров $k-1$ и $k+1$

$$h_{s,k} \frac{dT_{s,k}\left(t, \omega\right)}{dt} - J_{c-s,k}\left(T_{s,k}, T_{s,k}, t, \omega\right) + J_{s-e,k}\left(T_{s,k}, T_e, t, \omega\right) -$$
$$- J_{s-a,k}\left(T_{s,k}, T_{a,k}, t, \omega\right) - J_{s,k-1-s,k}\left(T_{s,k-1}, T_{s,k}, t, \omega\right) + J_{s,k-s,k+1}\left(T_{s,k}, T_{s,k+1}, t, \omega\right) = 0, \qquad (2)$$
$$T_{s,k}\left(t = 0, \omega\right) = T_e(\omega),$$

где $h_{s,k} = \rho_{s,k} c_{s,k} V_{s,k}$ — полная теплоемкость оболочки *k*-го кластера с плотностью $\rho_{s,k}$, удельной теплоемкостью $c_{s,k}$ и объемом $V_{s,k}$;

$$J_{s-e,k}\left(T_{s,k}, T_e, t, \omega\right) = g_{s-e,k}^{conv} \cdot \left(T_{s,k}\left(t, \omega\right) - T_e(\omega)\right),$$
$$J_{s-a,k}\left(T_{s,k}, T_{a,k}, t, \omega\right) = g_{s-a,k}^{conv} \cdot \left(T_{s,k}\left(t, \omega\right) - T_{a,k}\left(t, \omega\right)\right)$$

— конвективные тепловые потоки с внешней поверхности оболочки в окружающую среду и с внутренней поверхности оболочки в поток среды внутри *k*-го кластера соответственно; $g_{s-e,k}^{conv}=\alpha_{s-e,k}S_{s-e,k}$ и $g_{s-a,k}^{conv}=\alpha_{s-a,k}S_{s-a,k}$ — тепловые проводимости конвекции с коэффициентами теплоотдачи $\alpha_{s-e,k}$ и $\alpha_{s-a,k}$ [Ellison, 2011; Spolding et al., 1990] и теплоотдающими поверхностями снаружи $(S_{s-e,k})$ и внутри $(S_{s-a,k})$ оболочки;

$$J_{s,k-1-s,k}\left(T_{s,k-1},T_{s,k},t,\omega\right)=g_{s,k-1-s,k}^{cond}\cdot\left(T_{s,k-1}\left(t,\omega\right)-T_{s,k}\left(t,\omega\right)\right),$$
$$J_{s,k-s,k+1}\left(T_{sk},T_{s,k+1},t,\omega\right)=g_{s,k-s,k+1}^{cond}\cdot\left(T_{s,k}\left(t,\omega\right)-T_{s,k+1}\left(t,\omega\right)\right)$$

— кондуктивные тепловые потоки между оболочками кластеров $k-1$-м, k-м и k-м, $k+1$-м с кондуктивными тепловыми проводимостями $g_{s,k-1-s,k}^{cond}$ и $g_{s,k-s,k+1}^{cond}$, при отсутствии кондуктивного теплового контакта между оболочками соседних кластеров тепловые проводимости $g_{s,k-1-s,k}^{cond}$ и $g_{s,k-s,k+1}^{cond}$ равны нулю, в противном случае, при идеальном тепловом контакте между оболочками соседних кластеров равны нулю контактные тепловые сопротивления $R_{s,k-1-s,k}^{cond}=1/g_{s,k-1-s,k}^{cond}$ и $R_{s,k-s,k+1}^{cond}=1/g_{s,k-s,k+1}^{cond}$;

- для потока среды с изотермической температурой $T_{a,k}\left(t,\omega\right)$ в k-м кластере находящейся в состоянии конвективного теплообмена с ядром и оболочкой кластера с изотермическими температурами $T_{c,k}\left(t,\omega\right)$ и $T_{s,k}\left(t,\omega\right)$ соответственно [Мадера, Кандалов, 2016; Spolding et al., 1990]

$$h_{a,k}\frac{dT_{a,k}\left(t,\omega\right)}{dt}-J_{c-a,k}\left(T_{c,k},T_{a,k},t,\omega\right)+J_{s-a,k}\left(T_{s,k},T_{a,k},t,\omega\right)+J_{a,k}\left(T_{a,k,out},T_{a,k,in},t,\omega\right)=0,$$
$$T_{a,k}\left(t=0,\omega\right)=T_e(\omega), \tag{3}$$

где $h_{a,k}=\rho_{a,k}c_{a,k}V_{a,k}$ — полная теплоемкость потока среды, протекающей через k-й кластер плотностью $\rho_{a,k}$, удельной теплоемкостью $c_{a,k}$, объемом $V_{a,k}$;

$$J_{a,k}\left(T_{a,k,out},T_{a,k,in},t,\omega\right)=c_{a,k}G_k\left(T_{a,k,out}\left(t,\omega\right)-T_{a,k,in}\left(t,\omega\right)\right)$$

— поток энтальпии среды, аккумулирующей тепло от тепловыделяющих элементов ЭС в данном кластере; $G_k=\rho_{a,k,in}\upsilon_{a,k,in}S_{a,k,in}=\rho_{a,k,out}\upsilon_{a,k,out}S_{a,k,out}$ — массовый расход среды, поступающей на вход k-го кластера через отверстие площадью $S_{a,k,in}$ со скоростью $\upsilon_{a,k,in}$ и температурой $T_{a,k,in}\left(t,\omega\right)$ и выходящей из k-го кластера через площадь выходного отверстия $S_{a,k,out}$ со скоростью $\upsilon_{a,k,out}$ и температурой $T_{a,k,out}\left(t,\omega\right)$.

Отметим, что постоянные времени тепловых процессов в воздушной среде (τ_a) и в твердотельных элементах (τ_s) связаны между собой соотношением $\tau_a\ll\tau_s$. Поэтому тепловые процессы в воздушной среде протекают существенно быстрее, чем в твердотельных элементах, и время установления стационарной температуры в воздушной среде существенно меньше, чем в твердотельных элементах. В силу этого, с достаточной для практики теплового проектирования точностью, можно принять, что в пределах одного кластера средняя температура потока среды связана с температурами потока на входе и выходе кластера соотношением $2T_{a,k}\left(t,\omega\right)=$ $=T_{a,k,out}\left(t,\omega\right)-T_{a,k,in}\left(t,\omega\right)$ [Ellison, 2011; Дульнев, 1971; Мадера, Кандалов, 2016], поэтому поток $J_{a,k}\left(T_{a,k,out},T_{a,k,in},t,\omega\right)$ может быть записан как

$$J_{a,k}\left(T_{a,k,out},T_{a,k,in},t,\omega\right)=2c_{a,k}G_k\left(T_{a,k}\left(t,\omega\right)-T_{a,k,in}\left(t,\omega\right)\right).$$

Подставляя выражения для тепловых потоков в уравнения (1), (2), (3), получим математическую модель интервально-стохастических тепловых процессов в k-м кластере:

- для ядра k-го кластера

$$h_{c,k}\frac{dT_{c,k}(t,\omega)}{dt}+g^{cond}_{c-s,k}\cdot\left(T_{c,k}(t,\omega)-T_{s,k}(t,\omega)\right)+g^{conv}_{c-a,k}\cdot\left(T_{c,k}(t,\omega)-T_{a,k}(t,\omega)\right)-$$
$$-g^{cond}_{c,k-1-c,k}\cdot\left(T_{c,k-1}(t,\omega)-T_{c,k}(t,\omega)\right)+g^{cond}_{c,k-c,k+1}\cdot\left(T_{c,k}(t,\omega)-T_{c,k+1}(t,\omega)\right)=\Phi_k(\omega), \tag{4}$$

- для оболочки k-го кластера

$$h_{s,k}\frac{dT_{s,k}(t,\omega)}{dt}-g^{cond}_{c-s,k}\cdot\left(T_{c,k}(t,\omega)-T_{s,k}(t,\omega)\right)+g^{conv}_{s-e,k}\cdot\left(T_{s,k}(t,\omega)-T_{e}(\omega)\right)-$$
$$-g^{conv}_{s-a,k}\cdot\left(T_{s,k}(t,\omega)-T_{a,k}(t,\omega)\right)-g^{cond}_{s,k-1-s,k}\cdot\left(T_{s,k-1}(t,\omega)-T_{s,k}(t,\omega)\right)+$$
$$+g^{cond}_{s,k-s,k+1}\cdot\left(T_{s,k}(t,\omega)-T_{s,k+1}(t,\omega)\right)=0, \tag{5}$$

- для потока среды в k-м кластере

$$h_{a,k}\frac{dT_{a,k}(t,\omega)}{dt}-g^{conv}_{c-a,k}\cdot\left(T_{c,k}(t,\omega)-T_{a,k}(t,\omega)\right)+g^{conv}_{s-a,k}\cdot\left(T_{s,k}(t,\omega)-T_{a,k}(t,\omega)\right)+$$
$$+2c_{a,k}G_k\left(T_{a,k}(t,\omega)-T_{a,k,in}(t,\omega)\right)=0, \tag{6}$$

или в матричном виде

$$H_k\frac{dT_k(t,\omega)}{dt}+\mathcal{G}_k\cdot T_k(t,\omega)=P_k(t,\omega),$$
$$T_k(t=0,\omega)=T_e(\omega)I, \tag{7}$$

где $T_k(t,\omega)=\left(T_{c,k}(t,\omega),T_{s,k}(t,\omega),T_{a,k}(t,\omega)\right)^T$ — вектор интервально-стохастических температур ядра, оболочки и потока среды в k-м кластере; $I=(1,1,1)$ — единичный вектор; $H_k=\mathrm{diag}\{h_{c,k},h_{s,k},h_{a,k}\}$ — детерминированная диагональная матрица полных теплоемкостей ядра $h_{c,k}$, оболочки $h_{s,k}$ и потока среды $h_{a,k}$ в k-м кластере; $\mathcal{G}_k$ — детерминированная матрица тепловых проводимостей k-го кластера, равная

$$\mathcal{G}_k=\begin{pmatrix} g^{(1)}_k & -g^{cond}_{c-s,k} & -g^{conv}_{c-a,k}\\ -g^{cond}_{c-s,k} & g^{(2)}_k & g^{conv}_{s-a,k}\\ -g^{conv}_{c-a,k} & g^{conv}_{s-a,k} & g^{(3)}_k\end{pmatrix}, \tag{8}$$

$$g^{(1)}_k=g^{cond}_{c-s,k}+g^{conv}_{c-a,k}+g^{cond}_{c,k-1-c,k}+g^{cond}_{c,k-c,k+1},$$
$$g^{(2)}_k=g^{cond}_{c-s,k}+g^{conv}_{s-e,k}-g^{conv}_{s-a,k}+g^{cond}_{s,k-1-s,k}+g^{cond}_{s,k-s,k+1},$$
$$g^{(3)}_k=g^{conv}_{c-a,k}-g^{conv}_{s-a,k}+2c_{a,k}G_k;$$

$P_k(t,\omega)$ — интервально-стохастический вектор правой части матричного уравнения (7):

$$P_k(t,\omega)=\begin{pmatrix}\Phi_k(\omega)+g^{cond}_{c,k-1-c,k}T_{c,k-1}(t,\omega)+g^{cond}_{c,k-c,k+1}T_{c,k+1}(t,\omega)\\ g^{conv}_{s-e,k}T_e(\omega)+g^{cond}_{s,k-1-s,k}T_{s,k-1}(t,\omega)+g^{cond}_{s,k-s,k+1}T_{s,k+1}(t,\omega)\\ 2c_{a,k}G_kT_{a,k,in}(t,\omega)\end{pmatrix}. \tag{9}$$

После ряда преобразований, а также принимая во внимание рекурентное соотношение $T_{a,k,in}(t,\omega)=2T_{a,k}(t,\omega)-T_{a,k-1,in}(t,\omega)$, следующее из очевидного равенства $T_{a,k,in}(t,\omega)=$

$= T_{a,k-1,out}(t,\omega)$, $k = 1,2,\ldots,K$, вместо уравнения (7) получим матрично-блочное уравнение, выраженное через известную априори температуру $T_{a,in}(\omega)$ потока среды на входе в ЭС:

$$H\frac{dT(t,\omega)}{dt} + \mathcal{G}\cdot T(t,\omega) = Q(\omega), \quad T(t=0,\omega) = T_e(\omega)I, \tag{10}$$

где $T(t,\omega) = (T_1(t,\omega), T_2(t,\omega), \ldots, T_K(t,\omega))^T$ — блочный вектор интервально-стохастических температур кластеров, каждый k-й векторный блок которого равен $T_k(t,\omega) = (T_{c,k}(t,\omega), T_{s,k}(t,\omega), T_{a,k}(t,\omega))^T$, $k = 1,2,\ldots,K$; $H = \mathrm{diag}\{H_1, H_2, \ldots, H_K\}$ — блочно-диагональная детерминированная матрица полных теплоемкостей кластеров, состоящая из диагональных матриц-блоков $H_k = \mathrm{diag}\{h_{c,k}, h_{s,k}, h_{a,k}\}$, $k = 1,2,\ldots,K$; $Q(\omega) = (Q_1(\omega), Q_2(\omega), \ldots, Q_K(\omega))^T$ — блочный интервально-стохастический вектор, содержащий априори известные мощности $\Phi_k(\omega)$ кластеров, температуры окружающей среды $T_e(\omega)$ и потока на входе в ЭС $T_{a,in}(\omega)$, k-й векторный блок которого равен $Q_k(t,\omega) = \left(\Phi_k(\omega), g^{conv}_{s-e,k}T_e(\omega), 2(-1)^{k-1}c_{a,k}G_kT_{a,in}(\omega)\right)^T$; $\mathcal{G}$ — детерминированная блочная $3K \times 3K$-матрица тепловых проводимостей кластеров, со структурой

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} \mathcal{G}_{11} & \mathcal{G}_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ \mathcal{G}_{21} & \mathcal{G}_{22} & \mathcal{G}_{23} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{G}_{K,1} & \mathcal{G}_{K,2} & \mathcal{G}_{K,3} & \cdots & \mathcal{G}_{KK} \end{pmatrix}, \tag{11}$$

с диагональными матрицами-блоками $\mathcal{G}_{kk}$, $k = 1,2,\ldots,K$, равными матрицам $\mathcal{G}_k$, имеющим вид (8), и диагональными матрицами-блоками, равными

$$\mathcal{G}_{i,i-1} = \mathrm{diag}\,\{g^{cond}_{c,i-1-c,i},\, g^{cond}_{s,k-1-s,i},\, 4c_{a,i}G_i\}, \quad i = 2,3,\ldots,K,$$
$$\mathcal{G}_{i,i+1} = \mathrm{diag}\,\{g^{cond}_{c,i-c,i+1},\, g^{cond}_{s,i-s,i+1},\, 4c_{a,i}G_i\}, \quad i = 1,2,\ldots,K-1,$$
$$\mathcal{G}_{ij} = (-1)^{i-j}\,\mathrm{diag}\,\{0, 0,\, 4c_{a,i}G_i\}, \quad i = 3,4,\ldots,K, \; j = 1,2,\ldots,K-2.$$

3. Определение уравнений относительно интервальных статистических мер переменных состояния интервально-стохастических тепловых процессов в кластерах

Состояния интервально-стохастических тепловых процессов в k-м кластере определяются температурами ядра $T_{c,k}(t,\omega)$, оболочки $T_{s,k}(t,\omega)$ и потока среды $T_{a,k}(t,\omega)$, которые полностью характеризуются своими интервальными статистическими мерами [Madera, 2020; Мадера, Кандалов, 2016], а именно:

- математическими ожиданиями температур

$$\overline{T}_{c,k}(t) = E\{\overset{0}{T}_{c,k}(t,\omega)\}, \quad \overset{0}{T}_{c,k}(t,\omega) = T_{c,k}(t,\omega) - \overline{T}_{c,k}(t),$$
$$\overline{T}_{s,k}(t) = E\{\overset{0}{T}_{s,k}(t,\omega)\}, \quad \overset{0}{T}_{s,k}(t,\omega) = T_{s,k}(t,\omega) - \overline{T}_{s,k}(t),$$
$$\overline{T}_{a,k}(t) = E\{\overset{0}{T}_{a,k}(t,\omega)\}, \quad \overset{0}{T}_{a,k}(t,\omega) = T_{a,k}(t,\omega) - \overline{T}_{a,k}(t),$$

где $E\{\cdot\}$ — оператор математического ожидания;

- ковариационной матрицей $K_{TT}(t) = E\{\overset{0}{T}_k(t,\omega)\cdot(\overset{0}{T}_k(t,\omega))^T\}$ вектора температур состояний k-го кластера $T_k(t,\omega) = (T_{c,k}(t,\omega), T_{s,k}(t,\omega), T_{a,k}(t,\omega))^T$;
- дисперсиями $D_{T_{c,k}}$, $D_{T_{s,k}}$, $D_{T_{a,k}}$, равными диагональным элементам матрицы $K_{TT}(t)$, и среднеквадратическими отклонениями $\sigma_{T_{c,k}}$, $\sigma_{T_{s,k}}$, $\sigma_{T_{a,k}}$.

По найденным статистическим мерам $\overline{T}$ и σ_T интервально-стохастической температуры $T(t,\omega)$ определяются интервалы $[T_{bot}(t), T_{up}(t)]$, внутри которых будут находиться реальные значения температур $T(t,\omega)$ различных кластеров в тепловой модели ЭС. Нижние и верхние границы интервалов $T_{bot}(t)$ и $T_{up}(t)$ равны

$$T_{bot}(t) = \overline{T}(t) - \epsilon\cdot\sigma_T(t) \text{ и } T_{up}(t) = \overline{T} + \epsilon\cdot\sigma_T(t),$$

где ϵ — коэффициент, определяемый доверительной вероятностью и неравенством Чебышёва [Пугачев, 1962; Мадера, Кандалов, 2016].

Для определения статистических мер интервально-стохастических температур $T_{c,k}(t,\omega)$, $T_{s,k}(t,\omega)$ и $T_{a,k}(t,\omega)$ во всех кластерах тепловой модели применим метод [Мадера, Кандалов, 2016; Мадера, 2019; Madera, 2020], и получим уравнения относительно статистических мер блочного интервально-стохастического вектора $T(t,\omega) = (T_1(t,\omega), T_2(t,\omega), \ldots, T_K(t,\omega))^T$ во всех кластерах, а именно вектора математических ожиданий $\overline{T}(t) = E\{T(t,\omega)\}$ и ковариационной матрицы $K_{TT}(t) = E\{\overset{0}{T}(t,\omega)\cdot(\overset{0}{T}(t,\omega))^T\}$ центрированного интервально-стохастического вектора температур $\overset{0}{T}(t,\omega) = T(t,\omega) - \overline{T}(t)$.

Уравнение для вектора математических ожиданий температур $\overline{T}(t)$ получается непосредственно после применения оператора математического ожидания к уравнению (10):

$$H\frac{d\overline{T}(t)}{dt} + \mathcal{G}\cdot\overline{T}(t) = \overline{Q}, \quad \overline{T}(t=0) = \overline{T}_e I, \tag{12}$$

где $\overline{T}(t) = (\overline{T}_1(t), \overline{T}_2(t), \ldots, \overline{T}_K(t))^T$ — блочный вектор математических ожиданий температур кластеров (ядра, оболочки, среды), каждый векторный блок в котором равен $\overline{T}_k(t) = (\overline{T}_{c,k}(t), \overline{T}_{s,k}(t), \overline{T}_{a,k}(t))^T$; $\overline{Q} = (\overline{Q}_1, \overline{Q}_2, \ldots, \overline{Q}_K)^T$ — блочный вектор математических ожиданий, каждый векторный блок в котором равен $\overline{Q}_k = (\overline{\Phi}_k,\ g^{conv}_{s-e,k}\,\overline{T}_e,\ 2(-1)^{k-1}c_{a,k}G_k\overline{T}_{a,in})^T$.

Уравнение относительно ковариационной матрицы $K_{TT}(t)$ получим вычтя предварительно уравнение (12) из уравнения (10):

$$H\frac{d\overset{0}{T}(t,\omega)}{dt} + \mathcal{G}\cdot\overset{0}{T}(t,\omega) = \overset{0}{Q}(\omega), \quad \overset{0}{T}_k(t=0,\omega) = \overset{0}{T}_e(\omega)I,$$

и применив к нему метод [Мадера, Кандалов, 2016; Мадера, 2019; Madera, 2020]. В результате получим уравнение для ковариационной матрицы $K_{TT}(t)$:

$$H\frac{dK_{TT}(t)}{dt}H + \mathcal{G}\cdot K_{TT}(t)H + HK_{TT}(t)\cdot\mathcal{G}^T = HK_{TQ}(t) + K^T_{TQ}(t)H,$$

$$K_{TT}(t=0) = D_{T_e}I\cdot I^T, \tag{13}$$

которое решается совместно с матрично-блочным уравнением относительно ковариационной матрицы $K_{TQ}(t) = E\{\overset{0}{T}(t,\omega)\cdot(\overset{0}{Q}(t,\omega))^T\}$:

$$H\frac{dK_{TQ}(t)}{dt} + \mathcal{G}K_{TQ}(t) = K_{QQ}, \quad K_{TQ}(t=0) = D_{T_e}\mathcal{Q}, \tag{14}$$

где $K_{QQ}(t) = E\{\overset{0}{Q}(\omega)(\overset{0}{Q}(\omega))^T\}$ — квадратная блочная ковариационная матрица с диагональными матрицами-блоками, равными

$$K_{Q,ij} = \mathrm{diag}\,\{0, g_{s-e,i}^{conv}\, g_{s-e,j}^{conv}\, D_{T_e},\ 4(-1)^{i+j}\, c_{a,i}c_{a,j}G_iG_j\, D_{T_{a,in}}\},$$
$$K_{Q,ii} = \mathrm{diag}\,\{D_{\Phi_i}, g_{s-e,i}^{conv} g_{s-e,j}^{conv}\, D_{T_e},\ 4(-1)^{i+j}\, c_{a,i}c_{a,j}G_iG_jD_{T_{a,in}}\};$$

$\mathcal{Q}$ — прямоугольная блочная $3K\times K$-матрица, с прямоугольными 1×3-матрицами-блоками $\mathcal{Q}_{ij} = (0, g_{s-e,j}^{conv}\, D_{T_e}, 0)$.

Для определения интервальных статистических мер по уравнениям (12), (13), (14) необходимо сначала решить матрично-блочное уравнение (12) для математических ожиданий температур $\overline{T}(t)$ всех кластеров, затем — матрично-блочное уравнение (14) относительно ковариационной матрицы $K_{TQ}(t)$, которые далее подставляются в уравнение (13) и решаются относительно искомой корреляционной матрицы $K_{TT}(t)$.

Системы уравнений (12), (13), (14) являются матрично-блочными линейными дифференциальными уравнениями в обыкновенных производных первого порядка, решение которых осуществляется известными численными методами.

4. Применение кластерного метода

Применение кластерного метода рассмотрим на примере ЭС, представляющей собой вычислительную систему в плоском корпусе (*laptop*) и содержащей четыре электронных модуля (ЭМ), охлаждаемых потоком воздуха, нагнетаемого из окружающей среды на вход ЭС (рис. 2). В силу статистического технологического разброса изготовления электронных элементов, установленных в ЭМ, и, как следствие, мощностей тепловыделений в ЭМ, а также стохастичности температуры окружающей среды тепловые процессы в ЭС являются интервально-стохастическими. Тепловая модель ЭС содержит пять кластеров, причем четвертый ЭМ разделен

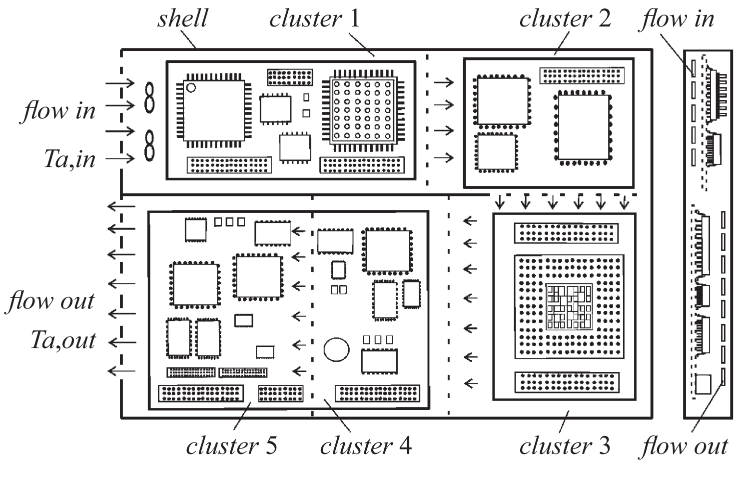

Рис. 2. Электронная система и кластерная тепловая модель. Пунктиром показано разбиение на кластеры

на два кластера — четвертый и пятый (рис. 2). Статистические меры (математическое ожидание (МО), интервал изменения (ИИ), среднеквадратическое отклонение (СКО)) интервально-стохастических исходных данных, являющихся входными для моделирования, приведены в табл. 1.

Таблица 1. Статистические меры (МО, ИИ, СКО) интервально-стохастических исходных данных для моделирования тепловых процессов в ЭС

Статистические меры	**Температура окружающей среды и потока среды на входе в ЭС, °С**		**Мощности тепловыделения ЭМ, Вт**				
	$T_e(\omega)$	$T_{a,in}(\omega)$	$\Phi_1(\omega)$	$\Phi_2(\omega)$	$\Phi_3(\omega)$	$\Phi_4(\omega)$	$\Phi_5(\omega)$
МО	23	23	22	10	15	8	14
ИИ	19.7÷23.3	19.7÷23.3	17.5÷26.5	7.6÷12.4	12÷18	6.2÷9.8	10.4÷17.6
СКО	1.1	1.1	1.5	0.8	1	0.6	1.2

Моделирование интервально-стохастических тепловых процессов в ЭС осуществлялось для стационарного (установившегося) режима, описываемого стационарной математической моделью, следующей из уравнений (12), (13), (14), а именно:

$$\mathcal{G}\cdot\overline{T}=\overline{Q},$$
$$\mathcal{G}\cdot K_{TT}H+HK_{TT}\cdot\mathcal{G}^T=HK_{TQ}+K_{TQ}^T H,$$
$$\mathcal{G}K_{TQ}=K_{QQ}. \tag{15}$$

Первое уравнение в (15) описывает 3 × 5-блочный вектор стационарных математических ожиданий температур в пяти кластерах $\overline{T}(t)=(\overline{T}_1,\overline{T}_2,\overline{T}_3,\overline{T}_4,\overline{T}_5)^T$ с векторами-блоками $\overline{T}_k=(\overline{T}_{c,k},\overline{T}_{s,k},\overline{T}_{a,k})^T$, содержащими математические ожидания температур ядра, оболочки и среды в k-м кластере, $k=1,2,3,4,5$. В правой части уравнения стоит 3 × 5-блочный вектор $\overline{Q}=(\overline{Q}_1,\overline{Q}_2,\overline{Q}_3,\overline{Q}_4,\overline{Q}_5)^T$, с векторами-блоками $\overline{Q}_k=(\overline{\Phi}_k,\ g_{s-e,k}^{conv}\,\overline{T}_e,\ 2(-1)^{k-1}c_{a,k}G_k\overline{T}_{a,in})^T$, $k=1,2,3,4,5$. Второе уравнение системы (15) определяет ковариационную 15 × 15-матрицу K_{TT}, содержащую ковариации между температурами ядра, оболочки и среды во всех пяти кластерах. Уравнение решается совместно с третьим уравнением системы (15), которое определяет матрицу ковариаций между температурами ядра, оболочки, среды во всех кластерах, а также между температурами ядра, оболочки, среды во всех кластерах с известными исходными температурами окружающей среды и потока на входе в ЭС.

Решения уравнений математической модели (15) в виде статистических мер, а именно математических ожиданий (МО), а также минимального (МИН) и максимального (МАКС) значений интервалов температур ядра, оболочки и среды во всех пяти кластерах, приведены в табл. 2.

Таблица 2. Результаты моделирования температур ядра $T_{c,k}$, оболочки $T_{s,k}$, среды $T_{a,k}$ (°С) в кластерах $k=1-5$

Статистические меры	**1 кластер**			**2 кластер**			**3 кластер**			**4 кластер**			**5 кластер**		
	$T_{c,1}$	$T_{s,1}$	$T_{a,1}$	$T_{c,2}$	$T_{s,2}$	$T_{a,2}$	$T_{c,3}$	$T_{s,3}$	$T_{a,3}$	$T_{c,4}$	$T_{s,4}$	$T_{a,4}$	$T_{c,5}$	$T_{s,5}$	$T_{a,5}$
МО	76.9	27.4	25.9	64.7	33.4	30	77.3	37.5	32.7	66.7	40.9	35	57.1	42.8	36.2
МИН	62.5	23.2	22	51.6	27.9	25.2	63	31.1	27.3	53.7	33.8	29.1	45.5	35.2	30 2
МАКС	91.2	31.6	29.8	77.8	38.9	34.7	91.6	43.9	38	79.7	48	40.8	68.6	50.5	42.4

На рис. 3 показаны рассчитанные распределения математического ожидания (средняя линия), минимального (нижняя линия) и максимального (верхняя линия) значений температуры ядра и потока среды в кластерах вдоль всего пути прохождения потока от входа до выхода ЭС. Полученные результаты свидетельствуют о значительном разбросе значений температуры ядра кластера и несколько меньшем, по сравнению с ним, разбросе температуры в потоке среды. Так, максимальный разброс температуры ядра (1-й кластер) составляет 28.6 °C, в то время как разброс температуры потока среды (в пятом кластере) составляет 12.4 °C. Это обусловливается тем, что ядро кластера, будучи множеством активных элементов, является тепловыделяющим, в то время как поток среды аккумулирует тепло от ядра. Результаты показывают также, что распределение температуры в потоке среды по пути его следования в ЭС отличается от линейного, поэтому допущение о линейном характере распределения температуры в потоке среды в ЭС не может считаться адекватным. Интервальные значения температуры в кластерах (ядре, оболочке, потоке среды), полученные по результатам моделирования, означают, что при эксплуатации реальных образцов рассматриваемой ЭС может встретиться любая температура из интервалов их изменения. При значительной температурной зависимости электрических параметров ЭС разброс температуры активных элементов (процессоров, микросхем) влечет за собой и разброс электрических параметров. Так, для ряда процессоров увеличение температуры ядра на 1 градус приводит к снижению производительности на 3.5 %, а с учетом того, что в рассматриваемой ЭС максимальный интервальный разброс температуры процессора (ядро кластера) достигает почти 30 градусов, отметим, что снижение производительности составит 35 %.

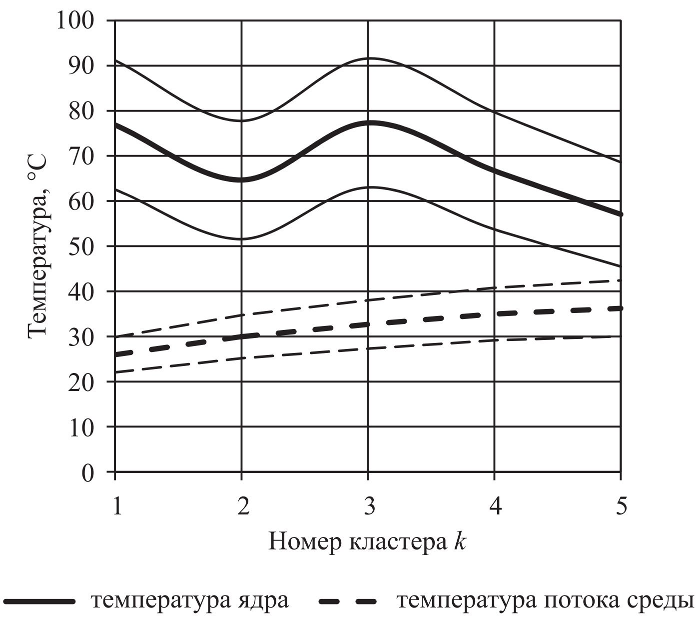

Рис. 3. Распределение математического ожидания (средняя линия), минимального (нижняя линия) и максимального (верхняя линия) значений температуры ядра и потока среды по кластерам k тепловой модели

5. Заключение

В существующих в настоящее время методах моделирования тепловых процессов в сложных ЭС полагается, что распределение температуры в потоке нагнетаемой через ЭС среды является равномерным. Между тем тепловое взаимодействие между потоком среды и тепловыделяющими элементами в ЭС приводит на практике к неравномерному распределению температуры в потоке среды. Действительно, поток среды внутри ЭС аккумулирует тепло от нагретых элементов, повышая при этом свою энтальпию, которая далее переносится и передается тепловыделяющим элементам, расположенным вверх по течению потока, приводя как к дополнительному их нагреванию, так и к росту энтальпии потока и в результате к превышению температуры потока среды на выходе ЭС над температурой среды на входе. Моделирование теплообмена между средой и тепловыделяющими элементами в ЭС должно также рассматриваться в сопряженной постановке, при которой взаимодействие потока с нагретыми элементами приводит к росту энтальпии потока, а энтальпия в свою очередь — к нагреванию элементов, замыкая тем самым петлю обратной связи. Кроме того, в силу неустранимого статистического разброса при изготовлении электронных элементов и их монтаже в ЭС, а также случайных флуктуаций тепловых параметров окружающей среды тепловые процессы в ЭС носят интервально-стохастический характер. Пренебрежение такими факторами, как неравномерное распределение температуры среды в ЭС, сопряженный характер теплообмена потока среды с тепловыделяющими элементами, интервально-стохастический характер тепловых процессов в ЭС, приводит к неадекватному моделированию и значительным ошибкам при проектировании ЭС, а в итоге — созданию неконкурентоспособной аппаратуры.

Кластерный метод моделирования, разработанный в настоящей работе, позволяет определять распределения температуры в тепловыделяющих элементах, корпусе ЭС и потоке среды с учетом неравномерности распределений температуры, сопряженного характера теплообмена и интервально-стохастического характера тепловых процессов в ЭС. Кластерная тепловая модель конструкции ЭС представляет собой систему кластеров, в каждом из которых состояние теплового процесса характеризуется тремя интервально-стохастическими и изотермическими температурами, а именно температурой ядра кластера, объединяющего все попадающие в кластер тепловыделяющие элементы, температурой оболочки кластера, температурой потока среды в пределах объема кластера. При этом как все элементы отдельного кластера (ядро, оболочка, среда), так и взаимодействующие с ними элементы соседних кластеров находятся в состоянии сопряженного теплообмена. Кластерная математическая модель опирается на кластерную тепловую модель и представляет собой систему интервально-стохастических матрично-блочных уравнений с матричными и векторными блоками, соответствующими различным кластерам тепловой модели. На основании этих уравнений выводятся матрично-блочные уравнения относительно статистических мер переменных состояния стохастических тепловых процессов в кластерах — математических ожиданий, ковариаций между переменными состояний и дисперсий. Применение разработанного метода показано на примере реальной ЭС в виде вычислительной системы, содержащей несколько ЭМ, находящихся в состоянии теплообмена с потоком охлаждающей среды внутри корпуса ЭС и окружающей средой.

Список литературы (References)

Дульнев Г. Н. Тепловые режимы электронной аппаратуры. — Л.: Энергия, 1971.

Dul'nev G. N. Teplovye rezhimy elektronnoj apparatury [Thermal modes of electronic equipment]. — Leningrad: Energiya, 1971 (in Russian).

Мадера А. Г. Иерархический метод математического моделирования стохастических тепловых процессов в сложных электронных системах // Компьютерные исследования и моделирование. — 2019. — Т. 11, № 4. — С. 613–630.

Madera A. G. Ierarkhicheskij metod matematicheskogo modelirovaniya stokhasticheskikh teplovykh protsessov v slozhnykh elektronnykh sistemakh [Hierarchical method for mathematical modeling of stochastic thermal processes in complex electronic systems] // Computer Research and Modeling. — 2019. — Vol. 11, No. 4. — P. 613–630 (in Russian).

Мадера А. Г. Моделирование воздействия тепловой обратной связи на тепловые процессы в электронных системах // Компьютерные исследования и моделирование. — 2018. — Т. 10, № 4. — С. 483–494.

Madera A. G. Modelirovanie vozdejstviya teplovoj obratnoj svyazi na teplovye proczessy v elektronnykh sistemakh [Modeling thermal feedback effect on thermal processes in electronic systems] // Computer Research and Modeling. — 2018. — Vol. 10, No. 4. — P. 483–494 (in Russian).

Мадера А. Г., Кандалов П. И. Математическое моделирование интервально стохастических тепловых процессов в технических системах при интервальной неопределенности определяющих параметров // Компьютерные исследования и моделирование. — 2016. — Т. 8, № 3. — С. 501−520.

Madera A. G., Kandalov P. I. Matematicheskoe modelirovanie interval`no stokhasticheskikh teplovy`kh proczessov v tekhnicheskikh sistemakh pri interval`noj neopredelennosti opredelyayushhikh parametrov [Mathematical modeling of the interval stochastic thermal processes in electronic systems at the interval indeterminacy of the determinative parameters] // Computer Research and Modeling. — 2016. — Vol. 8, No. 3. — P. 501−520 (in Russian).

Мадера А. Г., Решетников В. Н. Многофункциональный программный комплекс теплового проектирования электронных систем: требования к архитектуре и функциональным возможностям моделирования // Программные продукты и системы. — 2017. — № 3 (30). — С. 367–372.

Madera A. G., Reshetnikov V. N. Mnogofunkczional'nyj programmnyj kompleks teplovogo proektirovaniya elektronnykh sistem: trebovaniya k arkhitekture i funkczional'nym vozmozhnostyam modelirovaniya [A software complex for electronic system thermal design: requirements for architecture and functional possibilities of modeling] // Programmnye produkty i sistemy. — 2017. — No. 3 (30). — P. 367–372 (in Russian).

Пугачев В. С. Теория случайных функций. — М.: Наука, 1962.

Pugachev V. S. Teoriya sluchajny`kh funkczij [Theory of random functions]. — Moscow: Nauka, 1962 (in Russian).

Сергеев В. А., Ходаков А. М. Нелинейные тепловые модели полупроводниковых приборов. — Ульяновск: УлГТУ, 2012.

Sergeev V. A., Khadakov A. M. Nelinejnye teplovye modeli poluprovodnikovykh priborov [Nonlinear thermal models of semiconductor devices]. — Ulyanovsk: UlGTU, 2012 (in Russian).

Adomian G. Stochastic Systems. — NY: Academic Press, 1983.

Ellison G. N. Thermal computations for electronics. Conductive, radiative, and convective air cooling. — NY: CRC Press, 2011.

Kuuse M., Loikkanen M., Bognar Gy. Theoretical investigation of feedback effects in low-power circuits // THERMINIC. — Belgirate, 2005. — P. 28–30.

Madera A., Kandalov P. Thermal Processes in Electronic Equipment at Uncertainty // Journal of Engineering Thermophysics. — 2020. — Vol. 29, No. 1. — P. 170–180.

Schlichting (Deceased) H., Gersten K. Boundary-Layer Theory. — Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2017.

Spalding D. B., Taborek J. (eds.). Heat Exchanger Design Handbook. — NY: Hemisphere Publishing Corporation, 1990.