

УДК: 519.876.5

Гиперграфовый подход в декомпозиции сложных технических систем

А. Н. Божко

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана,
Россия, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1

E-mail: bozh12@yandex.ru

Получено 01.06.2020, после доработки — 19.06.2020.

Принято к публикации 23.06.2020.

В статье рассматривается математическая модель декомпозиции сложного изделия на сборочные единицы. Это важная инженерная задача, которая влияет на организацию дискретного производства и его и оперативное управление. Приведен обзор современных подходов к математическому моделированию и автоматизированному синтезу декомпозиций. В них математическими моделями структур технических систем служат графы, сети, матрицы и др. Эти модели описывают механическую структуру как бинарное отношение на множестве элементов системы. Геометрическая координация и целостность машин и механических приборов в процессе изготовления достигаются при помощи базирования. В общем случае базирование может осуществляться относительно нескольких элементов одновременно. Поэтому оно представляет собой отношение переменной местности, которое не может быть корректно описано в терминах бинарных математических структур. Описана новая гиперграфовая модель механической структуры технической системы. Эта модель позволяет дать точную и лаконичную формализацию сборочных операций и процессов. Рассматриваются сборочные операции, которые выполняются двумя рабочими органами и заключаются в реализации механических связей. Такие операции называются когерентными и секвенциальными. Это преобладающий тип операций в современной промышленной практике. Показано, что математическим описанием такой операции является нормальное стягивание ребра гиперграфа. Последовательность стягиваний, трансформирующая гиперграф в точку, представляет собой математическую модель сборочного процесса. Приведены доказанные автором две важные теоремы о свойствах стягиваемых гиперграфов и подграфов. Введено понятие s -гиперграфа. S -гиперграфы являются корректными математическими моделями механических структур любых собираемых технических систем. Декомпозиция изделия на сборочные единицы поставлена как разрезание s -гиперграфа на s -подграфы. Задача разрезания описана в терминах дискретного математического программирования. Получены математические модели структурных, топологических и технологических ограничений. Предложены целевые функции, формализующие оптимальный выбор проектных решений в различных ситуациях. Разработанная математическая модель декомпозиции изделия является гибкой и открытой. Она допускает расширения, учитывающие особенности изделия и его производства.

Ключевые слова: сборка, сборочная единица, структура изделия, декомпозиция на сборочные единицы, система автоматизированного проектирования, граф связей, гиперграф, дискретное математическое программирование

UDC: 519.876.5

Hypergraph approach in the decomposition of complex technical systems

A. N. Bozhko

Bauman Moscow State University,
5/1 2-ya Baumanskaya st., Moscow, 105005, Russia

E-mail: bozh12@yandex.ru

Received 01.06.2020, after completion — 19.06.2020.

Accepted for publication 23.06.2020.

The article considers a mathematical model of decomposition of a complex product into assembly units. This is an important engineering problem, which affects the organization of discrete production and its operational management. A review of modern approaches to mathematical modeling and automated computer-aided of decompositions is given. In them, graphs, networks, matrices, etc. serve as mathematical models of structures of technical systems. These models describe the mechanical structure as a binary relation on a set of system elements. The geometrical coordination and integrity of machines and mechanical devices during the manufacturing process is achieved by means of basing. In general, basing can be performed on several elements simultaneously. Therefore, it represents a variable arity relation, which can not be correctly described in terms of binary mathematical structures. A new hypergraph model of mechanical structure of technical system is described. This model allows to give an adequate formalization of assembly operations and processes. Assembly operations which are carried out by two working bodies and consist in realization of mechanical connections are considered. Such operations are called coherent and sequential. This is the prevailing type of operations in modern industrial practice. It is shown that the mathematical description of such operation is normal contraction of an edge of the hypergraph. A sequence of contractions transforming the hypergraph into a point is a mathematical model of the assembly process. Two important theorems on the properties of contractible hypergraphs and their subgraphs proved by the author are presented. The concept of s -hypergraphs is introduced. S -hypergraphs are the correct mathematical models of mechanical structures of any assembled technical systems. Decomposition of a product into assembly units is defined as cutting of an s -hypergraph into s -subgraphs. The cutting problem is described in terms of discrete mathematical programming. Mathematical models of structural, topological and technological constraints are obtained. The objective functions are proposed that formalize the optimal choice of design solutions in various situations. The developed mathematical model of product decomposition is flexible and open. It allows for extensions that take into account the characteristics of the product and its production.

Keywords: assembly, assembly unit, product structure, decomposition into assembly units, computer-aided design system, connection graph, hypergraph, discrete mathematical programming

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2020, vol. 12, no. 5, pp. 1007–1022 (Russian).

Введение

Декомпозиция технической системы на сборочные единицы (СЕ) — это одна из важных инженерных задач технической подготовки дискретного производства (ТПП). На основе выбранной иерархии сборочных единиц формируются многие конструкторские и технологические документы: схема сборки, схема сборочного состава, схема разузлования, схема технологического членения и др. Данное проектное решение влияет на содержание технологических операций и организационные формы сборочного производства.

В современных публикациях по автоматизированному проектированию сборочных процессов (Computer aided assembly planning, CAAP) активно обсуждаются подходы к решению данной задачи. Так, в обзоре [Wang, Liu, 2013] приводится 96 источников, посвященных автоматизированному синтезу последовательности сборки (Assembly sequencing) и декомпозиции изделия на сборочные единицы (Subassembly identification, Subassembly generation, Subassembly units extraction, Subassembly detection, Partitioning assembly).

В [Kavraki, Kolountzakis, 1995] показано, что с вычислительной точки зрения это трудно-решаемая дискретная задача. Даже самая простая ее постановка о разбиении плоской фигуры на связанные составные части является NP-полной.

Для генерации данного проектного решения в CAD- и CAAP-системе необходима математическая модель, которая корректно описывает механическую структуру технической системы. В большинстве работ для этого используется так называемый граф механических связей (граф связей). Он представляет собой неориентированный граф $G = (X, V)$, в котором множество вершин $X = \{x_i\}_{i=1}^n$ описывает детали изделия, а ребро $v = \{x_k, x_l\} \in V$ инцидентно вершинам x_k, x_l , если и только если в изделии существует механическая связь (соединение или сопряжение) между соответствующими деталями.

Впервые данная модель под именем Liaison diagram введена в [Bourjault, 1988]. В исследованиях по CAAP граф связей — это основной источник структурной информации об изделии. Под различными псевдонимами (Connection graph [De Floriani, Nagy, 1989], Connectivity graph [Shpitalni et al., 1989], Part connectivity graph [Lin, Chang, 1993] и др.) данная модель активно используется для решения инженерных задач подготовки дискретного производства: синтез последовательности сборки, декомпозиции на сборочные единицы, структурный анализ, верификация сложных проектов и др.

В работах [Deshmukh et al., 1993; Hemmskerk, Van Luttervelt, 1989; O'Shea et al., 2000] декомпозиция на СЕ поставлена как разрезание графа связей на подграфы. Авторы полагают, что необходимым условием существования любой сборочной единицы является преобладание внутренней связности СЕ над ее внешней связностью. Ищется такое разрезание графа, которое максимизирует количество внутренних или минимизирует число внешних связей подграфов. Это подход напоминает методы кластерного анализа, которые используются для решения слабоструктурированных задач анализа данных [Flach, 2012]. Однако в инженерной практике действуют иные правила разбиения на сборочные единицы, которые отменяют общие закономерности кластерного анализа. Это прежде всего независимая собираемость СЕ, структура размерных цепей, силовое замыкание сборочной единицы и др. [Whitney, 2004].

Модифицированный метод разрезания описан в [Lee, 1994; Lee, Shin, 1990]. Главным источником проектной информации об изделии является семантическая сеть (Attributed liaison graph). Эта сеть представляет собой граф связей, с вершинами и ребрами которого ассоциированы фреймы, хранящие необходимую конструктивно-технологическую информацию о конструкции (тип и вид соединения, жесткость и прочность детали, габаритные размеры, геометрия контактирующих поверхностей и др.). Эти данные используются для оценки перспективных проектных решений и отбраковки неработоспособных альтернатив. Предложен сложный эвристический алгоритм генерации сборочных декомпозиций. В работе не описан переход от 3D-модели изделия к семантической сети. Все слоты сети необходимо заполнять вручную. Что делает подготовку исходной информации весьма трудоемкой и сложной.

Метод автоматизированного синтеза сборочных декомпозиций, предложенный в [Agrawal et al., 2020], использует три типа графов: Liaison graph, Modified liaison graph и Blocking graph. Первый описывает механические связи изделия и служит основой для формирования второй модели, по которой выполняется генерация проектных решений. В зависимости от свойства соединения (разъемное, неразъемное и условно разъемное) ребрам графа связей приписываются индексы. Подграф, совокупный вес ребер которого превышает заданный порог, считается моделью сборочной единицы. Строится Modified liaison graph, в котором вершины соответствуют СЕ, а ребра описывают связи между ними. Blocking graph хранит информацию о геометрических препятствиях при сборке и разборке. Последние два носителя предоставляют необходимые данные для автоматизированного синтеза сборочных декомпозиций.

В [Kara et al., 2005] предложена интерактивная процедура декомпозиции изделия. Структурной моделью изделия служит граф связей (Liaison diagram). Эксперту предлагаются вопросы о желательном упорядочении связей изделия в процессе разборки. На основе полученных данных строится последовательность демонтажа, в которой элементами являются детали и сборочные единицы.

В работах [Cao et al., 2015; Kou et al., 2019] предложен оригинальный комбинаторный способ генерации разбиения на сборочные единицы. Необходимая проектная информация извлекается из взвешенного графа связей (Weighted undirected connected graph). Авторы исходят из двух предположений. Первое: связность подграфа гарантирует связность конструктивного фрагмента, который соответствует этому подграфу. Второе: устойчивые СЕ должны иметь циклическую структуру. Находится фундаментальная система циклов графа и для каждого из них подсчитываются коэффициенты, учитывающие дополнительные конструктивные и технологические условия. Описан эвристический алгоритм, который строит одноуровневое разбиение на сборочные единицы.

Предположение о цикличности структуры любой СЕ используется в [Zussman et al., 1990; Ong, Wong, 1999]. Основной моделью изделия служит так называемый реляционный граф (Relational graph). Он представляет собой граф связей, вершинам которого сопоставлены фрагменты реляционной базы данных, хранящей сведения об изделии. Сборочной единицей считается множество деталей, которые в реляционном графе соединены простым или составным циклом, все ребра которого соответствуют соединениям (не сопряжениям), например: винтовым, шпоночным, шлицевым и др. На практике структурная цикличность гарантирует устойчивость СЕ, но часто может быть причиной ее несобираемости из-за появления замкнутых (неразрешимых) размерных цепей.

В [Zhang et al., 2002] предложен метод декомпозиции изделия на СЕ, использующий данные о порядковых отношениях деталей в процессе сборки (Precedence knowledge, Precedence relations [Ben-Arieh, Kramer, 1994], Precedence constraints [Wolter et al., 1992]). Это некоторая структура предпочтений на множестве деталей изделия, которая, в простейшем случае, может быть записана на языке бинарных отношений. Например, $x > y$, если деталь x должна быть установлена раньше детали y . Или $x = y$, если эти детали обязаны входить в одну сборочную единицу. Способы генерации порядковой структуры обсуждаются в [Ben-Arieh, Kramer, 1994; Wolter et al., 1992]. В [Zhang et al., 2002] описан алгоритм синтеза одноуровневого разбиения по заданной структуре предпочтений.

Оригинальная объектно-ориентированная модель изделия и метод разбиения на СЕ предложены в [Masclé, 1998]. Основной моделью механической структуры изделия служит граф связей. Его вершины и ребра разделены на классы в зависимости от функций, которые они выполняют в изделии. Так, все конструктивные элементы разбиты на два основных подкласса: основные детали (Functional parts) и вспомогательные детали (Attachment parts). Основными подклассами механических связей служат соединения (Connections) и сопряжения (Matings). Для оценки подвижности деталей и устойчивости сборочных единиц основаны на анализе степеней свободы конструктивных элементов в изделии.

Матричный метод декомпозиции на СЕ предложен в [Dini, Santochi, 1992]. В работе полагается, что группа деталей может быть сборочной единицей, если для этой группы выполняются условия связности, устойчивости и геометрической разрешимости (отсутствие геометрических препятствий). Для формализации данных условий необходимо сформировать матрицы: пересечений (*Interference matrices*), контактов (*Contact matrices*) и соединений (*Connection matrices*). Общее количество матриц равно 18 (!). Все они составляются экспертом по трехмерной геометрической модели изделия. По этой причине метод отличается высокой трудоемкостью подготовки исходных данных и низкой надежностью.

Три типа матриц используются в [Bahubalendruni, Biswal, 2018] для синтеза последовательности сборки и разбиения на СЕ. Матрица *Liaison matrix* описывает контакты деталей, матрица *Stability matrix* — взаимную устойчивость деталей в составе изделия. Матрицы *Interference matrices* хранят информацию о геометрических препятствиях в разных направлениях. В работе описан алгоритм генерации сборочных декомпозиций. Способ автоматического извлечения данных о контактах деталей из 3D-модели изделия описан в [Bahubalendruni, Biswal, 2016].

Способ декомпозиции на СЕ (*Subassembly identification*), предложенный в [Trigui et al., 2017; Belhadj et al., 2017], основан на нескольких матрицах, которые формируются по трехмерной геометрической модели изделия. Основным носителем служит матрица контактов (*Contact matrix*), которая хранит данные о соединениях и сопряжениях деталей. Процесс идентификации сборочных единиц основан на выделении так называемых базовых деталей (*Base parts*). Такowymi в работе считаются детали, которые имеют максимальное число контактов по трем основным направлениям разборки изделия. Описан алгоритм синтеза одноуровневой декомпозиции на сборочные единицы.

В [Zhao et al., 2009] декомпозиция изделия на СЕ выполняется при помощи аппарата логического программирования (*Answer set programming*). Механическая структура изделия представлена в виде ориентированного графа (*Assembly's liaison graph for a direction d*), который хранит информацию о контактах деталей в направлении вектора d . Определение сборочной единицы дано в терминах бинарных отношений, а для синтеза декомпозиции использованы методы логического вывода.

В [Watson, Hermans, 2019] предложен геометрический подход к моделированию сборочных декомпозиций. Сборочной единицей считается множество деталей, которое можно удалить без столкновений со статической частью конструкции. Свобода перемещения при разборке моделируется при помощи графа *Disassembly influence graph (DIG)*. DIG — это ориентированный взвешенный граф, у которого вершины описывают детали, дуги означают геометрические препятствия, а веса дуг — интенсивность геометрических ограничений при разборке. Предложен графовый алгоритм генерации сборочных единиц и последовательностей разборки изделия.

Похожий метод декомпозиции обсуждается в [Тимковский, 1992]. Множество деталей разбивается на классы эквивалентности. В каждый класс входят детали, которые целесообразно включить в отдельные СЕ по некоторым конструкторским или технологическим основаниям. Геометрические препятствия описываются при помощи так называемого графа препятствий. Сборка сборочной единицы представляется факторизацией соответствующих вершин графа. Сборочной единицей является такой класс эквивалентности, у которого не существует исходящих дуг из фактор-вершины в графе препятствий.

Метод синтеза последовательности сборки и сборочной декомпозиции, основанный на систематическом применении современного аппарата планирования перемещений (*Motion planning*), предложен в [Morato et al., 2013]. Он позволяет синтезировать все связные, устойчивые и независимо собираемые фрагменты конструкции, а также траектории их перемещения в процессе сборки или разборки. Поскольку генерация проектных решений выполняется в конфигурационных пространствах высокой размерности (1000 и выше), метод требует очень больших вычислительных ресурсов.

Все рассмотренные подходы к синтезу сборочных декомпозиций сложных изделий можно разделить на две группы: топологические и геометрические. В методах первой группы, например [Wang, Liu, 2013; Zhao et al., 2009], синтез сборочных единиц выполняется на основе струк-

Рассматриваются изделия, которые могут получены при помощи сборочных операций, которые:

- 1) осуществляют механические связи между деталями (когерентность);
- 2) могут быть выполнены при помощи двух независимых движений рабочих органов (секвенциальность) [Ghandi, Masehian, 2015].

Фиксированное положение детали является частным случаем движения, а приспособление, используемое для ее закрепления, — рабочим органом.

В [Bozhko, 2018] показано, что корректным математическим описанием сборочной операции, которая обладает свойствами когерентности и секвенциальности, является стягивание ребра второй степени (нормальное стягивание). Последовательность нормальных стягиваний, которая трансформирует гиперграф $H = (X, R)$ в точку, представляет собой описание сборочного процесса.

Определение 4. Гиперграф, который можно преобразовать в точку при помощи последовательности нормальных стягиваний, будем называть s -гиперграфом.

s -гиперграфы являются корректными математическими моделями механических структур собираемых технических систем.

Доказаны важные теоремы о стягиваемости гиперграфов [Bozhko, 2019].

Теорема 1. Если гиперграф $H = (X, R)$ стягивается в точку (является s -гиперграфом), то:

- 1) H является связным;
- 2) среди ребер H существует по крайней мере одно ребро второй степени;
- 3) справедливо равенство $|X| = |R| + 1$.

Важнейшим необходимым условием существования любой СЕ является ее независимая собираемость. Это значит, что механическая структура СЕ описывается некоторым s -подграфом s -гиперграфа.

Пусть $H = (X, R)$ — стягиваемый гиперграф (s -гиперграф), а $G \subseteq H$ — подграф $G = (X_G, R_G)$, порожденный в H своим множеством вершин $X_G \subseteq X$.

Теорема 2. Если $G = (X_G, R_G)$ включает в себя хотя бы одно ребро второй степени и для его вершин и ребер выполняется соотношение $|X_G| = |R_G| + 1$, то G является связным и стягиваемым, то есть s -гиперграфом.

Формализация структурной декомпозиции изделия

Теоремы 1 и 2 позволяют поставить декомпозицию изделия на СЕ как задачу разрезания гиперграфа на подграфы и формализовать эту задачу в терминах дискретного математического программирования.

Выбор переменных

Введем необходимые обозначения. Пусть $\bar{A} = \|a_{ij}\|_n^m$ — матрица инцидентности гиперграфа $H = (X, R)$, который описывает механическую структуру изделия X , $|X| = n$. Поскольку H является s -гиперграфом, то, по теореме 1, $m = n - 1$.

Введем основные переменные:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если деталь } x_i \text{ входит в } CE_j, \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
y_{kj} &= \begin{cases} 1, & \text{если гиперребро } r_k \text{ входит в } CE_j, \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases} \\
z_{mj} &= \begin{cases} 1, & \text{если ребро } r_m \text{ входит в } CE_j, \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases} \\
s_j &= \begin{cases} 1, & \text{если } |CE_j| > 1, \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases} \\
i = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, K}, \quad m = \overline{1, M}, \quad K + M = m = n - 1, \quad j = \overline{1, S}.
\end{aligned}$$

В этих выражениях и далее ребро — это гиперребро второй степени, M — общее количество ребер в $H = (X, R)$, K — общее количество гиперребер в H , S — число сборочных единиц в сборочной декомпозиции. Переменная s_j определяет статус сборочной единицы. Она принимает единичное значение тогда и только тогда, когда сборочная единица содержит более одной детали, то есть является невырожденной. Используем введенные переменные, запишем ограничения, формализующие основные условия существования сборочных декомпозиций.

Основные логические и топологические ограничения

1. Деталь не может входить в две (или более) различные сборочные единицы, то есть деление на СЕ (включая вырожденные СЕ) является разбиением множества деталей.

$$\sum_{j=1}^S x_{ij} \leq 1, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1)$$

2. Любое гиперребро входит в отдельную СЕ или соединяет различные СЕ сборочной декомпозиции.

$$\sum_{j=1}^S y_{kj} \leq 1, \quad k = \overline{1, K}. \quad (2)$$

3. Любое ребро (гиперребро второй степени) входит в отдельную СЕ или соединяет различные СЕ сборочной декомпозиции.

$$\sum_{j=1}^S z_{mj} \leq 1, \quad m = \overline{1, M}. \quad (3)$$

4. Согласно второму условию теоремы 1 любая сборочная единица должна содержать хотя бы одно ребро.

$$\sum_{m=1}^M z_{mj} \geq 1, \quad j = \overline{1, S}. \quad (4)$$

5. Согласно третьему условию теоремы 1, для любой сборочной единицы должно выполняться линейное соотношение между числом вершин и связей (ребер и гиперребер) гиперграфа, описывающего механическую структуру СЕ. Теорема 2 гарантирует связность данного гиперграфа, поэтому он является s -гиперграфом.

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = \sum_{k=1}^K y_{kj} + \sum_{m=1}^M z_{mj} + 1, \quad j = \overline{1, S}. \quad (5)$$

6. Если гиперребро включено в состав некоторой СЕ, то все его инцидентные вершины должны войти в данную сборочную единицу. Запишем это топологическое ограничение в виде

$$y_{kj} = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^n x_{ij} a_{ik} = \sum_{i=1}^n a_{ik}; \quad k = \overline{1, K}, \quad j = \overline{1, S}. \quad (6)$$

Введем вспомогательные переменные $t_{kj} \in \{0, 1\}$, $k = \overline{1, K}$, $j = \overline{1, S}$ и преобразуем данное логическое условие в алгебраическую форму, как того требует парадигма математического программирования.

$$y_{kj} = t_{kj}, \quad \sum_{i=1}^n x_{ij} a_{ik} \geq \sum_{i=1}^n a_{ik} t_{kj}; \quad k = \overline{1, K}, \quad j = \overline{1, S}. \quad (6.1)$$

Рассмотрим корректность данного преобразования. Пусть $t_{kj} = 1$, тогда система неравенств (6.1) примет вид $\sum_{i=1}^n x_{ij} a_{ik} \geq \sum_{i=1}^n a_{ik}$. Данная система неравенств может быть справедливой только как система равенств. Это приводит к исходному виду ограничений. Если $t_{kj} = 0$, то система (6.1) преобразуется к неравенствам $\sum_{i=1}^n x_{ij} a_{ik} \geq 0$, которые выполняются автоматически.

7. Если некоторое ребро входит в СЕ, то в данную сборочную единицу должны войти все вершины, инцидентные ребру. Формализуем это топологическое условие следующим соотношением:

$$z_{mj} = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^n x_{ij} a_{im} = \sum_{i=1}^n a_{im}; \quad m = \overline{1, M}, \quad j = \overline{1, S}. \quad (7)$$

Данное логическое условие приведем к стандартной алгебраической форме по аналогии с ограничениями (6). Введем вспомогательные переменные $\tau_{mj} \in \{0, 1\}$, $m = \overline{1, M}$, $j = \overline{1, S}$, и запишем логическое ограничение (7) в виде системы неравенств.

$$z_{mj} = \tau_{mj}, \quad \sum_{i=1}^n x_{ij} a_{im} \geq \sum_{i=1}^n a_{im} \tau_{mj}; \quad m = \overline{1, M}, \quad j = \overline{1, S}. \quad (7.1)$$

8. Если все инцидентные вершины некоторого гиперребра вошли в одну СЕ, то и само гиперребро следует включить в данную сборочную единицу. Запишем это топологическое ограничение в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} a_{ik} = \sum_{i=1}^n a_{ik} \Rightarrow y_{kj} = 1, \quad k = \overline{1, K}, \quad j = \overline{1, S}. \quad (8)$$

Преобразуем данное ограничение, записанное в логической форме, в систему неравенств.

$$\left(\sum_{i=1}^n x_{ij} a_{ik} - \sum_{i=1}^n a_{ik} \right) y_{kj} \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n x_{ij} a_{ik} - \sum_{i=1}^n a_{ik} + 1 \leq y_{kj}, \quad k = \overline{1, K}, \quad j = \overline{1, S}. \quad (8.1)$$

Покажем, что это преобразование является корректным. Очевидно, что всегда выполняется двойное неравенство $0 \leq \sum_{i=1}^n x_{ij} a_{ik} \leq \sum_{i=1}^n a_{ik}$. Если все инцидентные гиперребру вершины принадлежат одной сборочной единице, то справедливо равенство $\sum_{i=1}^n x_{ij} a_{ik} = \sum_{i=1}^n a_{ik}$. Тогда из второго неравенства системы (8.1) следует $y_{kj} \geq 1$. Это неравенство может выполняться только как равенство, т. е. $y_{kj} = 1$. В этом случае первое неравенство выполняется автоматически.

Если $\sum_{i=1}^n x_{ij} a_{ik} < \sum_{i=1}^n a_{ik}$, то левая часть первого неравенства системы (8.1) становится отрицательной. Это значит, что первое неравенство может быть справедливым только при $y_{kj} = 0$.

В этом случае второе неравенство примет вид $\sum_{i=1}^n x_{ij} a_{ik} \leq \sum_{i=1}^n a_{ik} - 1$. Данное неравенство выполняется тривиально, поскольку обе суммы являются целыми положительными числами.

9. По аналогии с (8) запишем условие включения ребер, все инцидентные вершины которых принадлежат некоторой СЕ.

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} a_{im} = \sum_{i=1}^n a_{im} \Rightarrow z_{mj} = 1; \quad m = \overline{1, M}, \quad j = \overline{1, S}. \quad (9)$$

Приведем логическое выражение (9) к алгебраическому виду:

$$\left(\sum_{i=1}^n x_{ij} a_{im} - \sum_{i=1}^n a_{im} \right) z_{mj} \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n x_{ij} a_{im} - \sum_{i=1}^n a_{im} + 1 \leq z_{mj}, \quad m = \overline{1, M}, \quad j = \overline{1, S}. \quad (9.1)$$

10. Переменная s принимает единичное значение для любой невырожденной СЕ ($|CE| > 1$) и нулевое значение для вырожденных СЕ.

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} \geq 2 \rightarrow s_j = 1 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^n x_{ij} < 2 \rightarrow s_j = 0, \quad j = \overline{1, S}. \quad (10)$$

Запишем ограничение (10) в виде системы неравенств:

$$\left(\sum_{i=1}^n x_{ij} - 2 \right) \times s_j \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n x_{ij} - 2 < n \times s_j. \quad (10.1)$$

11. Разбиение на сборочные единицы не может быть тривиальным. Это значит, что в декомпозиции должна существовать по крайней мере одна невырожденная СЕ, мощность которой строго больше единицы. Запишем это требование в виде неравенства:

$$\sum_{j=1}^S s_j \geq 1. \quad (11)$$

Система ограничений (1)–(11) формализует необходимые условия существования сборочных декомпозиций. Нарушение данных ограничений исключает проектное решение из множества допустимых альтернатив. Система (1)–(11) может быть дополнена ограничениями, учитывающими конструктивно-технологические особенности данной проектной или производственной ситуации. Рассмотрим несколько важных условий такого типа.

Конструктивно-технологические ограничения

12. Часто требуется, чтобы некоторые детали $x_r, x_p \in X$ входили в одну сборочную единицу. Это необходимо, когда собственные размеры этих деталей входят в некоторую конструкторскую размерную цепь. Или для них требуется выполнить некоторые вспомогательные операции, например: пригонка, пробная сборка, упаковка и др. Запишем это условие в виде простого равенства.

$$x_{rj} = x_{pj}. \quad (12)$$

13. Запрет на вхождение деталей в одну сборочную единицу. Это необходимо, когда, например, установка x_r требует больших усилий или высоких температур, а монтаж x_p должен быть выполнен с высокой или прецизионной точностью.

$$x_{rj} + x_{pj} < 2, \quad j = \overline{1, S}. \quad (13)$$

14. Запрет на включение детали x_i в сборочную единицу CE_j .

$$x_{ij} = 0. \quad (14)$$

15. Запрет на включение детали x_i в любую сборочную единицу. Такие детали поступают на общую сборку, минуя промежуточные уровни сборочной иерархии.

$$\sum_{j=1}^S x_{ij} = 0. \quad (15)$$

16. Во многих производственных ситуациях накладываются числовые ограничения на сборочные единицы. Это могут быть, например, ограничения по массе, габаритным размерам, составу и др. Условия такого типа можно формализовать в виде системы двусторонних неравенств.

$$C_j^{\min} \leq \sum_{i=1}^n c_i x_{ij} \leq C_j^{\max}, \quad j = \overline{1, S}. \quad (16)$$

В этих неравенствах c_i — числовой показатель детали x_i (вес, точность, число сопрягаемых поверхностей и др.). C_j^{\min} , C_j^{\max} — минимальное и максимальное значения данного показателя для CE_j . Если требуется ограничить «емкости» сборочных единиц, то достаточно положить $c_i = 1$.

Структурные ограничения

Гиперребра в H соответствуют сборочным операциям высокой «валентности». В них установка деталей выполняется с координаций по нескольким поверхностям. Целесообразно такие операции выполнять на начальных этапах технологического процесса. Это означает, что структура общей сборки изделия описывается деревом.

Гиперграф трансформируется в дерево при помощи операций маскирования и схлопывания гиперребер третьей степени и выше. На рис. 2, *a* изображен гиперграф, который при помощи маскирования гиперребер r_1, r_3 и схлопывания гиперребра r_2 преобразуется в дерево, показанное на рис. 2, *б*.

17. Для формализации маскирования достаточно включить все гиперребра в некоторые СЕ. Это требование можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^S y_{kj} = 1, \quad k = \overline{1, K}. \quad (17)$$

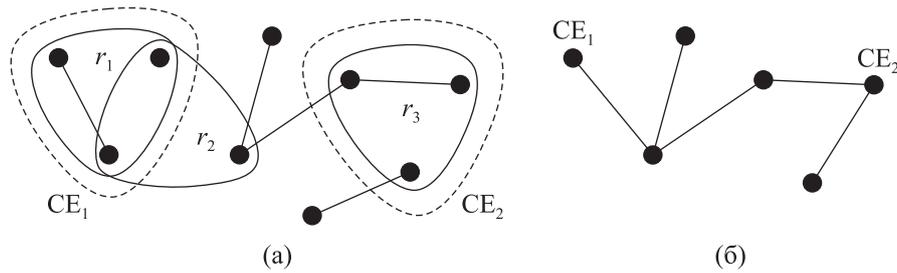


Рис. 2. Маскирование и схлопывание гиперребер: а) исходное состояние; б) состояние после стягивания вершин CE_1 и CE_2

18. Формализуем схлопывание гиперребер. В инженерной практике очень мала доля конструкций, связи которых описываются гиперребрами высоких степеней (4, 5 и выше). Поэтому рассмотрим схлопывание гиперребер третьей степени. Для этого требуется, чтобы две инцидентные вершины гиперребра принадлежали одной СЕ. Запишем это условие в логической форме.

Пусть существует гиперребро с номером k , которое не входит ни в одну СЕ, т. е. $\sum_{j=1}^S y_{kj} = 0$.

Тогда найдется CE_r , для которой выполняется соотношение $\sum_{i=1}^n a_{ik} x_{ir} = \sum_{i=1}^n a_{ik} - 1$. В этом равен-

стве $\sum_{i=1}^n a_{ik}$ — это степень гиперребра k . Равенство будет справедливо, если в левой его части

найдется два ненулевых слагаемых вида $a_{ik} x_{ir}$. Это может быть выполнено только в одном случае: если i -я вершина инцидентна k -му гиперребру и входит в некоторую сборочную единицу.

Представим это условие в виде системы неравенств.

$$\sum_{i=1}^n a_{ik} x_{ir} \geq \left(\sum_{i=1}^n a_{ik} - 1 \right) \left(1 - \sum_{j=1}^S y_{kj} \right), \quad k = \overline{1, K}. \quad (18)$$

Если $\sum_{j=1}^S y_{kj} = 0$, то получим правую часть исходного логического ограничения в ослаб-

ленной форме нестрогого неравенства. При $\sum_{j=1}^S y_{kj} = 1$ неравенство $\sum_{i=1}^n a_{ik} x_{ir} \geq 0$ выполняется

тривиально.

Целевые функции

Систему ограничений (1)–(18) можно использовать с целевыми функциями, формализующими принятие рациональных решений в различных проектных и производственных ситуациях.

19. Большинство деталей изделия должны войти в сборочные единицы (принцип агрегатирования). По этому принципу организуют крупносерийное и массовое производство многих технических систем:

$$\sum_{j=1}^S \sum_{i=1}^n x_{ij} \rightarrow \max. \quad (19)$$

20. Число сборочных единиц должно быть максимальным (принцип дифференциации). Это требование необходимо для организации поточного сборочного производства:

$$\sum_{j=1}^S s_j \rightarrow \max. \quad (20)$$

21. Базирование сборочных единиц с сопряжением по нескольким поверхностям одновременно часто сопряжено с технологическими трудностями и требует специальной технологической оснастки. Целесообразно механические связи высокой «валентности» реализовывать на начальных операциях сборочного процесса. Этого можно добиться, если выполнить разбиение на СЕ так, чтобы большинство гиперребер входило в подграфы, описывающие СЕ.

$$\sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^S y_{kj} \rightarrow \max. \quad (21)$$

22. Упрощение общей сборки сложного изделия. Для этого ее следует организовать таким образом, чтобы на финальных операциях сборочного процесса соединение СЕ и деталей выполнялось при помощи минимального числа механических связей (принцип кластеризации).

$$\sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^S y_{kj} + \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^S z_{mj} \rightarrow \max. \quad (22)$$

23. Целевую функцию (22) можно уточнить, если учесть число необходимых сопряжений, которые требуются для реализации каждой механической связи

$$\sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^S c_k y_{kj} + \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^S c_m z_{mj} \rightarrow \max. \quad (23)$$

В целевой функции (23) c_k и c_m — количества сопряжений по различным поверхностям, необходимые для реализации механических связей, описываемых k -м гиперребром и m -м ребром соответственно. Критерий (23) минимизирует число сопряжений на общей сборке технической системы.

Предложенная математическая модель, состоящая из ограничений (1)–(18) и целевых функций (19)–(23), является открытой. Она может быть дополнена дополнительными условиями и целевыми функциями, учитывающими особенности принятия решений конкретного производства.

Заключение

Разбиение изделия на сборочные единицы — это важная проектная задача, которая влияет на эффективность технической подготовки и организацию дискретного производства сложных технических систем. Методы и алгоритмы решения этой задачи активно обсуждаются в современных публикациях по автоматизации проектирования и управлению дискретным производством. В этих исследованиях основной структурной моделью изделия служат граф связей или его сетевые или матричные аналоги. Это бинарные математические модели, которые не могут корректно формализовать многоместное отношение базирования, обеспечивающее геометрическую координацию деталей в составе изделия и сборочных единиц. В работе предложена новая гиперграфовая модель структуры технической системы, свободная от этого недостатка. Дано новое математическое описание сборочных операций и процессов, обладающих свойствами когерентности и секвенциальности. Введено понятие s -гиперграфа. Показано, что эти объекты являются корректными математическими моделями механических структур любых собираемых систем. Декомпозиция технической системы на СЕ поставлена как задача разрезания s -гипер-

графа на s -подграфы. Предложено математическое описание данной задачи в терминах дискретного математического программирования. Приведена формализация базовых топологических и основных конструктивно-технологических ограничений. Описаны целевые функции, формализующие выбор рациональных декомпозиций в различных проектных ситуациях. Разработанная математическая модель декомпозиции изделия является гибкой и открытой. Она допускает расширения, учитывающие особенности изделия и его производства.

Список литературы

- Тимковский В. Г.* Дискретная математика в мире станков и инструментов. Введение в математическое моделирование задач дискретного производства. — М.: Наука, 1992.
Timkovskiy V. G. Diskretnaya matematika v mire stankov i instrumentov. Vvedeniye v matematicheskoye modelirovaniye zadach diskretnogo proizvodstva [Discrete mathematics in the world of machine tools and tools. Introduction to mathematical modeling of discrete production problems]. — Moscow: Nauka, 1992 (in Russian).
- Agrawal D., Kumara S., Finke D.* Automated Assembly Sequence Planning and Subassembly Detection // IIE Annual Conference. Proceedings. Institute of Industrial and Systems Engineers (IIE), 2014. Available at: https://www.researchgate.net/profile/Deepak_Agrawal12/publication/288302102_Automated_assembly_sequence_planning_and_subassembly_detection/links/5a0a384da6fdcc2736dea6a0/Automated-assembly-sequence-planning-and-subassembly-detection.pdf (accessed: 31.01.2020).
- Bahubalendruni M. V. A. R., Biswal B. B.* An efficient stable subassembly identification method towards assembly sequence generation // National Academy science letters. — 2018. — Vol. 41, Iss. 6. — P. 375–378. — DOI: 10.1007/s40009-018-0679-1
- Bahubalendruni M. V. A. R., Biswal B. B.* Liaison concatenation — A method to obtain feasible assembly sequences from 3D-CAD product // Sadhana. — 2016. — Vol. 41, Iss. 1. — P. 67–74. — DOI: 10.1007/s12046-015-0453-8
- Belhadj I., Trigui M., Benamara A.* Subassembly identification method based on CAD data // Advances on Mechanics, Design Engineering and Manufacturing. — Springer, Cham. — 2017. — P. 55–62. — DOI: 10.1007/978-3-319-45781-9_6
- Ben-Arieh D., Kramer B.* Computer-aided process planning for assembly: generation of assembly operation sequence // International Journal of Production Research. — 1994. — Vol. 32, Iss. 3. — P. 643–656. — DOI: 10.1080/00207549408956957
- Bourjault A.* Methodology of assembly automation: A new approach // Robotics and Factories of the Future'87. Springer, Berlin, Heidelberg. — 1988. — P. 37–45. — DOI: 10.1007/978-3-642-73890-6_6
- Bozhko A.* Math Modeling of Sequential Coherent and Linear Assembly Plans in CAD Systems // 2018 Global Smart Industry Conference (GloSIC). IEEE. — 2018. — P. 1–5. — DOI: 10.1109/GloSIC.2018.8570090
- Bozhko A. N.* Hypergraph model for assembly sequence problem // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. IOP Publishing. — 2019. — Vol. 560, No. 1. — P. 012010. — DOI: 10.1088/1757-899x/560/1/012010
- Cao Y., Kou X., Cao S.* A sub-assembly identification algorithm for assembly sequence planning // 2015 International Industrial Informatics and Computer Engineering Conference. Atlantis Press, 2015. — DOI: 10.2991/iiiccc-15.2015.127
- De Floriani L., Nagy G.* A graph model for face-to-face assembly // Proceedings, 1989 International Conference on Robotics and Automation. IEEE. — 1989. — DOI: 10.1109/robot.1989.99970
- Deshmukh A., Yung P., Wang H.-P.* Automated generation of assembly sequence based on geometric and functional reasoning // Journal of Intelligent Manufacturing. — 1993. — Vol. 4, Iss. 4. — P. 269–284. — DOI: 10.1007/BF00124140

- Dini G., Santochi M.* Automated sequencing subassembly detection in assembly planning // *CIRP Annals — Manufacturing Technology*. — 1992. — Vol. 41, Iss. 1. — P. 1–4. — DOI: 10.1016/s0007-8506(07)61140-8
- Flach P.* Machine learning: the art and science of algorithms that make sense of data // Cambridge University Press, 2012. — 396 p.
- Ghandi S., Masehian E.* Review and taxonomies of assembly and disassembly path planning problems and approaches // *Computer-Aided Design*. — 2015. — Vol. 67. — P. 58–86. — DOI: 10.1016/j.cad.2015.05.001
- Hemmskerk C., Van Luttervelt C.* The use of heuristics in assembly sequence planning // *CIRP Annals — Manufacturing Technology*. — 1989. — Vol. 38, Iss. 1. — P. 37–40. — DOI: 10.1016/s0007-8506(07)62647-x
- Kara S., Pornprasitpol P., Kaebnick H.* A selective disassembly methodology for end-of-life products // *Assembly Automation*. — 2005. — Vol. 25, No. 2. — P. 124–134. — DOI: 10.1016/s0007-8506(07)60361-8
- Kavraki L. E., Kolountzakis M. N.* Partitioning a planar assembly into two connected parts is NP-complete // *Information Processing Letters*. — 1995. — Vol. 55.3. — P. 159–165. — DOI: 10.1016/0020-0190(95)00083-o
- Kou X. et al.* Subassembly recognition algorithm and performance analysis in assembly sequence planning // *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*. — 2019. — P. 1–11. — DOI: 10.1007/s00170-019-04207-x
- Lee S.* Subassembly identification and evaluation for assembly planning // *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*. — 1994. — Vol. 24, Iss. 3. — P. 493–503. — DOI: 10.1109/21.278997
- Lee S., Shin Y.* Assembly planning based on subassembly extraction // *Robotics and Automation. Proceedings, 1990 IEEE International Conference*. — 1990. — Vol. 3. — P. 1606–1611. — DOI: 10.1109/ROBOT.1990.126239
- Lin A. C., Chang C. T.* An integrated approach to automated assembly planning for three-dimensional mechanical products // *The International Journal of Production Research*. — 1993. — Vol. 31, No. 5. — P. 1201–1227. — DOI: 10.1080/00207549308956784
- Mascle C.* Automatic a priori, a posteriori or appropriate determination of sub-assemblies // *International Journal of Production Research*. — 1998. — Vol. 36, Iss. 4. — P. 1001–1021. — DOI: 10.1080/002075498193499
- Morato C., Kaipa K. N., Gupta S. K.* Improving assembly precedence constraint generation by utilizing motion planning and part interaction clusters // *Computer-Aided Design*. — 2013. — Vol. 45, Iss. 11. — P. 1349–1364. — DOI: 10.1016/j.cad.2013.06.005
- Ong N., Wong Y.* Automatic subassembly detection from product model for disassembly sequence generation // *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*. — 1999. — Vol. 15, Iss. 6. — P. 425–431. — DOI: 10.1007/s001700050086
- O'Shea B., Kaebnick H., Grewal S.* Using a cluster graph representation of products for application in the disassembly process planning // *Concurrent Engineering*. — 2000. — Vol. 8, Iss. 3. — P. 158–170. — DOI: 10.1177/1063293x0000800301
- Shpitalni M., Elber G., Lenz E.* Automatic assembly of three-dimensional structures via connectivity graphs // *CIRP annals*. — 1989. — Vol. 38, Iss. 1. — P. 25–28. — DOI: 10.1016/S0007-8506(07)62644-4
- Trigui M., Belhadj I., Benamara A.* Disassembly plan approach based on sub-assembly concept // *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*. — 2017. — Vol. 90, Iss. 1–4. — P. 219–231. — DOI: 10.1007/s00170-016-9363-0

- Wang Y., Liu J.* Subassembly identification for assembly sequence planning // The International Journal of Advanced Manufacturing Technology. — 2013. — Vol. 68, Iss. 1–4. — P. 781–793. — DOI: 10.1007/s00170-013-4799-y
- Watson J., Hermans T.* Assembly planning by subassembly decomposition using blocking reduction // IEEE Robotics and Automation Letters. — 2019. — Vol. 4, Iss. 4. — P. 4054–4061. — DOI: 10.1109/lra.2019.2929995
- Whitney D. E.* Mechanical Assemblies: Their Design, Manufacture, and Role in Product Development. — New York: Oxford University Press, 2004. — 518 p.
- Wolter J., Chakrabarty S., Tsao J.* Mating constraint languages for assembly sequence planning // Robotics and Automation. Proceedings 1992 IEEE International Conference. — 1992. — Vol. 3. — P. 2367–2374. — DOI: 10.1109/ROBOT.1992.220109
- Zhang Y., Ni J., Lai X.* Automated sequencing and sub-assembly detection in automobile body assembly planning // Journal of Materials Processing Technology. — 2002. — Vol. 129, Iss. 1–3. — P. 490–494. — DOI: 10.1016/S0924-0136(02)00621-0
- Zhao L., Liao W., Fanf J., Qian J., Zeng C.* An ASP based method for subassembly identification // Robotics and Biomimetics (ROBIO), 2009 IEEE International Conference. — 2009. — P. 1317–1322. — DOI: 10.1109/ROBIO.2009.5420712
- Zussman E., Lenz E., Shpitalni M.* An Approach to the Automatic Assembly Planning Problem // CIRP Annals — Manufacturing Technology. — 1990. — Vol. 39, Iss. 1. — P. 33–36. — DOI: 10.1016/s0007-8506(07)60997-4