

УДК: 519.8

## Граничные условия для решеточных уравнений Больцмана в приложениях к задачам гемодинамики

О. В. Ильин

Вычислительный центр им. А. А. Дородницына  
Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук,  
Россия, 119133, г. Москва, ул. Вавилова, д. 40

E-mail: oilyin@gmail.com

*Получено 25.12.2019, после доработки — 19.04.2020.*

*Принято к публикации 07.05.2020.*

Рассматривается одномерная трехскоростная кинетическая решеточная модель уравнения Больцмана, которая в рамках кинетической теории описывает распространение и взаимодействие частиц трех типов. Данная модель представляет собой разностную схему второго порядка для уравнений гидродинамики. Ранее было показано, что одномерная кинетическая решеточная модель уравнения Больцмана с внешней силой в пределе малых длин свободного пробега также эквивалентна одномерным уравнениям гемодинамики для эластичных сосудов, эквивалентность можно установить, используя разложение Чепмена – Энскога. Внешняя сила в модели отвечает за возможность регулировки функциональной зависимости между площадью просвета сосуда и приложенного к стенке рассматриваемого сосуда давления. Таким образом, меняя форму внешней силы, можно моделировать практически произвольные эластичные свойства стенок сосудов. В настоящей работе рассмотрены постановки физиологически интересных граничных условий для решеточных уравнений Больцмана в приложениях к задачам течения крови в сети эластичных сосудов. Разобраны следующие граничные условия: для давления и потока крови на входе сосудистой сети, условия для давления и потоков крови в точке бифуркации сосудов, условия отражения (соответствуют полной окклюзии сосуда) и поглощения волн на концах сосудов (эти условия соответствуют прохождению волны без искажений), а также условия типа RCR, представляющие собой схему, аналогичную электрическим цепям и состоящую из двух резисторов (соответствующих импедансу сосуда, на конце которого ставятся граничные условия, а также силам трения крови в микроциркуляторном русле) и одного конденсатора (описывающего эластичные свойства артериол). Проведено численное моделирование, рассмотрена задача о распространении крови в сети из трех сосудов, на входе сети ставятся условия на входящий поток крови, на концах сети ставятся условия типа RCR. Решения сравниваются с эталонными, в качестве которых выступают результаты численного счета на основе разностной схемы Маккормака второго порядка (без вязких членов), показано, что оба подхода дают практически идентичные результаты.

Ключевые слова: гемодинамика, метод решеточных уравнений Больцмана, эластичные сосуды

UDC: 519.8

## Boundary conditions for lattice Boltzmann equations in applications to hemodynamics

O. V. Ilyin

Dorodnicyn Computing Center,  
Federal Research Center “Computer Science and Control” of Russian Academy of Science,  
40 Vavilova st., Moscow, 119133, Russia

E-mail: oilyin@gmail.com

*Received 25.12.2019, after completion — 19.04.2020.*

*Accepted for publication 07.05.2020.*

We consider a one-dimensional three velocity kinetic lattice Boltzmann model, which represents a second-order difference scheme for hydrodynamic equations. In the framework of kinetic theory this system describes the propagation and interaction of three types of particles. It has been shown previously that the lattice Boltzmann model with external virtual force is equivalent at the hydrodynamic limit to the one-dimensional hemodynamic equations for elastic vessels, this equivalence can be achieved with use of the Chapman–Enskog expansion. The external force in the model is responsible for the ability to adjust the functional dependence between the lumen area of the vessel and the pressure applied to the wall of the vessel under consideration. Thus, the form of the external force allows to model various elastic properties of the vessels. In the present paper the physiological boundary conditions are considered at the inlets and outlets of the arterial network in terms of the lattice Boltzmann variables. We consider the following boundary conditions: for pressure and blood flow at the inlet of the vascular network, boundary conditions for pressure and blood flow for the vessel bifurcations, wave reflection conditions (correspond to complete occlusion of the vessel) and wave absorption at the ends of the vessels (these conditions correspond to the passage of the wave without distortion), as well as RCR-type conditions, which are similar to electrical circuits and consist of two resistors (corresponding to the impedance of the vessel, at the end of which the boundary conditions are set and the friction forces in microcirculatory bed) and one capacitor (describing the elastic properties of arterioles). The numerical simulations were performed: the propagation of blood in a network of three vessels was considered, the boundary conditions for the blood flow were set at the entrance of the network, RCR boundary conditions were stated at the ends of the network. The solutions to lattice Boltzmann model are compared with the benchmark solutions (based on numerical calculations for second-order McCormack difference scheme without viscous terms), it is shown that the both approaches give very similar results.

Keywords: hemodynamics, lattice Boltzmann method, elastic vessels

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2020, vol. 12, no. 4, pp. 865–882 (Russian).

© 2020 Oleg V. Ilyin

This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Unported License.  
To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/>  
or send a letter to Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

## 1. Введение

Одномерные уравнения гемодинамики [Hughes, Lubliner, 1973; Taylor, Draney, 2004], выводимые из трехмерных уравнений Навье – Стокса для сосудов с эластичными стенками осреднением по радиальной координате, получили значительный интерес в последние десятилетия. Это связано с относительной простотой применения данных уравнений, которые обычно решаются на графе сосудов (что не требует полной трехмерной реконструкции сосудистой сети), а также интенсивным развитием численных методов их решения и достаточно высокой точностью. Действительно, хотя данные уравнения и являются системой нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, но они зависят только от одной пространственной координаты (аксиальная координата тонкого цилиндрического сосуда), для некоторых задач можно получить аналитические решения [Shyin, 2019]. Для численного решения уравнений гемодинамики было предложено множество подходов: схемы Маккормака и Лакса – Вендроффа [MacCormack, 2003; Cohen et al., 2004; Hirsch, 2007; Olufsen et al., 2000; Duanmu et al., 2019], трапецеидальные схемы [Hou, Kassab, 2007], разностный метод Галёркина и его разновидности [Sherwin et al., 2003; Formaggia et al., 2003; Mynard, Nithiarasu, 2008], сбалансированный метод [Müller, Toro, 2013], схемы сеточно-характеристического метода [Магомедов, Холодов, 1988], аналитические и численные решения линеаризованных уравнений гемодинамики могут быть найдены в [Ашметков и др., 2000; Буничева и др., 2001], также недавно было показано, что одномерные уравнения гемодинамики описываются решеточными уравнениями Больцмана в гидродинамическом пределе [Ильин, 2019; Шуйн, 2020], проведено подробное сравнение разных численных методов [Voileau et al., 2015]. Обзор методов может также быть найден в работе [Bessonov et al., 2016]. Важно отметить, что одномерные уравнения гемодинамики имеют хорошую точность: последние исследования показывают, что их предсказательная способность близка к точности трехмерного моделирования [Blanco et al., 2018]. Конечно, такие упрощенные уравнения не в состоянии описывать эффекты потери ламинарности течения, возникновение зон рециркуляции, погранслойные явления. На практике данные эффекты встречаются в областях изменения геометрии сосудов (бифуркации сосудов, сужения сосудов) и приводят к дополнительным потерям давления, которые не описываются классическим законом Пуазейля. Тем не менее эффекты можно учесть введением дополнительных членов в модель, отвечающим за турбулентные потери энергии [Young, Tsai, 1973]. Таким образом, точность одномерных уравнений гемодинамики может быть улучшена введением дополнительных параметров в модель.

Особенно важным является вопрос постановки граничных условий на концах моделируемого графа сосудов, так как от этого зависит результат расчетов прикладных задач [Lo et al., 2019]. В настоящей работе рассмотрена задача постановки физиологически интересных граничных условий в терминах функций распределения, динамика которых описывается решеточными уравнениями Больцмана. Корневым сосудом для дерева артерий обычно является аорта; таким образом, необходимо определить граничные условия для корня аорты. Для решеточных уравнений Больцмана рассмотрены условия для давления и потока крови, применимые для систолической фазы сердечного цикла. Во время диастолической фазы аортальный клапан закрыт, сердце и дерево артерий не взаимодействуют друг с другом, математически это может быть представлено условием полного поглощения отраженных в сосудистой сети пульсовых волн (бегущих от сосудов назад к сердцу) на аортальном клапане. Постановка условий поглощения волн нетривиальна для решеточных уравнений Больцмана. В настоящей работе данная задача решается с помощью представления волн давления и тока крови в терминах характеристик с дальнейшим их выражением в терминах функций распределения. Аналогичная задача возникает в акустике, то есть представленные граничные условия могут использоваться при моделировании задач распространения звука с помощью метода решеточных уравнений Больцмана. Построены граничные условия в точке бифуркации сосудов. В работе также рассмотрены граничные условия

полного отражения падающей волны на концах сосудов, они соответствуют полной окклюзии сосуда. Для описания микроциркуляции часто ставятся граничные условия, описываемые моделями типа электрических цепей. В настоящей работе рассмотрены популярные условия типа RCR, описывающие схему, состоящую из двух резисторов (соответствующих импедансу сосуда, на конце которого ставятся граничные условия, а также силам трения крови в микроциркуляторном русле) и одного конденсатора (описывающего эластичные свойства артериол). Проведено численное моделирование, решения сравниваются с эталонными, в качестве которых выступают результаты численного счета на основе схемы Маккормака второго порядка, показано, что оба подхода дают практически идентичные результаты.

## 2. Одномерные уравнения тока крови в эластичных сосудах и решеточные уравнения Больцмана

Одномерные уравнения тока крови в эластичных сосудах имеют следующий вид (сосуд считается тонкой эластичной трубкой) [Hughes, Lubliner, 1973; Sherwin et al., 2003; Formaggia et al., 2003; Bessonov et al., 2016; Симаков, 2018]:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Au}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (u^2/2)}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (1)$$

где  $\rho_0$  — плотность крови,  $A$ ,  $u$  — площадь просвета сосуда и скорость крови,  $x$  — координата по направлению оси сосуда,  $p$  — давление крови. В уравнениях (1) также могут быть включены силы трения крови о стенки сосудов, вязкоэластичные члены.

Отметим, что решеточные уравнения Больцмана, рассматриваемые ниже, добавляют в правую часть второго уравнения (1) члены, отвечающие за продольную вязкость течения крови, они пропорциональны  $\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ,  $\nu$  — вязкость крови (подробности изложены в работе [Ильин, 2019]).

Для замыкания системы (1) требуется включить дополнительное условие — закон изменения просвета сосуда от приложенного давления

$$p = f(A), \quad (2)$$

где  $f$  — некоторая функция, ее форма должна быть определена из эластичных свойств сосуда. Одной из наиболее популярных зависимостей  $f(A)$  является закон Лапласа, для которого  $p \sim \sqrt{A}$  (см. [Taylor, Draney, 2004; Sherwin et al., 2003]). В общем случае зависимость площади просвета сосуда от давления может быть более сложной, например, при больших значениях напряжения, приложенного к стенке сосуда (больше 15 кПа), внутренний радиус просвета сосуда увеличивается слабо, т. е. наблюдаются эффекты насыщения [Василевский и др., 2015].

Удобно ввести в рассмотрение скорость пульсовой волны давления:

$$c_{pulse}^2(A) = \frac{A}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial A}. \quad (3)$$

Теперь, используя определение пульсовой скорости (3), уравнения (1)–(2) можно переписать в следующей форме:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Au}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (u^2/2)}{\partial x} = -\frac{c_{pulse}^2(A)}{A} \frac{\partial A}{\partial x}. \quad (4)$$

Отметим, что движение крови существенно дозвуковое,  $Ma \sim 0.1$ , при условии, что число Маха определено как  $u/c_{pulse}$ .

В работах [Ильин, 2019; Пуин, 2020] показано, что для системы уравнений (1) или (4) может быть построена разностная схема второго порядка в виде трехскоростной решеточной модели уравнения Больцмана. Данная модель описывает динамику концентраций  $f_{\pm 1}(t, x)$ ,  $f_0(t, x)$  трех типов частиц: движущихся в положительном направлении оси  $x$  со скоростью  $c$ , в отрицательном со скоростью  $-c$  и с нулевой скоростью [Kruger et al., 2017]. За каждый временной шаг  $\Delta t$  частицы в зависимости от скорости могут сместиться в соседние узлы решетки на расстояние  $\Delta x = c\Delta t$  или остаться в узле  $x$ . Кроме описанной выше адвекции, частицы сталкиваются между собой, в результате столкновений система стремится к состоянию локального равновесия  $f_j^{eq}$ ,  $j = \pm 1, 0$ . Модель имеет следующий вид:

$$f_{-1}(t + \Delta t, x - c\Delta t) - f_{-1}(t, x) = \frac{\Delta t}{\tau + \frac{\Delta t}{2}} (f_{-1}^{eq}(t, x) - f_{-1}(t, x)) - \frac{\tau}{2c^2 \left(\tau + \frac{\Delta t}{2}\right)} \Phi(x)(\Phi(x + c\Delta t) - \Phi(x - c\Delta t)), \quad (5)$$

$$f_0(t + \Delta t, x) - f_0(t, x) = \frac{\Delta t}{\tau + \frac{\Delta t}{2}} (f_0^{eq}(t, x) - f_0(t, x)), \quad (6)$$

$$f_1(t + \Delta t, x + c\Delta t) - f_1(t, x) = \frac{\Delta t}{\tau + \frac{\Delta t}{2}} (f_1^{eq}(t, x) - f_1(t, x)) + \frac{\tau}{2c^2 \left(\tau + \frac{\Delta t}{2}\right)} \Phi(x)(\Phi(x + c\Delta t) - \Phi(x - c\Delta t)), \quad (7)$$

где  $\Phi(x) = \sqrt{Ac_s^2 - h(A)}$  и  $c_s^2 = (c^2/3)$ ,  $c = \Delta x/\Delta t$ . Функция  $h(A)$  получается из уравнения

$$\frac{\partial h(A)}{\partial A} = c_{pulse}^2(A) = \frac{A}{\rho_0} \frac{\partial p(A)}{\partial A},$$

где  $c_{pulse}(A)$ ,  $p(A)$  есть целевые зависимости скорости пульсовых волн и давления от площади просвета сосуда. Состояния локального равновесия  $f_{\pm 1}^{eq}$ ,  $f_0^{eq}$  определяются как

$$f_{\pm 1}^{eq} = \frac{A}{6} \left( 1 \pm 3\frac{u}{c} + 3\frac{u^2}{c^2} \right), \quad f_0^{eq} = \frac{4A}{6} \left( 1 - 3\frac{u^2}{2c^2} \right),$$

где

$$A(t, x) = (f_{-1} + f_0 + f_1)(t, x), \quad (8)$$

$$A(t, x)u(t, x) = (f_1(t, x) - f_{-1}(t, x))c + a\Delta t/2, \quad (9)$$

$$a = \Phi(t, x)(\Phi(t, x + c\Delta t) - \Phi(t, x - c\Delta t)). \quad (10)$$

Время релаксации  $\tau$  связано с вязкостью крови  $\nu = (c^2/3)\tau$ , его следует брать малым, если моделируется невязкое течение. Отметим, что использование стандартного значения вязкости крови  $4 \times 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с вполне достаточно для того, чтобы во всех моделируемых случаях не наблюдалось растекания волнового пакета (характерного для продольных вязких сил).

Считая, что изменение площади просвета сосуда  $\Delta A$  мало по сравнению с невозмущенной площадью (без приложенного давления)  $A_0$ , введем линеаризованную пульсовую скорость, определяемую соотношением

$$c_{pulse}(A_0) = \left( \sqrt{\frac{A}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial A}} \right) \Big|_{A=A_0}.$$

В случае если эластичные свойства сосудов описываются законом Лапласа, т.е.  $p(A) = p_0 + \frac{2}{D_0}(A^{1/2} - A_0^{1/2})$ , получаем равенство

$$c_{pulse}(A_0) = \sqrt{A_0^{1/2}/\rho_0 D_0},$$

где  $D_0$  есть растяжимость сосуда, считающаяся известной величиной.

### 3. Граничные условия для решеточных уравнений Больцмана

Одномерные уравнения гемодинамики обычно решаются на графе, описывающем ветвящуюся сеть сосудов [Olufsen, 1999; Olufsen et al., 2000; Абакумов и др., 1997; Буничева и др., 2001; Ашметков и др., 2004; Sherwin et al., 2003; Mynard, Nithiarasu, 2008; Alastruey et al., 2011; Fossan et al., 2018]. На входах и выходах сети необходимо поставить граничные условия, учитывающие физиологические особенности сосудистой сети и сердца [Olufsen, 1999; Olufsen et al., 2000; Alastruey et al., 2008; Shi et al., 2011; Cousins, Gremaud, 2012; Du et al., 2015].

Для постановки граничных условий понадобятся уравнения гемодинамики (1)–(2) в линеаризованной форме, линеаризация проводится относительно состояния покоя  $A = A_0, u = 0$ , то есть малыми считаются  $\Delta A/A_0$  и  $u$  (или в безразмерных величинах мало число Маха  $u/c_{pulse}$ ). Уравнения (1)–(2) записываются в виде

$$\frac{\partial A}{\partial t} + A_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{c_{pulse}^2(A_0)}{A_0} \frac{\partial A}{\partial x}. \quad (11)$$

Рассмотрим линеаризацию зависимости давления и площади просвета сосуда (линеаризация закона Лапласа):

$$p = \rho_0 c_{pulse}^2(A_0) \left( \frac{A}{A_0} - 1 \right),$$

а также введем линеаризованный поток крови через просвет сосуда:

$$q = A_0 u.$$

Для линеаризованных переменных  $p, q$  уравнения (11) записываются следующим образом:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\rho_0 c_{pulse}^2(A_0)^2}{A_0} \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad \frac{\rho_0}{A_0} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (12)$$

Из уравнений (12) сразу следует

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c_{pulse}^2(A_0)^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0,$$

тогда

$$p = p_f(x - c_{pulse}(A_0)t) + p_b(x + c_{pulse}(A_0)t), \quad (13)$$

где  $p_f, p_b$  есть бегущие вперед и назад волны давления, а также

$$q = (A_0/\rho_0 c_{pulse}(A_0))(p_f(x - c_{pulse}(A_0)t) - p_b(x + c_{pulse}(A_0)t)), \quad (14)$$

где величина

$$Z_0 = \rho_0 c_{pulse}^2(A_0)/A_0$$

называется характеристическим импедансом сосуда. Таким образом, в линейной теории любая волна давления может быть разделена на вперед и назад бегущие компоненты по следующему закону:

$$p_f = \frac{1}{2}(p + Z_0q), \quad p_b = \frac{1}{2}(p - Z_0q). \quad (15)$$

В общем случае при необходимости могут быть применены формулы для нелинейного разделения волн [Puin, 2019].

### 3.1. Граничные условия для давления в корне аорты

Сокращение сердца во время систолической фазы сердечного цикла ведет к повышению давления в левом желудочке и выбросу крови в аорту через аортальный клапан. Таким образом, естественно ставить граничные условия для давления в корне аорте. Положим, что профиль давления  $\Delta p(t)$  известен, здесь  $\Delta p(t)$  есть величина превышения давления в коре аорты над некоторым давлением покоя  $p_0$  (давление крови при условии отсутствия сердечных сокращений). Повышение давления над уровнем  $p_0$  для закона Лапласа есть

$$\Delta p = 2\rho_0 c_{pulse}(A_0)^2 \left( \left( \frac{A}{A_0} \right)^{1/2} - 1 \right),$$

где  $(\Delta f_1 + \Delta f_0 + \Delta f_{-1}) = A - A_0$ , а также  $\Delta f_i = f_i - w_i A_0$ ,  $w_{\pm 1} = 1/6$ ,  $w_0 = 4/6$ . Пусть корень аорты находится в узле, расположенном в точке  $x = 0$ , и волна давления (и потока) распространяется в области  $x \geq 0$  во время систолической фазы.

В любой точке области  $x \geq 0$  волны давления и потока крови состоят из вперед и назад бегущих компонент (13)–(14), тогда всегда можно оценить назад бегущую компоненту волны давления в граничной точке  $x = 0$  через величины давления, взятые с предыдущего временного слоя:

$$p_{b0} \equiv p_b(x, t)|_{x=0} = p_b(t - \Delta t, c_{pulse}(A_0)\Delta t).$$

Итак, в точке  $x = 0$  известны профиль давления во времени  $\Delta p(t)$  и значение обратно бегущей волны давления  $p_{b0}$ .

Для решеточных функций распределения объемный поток есть  $\Delta q = (\Delta f_1 - \Delta f_{-1})c + a \frac{\Delta t}{2}$  (см. формулу (9)), где  $a$  определяется равенством (10). Отметим, что  $a = a(x)$  зависит от функций  $f_i$  в точках  $x$ ,  $x \pm 1$ . Очевидно, что для  $a(0)$  необходимо знать значения  $f_i(x = -1)$ , что невозможно; таким образом, для выражения  $a(0)$  используем аппроксимацию

$$a(0) = 2a(1) - a(2). \quad (16)$$

Из второй формулы в (15) следует, что  $\Delta q = \frac{1}{Z_0}(\Delta p - 2p_{b0})$ , это условие в точке  $x = 0$  записывается для решеточных функций распределения в виде

$$Z_0(\Delta f_1 - \Delta f_{-1})c + a(0)Z_0 \frac{\Delta t}{2} = (\Delta f_1 + \Delta f_0 + \Delta f_{-1})\rho_0 c_{pulse}(A_0)^2 / A_0 - 2p_{b0},$$

а также имеем следующее выражение, выводимое из закона Лапласа:

$$(\Delta f_1 + \Delta f_0 + \Delta f_{-1}) = A_0 \left( 1 + \frac{\Delta p(t)}{2\rho_0 c_{pulse}(A_0)^2} \right)^2,$$

последние два уравнения решаются относительно  $f_0, f_1$ ; получаем в точке  $x = 0$  следующие граничные условия:

$$f_1 = \frac{1}{6}A_0 + (f_{-1} - \frac{1}{6}A_0) + \frac{1}{cZ_0}(\Delta p - 2p_{b0}) - a(0)\frac{\Delta t}{2}, \quad (17)$$

$$f_0 = \frac{4}{6}A_0 - \Delta f_1 - \Delta f_{-1} + A_0 \left(1 + \frac{\Delta p(t)}{2\rho_0 c_{pulse}(A_0)^2}\right)^2, \quad (18)$$

где  $\Delta f_1$  в последней формуле находится из (17),  $a(0)$  определяется из (16),  $\Delta f_i = f_i - w_i A_0$ ,  $w_{\pm 1} = 1/6$ ,  $w_0 = 4/6$ . Условия (17)–(18) ставятся в корне восходящей аорты  $x = 0$  во время систолической фазы сердечного цикла. Отметим, что значения  $f_{-1}$  в точке  $x = 0$  определяются не из граничных условий, а из уравнения (5).

### 3.2. Граничные условия для потока крови в корне аорты

Часто удобнее ставить граничные условия для потока крови в корне восходящей аорты. Это связано с тем, что центральное давление достаточно сложно оценить, тогда как объем выброса крови (и, соответственно, поток крови в единицу времени) может быть оценен с помощью аллометрических законов [Dawson, 2014].

Для потока  $\Delta q$  имеем равенство

$$(\Delta f_1 - \Delta f_{-1})c + a(0)\frac{\Delta t}{2} = \Delta q.$$

Также из второй формулы в (15) следует, что  $\Delta p = 2p_{b0} + Z_0 \Delta q$ , где  $\Delta p$  определяется из закона Лапласа. Тогда имеем

$$(\Delta f_1 + \Delta f_0 + \Delta f_{-1}) = A_0 \left(1 + \frac{2p_{b0} + Z_0 \Delta q}{2\rho_0 c_{pulse}(A_0)^2}\right)^2.$$

Выражаем  $f_0, f_1$  из последних уравнений, получаем граничные условия

$$f_1 = \frac{1}{6}A_0 + \left(f_{-1} - \frac{1}{6}A_0\right) + \frac{\Delta q}{c} - a(0)\frac{\Delta t}{2c}, \quad (19)$$

$$f_0 = \frac{4}{6}A_0 - \Delta f_1 - \Delta f_{-1} + A_0 \left(1 + \frac{2p_{b0} + Z_0 \Delta q}{2\rho_0 c_{pulse}(A_0)^2}\right)^2, \quad (20)$$

где  $\Delta f_1$  в последней формуле находится из (19),  $a(0) = 2a(1) - a(2)$  и условия на поток (19)–(20) ставятся в точке  $x = 0$ .

### 3.3. Условия поглощения волн на конце сосуда

Рассмотрим волну давления, бегущую в сосуде длиной  $L$  от левого конца к правому, где координаты вдоль его оси  $x$  меняются от  $x = 0$  до  $x = L$ ,  $L > 0$ . Предположим, что конец сосуда открыт, то есть волна свободно проходит через точку  $x = L$ . В этом случае правый конец сосуда не должен порождать отраженных назад волн  $p_b$ . В этом случае  $\Delta p = Z_0 \Delta q$ , в терминах решеточных функций распределения имеем

$$(\Delta f_1 + \Delta f_0 + \Delta f_{-1}) = cZ_0 C_0 (\Delta f_1 - \Delta f_{-1}) + Z_0 C_0 a(L)\frac{\Delta t}{2},$$

где  $C_0 = \frac{A_0}{\rho c_{pulse}(A_0)^2}$ , уравнение решается для функции  $f_{-1}$  (в точке  $x = L$ ):

$$f_{-1} = \frac{1}{6}A_0 + \frac{1}{(1 + cZ_0 C_0)} \left(-\Delta f_0 - (1 - cZ_0 C_0)\Delta f_1 + Z_0 C_0 a(L)\frac{\Delta t}{2}\right), \quad (21)$$

где  $a(L)$  аппроксимируется как  $2a(L-1) - a(L-2)$ .

### 3.4. Условия отражения волн на конце сосуда

Для полного отражения волны на границе  $x = L$ , что соответствует полному закрытию просвета сосуда, требуется приравнять бегущие вперед и назад компоненты волны. Это означает, что  $p_f = p_b$  или  $q = 0$ , в терминах решеточных уравнений Больцмана имеем

$$f_{-1} = \frac{1}{6}A_0 + \Delta f_1 - a(L)\frac{\Delta t}{2c} \quad (22)$$

и, так же как и в предыдущем случае,  $a(L) = 2a(L-1) - a(L-2)$ .

### 3.5. Условия для бифуркации сосудов

В работе [Ильин, 2019] граничные условия в точке бифуркации сосудов выводились выражением уравнений непрерывности давления и сохранения массы через решеточные функции распределения и последующего решения системы получающихся алгебраических уравнений. Существует и другой подход, изложенный ниже, использующий метод характеристик [Sherwin et al., 2003].

Рассмотрим бифуркацию  $N+1$  сосудов: невозмущенная площадь и линейаризованная пульсовая скорость корневого сосуда обозначаются как  $A_0^{(0)}$ ,  $c_{pulse}(A_0^{(0)})$ , те же величины в дочерних сосудах обозначим через  $A_0^{(i)}$ ,  $c_{pulse}(A_0^{(i)})$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Считаем, что для корневого сосуда точка бифуркации имеет координату  $x = L$ , а для дочерних сосудов —  $x = 0$ . В точке сопряжения сосудов считается, что выполняются законы непрерывности давления и сохранения массы крови [Sherwin et al., 2003]. Имеем

$$\Delta p^{(0)} = \Delta p^{(i)}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (23)$$

$$A_0^{(0)} u^{(0)} = \sum_{i=1}^N A_0^{(i)} u^{(i)}, \quad (24)$$

где  $u^{(i)}$ ,  $\Delta p^{(i)} = p - p_0$  — скорость движения крови и давление в сосудах,  $i = 0, \dots, N$ ,  $p_0$  есть давление в состоянии покоя (при отсутствии сердечных сокращений).

Закон, связывающий давление и площадь просвета сосуда, рассматривается в линейаризованной форме  $\Delta p(A) \equiv p(A) - p_0 = \rho_0 c_{pulse}^2(A_0)(A/A_0 - 1)$ . Использование связи между давлением и площадью просвета сосуда позволяет уменьшить число неизвестных в системе (23)–(24) до  $2(N+1)$ , но самих уравнений в (23)–(24) только  $(N+1)$  штук. Таким образом, необходимо получить дополнительные уравнения.

Для этого рассмотрим бегущую вперед пульсовую волну в корневом сосуде, которая достигает точки бифуркации  $x = L$ , в данной точке волна частично отражается назад, то есть состоит из двух компонент  $p_f^0$  и  $p_b^0$ . Исходная волна также порождает волны в дочерних сосудах, которые являются бегущими назад (удаляются от точки бифуркации), обозначим их через  $p_b^i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Из равенств (15) следует, что  $p_f^0 = \frac{1}{2}(p^0 + Z_0 q^0)$  или

$$p_f^0 = \frac{1}{2}(p_0 + \rho_0 c_{pulse}^2(A_0^{(0)})(A^{(0)}/A_0^{(0)} - 1) + \rho_0 c_{pulse}(A_0^{(0)})u^{(0)}) = \\ = K + \frac{\rho_0 c_{pulse}(A_0^{(0)})}{2} \left( \frac{c_{pulse}(A_0^{(0)})}{A_0^{(0)}} \Delta A^{(0)} + u^{(0)} \right),$$

где  $K = \frac{1}{2}(p_0 - \rho_0 c_{pulse}^2(A_0^{(0)}))$ ,  $\Delta A^{(0)} = A^{(0)} - A_0^{(0)}$ . Введем для удобства величину

$$W^{(0)} = \left( \frac{c_{pulse}(A_0^{(0)})}{A_0^{(0)}} \Delta A^{(0)} + u^{(0)} \right).$$

Так как  $p_f$  — бегущая вперед волна, то  $W^{(0)}(t, L) = W^{(0)}(t - \Delta t, L - c_{pulse}(A_0^{(0)})\Delta t)$ . То есть  $W^{(0)}(t, L)$  — известная величина, она вычисляется на основе данных с предыдущего временного шага.

Отметим, что бегущих к точке бифуркации от правого конца волн в дочерних сосудах нет, тогда  $p_f^{(i)} = 0$ , что эквивалентно  $u^{(i)} - \frac{c_{pulse}(A_0^{(i)})\Delta A^{(i)}}{A_0^{(i)}} = 0$ ,  $i = 1, \dots, N$ . То есть удалось получить  $N + 1$  недостающих уравнений.

Собирая все результаты, получаем систему уравнений в точке бифуркации в момент времени  $t$ :

$$\frac{c_{pulse}(A_0^{(0)})}{A_0^{(0)}}\Delta A^{(0)} + u^{(0)} = W^{(0)}(t, L), \quad (25)$$

$$u^{(i)} - \frac{c_{pulse}(A_0^{(i)})\Delta A^{(i)}}{A_0^{(i)}} = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (26)$$

$$A_0^{(0)}u^{(0)} = A_0^{(1)}u^{(1)} + \dots + A_0^{(N)}u^{(N)}, \quad (27)$$

$$\frac{c_{pulse}^2(A_0^{(0)})}{A_0^{(0)}}\Delta A^{(0)} = \frac{c_{pulse}^2(A_0^{(1)})}{A_0^{(1)}}\Delta A^{(1)} = \dots = \frac{c_{pulse}^2(A_0^{(N)})}{A_0^{(N)}}\Delta A^{(N)}, \quad (28)$$

где  $W^{(0)}(t, L) = W^{(0)}(t - \Delta t, L - c_{pulse}(A_0^{(0)})\Delta t)$ , уравнения (25)–(28) легко решаются относительно переменных  $\Delta A^{(i)}$ ,  $u^{(i)}$ ,  $i = 0, \dots, N$ :

$$\Delta A^{(i)} = \frac{\frac{A_0^{(0)}A_0^{(i)}}{c_{pulse}^2(A_0^{(i)})}}{\sum_{j=0}^N \frac{A_0^{(j)}}{c_{pulse}(A_0^{(j)})}} W^{(0)}(t, L), \quad i = 0 \dots N,$$

$$u^{(0)} = W^{(0)}(t, L) - \frac{c_{pulse}(A_0^{(0)})}{A_0^{(0)}}\Delta A^{(0)}, \quad u^{(i)} = \frac{c_{pulse}(A_0^{(i)})}{A_0^{(i)}}\Delta A^{(i)}, \quad i = 1 \dots N.$$

Данные решения допускают выражение в терминах решеточных функций распределения, имеем уравнения

$$f_1^{(i)} + f_0^{(i)} + f_{-1}^{(i)} = \Delta A^{(i)}, \quad i = 0 \dots N,$$

$$(f_1^{(i)} - f_{-1}^{(i)})c^{(i)} + a^{(i)}\Delta t/2 = u^{(i)}, \quad i = 0 \dots N,$$

откуда получаем следующие решения:

$$f_{-1}^{(0)} = -(1/c^{(0)})A_0^{(0)}u^{(0)} + f_1^{(0)} + (1/c^{(0)})a^{(0)}\Delta t/2, \quad (29)$$

$$f_0^{(0)} = A^{(0)} - 2f_1^{(0)} + (1/c^{(0)})A_0^{(0)}\Delta u^{(0)} - (1/c^{(0)})a^{(0)}\Delta t/2, \quad (30)$$

$$f_1^{(i)} = (1/c^{(i)})A_0^{(i)}u^{(i)} + f_{-1}^{(i)} - (1/c^{(i)})a^{(i)}\Delta t/2, \quad i = 1 \dots N, \quad (31)$$

$$f_0^{(i)} = A^{(i)} - 2f_{-1}^{(i)} - (1/c^{(i)})A_0^{(i)}u^{(i)} + (1/c^{(i)})a^{(i)}\Delta t/2, \quad i = 1 \dots N, \quad (32)$$

где  $A^{(i)} = \Delta A^{(i)} + A_0^{(i)}$ , а также для  $a^{(i)}$  используются аппроксимации  $a^{(0)} \equiv a^{(0)}(L) = 2a^{(0)}(L - 1) - a^{(0)}(L - 2)$ ;  $a^{(i)} \equiv a^{(i)}(1) = 2a^{(i)}(2) - a^{(i)}(3)$ ,  $i = 1 \dots N$ . Как и в статье [Ильин, 2019], временной шаг  $\Delta t$  во всех сосудах одинаков, а решеточные скорости  $c^{(i)}$  выбираются таким образом, что

$$\frac{c^{(i)}}{c^{(j)}} = \frac{c_{pulse}(A_0^{(i)})}{c_{pulse}(A_0^{(j)})}.$$

Равенства (29)–(32) задают граничные условия для бифуркации  $N + 1$  сосудов: для корневого сосуда условия ставятся на решеточные функции  $f_0, f_{-1}$  в точке  $x = L$ , для дочерних сосудов условия ставятся для  $f_0, f_1$  в начальной точке этих сосудов, т. е.  $x = 0$ .

### 3.6. Граничные условия RCR на конце сосуда

Рассмотрим сосуд длиной  $L$  (рис. 1), предположим что течение крови в этом сосуде моделируется с использованием одномерных уравнений гемодинамики, конец сосуда в точке  $x = L$  соединен с сосудами микроциркуляторного русла, последние моделируются на основе модели RCR (Resistor-Capacitor-Resistor). Данные граничные условия являются моделями по типу моделей электрических цепей с двумя сопротивлениями (resistance) и одним конденсатором (capacitor) [Westerhof et al., 1971; Alastruey et al., 2008; Shi et al., 2011]. При исследовании течения крови с помощью моделей типа электрических цепей поток крови в единицу времени и перепад давления аналогичны силе тока и напряжению; резисторы моделируют характеристический импеданс течения крови и наличие сил трения, конденсаторы — эластичные свойства сосудов, катушки индуктивности — инерционные свойства течения.

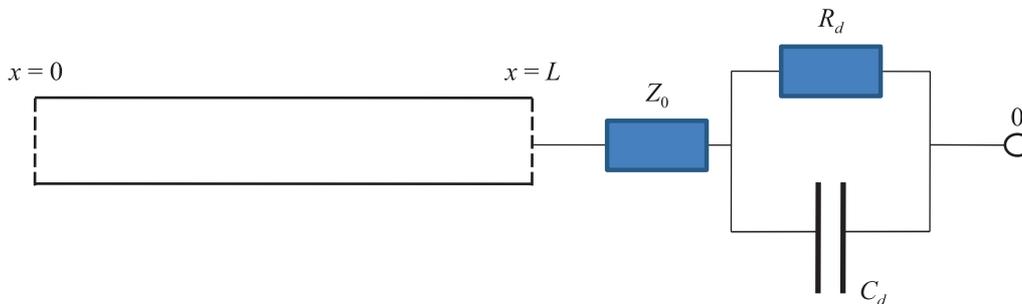


Рис. 1. Сосуд и граничные условия типа RCR на правом конце  $x = L$

Первое сопротивление на рис. 1 есть характеристический импеданс  $Z_0$  дистального конца сосуда, для которого ставятся граничные условия. Данный член необходим для того, чтобы исключить отражения пульсовых волн в точке  $x = L$ . Действительно, в теории волн [Lighthill, 1978] известно, что любое изменение импеданса в волноводе ведет к появлению отражения волны; таким образом, для избежания этого эффекта вводится дополнительное сопротивление на границе «сосуд – микроциркуляторное русло». Член, соответствующий конденсатору  $C_d$ , отвечает эластичным свойствам артериолей. Член, соответствующий сопротивлению  $R_d$ , отвечает за силы трения крови на стенках артериолей. Для схемы, изображенной на рис. 1, имеем

$$C_d \frac{dp}{dt} + \frac{p}{R_d} = C_d Z_0 \frac{dq}{dt} + \left(1 + \frac{Z_0}{R_d}\right) q,$$

где  $p$  — давление крови,  $q$  — объемный поток, дискретизация первого порядка этого уравнения дает

$$(R\Delta t + Z_0 R_d C_d) q(t + \Delta t) = (\Delta t + R_d C_d) p(t + \Delta t) - R_d C_d (p(t) - Z_0 q(t)),$$

где введено обозначение  $R = Z_0 + R_d$  и  $\Delta t$  есть разностный шаг по времени. Используя (15), получаем

$$\begin{aligned} & (R\Delta t + Z_0 R_d C_d) (p_f(t + \Delta t) - p_b(t + \Delta t)) = \\ & = Z_0 (\Delta t + R_d C_d) (p_f(t + \Delta t) + p_b(t + \Delta t)) - R_d C_d Z_0 (p(t) - Z_0 q(t)) \end{aligned}$$

и тогда в точке  $x = L$  имеем

$$p_b(t + \Delta t) = \frac{R_d \Delta t p_f(t + \Delta t) + R_d C_d Z_0 (p(t) - Z_0 q(t))}{(R + Z_0) \Delta t - 2 Z_0 R_d C_d}. \tag{33}$$

Отметим, что

$$p_f(t + \Delta t, L) = p_f(t, L - c_{pulse}\Delta t), \quad (34)$$

так как  $p_f$  есть бегущая волна, ее скорость распространения равна  $c_{pulse}(A_0)$ . Таким образом, можно выразить  $p_f(t + \Delta t, L)$ ,  $p_b(t + \Delta t, L)$  через известные функции  $p_f(t, L)$ ,  $p_b(t, L)$ ,  $p_f(t, x - c_{pulse}\Delta t)$ . Также

$$p(t + \Delta t, L) = (p_f(t + \Delta t, L) + p_b(t + \Delta t, L)), \quad (35)$$

$$q(t + \Delta t, L) = Z_0^{-1}(p_f(t + \Delta t, L) - p_b(t + \Delta t, L)). \quad (36)$$

Значения  $f_0(t + \Delta t, L)$ ,  $f_{-1}(t + \Delta t, L)$  находятся из уравнений

$$\begin{aligned} \Delta f_{-1} + \Delta f_0 + \Delta f_1 &= C_0 p(t + \Delta t, L), \\ (\Delta f_1 + \Delta f_{-1})c + \frac{\Delta ta(L)}{2} &= q(t + \Delta t, L), \end{aligned}$$

где  $C_0 = \frac{A_0}{\rho c_{pulse}(A_0)^2}$ ,  $a(L) = 2a(L - 1) - a(L - 2)$ . Решение этой системы имеет вид

$$f_{-1} = \frac{1}{6}A_0 + \Delta f_1 + \frac{\Delta ta(L)}{2} - \frac{q(t + \Delta t)}{c}, \quad (37)$$

$$f_0 = \frac{4}{6}A_0 - 2\Delta f_1 + C_0 p(t + \Delta t) - \frac{\Delta ta(L)}{2} + \frac{q(t + \Delta t)}{c}. \quad (38)$$

Формулы (37)–(38) задают условия типа RCR в терминах решеточных функций распределения в точке  $x = L$ . Отметим, что значения  $\Delta f_1 = f_1(t + \Delta t, L) - 1/6A_0$  известны на правом конце сосуда, так как они определяются через  $f_j(t, L - \Delta x)$ ,  $j = 0, \pm 1$ ; значения  $p(t + \Delta t)$ ,  $q(t + \Delta t)$  вычисляются из (35)–(36), где  $p_f$ ,  $p_b$ , в свою очередь, выражаются через формулы (33)–(34).

### 3.7. Результаты численного моделирования на основе решеточных уравнений Больцмана и схемы Маккормака

В качестве тестовой задачи рассмотрим распространение волн давления и потока крови в сети из трех сосудов, на входе задается условие на объемный поток крови, на концах двух других сосудов — условия типа RCR (см. рис. 2). Такая задача рассматривалась в работах [Xiao et al., 2014; Voileau et al., 2015], первый сосуд представляет собой брюшную часть (abdominal) аорты, два дочерних сосуда — подвздошные (iliac) артерии.

Профиль потока крови на входе брюшной части аорты представлен на рис. 3. (аппроксимация тригонометрическими функциями профиля потока крови из работы [Xiao et al., 2014]). Остальные данные также брались из работы [Xiao et al., 2014]: невозмущенные радиусы сосудов равны 0.0086 м (сосуд 1) и 0.006 м (сосуды 2, 3); длины сосудов равны 0.086 м для сосуда 1 и 0.085 м для сосудов 2, 3; линеаризованные пульсовые скорости равны 6.26 м/с в сосуде 1 и 7.4 м/с в сосудах 2, 3. Эластичные свойства сосудов моделируются с помощью закона Лапласа. Значения микроциркуляторного сопротивления  $R_d = 3.1 \times 10^9$  Па · с/м<sup>3</sup>, также  $C_d = 3.66 \times 10^{-10}$  м<sup>3</sup>/Па, в этом случае характерное время релаксации обратной волны, порожденной микроциркуляторными сосудами, равно  $R_d C_d = 1.13$  с. Плотность крови бралась равной  $1.05 \times 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, вязкость для решеточных уравнений Больцмана выбиралась равной  $4 \times 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с (для схемы Маккормака вязкие члены не добавлялись).

Результаты моделирования с использованием схемы Маккормака и решеточных уравнений Больцмана представлены на рис. 4 и рис. 5. Профили волн давления и потока крови для обоих методов близки.

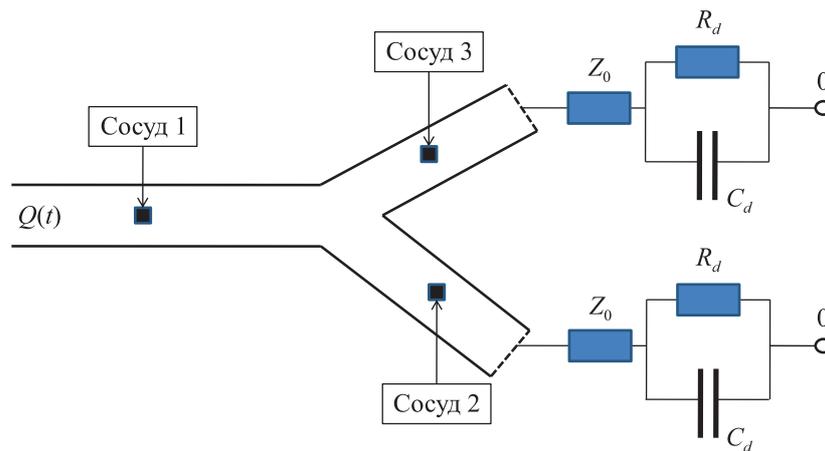


Рис. 2. Моделируемая геометрия: три сосуда и одна бифуркация. На левом конце первого сосуда ставится граничное условие для объемного потока  $Q(t)$ , на правых концах сосудов 2, 3 — граничные условия типа RCR

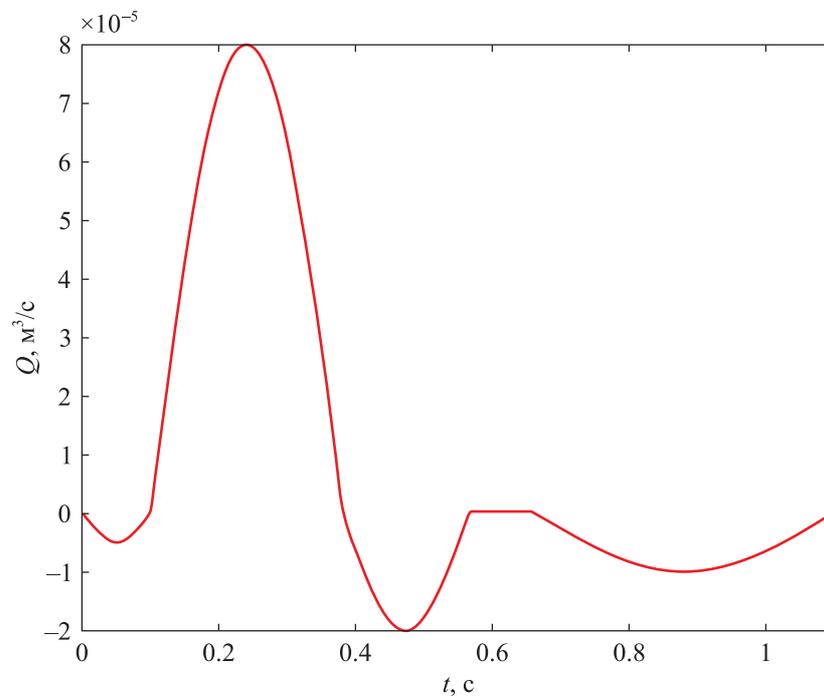


Рис. 3. Профиль объемного потока крови на входе в сосуд 1 (аппроксимация тригонометрическими функциями профиля потока крови из работы [Xiao et al., 2014]). Профиль используется в качестве граничных условий

#### 4. Заключение

В работе рассмотрена постановка граничных условий для одномерной решеточной модели уравнения Больцмана, описывающей одномерные уравнения движения крови в эластичных сосудах. Рассматривались следующие условия: для давления и потока крови в корне аорты, условия в точке бифуркации сосудов, условия полного отражения и поглощения волны для концов сосудов, условия для концов сосудов, учитывающие микроциркуляцию (RCR). Рассмотрена тестовая задача о распространении волн давления и потока крови в сети из трех сосудов, проведено сравнение результатов расчетов на основе решеточных уравнений Больцмана и схемы Маккормака.

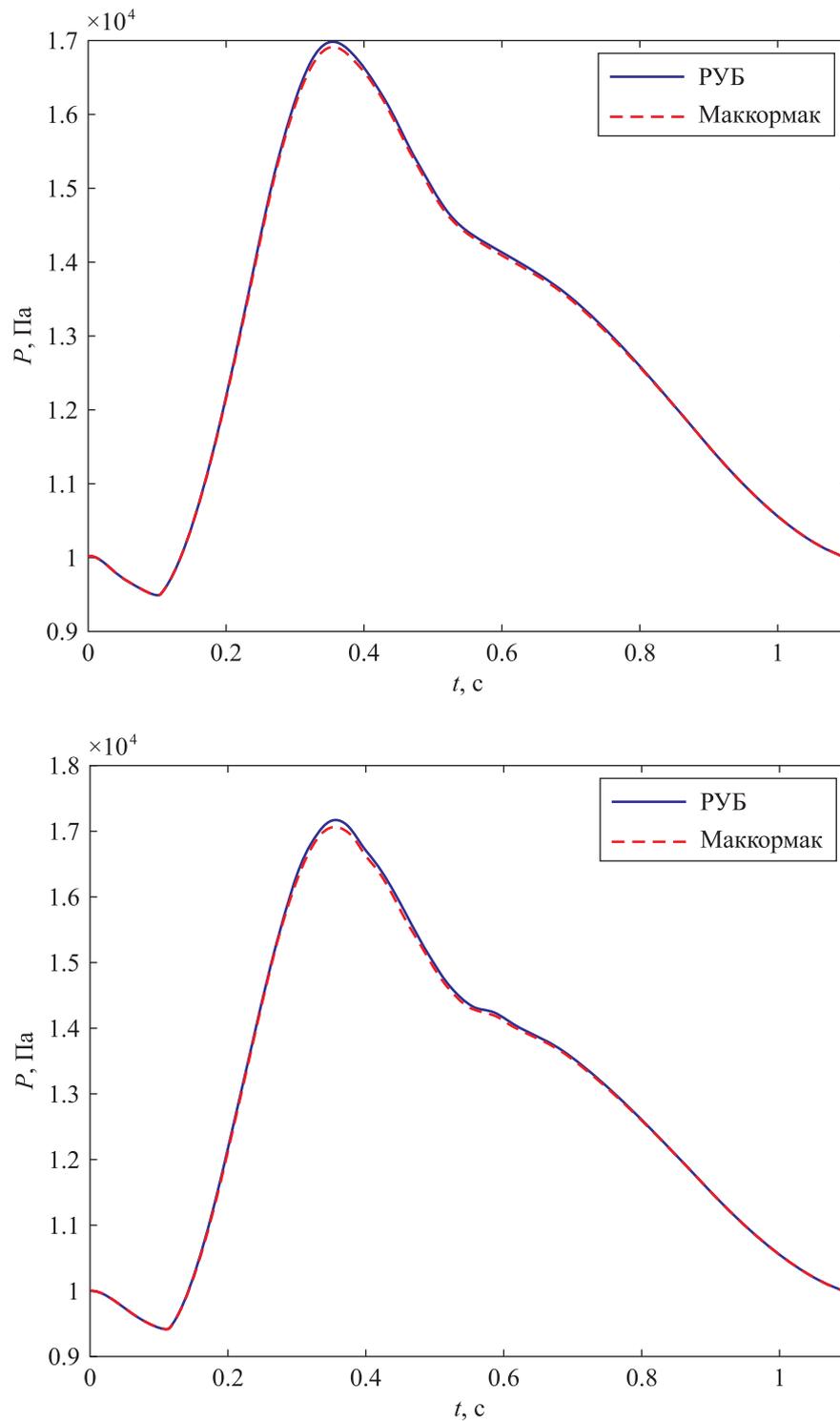


Рис. 4. Профили волн давления, измеренные в центре сосудов 1 (верхний график) и 3 (нижний график) (см. рис. 2), в результате распространения волны крови с объемным профилем потока на левом конце сосуда 1, приведенном на рис. 3. Представленные профили получены с помощью схемы Маккормака и решеточных уравнений Больцмана (РУБ). Параметры моделируемой сосудистой сети описаны в подпараграфе 3.7

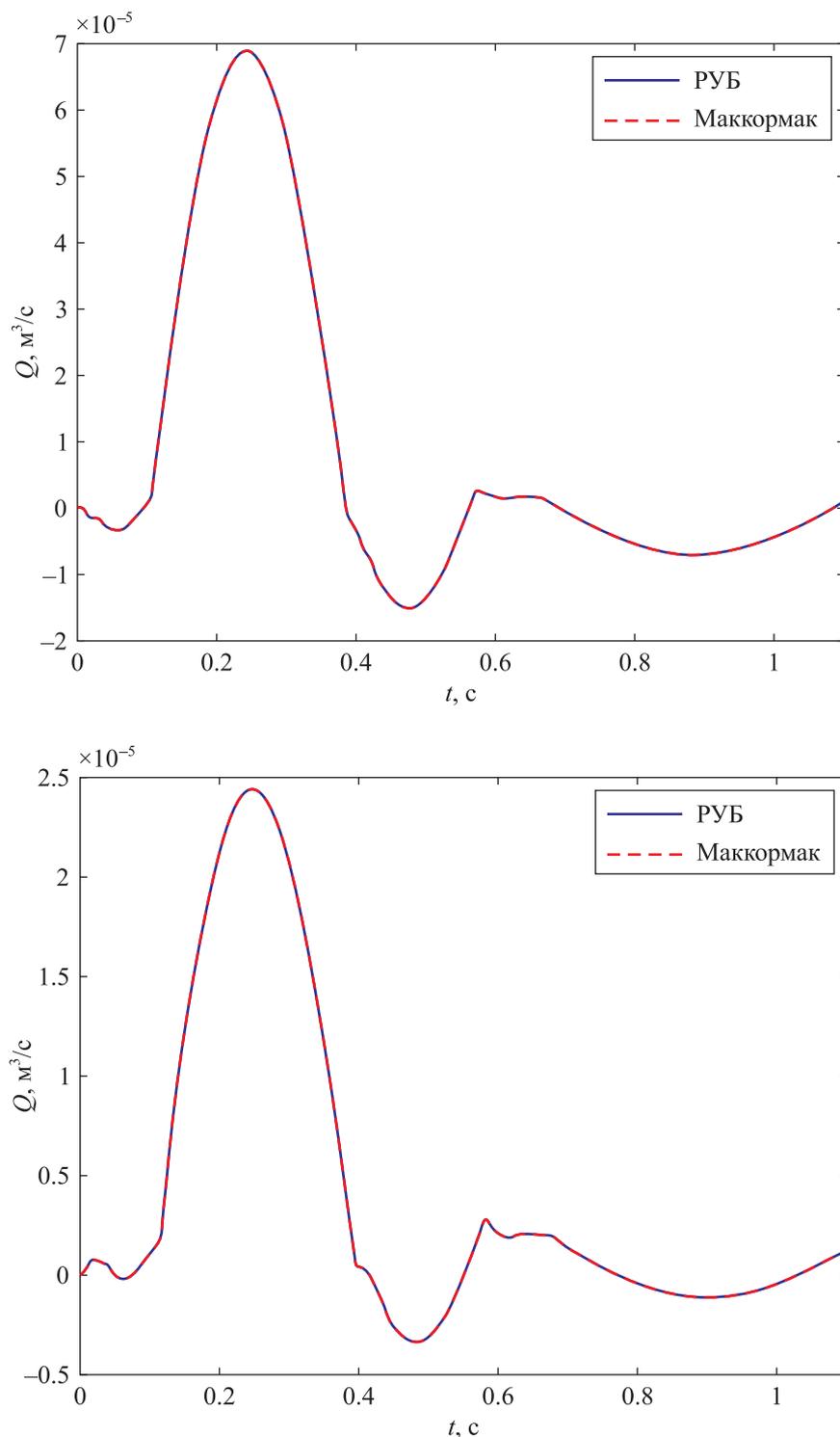


Рис. 5. Профили потока крови в единицу времени, измеренные в центре сосудов 1 (верхний график) и 3 (нижний график) (см. рис. 2), в результате распространения волны крови с объемным профилем потока на левом конце сосуда 1, приведенным на рис. 3. Представленные профили получены с помощью схемы Маккормака и решеточных уравнений Больцмана (РУБ). Параметры моделируемой сосудистой сети описаны в подпараграфе 3.7

## Список литературы (References)

- Абакумов М., Гаврилюк К., Есикова Н., Лукишин А., Мухин С., Соснин Н., Тишкин В., Фаворский А.* Математическая модель гемодинамики сердечно-сосудистой системы // Дифференц. уравнения. — 1997. — Т. 33. — С. 892–898.  
*Abakumov M., Gavrilyuk K., Esikova N., Lukshin A., Mukhin S., Sosnin N., Tishkin V., Favorski A.* A mathematical model of the hemodynamics of a cardio-vascular system // Differ. Equ. — 1997. — Vol. 33. — P. 895–901. (Original Russian paper: *Abakumov M., Gavrilyuk K., Esikova N., Lukshin A., Mukhin S., Sosnin N., Tishkin V., Favorskii A.* Matematicheskaya model' gemodinamiki serdechno-sosudistoi sistemy // Differents. uravneniya. — 1997. — Vol. 33. — P. 892–898.)
- Ашметков И., Мухин С., Соснин Н., Фаворский А., Хруленко А.* Анализ и сравнение некоторых аналитических и численных решений задач гемодинамики // Дифференц. уравнения. — 2000. — Т. 36. — С. 919–924.  
*Ashmetkov I., Mukhin S., Sosnin N., Favorski A., Khrulenko A.* Analysis and comparison of some analytic and numerical solutions of hemodynamic problems // Differ. Equ. — 2000. — Vol. 36. — P. 1021–1026. (Original Russian paper: *Ashmetkov I., Mukhin S., Sosnin N., Favorskii A., Khrulenko A.* Analiz i sravnenie nekotorykh analiticheskikh i chislennykh reshenii zadach gemodinamiki // Differents. uravneniya. — 2000. — Vol. 36. — P. 919–924.)
- Ашметков И., Мухин С., Соснин Н., Фаворский А.* Краевая задача для линеаризованных гемодинамических уравнений на графе // Дифференц. уравнения. — 2004. — Т. 40. — С. 87–97.  
*Ashmetkov I., Mukhin S., Sosnin N., Favorski A.* A Boundary Value Problem for the Linearized Haemodynamic Equations on a Graph // Differ. Equ. — 2004. — Vol. 40. — P. 94–104. (Original Russian paper: *Ashmetkov I., Mukhin S., Sosnin N., Favorskii A.* Kraevaya dacha dlyal inearizovannykh gemodinamicheskikh uravnenii na grafe // Differents. uravneniya. — 2004. — Vol. 40. — P. 87–97.)
- Буничева А., Мухин С., Соснин Н., Фаворский А.* Осредненная нелинейная модель гемодинамики на графе сосудов // Дифференц. уравнения. — 2001. — Т. 37. — С. 905–912.  
*Bunicheva A., Mukhin S., Sosnin N., Favorski A.* An Averaged Nonlinear Model of Hemodynamics on the Vessel Graph // Differ. Equ. — 2001. — Vol. 37. — P. 949–956. (Original Russian paper: *Bunicheva A., Mukhin S., Sosnin N., Favorskii A.* Osrednennayane lineinaya model' gemodinamiki na grafe sudov // Differents. uravneniya. — 2001. — Vol. 37. — P. 905–912.)
- Буничева А., Мухин С., Соснин Н., Фаворский А.* Вычислительный эксперимент в гемодинамике // Дифференц. уравнения. — 2004. — Т. 40. — С. 920–935.  
*Bunicheva A., Mukhin S., Sosnin N., Favorski A.* Numerical Experiment in Hemodynamics // Differ. Equ. — 2004. — Vol. 40. — P. 984–999. (Original Russian paper: *Bunicheva A., Mukhin S., Sosnin N., Favorskii A.* Vychislitel'nyi eksperiment v gemodinamike // Differents. uravneniya. — 2004. — Vol. 40. — P. 920–935.)
- Василевский Ю. В., Саламатова В. Ю., Симаков С. С.* Об эластичности сосудов в одномерных моделях гемодинамики // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2015. — Т. 55. — С. 1599–1610.  
*Vasilevskiy Y. V., Salamatova V. Y., Simakov S. S.* On the elasticity of blood vessels in one-dimensional problems of hemodynamics. // Comput. Math. Math. Phys. — 2015. — Vol. 55. — P. 1567–1578. (Original Russian paper: *Vasilevskii Yu. V., Salamatova V. Yu., Simakov S. S.* Ob elastichnosti sudov v odnomernykh modelyakh gemodinamiki // Zh. vychisl. matem. i matem. fiz. — 2015. — Vol. 55. — P. 1599–1610.)
- Ильин О. В.* Моделирование одномерных нелинейных пульсовых волн в эластичных сосудах на основе решеточных уравнений Больцмана // Компьютерные исследования и моделирование. — 2019. — Т. 84. — С. 707–722.  
*Ilyin O. V.* Modelirovanie odnomernykh nelineinykh pul'sovykh voln v elastichnykh sudakh na osnove reshetochnykh uravnenii Bol'tsmana [The modeling of nonlinear pulse waves in elastic vessels using the Lattice Boltzmann method] // Computer Research and Modeling. — 2019. — Vol. 84. — P. 707–722 (in Russian).
- Магомедов К. М., Холодов А. С.* Сеточно-характеристические численные методы. — М.: Наука, 1988.  
*Magomedov K. M., Kholodov A. S.* Setochno-kharakteristicheskiye chislennyye metody [Grid-characteristic numerical methods]. — Moscow: Nauka, 1988 (in Russian).
- Симаков С. С.* Современные методы математического моделирования кровотока с помощью осредненных моделей // Компьютерные исследования и моделирование. — 2018. — Т. 10. — С. 581–604.  
*Simakov S. S.* Sovremennyye metody matematicheskogo modelirovaniyak rogotoka s pomoshch'yu osrednennykh modelei [Modern methods of mathematical modeling of blood flow using reduced order methods] // Computer Research and Modeling. — 2018. — Vol. 10. — P. 581–604 (in Russian).

- Alastruey J., Parker K., Sherwin S.* Lumped Parameter Outflow Models for 1-D Blood Flow Simulations: Effect on Pulse Waves and Parameter Estimation // *Commun. Comput. Phys.* — 2008. — Vol. 20. — P. 317–336.
- Alastruey J., Khir A., Matthys K., Segers P., Sherwin S., Verdonck P., Parker K., Peir'o J.* Pulse wave propagation in a model human arterial network: Assessment of 1-D visco-elastic simulations against in vitro measurements // *J. of Biomech.* — 2011. — Vol. 44. — P. 2250–2258.
- Bessonov N., Sequeira A., Simakov S., Vassilevskii Yu., Volpert V.* Methods of Blood Flow Modelling // *Math. Model. Nat. Phenom.* — 2016. — Vol. 11. — P. 1–25.
- Blanco P., Bulant C., Muller L., Maso Talou G., Guedes Bezerra C., Lemos P., Feijoo R.* Comparison of 1D and 3D Models for the Estimation of Fractional Flow Reserve // *Scientific Reports.* — 2018. — Vol. 8. — 17275.
- Boileau E., Nithiarasu P., Blanco P., Müller L., Fossan F., Hellevik L., Donders W., Huberts W., Willemet M., Alastruey J.* A benchmark study of numerical schemes for one-dimensional arterial blood flow modelling // *Int. J. Numer. Meth. Biomed. Engng.* — 2015. — e02732.
- Cohen I., Kundu P., Hu H.* *Fluid Mechanics.* — Elsevier, 2004.
- Cousins W., Gremaud P.* Boundary conditions for hemodynamics: The structured tree revisited // *J. Comput. Phys.* — 2012. — Vol. 231. — P. 6086–6096.
- Dawson T.* Allometric Relations and Scaling Laws for the Cardiovascular System of Mammals // *Systems.* — 2014. — Vol. 2. — P. 168–185.
- Du T., Hu D., Cai D.* Outflow Boundary Conditions for Blood Flow in Arterial Trees // *PLoS ONE.* — 2015. — Vol. 10. — e0128597.
- Duanmu Z., Chen W., Gao H., Yang X., Luo X., Hill N.* A One-Dimensional Hemodynamic Model of the Coronary Arterial Tree // *Front. Physiol.* — 2019. — Vol. 10. — P. 853.
- Fossan F., Mariscal-Harana J., Alastruey J., Hellevik L.* Optimization of topological complexity for one-dimensional arterial blood flow models // *J. R. Soc. Interface.* — 2018. — Vol. 15. — 20180546.
- Formaggia L., Lamponi D., Quarteroni A.* One-dimensional models for blood flow in arteries // *J. Engng. Maths.* — 2003. — Vol. 47. — P. 251–276.
- Hirsch C.* *Numerical Computation of Internal and External Flows: The Fundamentals of Computational Fluid Dynamics.* — Butterworth-Heinemann, 2007.
- Hou Y., Kassab G.* A Hybrid One-Dimensional/Womersley Model of Pulsatile Blood Flow in the Entire Coronary Arterial Tree // *Am. J. Physiol. Heart. Circ. Physiol.* — 2007. — Vol. 292. — P. 2623–2633.
- Hughes T., Lubliner J.* On the one-dimensional theory of blood flow in the larger vessels // *Math. Biosci.* — 1973. — Vol. 18. — P. 161–170.
- Ilyin O.* Nonlinear pressure–velocity waveforms in large arteries, shock waves and wave separation // *Wave Motion.* — 2019. — Vol. 84. — P. 56–67.
- Ilyin O.* The application of the Lattice Boltzmann method to the one-dimensional modeling of pulse waves in elastic vessels // *Wave Motion.* — 2020. — Vol. 95. — 102533.
- Krüger T., Kusumaatmaja H., Kuzmin A., Shardt O., Silva G., Viggen E.* *The Lattice Boltzmann Method. Principles and Practice.* — Springer, 2017.
- Lighthill J.* *Waves in Fluids.* — Cambridge University Press, 1978.
- Lo E., Menezes L., Torii R.* Impact of Inflow Boundary Conditions on the Calculation of CT-Based FFR // *Fluids.* — 2019. — Vol. 4. — P. 60.

- MacCormack R.* The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering // *J. Spacecraft Rockets.* — 2003. — Vol. 40. — P. 757–763.
- Müller L., Toro E.* Well-balanced high-order solver for blood flow in networks of vessels with variable properties // *Int J. Numer. Meth. Biomed. Engn.* — 2013. — Vol. 29. — P. 1388–1411.
- Mynard J., Nithiarasu P.* A 1D arterial blood flow model incorporating ventricular pressure, aortic valve and regional coronary flow using the locally conservative Galerkin (LCG) method // *Commun. in Numer. Meth. in Eng.* — 2008. — Vol. 24. — P. 367–417.
- Olufsen M.* Structured tree outflow condition for blood flow in larger systemic arteries // *Amer. J. of Physiol.* — 1999. — Vol. 276. — H257–H268.
- Olufsen M., Peskin C., Kim W., Pedersen E., Nadim A., Larsen J.* Numerical simulation and experimental validation of blood flow in arteries with structured-tree outflow conditions // *Annals of Biomed. Engn.* — 2000. — Vol. 28. — P. 1281–1299.
- Sherwin S., Franke V., Peiró J., Parker K.* One-dimensional modelling of a vascular network in space-time variables // *J. Engng. Maths.* — 2003. — Vol. 47. — P. 217–250.
- Schlaffer M.* Non-reflecting Boundary Conditions for the Lattice Boltzmann Method. — Technical University of Munich, 2013.
- Shi Y., Lawford P., Hose R.* Review of Zero-D and 1-D Models of Blood Flow in the Cardiovascular System // *Biomed. Engn. Onl.* — 2011. — Vol. 10. — P. 33–38.
- Taylor C., Draney M.* Experimental and computational methods in cardiovascular fluid mechanics // *Rev. Fluid Mech.* — 2004. — Vol. 36. — P. 197–231.
- Westerhof N., Elzinga G., Sipkema P.* An artificial arterial system for pumping hearts // *J. of Appl. Physiol.* — 1971. — Vol. 31. — P. 776–781.
- Xiao N., Alastruey J., Figueroa C.* A systematic comparison between 1-D and 3-D hemodynamics in compliant arterial models // *Int. J. Numer. Meth. Biomed. Engng.* — 2014. — Vol. 30. — P. 204–231.
- Young D., Tsai F.* Flow characteristics in models of arterial stenoses — II. Unsteady flow // *J. of Biomech.* — 1973. — Vol. 6. — P. 547–559.