

УДК: 519.6

Анализ диссипативных свойств гибридного метода крупных частиц для структурно сложных течений газа

Д. В. Садин

Военно-космическая академия имени А. Ф. Можайского,
Россия, 197198, г. Санкт-Петербург, ул. Ждановская, д. 13

E-mail: sadin@yandex.ru

Получено 06.04.2020, после доработки — 06.05.2020.

Принято к публикации 28.05.2020.

Изучаются вычислительные свойства параметрического класса конечно-объемных схем с настраиваемыми диссипативными свойствами с расщеплением по физическим процессам на лагранжевы, эйлеровы и заключительный этапы (гибридный метод крупных частиц). Метод обладает вторым порядком аппроксимации по пространству и времени на гладких решениях. Регуляризация численного решения на лагранжевом этапе осуществляется нелинейной коррекцией искусственной вязкости, величина которой, независимо от разрешения сетки, стремится к нулю вне зоны разрывов и экстремумов в решении. На эйлеровом и заключительном этапе вначале реконструируются примитивные переменные (плотность, скорость и полная энергия) путем взвешенной ограничителем потоков аддитивной комбинации противопоточной и центральной аппроксимаций. Затем из них формируются численные дивергентные потоки. При этом выполняются дискретные аналоги законов сохранения.

Выполнен анализ диссипативных свойств метода с использованием известных ограничителей вязкости и потоков, а также их линейной комбинации. Разрешающая способность схемы и качество численных решений продемонстрированы на примерах двумерных тестов с обтеканием ступеньки потоком газа с числами Маха 3, 10 и 20, двойным маховским отражением сильной ударной волны и с импульсным сжатием газа. Изучено влияние схемной вязкости метода на численное воспроизведение неустойчивости на контактных поверхностях газов. Установлено, что уменьшение уровня диссипативных свойств схемы в задаче с импульсным сжатием газа приводит к разрушению симметричного решения и формированию хаотической неустойчивости на контактной поверхности.

Численные решения сопоставлены с результатами других авторов, полученных по схемам повышенного порядка аппроксимации: КАБАРЕ, HLLC (Harten Lax van Leer Contact), CFLFh (CFLF hybrid scheme), JT (centered scheme with limiter by Jiang and Tadmor), PPM (Piecewise Parabolic Method), WENO5 (weighted essentially non-oscillatory scheme), RKGD (Runge–Kutta Discontinuous Galerkin), с гибридной взвешенной нелинейной интерполяцией CCSSR-HW4 и CCSSR-HW6. К достоинствам гибридного метода крупных частиц относятся расширенные возможности решения задач гиперболического и смешанного типов, хорошее соотношение диссипативных и дисперсионных свойств, сочетание алгоритмической простоты и высокой разрешающей способности в задачах со сложной ударно-волновой структурой, развитием неустойчивости и вихреобразованием на контактных границах.

Ключевые слова: гибридный метод крупных частиц, регулирование диссипативных свойств, ударные волны, вихревая структура, неустойчивость на контактных границах

UDC: 519.6

Analysis of dissipative properties of a hybrid large-particle method for structurally complicated gas flows

D. V. Sadin

Mozhaisky Military Space Academy,
13 Zhdanovskaya st., Saint Petersburg, 197198, Russia

E-mail: sadin@yandex.ru

Received 06.04.2020, after completion — 06.05.2020.

Accepted for publication 28.05.2020.

We study the computational properties of a parametric class of finite-volume schemes with customizable dissipative properties with splitting by physical processes into Lagrangian, Eulerian, and the final stages (the hybrid large-particle method). The method has a second-order approximation in space and time on smooth solutions. The regularization of a numerical solution at the Lagrangian stage is performed by nonlinear correction of artificial viscosity. Regardless of the grid resolution, the artificial viscosity value tends to zero outside the zone of discontinuities and extremes in the solution. At Eulerian and final stages, primitive variables (density, velocity, and total energy) are first reconstructed by an additive combination of upwind and central approximations weighted by a flux limiter. Then numerical divergent fluxes are formed from them. In this case, discrete analogs of conservation laws are performed.

The analysis of dissipative properties of the method using known viscosity and flow limiters, as well as their linear combination, is performed. The resolution of the scheme and the quality of numerical solutions are demonstrated by examples of two-dimensional benchmarks: a gas flow around the step with Mach numbers 3, 10 and 20, the double Mach reflection of a strong shock wave, and the implosion problem. The influence of the scheme viscosity of the method on the numerical reproduction of a gases interface instability is studied. It is found that a decrease of the dissipation level in the implosion problem leads to the symmetric solution destruction and formation of a chaotic instability on the contact surface.

Numerical solutions are compared with the results of other authors obtained using higher-order approximation schemes: CABARET, HLLC (Harten Lax van Leer Contact), CFLFh (CFLF hybrid scheme), JT (centered scheme with limiter by Jiang and Tadmor), PPM (Piecewise Parabolic Method), WENO5 (weighted essentially non-oscillatory scheme), RKGD (Runge–Kutta Discontinuous Galerkin), hybrid weighted nonlinear schemes CCSSR-HW4 and CCSSR-HW6. The advantages of the hybrid large-particle method include extended possibilities for solving hyperbolic and mixed types of problems, a good ratio of dissipative and dispersive properties, a combination of algorithmic simplicity and high resolution in problems with complex shock-wave structure, both instability and vortex formation at interfaces.

Keywords: hybrid large-particle method, regulation of dissipative properties, shock waves, vortex structure, instability at interfaces

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2020, vol. 12, no. 4, pp. 757–772 (Russian).

Введение

Математическое моделирование применяется на ранних этапах проектирования и позволяет без проведения большого объема дорогостоящих экспериментов принимать рациональные решения в аэродинамике, струйных технологиях, при оценке аварийных ситуаций с ударными волнами. Течения газа со сложной структурой характеризуются многократными взаимодействиями скачков уплотнения, волн разрежения между собой и с твердыми стенками элементов конструкций. Наличие в потоке контактных разрывов приводит к развитию различных видов неустойчивости, вихревых структур и турбулентности.

Исторически первыми численными методами для газодинамических расчетов были предложены схемы первого порядка аппроксимации Годунова, Куранта–Изаксона–Риса, Лакса, Роу и др. Численные решения по этим схемам являются монотонными, без паразитных осцилляций, однако особенности решения (контактные разрывы и ударные волны) получают сильно сглаженными. Существенная схемная диссипация проявляется также в гладких областях. Поэтому для разрешения деталей течений сжимаемых газов со сложной структурой может потребоваться значительное количество узлов или контрольных объемов разностной сетки.

Уменьшение диссипативных и дисперсионных ошибок разностной задачи достигается повышением порядка точности. При этом возникает проблема монотонности численного решения, поскольку для линейного уравнения переноса доказано [Годунов, 1959], что линейные разностные схемы выше первого порядка не являются монотонными. Подавление осцилляций численного решения осуществляется несколькими способами [Куликовский и др., 2001]. Одним из них является введение в алгоритм линейной и квадратичной форм искусственной вязкости [von Neumann, Richtmyer, 1950]. Обоснование формулировки искусственной вязкости, вытекающей из законов сохранения на ударных волнах, приводится в [Куропатенко, 1966]. Исследованию и реализации в разностных схемах специальных диссипативных членов, фильтров, сглаживающих ядер посвящены работы [Engquist et al., 1989; Monaghan, 1992; Пинчуков, 1995]. Развитие идеи искусственной диссипации в многомерном случае связано с введением тензорного подхода, вытекающего из аналогии с тензором физических вязких напряжений уравнений Навье–Стокса [Schulz, 1964]. Обобщение этой методики с дополнительным включением искусственной теплопроводности в схемах типа Годунова для борьбы с «карбункул»-неустойчивостью рассмотрено в [Тагирова, Родионов, 2015]. Адаптивные алгоритмы «включения» искусственной вязкости в зависимости от локальных свойств численного решения изучены в [Chistensen, 1990; Попов, Фрязинов, 2010; Kurganov, Liu, 2012].

Другим эффективным подходом является идея гибридизации, изложенная в пионерской работе [Федоренко, 1962]. В зависимости от гладкости численного решения строится нелинейная разностная схема, которая меняет порядок аппроксимации. Такие схемы позволяют проводить сквозной расчет по алгоритму повышенного порядка точности в областях гладкости и использовать монотонную аппроксимацию первого порядка на разрывах. Для линейных и квазилинейных уравнений переноса построены алгоритмы с гладким переключением между схемами первого и второго порядка [Гольдин и др., 1965]. В работе [Harten, Zwas, 1972] предложена комбинация схем Лакса–Фридрихса и Лакса–Вендроффа. В дальнейших исследованиях использование гибридных алгоритмов в различных вариантах нашло широкое применение [Liu et al., 2015; Брагин, Рогов, 2016; Лобанов, Милов, 2018; Криксин, Тишкин, 2018].

Важным требованием к разностным схемам является универсальность — воспроизведение сложных ударно-волновых конфигураций с вихревыми структурами в широком диапазоне газодинамических параметров от дозвуковых до гиперзвуковых течений. С другой стороны, законы сохранения в ряде физически обоснованных задач, например динамики запыленного газа, относятся к уравнениям составного типа [Нигматулин, 1987]. В части области определения задачи

в зависимости от разности скоростей фаз уравнения являются гиперболическими, а в другой части характеристическое представление содержит мнимые компоненты [Hudson, Harris, 2006]. Использование схем типа Годунова [Toro, 2009], сеточно-характеристических методов [Магомедов, Холодов, 2017], алгоритма КАБАРЕ [Головизнин и др., 2013], комбинированного SPH-TVD-подхода [Храпов и др., 2011] в таких случаях может вызвать трудности в их реализации. Поэтому в этом смысле универсальности представляется целесообразной разработка схемы, имеющей возможность с высокой разрешающей способностью решать расширенные классы задач для законов сохранения гиперболического и смешанного эллиптически-гиперболического типа. Еще одной чертой универсальности численного метода обычно считают отсутствие каких-либо настроечных параметров. Вместе с тем исследования различных разностных схем и практика их применения показывают высокое качество решения для одних модельных задач и проблемы в других тестах. Приведем неполный перечень примеров: «карбункул»-неустойчивость для схем типа Годунова [Тагирова, Родионов, 2015] и схем с расщеплением потока Toro-Vazquez WENO-TV (Weighted Essentially Non-Oscillatory) [Смирнова, 2018], значительные дисперсионные ошибки в задаче с гиперзвуковым обтеканием ступеньки для схемы КАБАРЕ [Данилин, Соловьев, 2019], заметно осциллирующее решение в тесте с импульсным сжатием газа (Implosion problem) схемы WAFT (Weighted average flux by E. Toro) [Liska, Wendroff, 2003]. Поэтому отсутствие возможности регулирования численной диссипации разностной схемы не всегда может рассматриваться как очевидное преимущество численного метода, но даже сужает диапазон его эффективного применения. С другой стороны, управление соотношением дисперсионных и диссипативных свойств алгоритма требует затрат времени. Уменьшение трудоемкости достигается хорошим документированием применения метода для различных классов задач. Обсуждение указанного вопроса для метода с адаптивной искусственной вязкостью приводится в [Kurganov, Liu, 2012], где дается оценка снижения на 2 % временной эффективности с учетом оптимизации настроечного параметра.

В работах [Садин, 2016, 2017] предложена схема с настраиваемыми диссипативными свойствами второго порядка аппроксимации по пространству и первого по времени с расширенными возможностями решения течений сжимаемой среды, описываемой уравнениями движения гиперболического и смешанного типа, а также с высокой устойчивостью для жестких задач. Повышенная точность достигнута путем противопоточной реконструкции потоков и использования нелинейной искусственной вязкости с ограничителем, которая не понижает порядок аппроксимации на гладких решениях. В дальнейшем для повышения порядка точности схемы по времени использован двухшаговый TVD-метод (Total Variation Diminishing) Рунге–Кутты, а с целью снижения диссипативности алгоритма — гибридизация потоков в виде [Садин, 2018, 2019].

Обязательным требованием к любому предлагаемому численному методу является проверка его вычислительных свойств на представительной совокупности тестовых задач. Ранее гибридный метод крупных частиц тестировался на ряде «стандартных» одномерных и двумерных задач, имеющих точные автомодельные или надежные эталонные решения [Садин, Давидчук, 2019; Садин и др., 2019]. В настоящей работе изучается разрешающая способность гибридного метода крупных частиц на примерах течений сжимаемого однокомпонентного газа с ударными волнами и вихревыми структурами на контактных поверхностях. В отличие от предшествующих работ рассматриваются новые модельные задачи, оценивается чувствительность результатов расчета к уровню искусственной вязкости, обсуждаются возможности и трудоемкость настройки диссипативных свойств схемы, а также сопоставляется качество численных решений с другими методами.

1. Основные уравнения

Рассмотрим законы сохранения калорически совершенного газа в форме уравнений Эйлера:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \nabla_d \mathbf{G} + \nabla_d \mathbf{F} = 0, \tag{1}$$

$$\mathbf{q} = [\rho, \rho \mathbf{v}, \rho E]^T, \quad \mathbf{G} = [\rho v, \rho v \mathbf{v}, \rho E v]^T, \quad \mathbf{F} = [0, p, p \mathbf{v}]^T, \quad \nabla_d = \text{diag}(\nabla \cdot, \nabla, \nabla \cdot),$$

где ρ, \mathbf{v}, p, E — плотность, вектор скорости с компонентами u и v , давление, полная энергия газа единицы массы; $\mathbf{q}, \mathbf{G}, \mathbf{F}$ — консервативные, потоковые, градиентные и деформационные величины соответственно; t — время.

Замыкающее уравнение состояния $p = (\gamma - 1)\rho(E - \mathbf{v}^2/2)$, где γ — показатель адиабаты.

2. Конечно-объемная схема гибридного метода крупных частиц

Без ограничения общности запишем алгоритм гибридного метода крупных частиц с настраиваемыми диссипативными свойствами (CDP2 — Customizable Dissipative Properties) для одномерного случая. Задачи решаются на равномерной сетке с шагом h с центром ячейки x_i и гранями $x_{i\pm 1/2} = x_i \pm h/2$. Временной слой t^k помечается верхним индексом k , а шаг по времени обозначим как $\tau = t^{k+1} - t^k$.

Алгоритм состоит из шага «предиктор» с расщеплением на лагранжев (0), эйлеров и заключительный (1) этапы:

$$\mathbf{q}_i^{(0)} = \mathbf{q}_i^k - (\mathbf{F}_{i+1/2}^k - \mathbf{F}_{i-1/2}^k) \tau / h, \tag{2}$$

$$\mathbf{q}_i^{(1)} = \mathbf{q}_i^{(0)} - (\mathbf{G}_{i+1/2}^{(0)} - \mathbf{G}_{i-1/2}^{(0)}) \tau / h. \tag{3}$$

На лагранжевом этапе величины $\mathbf{F}_{i\pm 1/2}^k$, связанные с градиентом давления и мощностью деформации в единице объема, определяются как среднеарифметические в центрах примыкающих ячеек. Для обеспечения монотонности в схему вносится нелинейная скалярная добавка к давлению — искусственная вязкость с ограничителем $(1 - \psi_v) Q_{i\pm 1/2}^k$ [Садин, 2019]. Поскольку на гладких решениях ограничитель вязкости $\psi_v \rightarrow 1$, то вне зоны разрывов и экстремумов в решении сохраняется второй порядок аппроксимации по пространству.

На эйлеровом и заключительных этапах рассчитываются потоки массы $\widehat{M}_{i\pm 1/2}^{(0)} = \widehat{\rho}_{i\pm 1/2}^{(0)} \widehat{u}_{i\pm 1/2}^{(0)} \tau$, импульса $\widehat{u}_{i\pm 1/2}^{(0)} \widehat{M}_{i\pm 1/2}^{(0)}$ и энергии $\widehat{E}_{i\pm 1/2}^{(0)} \widehat{M}_{i\pm 1/2}^{(0)}$. Прimitives переменные $\varphi = \{\rho, u, E\}$, помеченные символом \wedge , реконструируются путем взвешенной ограничителем потоков ψ_f квазилинейной комбинации противопоточной и центральной аппроксимаций $\widehat{\varphi}_{i\pm 1/2} = (1 - \psi_f) \varphi_{i\pm 1/2}^{\text{Upwind}} + \psi_f \varphi_{i\pm 1/2}^{\text{Centered}}$ (см. [Садин, 2019]).

Далее используются известные ограничители [Hirsch, 1990; Fringer et al., 2005], представленные в таблице 1, где r — отношение разностей primitives переменных φ с учетом направления потока на соответствующих гранях ячейки (см. [Садин, 2019]).

Таблица 1. Ограничители вязкости и потоков

Название (аббревиатура)	Формула
Superbee (SB)	$\psi_{SB}(r) = \max[0, \min(2r, 1), \min(r, 2)]$
Van Leer (VL)	$\psi_{VL}(r) = (r + r) / (1 + r)$
Minmod (MM)	$\psi_{MM}(r) = \begin{cases} \min(r, 1), & r \geq 0, \\ 0 & r < 0. \end{cases}$

Для расширения возможности регулирования диссипативных свойств схемы рассмотрим также параметрическое семейство ограничителей вида $\psi_{\beta LIM1} = \beta\psi_{LIM1} + (1 - \beta)\psi_{LIM2}$ (где ψ_{LIM1} , ψ_{LIM2} — известные ограничители и $0 \leq \beta \leq 1$ — параметр).

Используя описанную нелинейную реконструкцию градиентных, деформационных $\mathbf{F}_{i\pm 1/2}^{(1)}$ и конвективных величин $\mathbf{G}_{i\pm 1/2}^{(2)}$ на гранях ячеек, на шаге «корректор» определяются окончательные значения искомым функций с суммарной аппроксимацией $O(h^2 + \tau^2)$:

$$\mathbf{q}_i^{(2)} = 0.5(\mathbf{q}_i^k + \mathbf{q}_i^{(1)}) - 0.5(\mathbf{F}_{i+1/2}^{(1)} - \mathbf{F}_{i-1/2}^{(1)})\tau/h, \quad (4)$$

$$\mathbf{q}_i^{k+1} = \mathbf{q}_i^{(2)} - 0.5(\mathbf{G}_{i+1/2}^{(2)} - \mathbf{G}_{i-1/2}^{(2)})\tau/h. \quad (5)$$

Шаг по времени — переменный, определяется из условия Куранта — Фридрихса — Леви:

$$\tau^k = \text{CFL} \frac{h}{\max_{\forall i} (|v_i^k| + a_i^k)} \text{ при } \text{CFL} < 1, \quad (6)$$

где CFL — фиксированное число Куранта (рекомендуемое значение $\text{CFL} \leq 0.5$), a_i^k — скорость звука в точке (x_i, t^k) .

3. Решение тестовых задач

Тестовые задачи для сжимаемого однокомпонентного газа решаются в безразмерном виде с показателем адиабаты $\gamma = 7/5$.

Тест с гиперзвуковым потоком в канале со ступенькой. В работе [Данилин, Соловьев, 2019] предложена модификация известного теста обтекания ступеньки сверхзвуковым потоком газа с числом Маха 3 (A Mach 3 wind tunnel with a step) [Woodward, Colella, 1984]. Задача решается при более «жестких» условиях гиперзвукового течения газа с числами Маха $M = 10$ и 20 , что обостряет традиционные вычислительные проблемы сингулярной точки (звукового перехода в окрестности угла ступеньки), образования численного пограничного слоя на верхней поверхности ступеньки и фиктивной ножки Маха, «карбункул»-неустойчивости для некоторых схем. Постановка задачи соответствует [Woodward, Colella, 1984; Данилин, Соловьев, 2019] с начальными условиями $(\rho, u, v, p) = (1.4, M, 0, 1)$. Размеры канала равны 1 в поперечном и 3 в продольном направлениях. Ступенька высотой 0.2 расположена от точки 0.6 до конца канала. Граничные условия заданы в виде отражения на твердых стенках канала и ступеньки, входные (слева) условия тождественны начальным, выходные — мягкие краевые условия свободного вытекания.

Задача решалась с числом Куранта $\text{CFL} = 0.4$, как и в цитируемых работах до момента времени $t = 4$. Следует отметить, что к этому моменту времени течение еще не является стационарным [Woodward, Colella, 1984]. Для корректности сравнения с [Данилин, Соловьев, 2019] использовалась сетка 240×80 ячеек, а для проверки сходимости дискретизация расчетной области — 480×160 ячеек. Расчет классической задачи с числом Маха $M = 3$ выполнялся без настройки, с «документированными» ограничителями вязкости Van Leer $\psi_{v,VL}$ и потоков Minmod $\psi_{f,MM}$ (рис. 1, *a, d*). При решении задачи с гиперзвуковым потоком при $M = 10$ и 20 с указанными параметрами с течением времени (примерно через 0.5) отмечается зарождение неустойчивости за ударной волной в окрестности угла ступеньки. Поэтому следующий и окончательный расчет выполнялся с повышенным уровнем диссипативности схемы путем использования ограничителя потоков $0.5\psi_{f,MM}$ (рис. 1, *b, c* и *e, f*). В сравнении со схемой КАБАРЕ из [Данилин, Соловьев, 2019] (рис. 1, *g-i*) гибридный метод крупных частиц демонстрирует монотонное решение (рис. 1, *a-f*), корректный переход через звуковую поверхность в волне разрежения в окрестности угловой точки ступеньки, с отсутствием численного пограничного слоя и

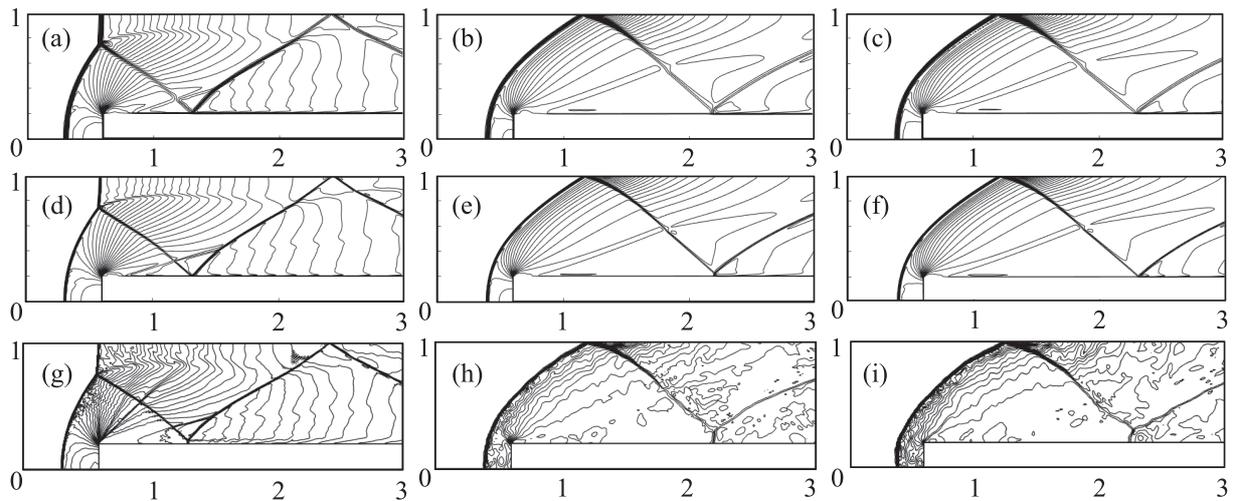


Рис. 1. Тест в канале со ступенькой, $t = 4$. Потoki газа с числами Маха: $M = 3$ (a, d, g), $M = 10$ (b, e, h), $M = 20$ (c, f, i). Расчет гибридным методом крупных частиц ($CFL = 0.4$) на сетке 240×80 ячеек (a–c), на сетке 480×160 ячеек (d–f), по схеме КАБАРЕ ($CFL = 0.45$) из [Данилин, Соловьёв, 2019] на сетке 240×80 (g–i). Плотность нанесена в виде 30 контурных линий плотностью от 0 до 6.7

фиктивной ножки Маха. Контрольный расчет с уменьшением шага сетки 480×160 подтверждает сходимость (рис. 1, d–f).

Для разрешения вычислительной проблемы — образования фиктивной ножки Маха вследствие численного пограничного слоя на верхней поверхности ступеньки — использован предложенный в [Садин и др., 2019] подход. В зоне угловой точки локально изменялась нелинейная коррекция схемы с сохранением естественных условий отражения в отличие от постановки специальных локальных граничных условий стационарного изоэнтропического расширения [Woodward, Colella, 1984]. Для чистоты вычислительного эксперимента проведены также расчеты по схеме CDP2 со специальными краевыми условиями [Woodward, Colella, 1984]. Сравнение результатов для задачи на установление не выявило существенных различий. Вместе с тем для неустановившихся течений корректность постановки стационарных условий на границе является дискуссионным вопросом.

На примере этой модельной задачи поясним относительную трудоемкость операции настройки схемы. Предварительные (тестовые) расчеты для определения настроечных параметров (ψ_f и ψ_v) выполняются на грубой сетке, например 120×40 ячеек. Требуется решить задачу обтекания ступеньки для различных чисел Маха на подробных сетках 960×320 и $960 \times 320 \times 320$. Очевидно, что относительные временные затраты одного тестового расчета составляют $(1/8)^3 = 1/512$ и $(1/8)^4 = 1/4096$. При варьировании 3 значений ограничителей вязкости и потоков потребуется 9 вычислительных экспериментов. Следовательно, цена решения возрастает менее чем на 2% для двумерной и на 0.22% для трехмерной задачи. Следует также учитывать, что рассматриваемые ограничители изменяют уровень диссипативности схемы в порядке возрастания: SB, VL, MM.

Расчеты на подробных сетках [Liu et al., 2015] выявляют развитие неустойчивости Кельвина–Гельмгольца и образование вихревой дорожки на контактной поверхности. Возможности гибридного метода крупных частиц по численному воспроизведению этого эффекта демонстрируются на рис. 2 в сравнении со схемой WENO5 и гибридной взвешенной нелинейной интерполяцией четвертого (CCSSR-HW4) и шестого порядка аппроксимации (CCSSR-HW6) [Liu et al., 2015] на одинаковых сетках 960×320 ячеек. Здесь представлены результаты расчетов гибридным методом крупных частиц с различными вариантами нелинейной коррекции. Вариант с базовыми

ограничителями $\psi_{v,VL}$ и $\psi_{f,MM}$ (рис. 2, a), с уменьшением уровня искусственной вязкости $\psi_{v,SB}$ и неизменным ограничителем потока $\psi_{f,MM}$ (рис. 2, b), вариант с последовательным снижением диссипативности схемы путем использования параметрического ограничителя потоков $\psi_{f,0.5VL} = 0.5\psi_{v,VL} + 0.5\psi_{v,MM}$ с сохранением $\psi_{v,SB}$ (рис. 2, c). Дальнейшее уменьшение численной вязкости в схеме CDP2, например при $\psi_{v,VL}$ и $\psi_{f,SB}$, приводит к повышению вихреразрешающей способности, но и к заметному увеличению дисперсионных ошибок в виде осцилляций изолиний плотности газа. Варианты методов на рис. 2, b и рис. 2, c сопоставимы с цитируемыми схемами (нижний ряд рис. 2) по возможности численного воспроизведения вихревой структуры.

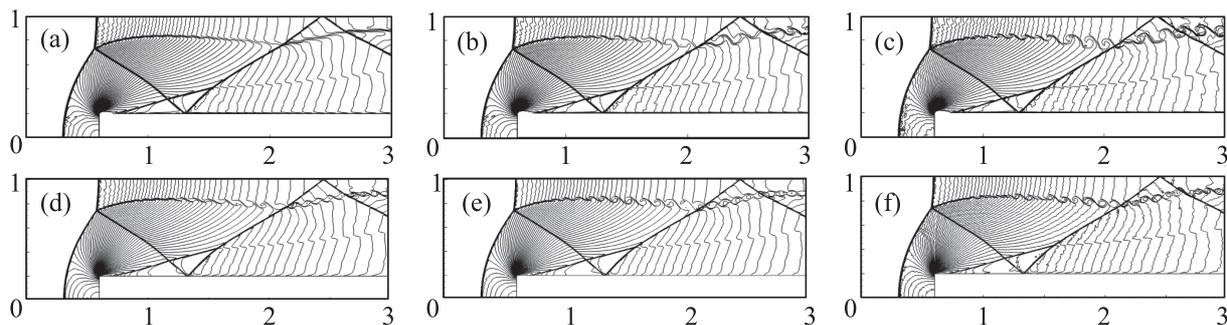


Рис. 2. Тест со сверхзвуковым потоком ($M = 3$) в канале со ступенькой, $t = 4$. Расчет гибридным методом крупных частиц ($CFL = 0.4$) с нелинейной коррекцией $\psi_{v,VL}$ и $\psi_{f,MM}$ (a), $\psi_{v,SB}$ и $\psi_{f,MM}$ (b), $\psi_{v,SB}$ и $\psi_{f,0.5VL}$ (c) в сравнении с WENO5 (d), CCSSR-HW4 (e), CCSSR-HW6 (f) из [Liu et al., 2015] ($CFL = 0.5$). Показаны 60 изолиний плотности от 0.2568 до 6.607

Тест с двойным маховским отражением сильной ударной волны (Double Mach reflection of a strong shock) [Woodward, Colella, 1984]. Ударная волна с числом Маха 10 в начальный момент времени расположена под углом $\pi/3$ к горизонтальной оси и пересекает ее в точке $1/6$. Перед волной — невозмущенный воздух со следующими параметрами: плотность $\rho = 1.4$, давление $p = 1$, скорость с компонентами $u = v = 0$. Расчетная область задачи представляет собой прямоугольник $[0, 4] \times [0, 1]$. Нижние граничные условия при $y = 0$ на отрезке $[0, 1/6]$ заданы в виде свободного вытекания, а в остальной части $[1/6, 4]$ — условия отражения. Краевые условия слева и сверху за ударной волной установлены из соотношений Рэнкина–Гюгонно, а справа при $x = 4$ и сверху до скачка уплотнения все градиенты заданы равными нулю. Время окончания расчета $t = 0.2$.

В данном тесте выполнено исследование влияния диссипативности гибридного метода крупных частиц при использовании различных ограничителей вязкости и потоков. Численные решения получены при числе Куранта $CFL = 0.4$ на сетке 1920×480 . Результаты представлены в виде линий равных плотностей газа на рис. 3 в области и фрагменты (приближения) на рис. 4.

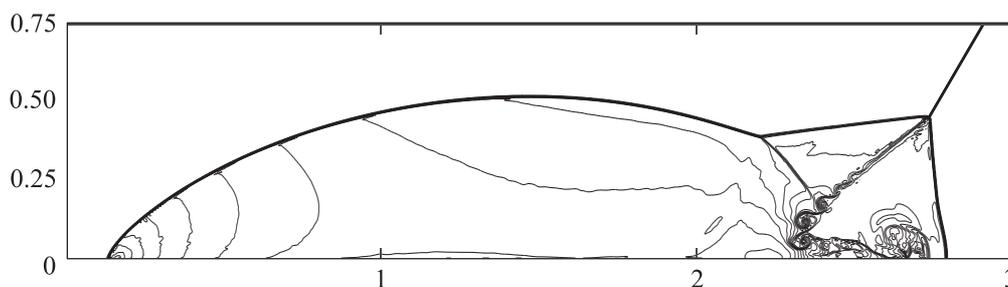


Рис. 3. Тест с двойным маховским отражением, $t = 0.2$. Расчет по схеме CDP2 ($\psi_{v,SB}$, $\psi_{f,0.5VL}$) на сетке $1/480$. Плотность нанесена в виде 30 контурных линий плотности от 1.5 до 22.9705

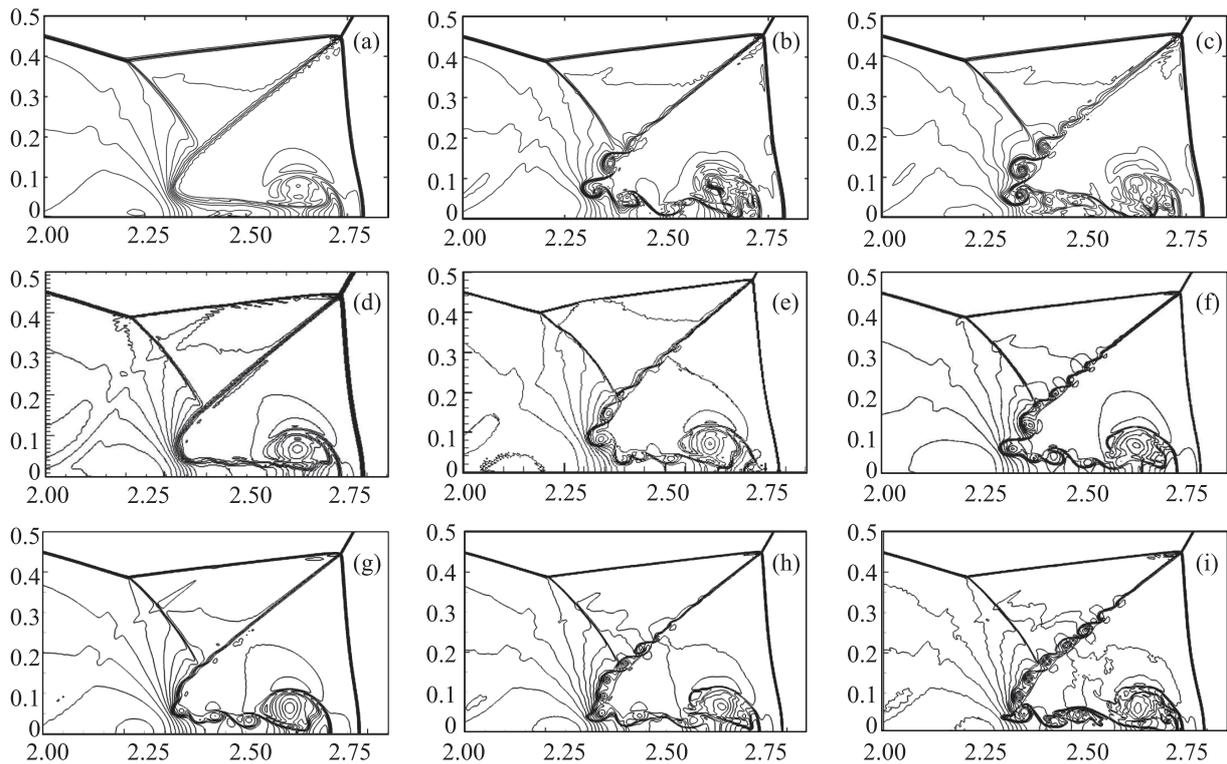


Рис. 4. Тест с двойным маховским отражением, $t = 0.2$. Сопоставление расчетов различными методами на сетке $1/480$: схема CDP2 с параметрами $(\psi_{v,VL}, \psi_{f,MM})$ (a), $(\psi_{v,0.5SB}, \psi_{f,VL})$ (b), $(\psi_{v,SB}, \psi_{f,0.5VL})$ (c), HLLC из [Balsara, 2012] (d), КАБАРЕ из [Головизнин и др., 2013b] (e), RKDG из [Cockburn, Shu, 2001] (f), WENO5 (g), CCSSR-HW4 (h), CCSSR-HW6 (i) из [Liu et al., 2015]. Фрагмент расчетной области с плотностью в виде 30 контурных линий от 1.5 до 22.9705

Для прямого сопоставления разрешающей способности вариантов гибридного метода крупных частиц с ограничителями потоков и вязкости $\psi_{f,MM}, \psi_{v,VL}$ (a), $\psi_{f,VL}, \psi_{v,0.5SB} = 0.5\psi_{v,SB} + 0.5\psi_{v,VL}$ (b) и $\psi_{f,0.5VL} = 0.5\psi_{f,VL} + 0.5\psi_{f,MM}, \psi_{v,SB}$ (c) показаны результаты решения задачи с двойным маховским отражением по другим схемам: HLLC (d) из [Balsara, 2012], КАБАРЕ (e) из [Головизнин и др., 2013b], RKGD (f) из [Cockburn, Shu, 2001], WENO5 (g), CCSSR-HW4 (h), CCSSR-HW6 (i) из [Liu et al., 2015].

Положения элементов ударно-волновой конфигурации (тройных точек, ножки Маха, контактных поверхностей) для всех численных методов графически совпадают, за исключением расчета по схеме КАБАРЕ с завышением тройных точек сопряжения разрывов (см. рис. 3, e). По качественному критерию сравнения результатов расчета [Liu et al., 2015] (интенсивность вихреобразования на контактной поверхности) схемы CDP2 с базовыми настройками (a), HLLC (d) и WENO5 (g) обладают наибольшим уровнем численной вязкости, а наименьшим — CCSSR-HW6 (i). Следует отметить, что в последнем случае наблюдаются заметные дисперсионные ошибки в виде высокочастотных осцилляций линий уровня плотности. Для гибридного метода крупных частиц уменьшение уровня диссипативности схемы приводит к формированию ярко выраженной вихревой структуры (рис. 3, b–c).

Тест с импульсным сжатием газа (Implosion problem). Задача со сходящейся ударной волной была предложена в [Hui et al., 1999] и изучалась применительно к различным разностным схемам [Liska, Wendroff, 2003]. Квадрат $(x, y) \in (0, 0.3) \times (0, 0.3)$ с непроницаемыми стенками разделен на треугольную область с угловыми точками $(0, 0), (0, 0.15), (0.15, 0)$, заполненную в начальный момент времени газом с плотностью $\rho_i = 0.125$ и давлением $p_i = 0.14$. Снаружи нахо-

дится газ повышенного давления с параметрами $\rho_o = p_o = 1$. Вначале газ неподвижен и скорости равны нулю. Граничные условия отражения заданы на всех четырех стенках.

Данный тест является чувствительным к уровню численной вязкости разностной схемы, особенно на поздних временных интервалах при развитии физической неустойчивости на контактной границе с образованием грибовидной структуры. На этот факт обращено внимание в работе [Попов, Фрязинов, 2010], где попытка численно воспроизвести вихревое течение даже на подробных сетках не привела к успеху. Напротив, излишне малая и нерегулируемая численная диссипация разностной схемы вызывает паразитные осцилляции и неудовлетворительное качество численного решения (например, схема WAFT — Weighted average flux by E. Toro из [Liska, Wendroff, 2003]). Еще одна проблема дискуссионного характера связана с нарушением симметрии течения.

Изучим диссипативные свойства гибридного метода крупных частиц в зависимости от нелинейной коррекции как искусственной вязкости, так и конвективных потоков. Используем следующие варианты метода: CDP2-A с ограничителями $\psi_{f,MM}$ и $\psi_{v,VL}$, CDP2-B — $\psi_{f,VL}$ и $\psi_{v,VL}$, CDP2-C — $\psi_{f,SB}$ и $\psi_{v,VL}$, CDP2-D — $\psi_{f,VL}$ и $\psi_{v,0.5SB} = 0.5\psi_{v,SB} + 0.5\psi_{v,VL}$. Как и в цитированных работах, задача решалась на сетке 400×400 . Схема устойчива, и решение монотонно при выполнении условия $CFL \leq 0.5$, вместе с тем из соображений точности число Куранта задано $CFL = 0.2$. Результаты моделирования представлены для начальной ($t_1 = 0.045$) и поздней ($t_4 = 2.5$) стадий [Liska, Wendroff, 2003]. Кроме того, для более детального исследования неустойчивости рассмотрены также промежуточные этапы явления при $t_2 = 1$ и $t_3 = 1.4$.

После распада разрыва на наклонной поверхности начального раздела газов образуются сходящаяся к началу координат ударная волна и волна разрежения в обратном направлении. Вначале представим результаты расчета гибридным методом крупных частиц с различными вариантами нелинейной коррекции схемы в момент времени $t_1 = 0.045$ (рис. 5, *a-d*, цветная версия рисунка доступна в электронной версии статьи на сайте журнала). Для сравнения в нижнем ряду приведены также результаты численного моделирования с использованием схем из [Liska, Wendroff, 2003]: CFLFh (рис. 5, *e*), JT (рис. 5, *f*), WENO5 (рис. 5, *g*), PPM (рис. 5, *h*).

Начальная стадия распада разрыва и схождения ударной волны хорошо численно воспроизводится гибридным методом крупных частиц и согласуется с расчетами по другим схемам. Давление на контактном разрыве непрерывно. Плотность претерпевает скачок, который численно сглаживается на несколько ячеек с лучшим его разрешением методом CDP2-C и схемой PPM (рис. 5, *c* и рис. 5, *h* соответственно). С течением времени возникают многократные взаимодействия ударной волны со стенками и контактными разрывом. Граница раздела газов искривляется, и формируется струйное вихревое течение, направленное по диагонали. Результаты расчетов на момент времени $t_4 = 2.5$ показаны на рис. 6 (верхний ряд — рассматриваемые варианты гибридного метода крупных частиц, нижний ряд — цитируемые схемы). Ограничители наделяют схему CDP2 различным уровнем численной диссипации, которая существенно влияет на численное решение (рис. 6, *a-d*). Интересно отметить, что разные варианты нелинейной коррекции вязкости и потоков предлагаемого метода численно воспроизводят качественно близкие вихревые структуры, полученные с использованием других разностных схем (рис. 6, *e-h*) из [Liska, Wendroff, 2003].

Уменьшение диссипативности гибридного метода крупных частиц путем ограничения потоков Van Leer и параметрической коррекции искусственной вязкости ($\psi_{v,0.5SB}$) приводит к нарушению симметрии в развитии физической неустойчивости и вихреобразования на контактной поверхности (рис. 6, *d*). Этот эффект наблюдается для схем WAFT, VH1 (Virginia Hydrodynamics 1) и PPM из [Liska, Wendroff, 2003]. Авторы объясняют указанный характер течения особенностями пространственного расщепления алгоритмов PPM и VH1, а также используемыми ограничителями в методе WAFT.

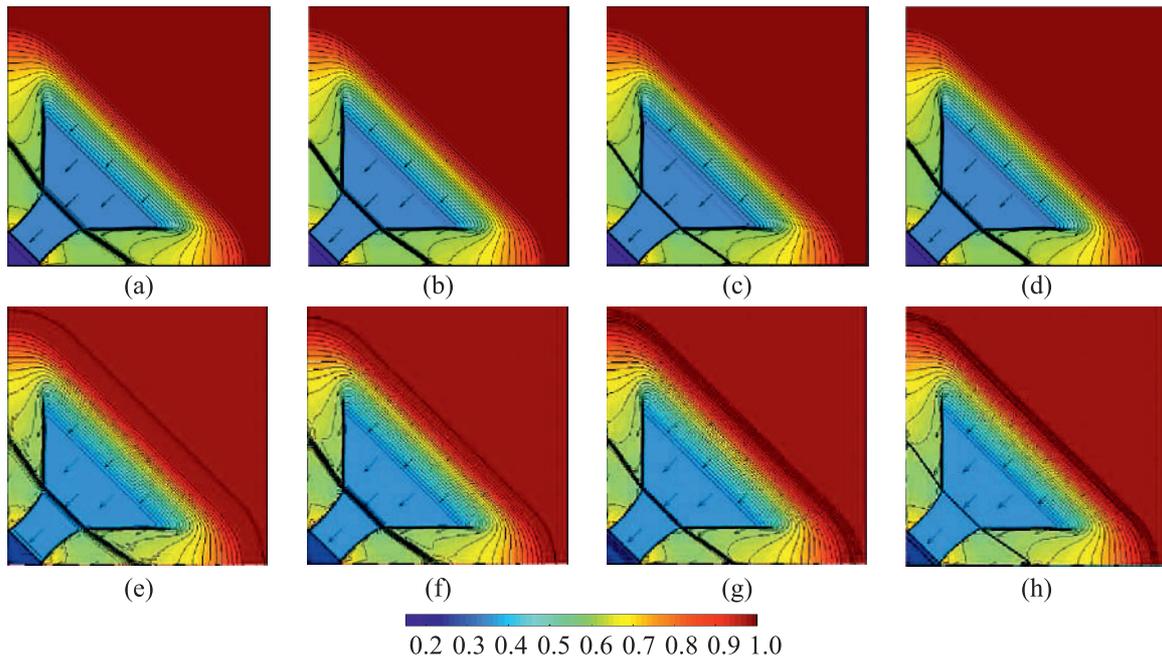


Рис. 5. Тест с импульсным сжатием газа, начальная стадия ($t_1 = 0.045$). Сопоставление расчетов различными методами на сетке 400×400 : (a–d) схемы CDP2-A, CDP2-B, CDP2-C, CDP2-D соответственно; (e) CFLFh, (f) JT, (g) WENO5, (h) PPM из [Liska, Wendroff, 2003]. Фрагмент расчетной области $(0, 0.22) \times (0, 0.22)$: плотность в виде 36 контурных линий от 1.25 до 1, давление — в непрерывной цветовой шкале, векторы скоростей — стрелки

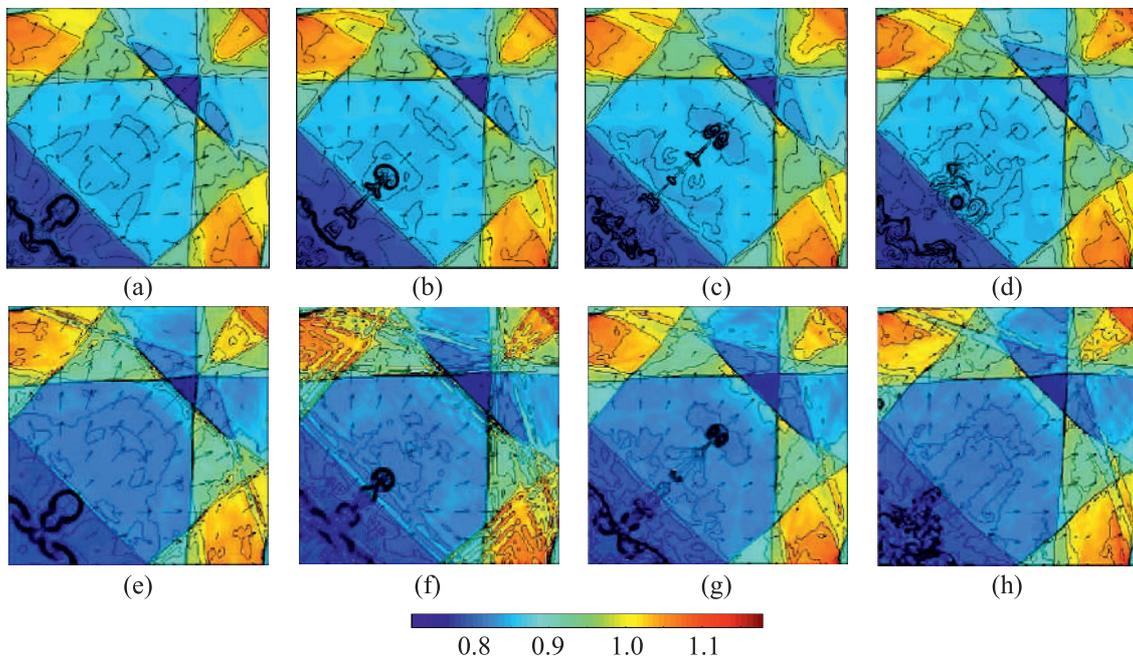


Рис. 6. Тест с импульсным сжатием газа, поздняя стадия ($t_4 = 2.5$). Сопоставление расчетов различными методами на сетке 400×400 : (a–d) схемы CDP2-A, CDP2-B, CDP2-C, CDP2-D соответственно; (e) CFLFh, (f) JT, (g) WENO5, (h) PPM из [Liska, Wendroff, 2003]. Плотность в виде 31 контурной линии от 0.35 до 1.1, давление — в непрерывной цветовой шкале, векторы скоростей — стрелки

На рис. 7 для последовательных моментов времени ($t_1 = 0.045$, $t_2 = 1$, $t_3 = 1.4$, $t_4 = 2.5$) представлены численные решения теста, полученные гибридным методом крупных частиц CDP2-B на сетках различного разрешения. Вихревая структура на сетке 400×400 (верхний ряд) является симметричной относительно диагонали квадрата.

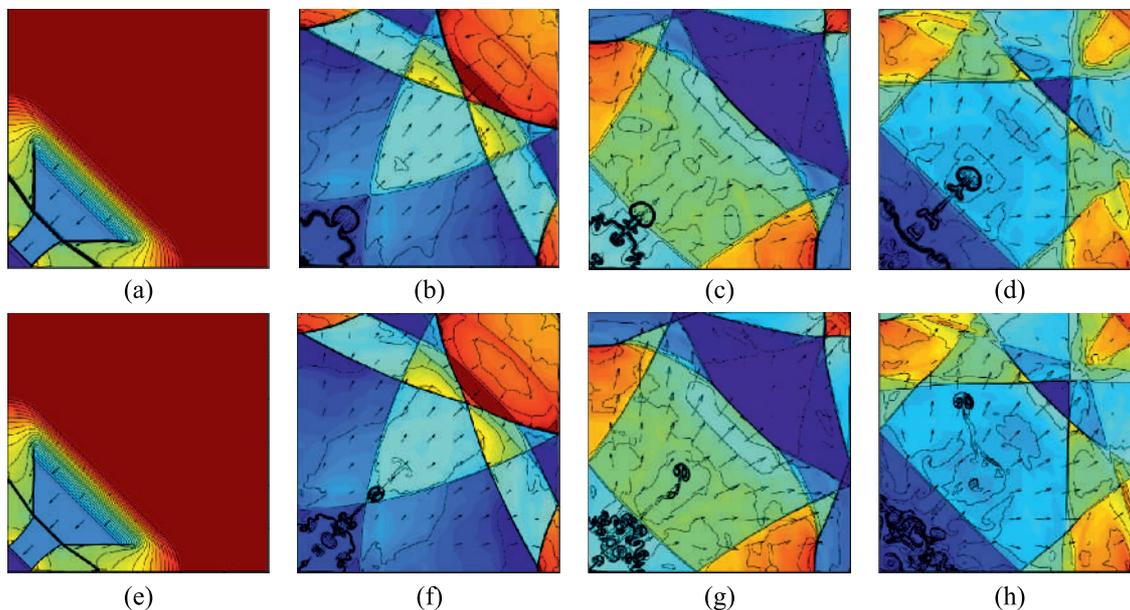


Рис. 7. Тест с импульсным сжатием газа, результаты расчета в последовательные моменты времени (слева направо: $t_1 = 0.045$, $t_2 = 1$, $t_3 = 1.4$, $t_4 = 2.5$). Верхний ряд — CDP2-B на сетке 400×400 , нижний ряд — CDP2-B на сетке 800×800 . Плотность, давление и скорость приведены в соответствующих масштабах (см. рис. 4 и 5)

В случае более подробной дискретизации расчетной области (800×800 ячеек), что приводит к уменьшению численной диссипации с порядком $O(h^2)$, симметрия течения для фиксированной схемы CDP2-B нарушается к моменту времени $t_3 = 1.4$. В дальнейшем ($t_4 = 2.5$) наблюдается развитие хаотической неустойчивости контактной границы. Систематические расчеты с использованием других вариантов нелинейной коррекции схемы CDP2 на различных сетках подтверждают разрушение симметричного решения задачи с уменьшением численной вязкости.

Заключение

Гибридный метод крупных частиц (CDP2) относится к алгоритмам сквозного расчета разрывов, имеет второй порядок аппроксимации по пространству и времени на гладких решениях. Схема обладает хорошим соотношением диссипативных и дисперсионных свойств. Важное преимущество метода над известными схемами, опирающимися на характеристическое представление законов сохранения, заключается в расширении класса задач с уравнениями как гиперболического, так и смешанного типа с мнимыми компонентами характеристик. Гибридный метод крупных частиц обладает однородностью и не требует разработки специальных алгоритмов для разрешения звуковых точек, что продемонстрировано на модельной задаче обтекания ступеньки с различными числами Маха с переходом через звуковую линию от дозвукового к сверхзвуковому течению. Схема CDP2 успешно справляется с традиционно сложными вычислительными проблемами. Систематические расчеты подтвердили отсутствие численных дефектов, таких как образование искусственного пограничного слоя и фиктивной ножки Маха, возникновение

ударных волн разрежения, «карбункул»-неустойчивости на гиперзвуковых режимах обтекания. Изучены возможности регулирования диссипативных свойств метода с использованием линейной комбинации ограничителей для получения численного решения с высоким разрешением ударно-волновой и вихревой структуры течений сжимаемых газов. Обсужден вопрос трудоемкости настройки. Оценка увеличения временных затрат на примере задачи обтекания ступеньки высокоскоростным потоком газа не превышает 2%. Детально изучена задача со сжатием ударной волны и развитием физической неустойчивости на контактной границе. Установлены эффект разрушения симметричного решения и развитие хаотической неустойчивости границы раздела газов при уменьшении численной вязкости дискретной задачи. Позитивные свойства гибридного метода крупных частиц могут быть полезными для решения структурно сложных течений как «чистого» газа, так и многофазных сред.

Список литературы (References)

- Брагин М. Д., Рогов Б. В.* Гибридные бикомпактные схемы с минимальной диссипацией для уравнений гиперболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2016. — Т. 56, № 6. — С. 958–972.
Bragin M. D., Rogov B. V. Minimal dissipation hybrid bcompact schemes for hyperbolic equations // Comput. Math. Math. Phys. — 2016. — Vol. 56, No. 6. — P. 947–961. (Original Russian paper: *Bragin M. D., Rogov B. V.* Gibridnye bikompaktnye skhemy s minimal'noj dissipaciej dlya uravnenij giperbolicheskogo tipa // Comput. Math. Math. Phys. — 2016. — Vol. 56, No. 6. — P. 958–972.)
- Годунов С. К.* Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Матем. сб. — 1959. — Т. 47 (89), вып. 3. — С. 271–306.
Godunov S. K. Raznostnyi metod chislenного rascheta razryvnyh reshenii uravnenii gidrodinamiki [A difference scheme for numerical solution of discontinuous solution of hydrodynamic equations] // Math. Sbornik. — 1959. — Vol. 47 (89), No. 3. — P. 271–306 (in Russian).
- Головизнин В. М., Зайцев М. А., Карабасов С. А., Короткин И. А.* Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов. — М.: Издательство Московского университета, 2013а. — 472 с.
Goloviznin V. M., Zaicev M. A., Karabasov S. A., Korotkin I. A. Novye algoritmy vychislitel'noj gidrodinamiki dlya mnogoprocessornyh vychislitel'nyh kompleksov [New computational fluid dynamics algorithms for multiprocessor computing systems]. — Moscow: Publishing house of Moscow University, 1987. — 472 p. (in Russian).
- Головизнин В. М., Карабасов С. А., Кондаков В. Г.* Обобщение схемы КАБАРЕ на двумерные ортогональные расчетные сетки // Матем. моделирование. — 2013б. — Т. 25, № 7. — С. 103–136.
Goloviznin V. M., Karabasov S. A., Kondakov V. G. Generalization of the CABARET scheme to two-dimensional orthogonal computational grids // Math. Models Comput. Simul. — 2014. — Vol. 6. — P. 56–79. (Original Russian paper: *Goloviznin V. M., Karabasov S. A., Kondakov V. G.* Obobshchenie skhemy KABARE na dvumernye ortogonal'nye raschetnye setki // Math. Models Comput. Simul. — 2013. — Vol. 25, No. 7. — P. 103–136.)
- Гольдин В. Я., Калиткин Н. Н., Шишова Т. В.* Нелинейные разностные схемы для гиперболических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1965. — Т. 5, № 5. — С. 938–944.
Gol'din V. Ya., Kalitkin N. N., Shishova T. V. Non-linear difference schemes for hyperbolic equations // Comput. Math. Math. Phys. — 1965. — Vol. 5, No. 5. — P. 229–239. (Original Russian paper: *Gol'din V. Ya., Kalitkin N. N., Shishova T. V.* Nelinejnye raznostnye skhemy dlya giperbolicheskikh uravnenij // Comput. Math. Math. Phys. — 1965. — Vol. 5, No. 5. — P. 938–944.)
- Данилин А. В., Соловьёв А. В.* Модификация схемы КАБАРЕ для разрешения звуковых точек в газовых течениях // Выч. мет. программирование. — 2019. — Т. 20, вып. 4. — С. 481–488.
Danilin A. V., Solov'ev A. V. Modifikaciya skhemy kabare dlya razresheniya zvukovyh toчек v gazovyh techeniyah [A modification of the CABARET scheme for resolving the sound points in gas flows] // Vychisl. Metody Programm. — 2019. — Vol. 20, Iss. 4. — P. 481–488 (in Russian).
- Криксин Ю. А., Тишкин В. Ф.* Гибридный подход к решению одномерных уравнений газовой динамики // Матем. моделирование. — 2018. — Т. 30, № 8. — С. 17–31.
Kriksin Yu. A., Tishkin V. F. Gibridnyj podhod k resheniyu odnomernyh uravnenij gazovoj dinamiki [Hybrid approach to solving single-dimensional gas dynamics equations] // Matem. Mod. — 2018. — Vol. 30, No. 8. — P. 17–31 (in Russian).

- Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. — М.: Физматлит, 2001. — 608 с.
Kulikovskii A. G., Pogorelov N. V., Semenov A. Yu. Matematicheskie voprosy chislennogo resheniya giperbolicheskikh system uravnenii [Mathematical aspects of numerical solution of hyperbolic systems]. — Moscow: Fizmatlit, 2001. — 608 p. (in Russian).
- Куропатенко В. Ф.* О разностных методах для уравнений газовой динамики // Тр. Матем. ин-та АН СССР. — 1966. — Т. 74. — С. 107–137.
Kuropatenko V. F. O raznostnykh metodah dlya uravnenij gazovoj dinamiki [Difference methods for solutions of problems of mathematical physics] // Part 1. Collection of articles, Trudy Mat. Inst. Steklov. — 1966. — Vol. 74. — P. 107–137 (in Russian).
- Лобанов А. И., Миров Ф. Х.* Гибридная разностная схема с обобщенным условием аппроксимации. Анализ в пространстве неопределенных коэффициентов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2018. — Т. 58, № 8. — С. 73–82.
Lobanov A. I., Mirov F. Kh. A hybrid difference scheme under generalized approximation condition in the space of undetermined coefficients // Comput. Math. Math. Phys. — 2018. — Vol. 58, No. 8. — P. 1270–1279. (Original Russian paper: *Lobanov A. I., Mirov F. Kh.* Gibridnaya raznostnaya skhema s obobshchennym usloviem approksimacii. Analiz v prostranstve neopredelennykh koeffitsientov // Comput. Math. Math. Phys. — 2018. — Vol. 58, No. 8. — P. 73–82.)
- Магомедов К. М., Холодов А. С.* Сеточно-характеристические численные методы. 2-е изд. — М.: Юрайт, 2017. — 313 с.
Magomedov K. M., Kholodov A. S. Setochno-harakteristicheskie chislennye metody [Grid-and-characteristics numerical methods]. 2nd edition. — Moscow: Yurait. — 313 p. (in Russian).
- Нигматулин Р. И.* Динамика многофазных сред. Ч. 1, 2. — М.: Наука, 1987.
Nigmatulin R. I. Dinamika mnogofaznykh sred [Dynamics of multiphase media]. Ch. 1, 2. — Moscow: Nauka, 1987 (in Russian).
- Пинчуков В. И.* Нелинейные сеточные фильтры и монотонизация симметричных схем повышенной точности // Матем. моделирование. — 1995. — Т. 7, № 3. — С. 75–86.
Pinchukov V. I. Nelinejnye setochnye fil'try i monotonizaciya simmetrichnykh skhem povyshennoj tochnosti [Nonlinear difference filters and high accuracy symmetrical schemes monotonization] // Matem. Mod. — 1995. — Vol. 7, No. 3. — P. 75–86 (in Russian).
- Попов И. В., Фрязинов И. В.* О новом выборе адаптивной искусственной вязкости // Матем. моделирование. — 2010. — Т. 22, № 12. — С. 23–32.
Popov I. V., Fryazinov I. V. On the new choice of adaptive artificial viscosity // Math Models Comput. Simul. — 2011. — Vol. 3. — P. 411–418. (Original Russian paper: *Popov I. V., Fryazinov I. V.* O novom vybore adaptivnoj iskusstvennoj vyazkosti // Math. Models Comput. Simul. — 2010. — Vol. 22, No. 12. — P. 23–32.)
- Садин Д. В.* TVD-схема для жестких задач волновой динамики гетерогенных сред негиперболического неконсервативного типа // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2016. — Т. 56, № 12. — С. 2098–2109.
Sadin D. V. TVD scheme for stiff problems of wave dynamics of heterogeneous media of nonhyperbolic nonconservative type // Comput. Math. and Math. Phys. — 2016. — Vol. 56. — P. 2068–2078. (Original Russian paper: *Sadin D. V.* TVD-skhema dlya zhestkikh zadach volnovoј dinamiki geterogennykh sred negiperbolicheskogo nekonservativnogo tipa // Comput. Math. and Math. Phys. — 2016. — Vol. 56, No. 12. — P. 2098–2109.)
- Садин Д. В.* Схемы с настраиваемыми диссипативными свойствами для численного моделирования течений газа и газовзвесей // Матем. моделирование. — 2017. — Т. 29, № 12. — С. 89–104.
Sadin D. V. Skhemy s nastraivaemymi dissipativnymi svojstvami dlya chislennogo modelirovaniya techenij gaza i gazovzvesej [Schemes with Customizable Dissipative Properties as Applied to Gas-Suspensions Flow Simulation] // Mat. Model. — 2017. — Vol. 29, No. 12. — P. 89–104 (in Russian).
- Садин Д. В.* Применение схемы с настраиваемыми диссипативными свойствами к расчету течений газа с развитием неустойчивости на контактной границе // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. — 2018. — Т. 18, № 1. — С. 153–157.
Sadin D. V. Primenenie skhemy s nastraivaemymi dissipativnymi svojstvami k raschetu techenij gaza s razvitiem neustojchivosti na kontaktnoj granice [Application of Scheme with Customizable Dissipative Properties for Gas Flow Calculation with Interface Instability Evolution] // Nauch.-Tekhn. Vestn. Inform. Tekhnol. Mekhan. Optik. — 2018. — Vol. 18, No. 1. — P. 153–157 (in Russian).
- Садин Д. В.* Модификация метода крупных частиц до схемы второго порядка точности по пространству и времени для ударно-волновых течений газовзвеси // Вестник Южно-Уральского

- государственного университета. Сер. Математическое моделирование и программирование. — 2019. — Т. 12, № 2. — С. 112–122.
- Sadin D. V.* Modifikaciya metoda krupnyh chastic do skhemy vtorogo poryadka tochnosti po prostranstvu i vremeni dlya udarno-volnovykh techenij gazovzvesi [A modification of the large-particle method to a scheme having the second order of accuracy in space and time for shockwave flows in a gas suspension] // Vestn. Yuzhn. Ural. Gos. Univ. Ser. Mat. Model. Programm. — 2019. — Vol. 12, No. 2. — P. 112–122 (in Russian).
- Садин Д. В., Беляев Б. В., Давидчук В. А.* Сравнение модифицированного метода крупных частиц с некоторыми схемами высокой разрешающей способности. Двумерные тесты // Вычислительные методы и программирование. — 2019. — Т. 20. — С. 337–345.
- Sadin D. V., Belyaev B. V., Davidchuk V. A.* Sravnenie modifitsirovannogo metoda krupnyh chastic s nekotorymi skhemami vysokoj razreshayushchej sposobnosti. Dvumernye testy [Comparison of a Modified Large-Particle Method with Some High Resolution Schemes. Two-Dimensional Test Problems] // Vychisl. Metody Programm. — 2019. — Vol. 20. — P. 337–345 (in Russian).
- Садин Д. В., Давидчук В. А.* Сравнение модифицированного метода крупных частиц с некоторыми схемами высокой разрешающей способности. Одномерные тесты // Вычислительные методы и программирование. — 2019. — Т. 20. — С. 138–146.
- Sadin D. V., Davidchuk V. A.* Sravnenie modifitsirovannogo metoda krupnyh chastic s nekotorymi skhemami vysokoj razreshayushchej sposobnosti. Odnomernye testy [Comparison of a Modified Large-Particle Method with Some High Resolution Schemes. One-Dimensional Test Problems] // Vychisl. Metody Programm. — 2019. — Vol. 20. — P. 138–146 (in Russian).
- Смирнова Н. С.* Сравнение схем с расщеплением потока для численного решения уравнений Эйлера сжимаемого газа // Труды МФТИ. — 2018. — Т. 10, № 1. — С. 122–141.
- Smirnova N. S.* Sravnenie skhem s rasshepleniem potoka dlya chislennogo resheniya uravnenij Euler szhimaemogo gaza [Comparison of flux splitting schemes for numerical solution of the compressible Euler equations] // Trudy MFTI. — 2018. — Vol. 10, No. 1. — P. 122–141 (in Russian).
- Тагирова И. Ю., Родионов А. В.* Применение искусственной вязкости для борьбы с карбунклу-неустойчивостью в схемах типа Годунова // Матем. моделирование. — 2015. — Т. 27, № 10. — С. 47–64.
- Tagirova I. Yu., Rodionov A. V.* Application of Artificial Viscosity for Suppressing the Carbuncle Phenomenon in Godunov-Type Schemes // Math. Models Comput. Simul. — 2016. — Vol. 8, No. 3. — P. 249–262. (Original Russian paper: *Tagirova I. Yu., Rodionov A. V.* Primenenie iskusstvennoj вязкости dlya bor'by s karbunkul-neustojchivost'yu v skhemah tipa Godunova // Mat. Model. — 2015. — Vol. 27, No. 10. — P. 47–64.)
- Федоренко Р. П.* Применение разностных схем высокой точности для численного решения гиперболических уравнений // ЖВМиМФ. — 1962. — Т. 2, № 6. — С. 1122–1128.
- Fedorenko R. P.* The application of difference schemes of high accuracy to the numerical solution of hyperbolic equations // U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys. — 1963. — Vol. 2, No. 6. — P. 1355–1365. (Original Russian paper: *Fedorenko R. P.* Primenenie raznostnyh schem vysokoi tochnosti dlya chislennogo resheniya giperbolicheskikh uravnenij // Comput. Math. Math. Phys. — 1962. — Vol. 2, No. 6. — P. 1122–1128.)
- Храпов С. С., Хоперсков А. В., Кузьмин Н. М., Писарев А. В., Кобелев И. А.* Численная схема для моделирования динамики поверхностных вод на основе комбинированного SPH-TVD подхода // Выч. мет. программирование. — 2011. — Т. 12, вып. 2. — С. 282–297.
- Khrapov S. S., Khoperskov A. V., Kuz'min N. M., Pisarev A. V., Koblelev I. A.* Chislennaya skhema dlya modelirovaniya dinamiki poverhnostnyh vod na osnove kombinirovannogo SPH-TVD podhoda [A numerical scheme for simulating the dynamics of surface water on the basis of the combined SPH-TVD approach] // Vychisl. Metody Programm. — 2011. — Vol. 12, Iss. 2. — P. 282–297 (in Russian).
- Balsara D. S.* A two-dimensional HLLC Riemann solver for conservation laws: Application to Euler and magnetohydrodynamic flows // J. Comput. Phys. — 2012. — Vol. 231, No. 22. — P. 7476–7503.
- Christensen R. B.* Godunov Methods on a Staggered Mesh — An Improved Artificial Viscosity. Preprint UCRL-JC-105269. — Livermore: Lawrence Livermore Nat. Lab., 1990. — 11 p.
- Cockburn B., Shu C.-W.* Runge–Kutta discontinuous Galerkin methods for convection-dominated problems // Journal of Scientific Computing. — 2001. — Vol. 16, No. 3. — P. 173–261.
- Engquist B., Lötstedt P., Sjögreen B.* Nonlinear Filters for Efficient Shock Computation // Mathematics of computation. — 1989. — Vol. 52, No. 186. — P. 509–537.

- Fringer O. B., Armfield S. W., Street R. L.* Reducing numerical diffusion in interfacial gravity wave simulations // *Int. J. Numer. Meth. Fluids*. — 2005. — Vol. 49. — P. 301–329.
- Harten A., Zwas G.* Self-adjusting hybrid schemes for shock computations // *J. Comput. Phys.* — 1972. — Vol. 9, No. 3. — P. 568–583.
- Hirsch C.* Numerical computation of internal and external Flows. Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows. Vol. 2. — New York: Wiley, 1990. — 691 p.
- Hudson J., Harris D.* A high resolution scheme for Eulerian gas-solid two-phase isentropic flow // *J. Comput. Phys.* — 2006. — Vol. 216. — P. 494–525.
- Hui W., Li P., Li Z.* A unified coordinate system for solving the two-dimensional Euler equations // *J. Comp. Phys.* — 1999. — Vol. 153. — P. 596–637.
- Kurganov A., Liu Y.* New adaptive artificial viscosity method for hyperbolic systems of conservation laws // *Journal of Computational Physics*. — 2012. — Vol. 231. — P. 8114–8132.
- Liska R., Wendroff B.* Comparison of several difference schemes on 1D and 2D test problems for the Euler equations // *SIAM Journal on Scientific Computing*. — 2003. — Vol. 25, No. 3. — P. 995–1017.
- Liu X., Zhang S., Zhang H., Shu C.-W.* A new class of central compact schemes with spectral-like resolution II: Hybrid weighted nonlinear schemes // *J. Comp. Phys.* — 2015. — Vol. 284. — P. 133–154.
- Monaghan J. J.* Smoothed Particle Hydrodynamics // *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*. — 1992. — Vol. 30. — P. 543–574.
- Schulz W. D.* Tensor artificial viscosity for numerical hydrodynamics // *J. Math. Phys.* — 1964. — Vol. 5. — P. 133–138.
- Toro E. F.* Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. 3rd ed. — Berlin: Springer-Verlag, 2009. — 724 p.
- von Neumann J., Richtmyer R. D.* A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks // *J. Appl. Phys.* — 1950. — Vol. 21, No. 3. — P. 232–237.
- Woodward P., Colella P.* The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks // *J. Comp. Phys.* — 1984. — Vol. 54. — P. 115–173.