

УДК: 006.1:620.3; 517.958

## Анализ основного уравнения физико-статистического подхода теории надежности технических систем

В. С. Кожевников, И. В. Матюшкин<sup>а</sup>, Н. В. Черняев

АО НИИ молекулярной электроники,  
Россия, 124460, г. Москва, Зеленоград, 1-й Западный проезд, 12/1

E-mail: <sup>а</sup> imatyushkin@niime.ru

Получено 05.02.2020, после доработки — 18.06.2020.

Принято к публикации 22.06.2020.

Проведена верификация физико-статистического подхода теории надежности для простейших случаев, показавшая его правомочность. Представлено аналитическое решение одномерного основного уравнения физико-статистического подхода в предположении стационарной скорости деградации. С математической точки зрения это уравнение является известным уравнением непрерывности, где роль плотности вещества играет плотность функции распределения изделий в фазовом пространстве его характеристик, а роль скорости жидкости играет интенсивность (скорость) деградационных процессов. Последняя связывает общий формализм с конкретикой механизмов деградации. С помощью метода характеристик аналитически рассмотрены случаи постоянной по координате, линейной и квадратичной скоростей деградации. В первых двух случаях результаты соответствуют физической интуиции. При постоянной скорости деградации форма начального распределения сохраняется, а само оно равномерно сдвигается от центра. При линейной скорости деградации распределение либо сужается вплоть до узкого пика (в пределе сингулярного), либо расширяется, при этом максимум сдвигается на периферию с экспоненциально растущей скоростью. Форма распределения также сохраняется с точностью до параметров. Для начального нормального распределения аналитически получены координаты наибольшего значения максимума распределения при его возвратном движении.

В квадратичном случае формальное решение демонстрирует контринтуитивное поведение. Оно заключается в том, что решение однозначно определено лишь на части бесконечной полуплоскости, обращается в нуль вместе со всеми производными на границе и неоднозначно при переходе за границу. Если продолжить его на другую область в соответствии с аналитическим решением, то оно имеет двухгорбый вид, сохраняет количество вещества и, что лишено физического смысла, периодически во времени. Если продолжить его нулем, то нарушается свойство консервативности. Аномальности квадратичного случая дается объяснение, хотя и нестрогое, через аналогию движения материальной точки с ускорением, пропорциональным квадрату скорости. Здесь мы имеем дело с математическим курьезом. Для всех случаев приведены численные расчеты. Дополнительно рассчитываются энтропия вероятностного распределения и функция надежности, а также прослеживается их корреляционная связь.

Ключевые слова: деградация, надежность, наносистема, физико-статистический подход, энтропия, уравнение непрерывности

UDC: 006.1:620.3; 517.958

## Analysis of the basic equation of the physical and statistical approach within reliability theory of technical systems

V. S. Kozhevnikov, I. V. Matyushkin<sup>a</sup>, N. V. Chernyaev

Molecular Electronics Research Institute,  
12/1 1 Zapadnyi Proezd, Zelenograd, Moscow, 124460, Russia

E-mail: <sup>a</sup> imatyushkin@niime.ru

*Received 05.02.2020, after completion — 18.06.2020.*

*Accepted for publication 22.06.2020.*

Verification of the physical-statistical approach within reliability theory for the simplest cases was carried out, which showed its validity. An analytical solution of the one-dimensional basic equation of the physical-statistical approach is presented under the assumption of a stationary degradation rate. From a mathematical point of view this equation is the well-known continuity equation, where the role of density is played by the density distribution function of goods in its characteristics phase space, and the role of fluid velocity is played by intensity (rate) degradation processes. The latter connects the general formalism with the specifics of degradation mechanisms. The cases of coordinate constant, linear and quadratic degradation rates are analyzed using the characteristics method. In the first two cases, the results correspond to physical intuition. At a constant rate of degradation, the shape of the initial distribution is preserved, and the distribution itself moves equably from the zero. At a linear rate of degradation, the distribution either narrows down to a narrow peak (in the singular limit), or expands, with the maximum shifting to the periphery at an exponentially increasing rate. The distribution form is also saved up to the parameters. For the initial normal distribution, the coordinates of the largest value of the distribution maximum for its return motion are obtained analytically.

In the quadratic case, the formal solution demonstrates counterintuitive behavior. It consists in the fact that the solution is uniquely defined only on a part of an infinite half-plane, vanishes along with all derivatives on the boundary, and is ambiguous when crossing the boundary. If you continue it to another area in accordance with the analytical solution, it has a two-humped appearance, retains the amount of substance and, which is devoid of physical meaning, periodically over time. If you continue it with zero, then the conservativeness property is violated. The anomaly of the quadratic case is explained, though not strictly, by the analogy of the motion of a material point with an acceleration proportional to the square of velocity. Here we are dealing with a mathematical curiosity. Numerical calculations are given for all cases. Additionally, the entropy of the probability distribution and the reliability function are calculated, and their correlation is traced.

Keywords: degradation, reliability, nanosystem, physical and statistical approach, entropy, continuity equation

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2020, vol. 12, no. 4, pp. 721–735 (Russian).

## 1. Введение

Развитие микро- и нанoeлектроники направлено не только в сторону меньших проектных норм, но и в сторону «шире Мура» (beyond Moore), т. е. в сторону повышения функциональности за счет новых конструктивных решений и нано- и метаматериалов. Однако тогда вновь на первый план выходят вопросы надежности [Волков, 2007; Лицкевич, 2017], причем требуются именно интегральные подходы, учитывающие высокую степень гетерогенности вещества в составе наноприбора и уходящие от простого правила «вероятность отказа системы равна произведению вероятности отказов ее элементов». Это обусловлено наличием корреляции в деградационных изменениях в различных элементах технической системы (под которой, в частности, можно понимать и весь корпусированный чип, и функционально значимый фрагмент СБИС, вплоть до уровня транзистора). Такие изменения могут быть вызваны, например, действием радиации [Безродных, 2014].

Ранее в [Кожевников, 2019] нами рассматривался предложенный в 90-х гг. XX в. Алексаняном И. Т. и Черняевым Н. В. [Алексанян, 1994, 1998] физико-статистический подход (ФСП) в теории надежности, дополненный идеей вывода из динамики функции распределения изделий информационной энтропии и функции отказов (или функции надежности). Там же изложены содержательные аспекты теории, а здесь мы сосредоточимся на математических деталях ФСП. Целью статьи является математическое исследование простейших частных случаев основного уравнения ФСП, а также поведения энтропии [Аверин, 2016] и функции надежности при некоторых формальных предположениях об интенсивности деградации. Выбор частных случаев основывался на формальных соображениях.

Кратко остановимся на семантике ФСП, который в силу своей абстрактности применим и вне микроэлектроники, например при расчете средней продолжительности жизни биологических систем. Основное условие применимости ФСП состоит в том, чтобы изделия изготавливались в одном технологическом процессе и эксплуатировались приблизительно в одних параметрах внешней среды. Тогда становится обоснованным применение статистических методов; в смысле контрольных карт Шухарта (1924) речь идет о подгруппе данных (для микроэлектроники — партия пластин). Начальный профиль распределения изделий по ключевым эксплуатационно-техническим характеристикам обычно известен в ходе мероприятий отдела технического контроля, присутствующего на любом производстве:

$$dN = f(\mathbf{x}, 0) dx_1 \dots dx_m, \quad \mathbf{x} \in V \subset \mathbb{R}^m.$$

Перечень таких характеристик, формализуемых в ФСП многомерным вектором, должен быть достаточно полным, чтобы информировать нас о внутреннем состоянии изделия. Только тогда энтропия  $H$  статистического распределения, получаемая апостериори из данных измерений, может быть использована для оценки величины больцмановской энтропии  $S$  изделия как энтропии термодинамической системы, в большинстве случаев атомарно-твердотельной. Основная задача ФСП — проследить динамику функции (плотности) распределения изделий в процессе эксплуатации изделия при некоторых гипотезах о внешних воздействиях. Непосредственное измерение этой функции уже затруднено, поскольку изделия уже «разошлись» по потребителям. Зная эту динамику, можно путем интегрирования по фазовому пространству: во-первых, предсказать динамику изменения энтропии; во-вторых, исследовать поведение функции надежности  $R$  и, соответственно, интенсивности отказов в единицу времени. Интенсивность отказов  $\lambda$  является важнейшей величиной в теории надежности, а ее знание позволяет прогнозировать сроки гарантийного ремонта, плановой замены оборудования, а для страховщиков — более обоснованно устанавливать процентные ставки риска:

$$S(t) \sim H(t) \Leftarrow f(\mathbf{x}, t) \Rightarrow \{R(t), \lambda = |dR / dt|\}.$$

Основное уравнение ФСП наследовано из уравнения непрерывности  $\partial \rho / \partial t + \nabla \cdot (\rho \cdot \mathbf{v}) = q$ , где скорости вещества отвечает скорость (интенсивность) деградации, а правой части — плот-

ность вероятности катастрофических отказов. Несмотря на то, что уравнение непрерывности известно лет двести, до сих пор продолжают его исследования: в «родной» для него области гидродинамики [Белевич, 2016], в теории оптимального управления [Staritsyn, 2018] и в области стохастических дифференциальных уравнений [Kim, 2018]. Вопросы неединственности его решения до сих пор не потеряли значения [Bogachev, 2015; Crippa, 2015]. Мы же применяем уравнение непрерывности для объекта идеального (изделия), далекого от традиционной математической физики. Отсюда следует и относительная новизна постановки вопросов в их совокупности:

- начальное условие, взятое по умолчанию, есть не линейная функция, а гауссова, стремящаяся к нулю на бесконечности;
- область определения для идеализации взята бесконечной, а практические задачи в гидродинамике обычно ставятся для конечного объема;
- скорость движения жидкости рассчитывается в процессе моделирования, а ее аналог — скорость деградации — конструируется до моделирования и может выражаться сложной функцией.

## 2. Постановка задачи, основные обозначения

Хотя семантика модели далека от гидро- или аэродинамики, для лучшего понимания мы считаем оправданным использовать аналогии из этой области.

Под плотностью вещества будем понимать плотность вероятности  $\rho \Leftrightarrow f$ . Итак, пусть  $f(x, t)$  — искомая плотность распределения изделий в пространстве параметров их характеристик:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \operatorname{div}(f(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{c}(\mathbf{x}, t)) = -q(t)f(\mathbf{x}, t). \quad (1)$$

В классическом уравнении непрерывности (1) положим правую часть равной нулю. Пусть  $c(x, t) \doteq c(x)$  — скорость (интенсивность) деградационных процессов, которую будем считать не зависящей от времени. Такое предположение и упрощает анализ, и более естественно при эксплуатации прибора в стабильных условиях среды: скорость деградации зависит только от внутренних характеристик изделия. Решение будем искать на полуплоскости  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \geq 0$  (в общем случае полупространстве) с начальным условием на прямой  $t = 0$ . В явном виде краевых условий не налагается, кроме естественных (2) для плотностей вероятностей в виде предельных переходов:

$$f(\mathbf{x}, t) \in C^0(\mathbb{R}^{m+1}), \quad \lim_{x_i \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}, t) = 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (2)$$

Поскольку правая часть равна нулю, то вещество сохраняется, и тогда получаем интегральное условие (3):

$$\forall t: \int_{\mathbb{R}^m} f(\mathbf{x}, t) \equiv 1. \quad (3)$$

Анализ модели сточки зрения верификации следует начать с простейших случаев. Далее будем считать размерность вектора  $x$  равной  $m = 1$ . Уравнения (4)–(6) определяют [Тихонов, 2002] связь решения и начальных условий, ассоциированных с первыми интегралами присоединенной системы дифференциальных уравнений (метод характеристик):

$$f(x, t) = \frac{1}{c(x)} F\left(t - \int \frac{dx}{c(x)}\right). \quad (4)$$

Начальное условие  $f(x, 0) = f_0(x)$  специфицирует функцию  $F(\xi)$ , ранее произвольную:

$$F\left(-\int \frac{dx}{c(x)}\right) = c(x) \cdot f_0(x). \quad (5)$$

Чтобы найти  $F(\xi)$ , нужно обратить функцию  $-\int \frac{dx}{c(x)}$ :

$$\begin{aligned}\xi &= -\int \frac{dx}{c(x)} \Rightarrow x = x(\xi), \\ F(\xi) &= c(x(\xi)) \cdot f_0(x(\xi)).\end{aligned}\quad (6)$$

Для получения явного вида решения  $f(x, t)$  остается лишь подставить в (4) выражение для  $F(\xi)$  из (6). Более подробно техника, прежде всего вид первых интегралов, изложена в [Кожевников, 2019].

### 3. Постоянная и линейная интенсивность деградации

Легко получить решение для постоянной скорости деградации  $c(x) = b$ :

$$f(x, t) = f_0(x - b \cdot t).$$

Как и следовало ожидать, при постоянной скорости деградации распределение двигается с постоянной скоростью, не меняя формы.

Пусть  $c(x) = ax + b$ ,  $a \neq 0$ . Для более детального исследования рассмотрим нормальное начальное распределение,  $f_0(x) \triangleq g(0, \sigma) \equiv \left(2\pi\sigma^2\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$ . Обсудим более простой случай  $b = 0$  (пример нечетной функции). Физическая интуиция говорит о том, что при  $a > 0$  «ветер деградации» расталкивает вещество, оставляя распределение одногорбым, но более размытым. При  $a < 0$  ветер, наоборот, собирает вещество вблизи  $x = 0$ . Если теперь  $b \neq 0$ , то ветер смещает вещество, пока его центр масс не окажется в точке «безветрия»  $x: c(x) = 0$ .

Во всех случаях решение получается процедурой (4)–(6) и имеет вид, сконструированный на основе начальной функции распределения:

$$f(x, t) = e^{-at} f_0\left(xe^{-at} + \frac{b}{a}(e^{-at} - 1)\right).$$

При начальном условии  $g(0, \sigma)$  оно выражается так:

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(e^{at}\sigma)^2}} \exp\left(-\frac{\left(x - \frac{b}{a}(e^{at} - 1)\right)^2}{2(e^{at}\sigma)^2}\right). \quad (7)$$

Итак, если начальное распределение нормальное, то оно остается нормальным в любой момент времени, но с другими математическим ожиданием  $x_m(t)$  и дисперсией  $Var(t)$ :

$$x_m(t) = \frac{b}{a}(e^{at} - 1), \quad \frac{dx_m}{dt} = be^{at}, \quad Var(t) = (e^{at}\sigma)^2.$$

Анализируя эти выражения, заключаем, что при  $b \neq 0$ ,  $a > 0$  максимум двигается с экспоненциально нарастающей скоростью, а дисперсия экспоненциально увеличивается (рис. 1, а). При  $b \neq 0$ ,  $a < 0$  (рис. 1, б) максимум асимптотически приближается к точке  $x^* = -\frac{b}{a}$ , причем

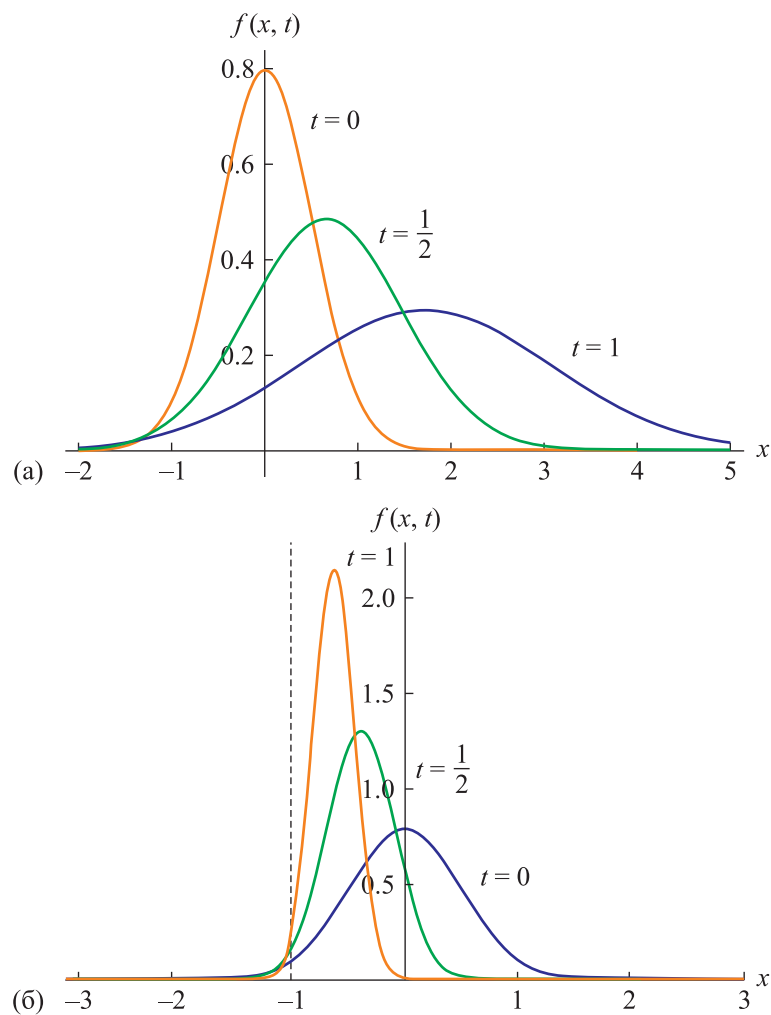


Рис. 1. Динамика распределения  $f(x, t)$  при линейной скорости деградации  $c(x) = ax + b$  в случае начального нормального распределения  $g(0, \sigma)$ : (а) для  $a = b = 1$ ,  $\sigma = 0.5$ ; (б) для  $a = b = -1$ ,  $\sigma = 0.5$

дисперсия экспоненциально стремится к нулю. В обоих случаях знак  $b$  определяет лишь направление движения, а знак  $a$  — направление изменения формы.

Для энтропии  $H(t)$  решения  $f(x, t)$ , заданного формулой (7), получается выражение, линейное по времени  $t$ :

$$H(t) = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t) \ln(f(x, t)) dx = at + \frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma^2 e).$$

Чтобы найти надежность  $R(t)$ , необходимо задать область годности. Будем условно считать, что это промежуток  $[-r, r]$ , где  $r > 0$  (можно положить  $r = 3\sigma = 3$ ). Тогда выражение для функции надежности имеет вид

$$R(t) = \int_{-r}^r f(x, t) dx = \frac{1}{2} \left( \operatorname{erf} \left( \frac{(ar+b)e^{-at} - b}{\sqrt{2}a\sigma} \right) + \operatorname{erf} \left( \frac{(ar-b)e^{-at} + b}{\sqrt{2}a\sigma} \right) \right).$$

В данном случае оказывается возможным выразить надежность  $R$  как функцию энтропии  $H$ :

$$R(H) = \frac{1}{2} \left( \operatorname{erf} \left( \sqrt{\pi} e \left( r + \frac{b}{a} \right) e^{-H} - \frac{b}{\sqrt{2a\sigma}} \right) + \operatorname{erf} \left( \sqrt{\pi} e \left( r - \frac{b}{a} \right) e^{-H} + \frac{b}{\sqrt{2a\sigma}} \right) \right).$$

При  $a = b = \sigma = 1$ ,  $r = 3\sigma = 3$  график «надежность – энтропия» имеет вид ступеньки с плавным переходом, что согласуется с физическим смыслом данных величин. При этом максимум производной достигается в точке  $(H = 2.5, R = 0.55)$ , а асимптотика нуля  $R \rightarrow 0$  — при  $H \geq 8$ .

#### 4. Аномальное поведение для квадратичной интенсивности деградации

Если в случае линейной по пространственной координате скорости деградации решение уравнения непрерывности отвечает физической интуиции, то для квадратичных скоростей в решении возникают особенности. Сразу заметим, что такая спецификация вряд ли имеет физический смысл (неограниченный рост не характерен для реальных явлений), а значит, мы вправе ожидать математического казуса. В нашем случае это сужение области определения решения или нарушение свойства консервативности уравнения. В качестве аналогии приведем гипотетический пример движения материальной точки под действием силы, квадратично зависящей от скорости. Пусть начальная скорость задана как  $u(0) = 1$ , а закон движения  $du/dt = a(u)$  задан в трех вариантах ((8), малый параметр  $\varepsilon > 0$ ), практически идентичных при больших скоростях. Однако формальное решение, выписываемое для всех  $t \in \mathbb{R}^+$ , существенно отличается в асимптотике  $t \rightarrow +\infty$ :

$$a(u) = \begin{cases} u^2 - \varepsilon^2 \\ u^2 \\ u^2 + \varepsilon^2 \end{cases} \Rightarrow u(t) = \begin{cases} \varepsilon \frac{1 - \varepsilon \cdot \tanh(\varepsilon t)}{\varepsilon - \tanh(\varepsilon t)}, \\ 1/(1-t), \\ \varepsilon \frac{1 + \varepsilon \cdot \tan(\varepsilon t)}{\varepsilon - \tan(\varepsilon t)}. \end{cases} \quad (8)$$

В первых двух случаях присутствует одна вертикальная асимптота, а в третьем таких асимптот бесконечно много. Ясно, что после достижения первой асимптоты дальнейшее решение теряет всякий физический смысл. При этом ответ второго случая получается предельным переходом из 1-го и 3-го.

##### 4.1. Простейшая зависимость $c(x) = x^2$ — область определения

В этом случае формальное решение имеет вид

$$f(x, t) = \frac{1}{(xt + 1)^2} f_0 \left( \frac{x}{xt + 1} \right). \quad (9)$$

Несложно прямой подстановкой проверить, что функция, заданная формулой (9), является решением исходного уравнения (1) при  $xt + 1 \neq 0$ , удовлетворяя также интегральному условию (3). График  $f(x, t)$  при  $f_0(x) = g(0, 1)$  представлен на рис. 2.

Как видно из графиков, при  $t > 0$  решение имеет два максимума, между которыми достигается пренебрежимо малых значений. Однако при последовательном выводе решения в соответствии с формулами (4)–(6) оказывается, что не во всей области определения уравнения решение задается однозначно. Попытка применить заново этот метод к (1) с граничным условием

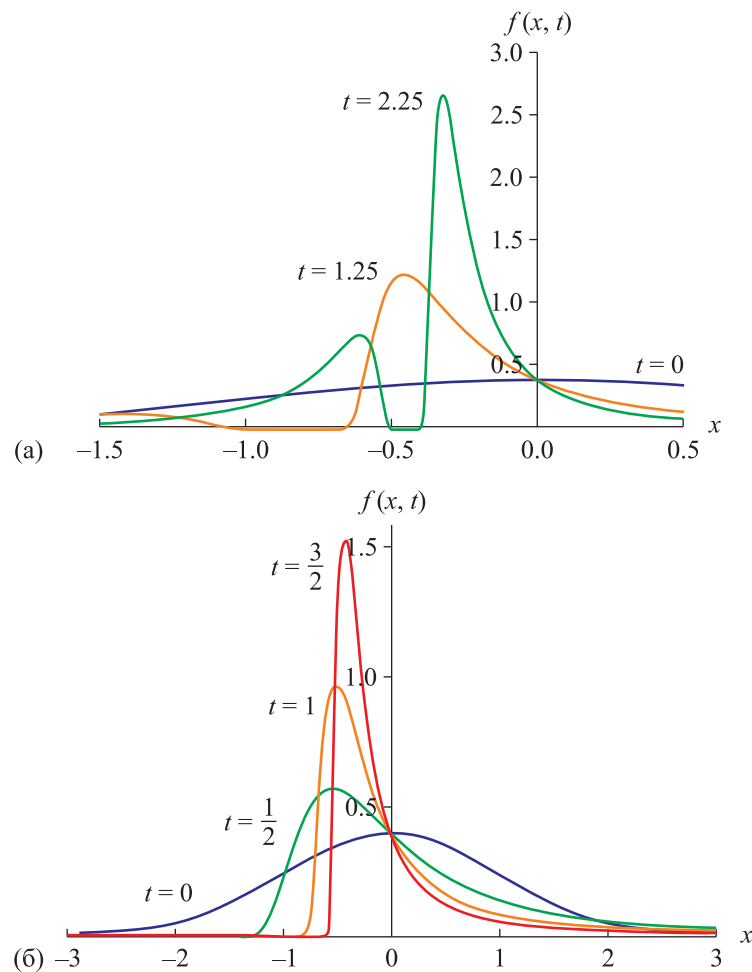


Рис. 2. Динамика распределения  $f(x, t)$  при скорости деградации  $c(x) = x^2$  в случае  $f_0(x) = g(0, 1)$ : (а) формальное решение по формуле (6); (б) решение (6) при доопределении нулем в области неоднозначности  $xt + 1 < 0$

на  $xt + 1 = 0$  наталкивается на вырождение аргумента в (2) и невозможность обращения переменной в (3). Заметим, что в методе характеристик однозначность решения зависит от числа точек пересечения [Лобанов, 2012] характеристикой линии или гиперповерхности начальных условий.

Прежде всего обратим внимание на то, что не существует первообразной  $-\int \frac{dx}{c(x)} = \int \frac{-1}{x^2} dx = \frac{1}{x} + \text{const}$ , которая была бы определена на  $\mathbb{R}$ . Поэтому возникает необходимость отдельно рассмотреть два случая:  $x > 0$  и  $x < 0$ . Для удобства в качестве первообразной выберем  $\frac{1}{x}$ , полагая константу интегрирования равной нулю.

1. При  $x > 0$ , согласно (9),

$$\xi = -\int \frac{dx}{c(x)} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{\xi}, \quad \xi > 0,$$

$$F(\xi) = c(x(\xi)) \cdot f_0(x(\xi)) = \frac{1}{\xi^2} f_0\left(\frac{1}{\xi}\right), \quad \xi > 0.$$



Тогда из (1) следует формула (9), причем она справедлива при всех  $x > 0$ , так как выражение  $t + \frac{1}{x}$ , подставляемое в  $F(\xi)$  в качестве аргумента, положительно.

2. При  $x < 0$ , хотя формально решение не изменится, область определения  $F(\xi)$  будет иной, а именно:  $\xi < 0$ . Следовательно, область определения функции  $f(x, t)$ , формально заданной формулой (6), находится из неравенства  $t + \frac{1}{x} < 0$ , или, с учётом того, что  $x < 0$ ,

$$x > x^*(t) \equiv -\frac{1}{t}. \quad (10)$$

Отметим, что неравенство (10) выполняется и в случае  $x > 0$ , поэтому оно полностью определяет область однозначной разрешимости задачи Коши при  $c(x) = x^2$ . Критической точкой назовем  $x^* \equiv -1/t|_{t=\text{const}}$ , а критической линией — кривую  $x^*(t) \equiv -1/t$ .

#### 4.2. Простейшая зависимость $c(x) = x^2$ — поведение решения

Далее будем считать, что  $f_0(x) \triangleq g(0, 1)$ . Исследуем решение подробнее в области (10). Для этого положим  $f(x, t) = 0$  при  $x \leq -\frac{1}{t}$ . Так как  $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{t}} f(x, t) = 0$ , то определенная таким образом функция также будет решением.

Как показывает график (рис. 2, б), при  $x > -\frac{1}{t}$  решение имеет уже лишь один максимум. Подробно исследуем его поведение. Приравняв производную  $f'_x(x, t)$  к нулю, находим точку максимума  $x_m$ :

$$x_m = -\frac{1}{t} + \frac{\sqrt{8t^2 + 1} - 1}{4t^3}$$

и соответствующее максимальное значение  $f_m$ :

$$f_m = f(x_m, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{8t^4}{(-1 + \sqrt{1 + 8t^2})^2} \exp\left(\frac{-1 - 4t^2 + \sqrt{1 + 8t^2}}{4t^2}\right).$$

Асимптотика при  $t \rightarrow +\infty$  у точки максимума  $x_m$  и значения  $f_m$  имеет вид

$$x_m \sim -\frac{1}{t} \rightarrow 0, \quad f_m \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{t^2}{e} \rightarrow +\infty.$$

Зависимость абсциссы точки максимума  $x_m$  от времени  $t$  имеет экстремум; глобальный минимум достигается в точке  $t_m = \sqrt{\frac{3}{8}}$ ,  $x_m|_{t=t_m} = -\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ . Таким образом, максимум распределения  $f(x, t)$  вначале, т. е. при  $0 \leq t \leq t_m$ , быстро сдвигается влево до  $x_m < 0$ , а затем медленно релаксирует к прежнему значению  $x_m(\infty) = 0$ .

Как уже отмечалось, формальное решение (9) нормировано условием  $\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}, t) \equiv 1$ . Разобьем при  $t > 0$  этот интеграл на два:  $I_- = \int_{-\infty}^{x^*(t)} f(x, t) dt$ ,  $I_+ = \int_{x^*(t)}^{+\infty} f(x, t) dt$  и рассмотрим их поведение в динамике. Первый стремится от  $+0$  к  $\frac{1}{2}$  снизу, а второй убывает от 1 до  $\frac{1}{2}$  асимптотически. Следовательно, интеграл решения, доопределенного нулем при  $x < x^*(t)$ , окажется меньше 1, что означает нарушение условия консервативности — половина вещества в итоге пропадает.

Несколько слов о динамике энтропии и надежности при  $r = 3\sigma = 3$ ,  $f_0(x) = g(0, 1)$ . Для формального решения (6) их динамика аналогична сглаженной динамике максимума  $x^*(t)$ . Здесь координаты экстремума ( $t_{\min} = 0.8217$ ,  $R_{\min} = 0.8270$ ) и  $R \approx 1$ , а для энтропии характерно в целом линейное убывание, за исключением начального участка, когда она возрастает от значения  $H(0) = 1.5$  до значения  $H(0.7652) = 1.910$ . Для доопределенного нулем левее критической точки (рис. 3) решения динамика надежности представляет монотонно-асимптотическое падение от 1 до  $1/2$ , а динамика энтропии показывает нелинейное убывание при наличии слабо выраженного максимума  $H(0.4492) = 1.5861 > 1.5 = H(0)$ .

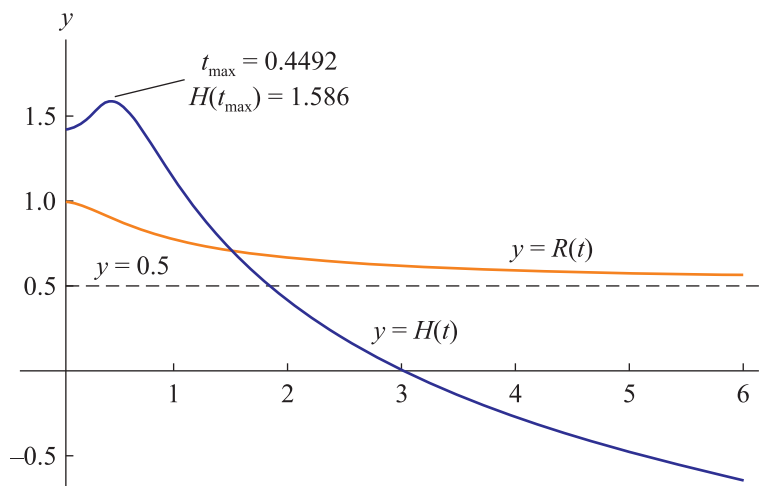


Рис. 3. Динамика энтропии и надежности для случая квадратичной деградации при  $r = 3\sigma = 3$  и  $f_0(x) = g(0, 1)$ , если решение левее критической линии доопределено нулем

#### 4.3. Общий квадратичный случай $c(x) = ax^2 + bx + c$ с комплексными корнями

Рассмотрим еще один квадратичный случай, обладающий большей общностью. Пусть  $c(x) = ax^2 + bx + c$ , причем  $D = b^2 - 4ac < 0$ . Формальная процедура решения приводит к выражению

$$f(x, t) = \frac{D^2 f_0 \left( -\frac{1}{2a} \left( D \tan \left( \frac{Dt}{2} - \arctan \left( \frac{2ax + b}{D} \right) \right) + b \right) \right)}{4a(ax^2 + bx + c) \cos^2 \left( \frac{Dt}{2} - \arctan \left( \frac{2ax + b}{D} \right) \right)}. \quad (11)$$

В частности, для конкретного случая  $a = b = c = 1$ , для  $f_0(x) = g(0, 1)$  формальное решение имеет вид

$$f(x, t) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2\delta^2}\left(\frac{2+x}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) - x\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right)^2\right)}{\sqrt{2\pi}\delta^2}, \quad (12)$$

где  $\delta \equiv \frac{1+2x}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) + \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)$ . Аналогично предыдущему случаю  $c(x) = x^2$ , функция, заданная формулой (11), является решением рассматриваемого уравнения во всей области допустимых значений, и интеграл от нее по  $\mathbb{R}$  равен единице. Как видно из графика (рис. 4), в этом случае  $f(x, t)$  также имеет два максимума по  $x$ . Данная функция обладает еще одним примечательным свойством — периодичностью по времени  $t$ . Период  $T$  находится из формулы (11):  $T = \frac{2\pi}{D}$ .

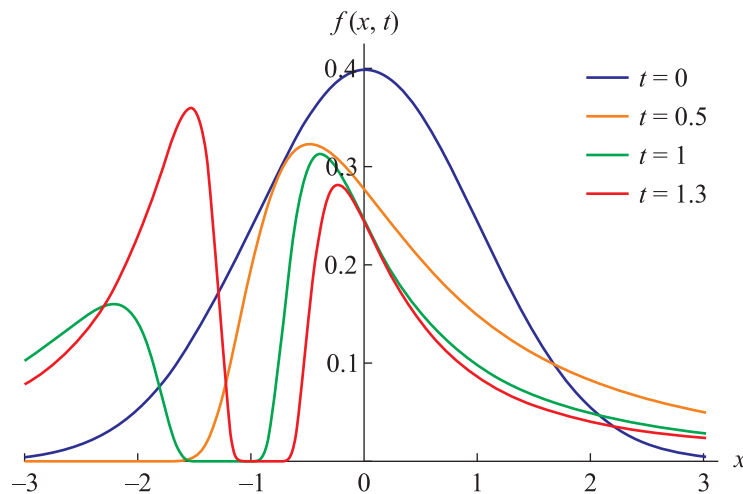


Рис. 4. Параметрическое  $t$ -семейство формальных решений  $f(x, t)$  в квадратичном случае  $c(x) = x^2 + x + 1$ , заданное формулой (12)

Соответственно, данным периодом обладают и энтропия, и надежность, вычисленные для данного формального решения  $f(x, t)$ , что позволяет усомниться в его физической значимости. Более того, в случае  $c(x) = ax^2 + bx + c$  опять возникает ограничение на область однозначного определения решения:

$$0 < t < \frac{2}{D} \arctan\left(\frac{2ax+b}{D}\right) + \frac{\pi}{D}. \quad (13)$$

Выражение (13) можно переписать в виде

$$\begin{cases} 0 < t < T, \\ x > x^*(t), \end{cases} \quad \text{где} \quad x^*(t) = -\frac{1}{2a}\left(D \cot\left(\frac{Dt}{2}\right) + b\right), \quad T = \frac{2\pi}{D}.$$

Таким образом, область однозначного определения решения не только сужается, но и вовсе не содержит значений времени  $t > T$ . То есть, зная начальное распределение, мы тем не менее не имеем никакой информации о распределении при  $t > T$ . Это выглядит очень странно

и скандально с позиции здравого физического смысла, однако мы привели аналогичный пример (8). Если мы закладываем в исходную формулировку задачи кажущиеся невинными, но не являющиеся таковыми, вещи, то не нужно удивляться появляющимся странностям. Если попытаться объяснить действительное решение «физически», то мы имеем картину, когда на вещество (допустим, лужа) воздействует сильный «ветер деградации», затихающий в центре, но дующий всегда слева направо. Очень быстро все вещество слева перейдет направо, даже без асимптотики возле нуля, поэтому логично продолжить решение строго нулем, а не иной функцией. «Ветер деградации», резко усиливающийся до бесконечных величин справа при больших значениях  $x$ , снесет все вещество вне пределов «видимости», поэтому общее количество вещества уменьшится (это, конечно, противоречит самой природе уравнения непрерывности).

Рассмотрим динамику интегралов  $I_+$ ,  $I_-$  решения  $f(x,t)$  (12) в квадратичном случае  $c(x) = x^2 + x + 1$  по областям  $x > x^*(t)$  и  $x < x^*(t)$ . В отличие от случая  $c(x) = x^2$  они асимптотически при  $t \rightarrow +\infty$  стремятся не к  $1/2$  (хорошая точность уже при  $t \approx 3.5$ ), а к соответственно 1 и 0, т. е.  $I_- \rightarrow 1$ ,  $I_+ \rightarrow 0$ . Значения  $1/2$  они достигают в одной точке, при  $t \approx 1.22$ .

Для частного случая (12) показаны критическая кривая (рис. 4, а) и 3D-график решения, доопределенного нулем (рис. 5, б). На кривой  $x^*(t)$  в  $\mathbb{R}^2$  решение  $f(x,t)$  обращается в ноль вместе со всеми своими частными производными.

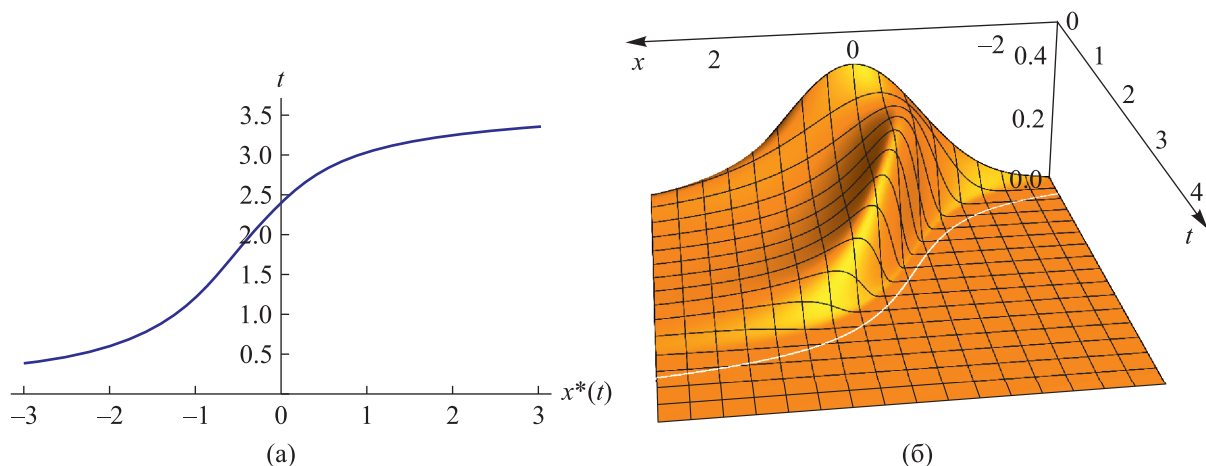


Рис. 5. Области однозначного и неоднозначного определения решения (10) в квадратичном случае  $c(x) = x^2 + x + 1$  и  $f_0(x) = g(0,1)$ : (а) граница  $x^*(t)$  области однозначной разрешимости, расположенной правее (вдоль оси  $x$ ) кривой; (б) 3D-график решения  $f(x,t)$ , доопределенного нулем при  $x < x^*(t)$ , кривая  $x^*(t)$  изображена белой линией

Хотя при аномальности квадратичной зависимости говорить о поведении надежности и энтропии можно только гипотетически, тем не менее для полноты описания сделаем это для частного решения (10) при тех же предположениях, что и в случае  $c(x) = x^2$ . Для формального решения энтропия имеет локальный максимум  $H(0.7522) = 3.024$ , участок постепенного убывания нелинейной формы, который сменяется участком роста, начиная с точки  $H(3.31) \approx 1.3$ . Для доопределенного нулем решения энтропия ведет себя аналогично, но первый максимум менее выражен —  $H(0.4571) = 2.166$ , а второй максимум вырождается в пологий участок  $H(t > 3) \approx 0$ . Также в этом случае корреляционная зависимость  $R(H)$  теряет взаимную однозначность. С ростом энтропии от нуля, что не соответствует временной динамике, надежность также растет, вначале медленнее, потом быстрее. Затем, после достижения максимума по  $H$

в 2.166, надежность растет и при обратном ходе энтропии. В точке возврата  $R(2.166) \approx 0.763$ , и на графике можно видеть часть петли (рис. 5).

Это не соответствует физической интуиции, которая утверждает, что чем больше беспорядка, тем больше дефектности в технической системе, тем меньше надежность. Типичным примером в области микроэлектроники служит явление электромиграции, когда по причине электро- и термостимулированной диффузии атомов металла в межуровневый диэлектрик возникает проводящий канал и, следовательно, пробой или короткое замыкание, что приводит к отказу всей схемы. Атипичным же примером являются необратимые изменения в структуре органической пленки, идущие в сторону кристаллизации, но сдвигающие проводимость вне рабочей области. Иногда эти особенности можно даже использовать, целенаправленно проводя тренировку структур (например, мемристоров) при повышенных полях.

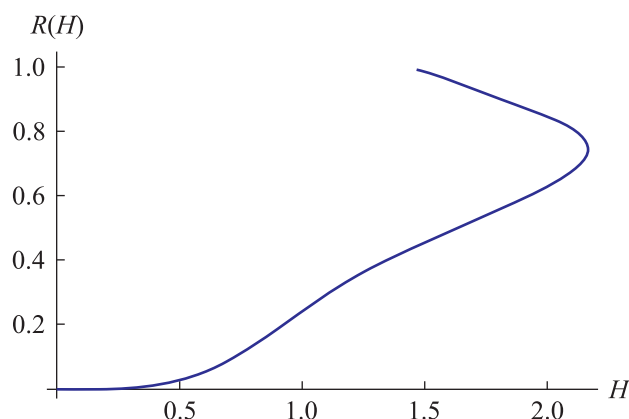


Рис. 6. Взаимосвязь надежности и энтропии  $R(H)$  при  $c(x) = x^2 + x + 1$  для решения  $f(x, t)$ , доопределенного нулем при  $x < x^*(t)$ . Уровень отсечки для области годности —  $r = 3\sigma = 3$

## 5. Заключение

С помощью решения основного уравнения ФСП путем его преобразования к эквивалентному виду системы ОДУ рассмотрены некоторые частные случаи. В стационарном одномерном случае ( $c(x, t) = c(x)$ ) данное уравнение было решено в квадратурах, а также проведено аналитическое исследование постоянной, линейной и квадратичной интенсивности деградации.

Установлено, что при постоянной интенсивности распределение характеристик монотонно смещается, сохраняя свою форму. Как следствие, его энтропия не зависит от времени, т. е. сохраняется. При линейной интенсивности поведение распределения уже существенно зависит от начального условия. Если в начальный момент распределение нормальное, то оно и остается нормальным, хотя и с другими параметрами, а его дисперсия монотонно меняется. При этом энтропия может как возрастать, так и убывать — в зависимости от знака коэффициентов. Тем не менее показано, что надежность в любом случае падает с ростом энтропии. Следует сказать, что линейный случай для бесконечной области вряд ли оправдан практикой, это скорее идеализация, но математическое решение вполне содержательно.

Полученные выводы свидетельствуют о верификации ФСП для линейных случаев, отвечают физической интуиции и опыту практики. Кроме того, ФСП подсказывает возможность «тренировки» изделия после его изготовления, что действительно иногда применяется в техническом деле.

Был также исследован случай квадратичных скоростей деградации, в котором задача ставится изначально физически некорректной, а математическое решение содержит аномалии. Были получены два класса решений: формальные и однозначные. Формальные решения определе-

ны всюду и, более того, удовлетворяют свойству консервативности. Однозначные решения являются сужениями формальных на область однозначной разрешимости уравнения, вне которой решение уже не определяется начальным условием. Предположительно такое поведение связано с быстрым ростом интенсивности деградации на бесконечности, что лишено физического смысла. Но тогда и решение не обязано иметь физическую интерпретацию. С формальной точки зрения эта аномалия в общем и целом известна для метода характеристик, но все-таки нестандартно проявляет себя в конкретном случае (характеристика асимптотически приближается на бесконечности, но не пересекает линию начальных данных); с точки зрения семантики моделирования она вызывает удивление, так как наше знание об истинном решении становится все менее определенным при, казалось бы, полностью определенных входных данных.

По сравнению с упомянутым примером о движении материальной точки в нашем случае распознать некорректность сложнее. Для случая  $D < 0$  не происходит разрыва решения, так как на линии «сшивки» решение гладкое, не содержит бесконечностей, хотя в нее и обращаются отдельные компоненты аналитической зависимости. Также наличие двух экстремумов на первый взгляд допустимо и даже интерпретируется как перенос вещества из  $-\infty$  «ветром деградации». Однако принудительное обнуление функции левее точек «сшивки», казалось бы, естественное, приводит к нарушению закона сохранения вещества. Найденный нами аномальный случай, во-первых, любопытен в качестве учебного примера для курсов уравнений математической физики; во-вторых, демонстрирует, что нужно осторожно подходить к выбору формы функции для скорости деградации, чтобы решение было и математически, и физически корректным.

В качестве направлений дальнейшего исследования можно назвать изучение случаев более высокой размерности, т. е. учитывающих сразу несколько характеристик, а также решение обратной задачи, заключающейся в нахождении скоростей деградации и начального распределения при известной функции надежности или временной зависимости энтропии системы. Безусловно, центральным вопросом ФСП остается спецификация формульной зависимости скорости деградации для конкретных физических (химических или даже биохимических) механизмов происходящих в изделии процессов. На одну фазовую переменную может воздействовать несколько процессов, и наоборот, один процесс может влиять на несколько фазовых переменных. Если вектор-функция  $c(\mathbf{x}, t)$  допускает разделение фазовых переменных, что формализует независимость процессов, то сравнительно легко моделировать и синергию процессов в рамках основного уравнения ФСП.

## Список литературы (References)

- Аверин Г. В., Звягинцева А. В. О взаимосвязи статистической и информационной энтропии при описании состояний сложных систем // Научные ведомости Белгородского ГУ. Сер. Математика. Физика. — 2016. — № 20 (241). — Вып. 44.
- Averin G. V., Zvyagincheva A. V. O vzaimosvazi statisticheskoy i informatsionnoy entropii pri opisani sostoianij slozhnykh sistem [The statistical and information entropy relationship when describing the complex systems state] // Nauchnye vedomosti Belgorodskogo GU. Seriya Matematika. Fizika [Belgorod State University Scientific Bulletin]. — 2016. — Vol. 20 (241). — No. 44 (in Russian).
- Алексанян И. Т., Черняев Н. В. Выражения для основных количественных показателей надежности в физико-статистическом подходе // Петербургский журнал электроники. — 1994. — № 4. — С. 56–58.
- Aleksanyan I. T., Chernyaev N. V. Virazheniya dlya osnovnykh kolichestvennykh pokazateley nadezhnosti v fiziko-statisticheskoy podhode [Expression for fundamental numerical ratio of reliability in the physico-statistical approach] // Peterburgskij zhurnal elektroniki [Petersburg Journal of Electronics]. — 1994. — No. 4. — P. 56–58 (in Russian).
- Алексанян И. Т., Черняев Н. В. Обобщенная модель надежности изделий // Изв. вузов. Электроника. — 1998. — Т. 2, № 1. — С. 85–90, 110.
- Aleksanyan I. T., Chernyaev N. V. Obobshchennaya model' nadezhnosti izdeliy [Generalized model of product reliability] // Izv. vuzov. Elektronika [Proceedings of universities. Electronics]. — 1998. — Vol. 2, No. 1. — P. 85–90, 100 (in Russian).

- Безродных И. П., Тютнев А. П., Семёнов В. Т. Радиационные эффекты в космосе. Ч. 3: Влияние ионизирующего излучения на изделия электронной техники. — М.: АО «Корпорация «ВНИИЭМ», 2017. — 64 с.  
*Bezrodnykh I. P., Tyutnev A. P., Semenov V. T. Radiatsionniye effecty v kosmose. Ch. 3: Vliyanie ioniziruyushchego izlucheniya* [Radiation Effects in Space. Part 3: The effect of ionizing radiation on electronic products]. — Moscow: ‘VNIIEМ Corporation’ JC, 2017. — 64 p. (in Russian).
- Белевич М. Ю. Связь уравнений неразрывности и диффузии плотности // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. — 2016. — Т. 9, № 1. — С. 73–82.  
*Belevich M. Yu. Svyaz’ uravneniy nerazrivnosti i diffuzii plotnosta* [Connection of continuity equation and density diffusion] // Fundamental and applied hydrophysics. — 2016. — Vol. 9, No. 1. — P. 73–82 (in Russian).
- Волков А. В., Еремина И. Н., Саноян А. Г. Энтропийные модели и наноструктуры: учеб. пособие. — Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2007. — 80 с.  
*Volkov A. V., Eremina I. N., Sanoyan A. G. Entropiynye modeli i nanostructuri* [Entropy models of micro- and nanostructures]. — Samara: Samara state aerospace University publishing, 2007. — 80 p. (in Russian).
- Кожевников В. С., Матюшкин И. В., Черняев Н. В., Жукова Т. Д. Взаимосвязь физической и информационной энтропий в теории надежности для наноразмерных элементов // Известия высших учебных заведений. Электроника. — 2019. — Т. 24, № 6. — С. 589–600.  
*Kozhevnikov V. S., Matyushkin I. V., Chernyaev N. V., Zhukova T. D. Vzaimosvyaz’ fizicheskoi i informatsionnoy entropiy v teorii nadezhnosti dlya nanorazmernykh elementov* [The Correlation of Physical and Informational Entropy in Theory of Reliability for Nanoscaled Elements] // Izvestiya vysshiykh uchebnykh zavedeniy. Elektronika [Proceedings of universities. Electronics]. — 2019. — Vol. 24, No. 6. — P. 589–600 (in Russian).
- Кориунов Ф. П., Гатальский Г. В., Иванов Г. М. Радиационные эффекты в полупроводниковых приборах. — Минск: Наука и техника, 1978. — 232 с.  
*Korshunov F. P., Gatal'sky G. V., Ivanov G. M. Radiatsionniye effecty v poluprovodnikovikh priborakh* [Radiation effects in semiconductor devices]. — Minsk: Science and technology, 1978. — 232 p. (in Russian).
- Лицкевич А. П., Лобов Б. Н., Лицкевич С. А. Энтропийный подход к анализу надежности технических объектов // Транспортное дело России. — 2017. — № 3. — С. 107–110.  
*Litskevich A. P., Lobov B. N., Litskevich S. A. Entropiyniy podkhod k analizu nadezhnosti technicheskikh ob'ektov* [Entropic approach to the analysis of reliability technical objects] // Transport business of Russia. — 2017. — No. 3. — P. 107–110 (in Russian).
- Лобанов А. И. Курс лекций [Электронный ресурс]: [https://hpc.mipt.ru/wp-content/uploads/2012/08/Lobanov\\_Lectures.pdf](https://hpc.mipt.ru/wp-content/uploads/2012/08/Lobanov_Lectures.pdf) (дата обращения: 05.02.2020).  
*Lobanov A. I. Kurs lekciy* [Electronic resource]: [https://hpc.mipt.ru/wp-content/uploads/2012/08/Lobanov\\_Lectures.pdf](https://hpc.mipt.ru/wp-content/uploads/2012/08/Lobanov_Lectures.pdf) (accessed: 05.02.2020).
- Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г. Дифференциальные уравнения. Изд. 4. — М.: Физматлит, 2002. — 256 с.  
*Tikhonov A. N., Vasil'eva A. B., Sveshnikov A. G. Diferentsial'niye uravneniya* [Differential equations]. 4<sup>th</sup> ed. — Moscow: Fizmatlit, 2002. — 256 p. (in Russian).
- Bogachev V. I., Shaposhnikov S. V., DaPrato G., Röckner M. On the uniqueness of solutions to continuity equations // Journal of Differential Equations. — 2015. — Vol. 259, No. 8. — P. 3854–3873.
- Crippa G., Gusev N., Spirito S., Wiedemann E. Non-uniqueness and prescribed energy for the continuity equation // Communications in Mathematical Sciences. — 2015. — Vol. 13, No. 7. — P. 1937–1947.
- Kim J. U. Measure-valued solutions of the continuity equation with a random potential // Journal of Evolution Equations. — 2018. — Vol. 18, No. 1. — P. 171–202.
- Staritsyn M. On “discontinuous” continuity equation and impulsive ensemble control // Systems & Control Letters. — 2018. — Vol. 118. — P. 77–83.

