**КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2020 Т. 12 № 4 С. 693–705**
DOI: 10.20537/2076-7633-2020-12-4-693-705

УДК: 517.925

Глобальные бифуркации предельных циклов полиномиальной системы Эйлера–Лагранжа–Льенара

В. А. Гайко[1,a], С. И. Савин[2,b], А. С. Климчик[2,c]

[1] Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Республика Беларусь, 220012, г. Минск, ул. Сурганова, д. 6

[2] Центр технологий компонентов робототехники и мехатроники, Университет «Иннополис», Россия, 420500, г. Иннополис, ул. Университетская, д. 1

E-mail: [a] valery.gaiko@gmail.com, [b] s.savin@innopolis.ru, [c] a.klimchik@innopolis.ru

Получено 06.04.2020, после доработки — 14.04.2020.
Принято к публикации 27.05.2020.

В данной статье, используя наш бифуркационно-геометрический подход, мы изучаем глобальную динамику и решаем проблему о максимальном числе и распределении предельных циклов (автоколебательных режимов, соответствующих состояниям динамического равновесия) в планарной полиномиальной механической системе типа Эйлера–Лагранжа–Льенара. Такие системы используются также для моделирования электротехнических, экологических, биомедицинских и других систем, что значительно облегчает исследование соответствующих реальных процессов и систем со сложной внутренней динамикой. Они используется, в частности, в механических системах с демпфированием и жесткостью. Существует ряд примеров технических систем, которые описываются с помощью квадратичного демпфирования в динамических моделях второго порядка. В робототехнике, например, квадратичное демпфирование появляется при управлении с прямой связью и в нелинейных устройствах, таких как приводы с переменным импедансом (сопротивлением). Приводы с переменным сопротивлением представляют особый интерес для совместной робототехники. Для исследования характера и расположения особых точек в фазовой плоскости полиномиальной системы Эйлера–Лагранжа–Льенара используется разработанный нами метод, смысл которого состоит в том, чтобы получить простейшую (хорошо известную) систему путем обращения в нуль некоторых параметров (обычно параметров, поворачивающих поле) исходной системы, а затем последовательно вводить эти параметры, изучая динамику особых точек в фазовой плоскости. Для исследования особых точек системы мы используем классические теоремы Пуанкаре об индексе, а также наш оригинальный геометрический подход, основанный на применении метода двух изоклин Еругина, что особенно эффективно при исследовании бесконечно удаленных особых точек. Используя полученную информацию об особых точках и применяя канонические системы с параметрами, поворачивающими векторное поле, а также используя геометрические свойства спиралей, заполняющих внутренние и внешние области предельных циклов, и применяя наш геометрический подход к качественному анализу, мы изучаем бифуркации предельных циклов рассматриваемой системы.

Ключевые слова: уравнение Эйлера–Лагранжа–Льенара, механическая система, планарная полиномиальная динамическая система, бифуркация, параметр поворота поля, особая точка, предельный цикл

Первый автор очень благодарен Центру технологий компонентов робототехники и мехатроники Университета «Иннополис» за гостеприимство во время его пребывания там в январе–апреле 2020 года. Его работа выполнялась также при финансовой поддержке Германской службы академических обменов (DAAD).

COMPUTER RESEARCH AND MODELING
2020 VOL. 12 NO. 4 P. 693–705
DOI: 10.20537/2076-7633-2020-12-4-693-705

MATHEMATICAL MODELING AND NUMERICAL SIMULATION

UDC: 517.925

Global limit cycle bifurcations of a polynomial Euler–Lagrange–Liénard system

V. A. Gaiko[1,a], S. I. Savin[2,b], A. S. Klimchik[2,c]

[1] United Institute of Informatics Problems, National Academy of Sciences of Belarus,
6 Surganov st., Minsk, 220012, Belarus

[2] Center for Technologies in Robotics and Mechatronics Components, Innopolis University,
1 University st., Innopolis, 420500, Russia

E-mail: [a] valery.gaiko@gmail.com, [b] s.savin@innopolis.ru, [c] a.klimchik@innopolis.ru

Received 06.04.2020, after completion — 14.04.2020.
Accepted for publication 27.05.2020.

In this paper, using our bifurcation-geometric approach, we study global dynamics and solve the problem of the maximum number and distribution of limit cycles (self-oscillating regimes corresponding to states of dynamical equilibrium) in a planar polynomial mechanical system of the Euler–Lagrange–Liénard type. Such systems are also used to model electrical, ecological, biomedical and other systems, which greatly facilitates the study of the corresponding real processes and systems with complex internal dynamics. They are used, in particular, in mechanical systems with damping and stiffness. There are a number of examples of technical systems that are described using quadratic damping in second-order dynamical models. In robotics, for example, quadratic damping appears in direct-coupled control and in nonlinear devices, such as variable impedance (resistance) actuators. Variable impedance actuators are of particular interest to collaborative robotics. To study the character and location of singular points in the phase plane of the Euler–Lagrange–Liénard polynomial system, we use our method the meaning of which is to obtain the simplest (well-known) system by vanishing some parameters (usually, field rotation parameters) of the original system and then to enter sequentially these parameters studying the dynamics of singular points in the phase plane. To study the singular points of the system, we use the classical Poincaré index theorems, as well as our original geometric approach based on the application of the Erugin two-isocline method which is especially effective in the study of infinite singularities. Using the obtained information on the singular points and applying canonical systems with field rotation parameters, as well as using the geometric properties of the spirals filling the internal and external regions of the limit cycles and applying our geometric approach to qualitative analysis, we study limit cycle bifurcations of the system under consideration.

Keywords: Euler–Lagrange–Liénard equation, mechanical system, planar polynomial dynamical system, bifurcation, field rotation parameter, singular point, limit cycle

The first author is very grateful to the Center for Technologies in Robotics and Mechatronics Components of the Innopolis University for hospitality during his stay in January–April 2020. He was also supported by the German Academic Exchange Service (DAAD).

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2020, vol. 12, no. 4, pp. 693–705 (Russian).

1. Введение

В данной статье мы изучаем уравнение типа Эйлера–Лагранжа–Льенара

$$\ddot{x} + h(x)\dot{x}^2 + f(x)\dot{x} + g(x) = 0 \tag{1}$$

и соответствующую динамическую систему

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -g(x) - f(x)y - h(x)y^2. \tag{2}$$

Уравнение (1) представляет собой композицию двух уравнений. Одним из них является уравнение

$$\alpha(q)\ddot{q} + \beta(q)\dot{q}^2 + \gamma(q) = 0, \tag{3}$$

где $q \in \mathbb{R}$; $\alpha(q)$, $\beta(x)$ и $\gamma(x)$ — скалярные функции, которое описывает общую форму динамики для системы Эйлера–Лагранжа с n степенями свободы:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial Q} = B(Q)u, \tag{4}$$

где $L(Q, \dot{Q})$ — лагранжиан, $Q \in \mathbb{R}^n$ — вектор обобщенных координат, $u \in \mathbb{R}^{n-1}$ и $B(Q)$ — $n \times (n-1)$-матричная функция полного ранга для каждого Q. Уравнение (3) может быть использовано, в частности, для решения проблемы описания периодических движений в механических системах (см., например, [Shiriaev et al., 2005, 2006] и ссылки в этих работах).

Другое уравнение — это уравнение Льенара

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0 \tag{5}$$

с соответствующей ему динамической системой

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -g(x) - f(x)y. \tag{6}$$

Частные случаи (5) и (6) рассматривались ранее в работах [Gaiko, 2008, 2009, 2012a, 2012b, 2012c, 2014, 2015] (см. также [De Maesschalck, Dumortier, 2011; Lins et al., 1977; Smale, 1998]). Уравнение (5) и система (6) применяются во многих областях науки и техники [Agarwal, Ananthkrishnan, 2000; Баутин, Леонтович, 1990; Owens et al., 2004; Slight et al., 2008]. Они используются для моделирования механических, электротехнических, биомедицинских систем, и это значительно облегчает исследование соответствующих реальных процессов и систем. Уравнение (5) используется, в частности, в механических системах с демпфированием и жесткостью при моделировании, например, воздушных потоков и явлений выброса в реактивных двигателях [Agarwal, Ananthkrishnan, 2000; Owens et al., 2004]. Системы Льенара могут использоваться также для моделирования электрических цепей типа «резистор–индуктор–конденсатор». Было показано, что система (6) может описывать и работу оптоэлектронной цепи, использующей резонансный туннельный диод для управления лазерным диодом, который применяется в оптоэлектронных генераторах [Slight et al., 2008].

Существует также ряд примеров технических систем, которые моделируются с помощью квадратичного демпфирования, слагаемого в динамической модели второго порядка, квадратичного по отношению к переменной состояния скорости. Эти примеры включают в себя подшипники, плавучие морские сооружения, модели виброизоляции и демпфирования крена судна [Chang-Jian, 2009; Laalej et al., 2012]. В робототехнике квадратичное демпфирование появляется при управлении с прямой связью и в нелинейных импедансных устройствах, таких как приводы с переменным импедансом (сопротивлением) [Bessa et al., 2008]. Приводы с переменным сопротивлением представляют особый интерес для совместной робототехники [Savin et al., 2019].

Предположим, что система (2), где $g(x)$, $h(x)$ и $f(x)$ — произвольные полиномы, имеет антиседло (узел, фокус или центр) в начале координат, и запишем ее в виде

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x(1 + a_1 x + \ldots + a_{2l} x^{2l}) + y(\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_{2k} x^{2k}) + y^2(c_0 + c_1 x + \ldots c_{2n} x^{2n}). \quad (7)$$

Заметим, что для $g(x) \equiv x$ и $h(x) \equiv 0$ путем замены переменных $X = x$ и $Y = y + F(x)$, где $F(x) = \int\limits_0^x f(s)\, ds$, (7) приводится к эквивалентной системе

$$\dot{X} = Y - F(x), \quad \dot{Y} = -X, \quad (8)$$

которая может быть записана в виде

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + F(y) \quad (9)$$

или

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + \gamma_1 y + \gamma_2 y^2 + \gamma_3 y^3 + \ldots + \gamma_{2k} y^{2k} + \gamma_{2k+1} y^{2k+1}. \quad (10)$$

В [Gaiko, 2008, 2009, 2012a] мы представили решение тринадцатой проблемы Смейла [Smale, 1998], доказав, что система Льенара (10) с полиномом степени $2k + 1$ может иметь не более k предельных циклов, и теперь мы можем заключить, что наши результаты [Gaiko, 2008, 2009, 2012a] согласуются с гипотезой [Lins et al., 1977] о максимальном числе предельных циклов для классической полиномиальной системы Льенара (10). Были предприняты также некоторые попытки построить контрпримеры к этой гипотезе (см., например, [De Maesschalck, Dumortier, 2011]). Но эти «контрпримеры» оказались абсолютно неверными.

В [Gaiko, 2012b, 2012c, 2014, 2015] мы изучали общую полиномиальную систему Льенара ($h(x) \equiv 0$):

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x(1 + a_1 x + \ldots + a_{2l} x^{2l}) + y(\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_{2k} x^{2k}). \quad (11)$$

В [Gaiko, 2012b, 2012c, 2014] при некоторых условиях на параметры (11) и в [Gaiko, 2015] для общего случая мы нашли максимальное число предельных циклов и их возможное распределение для системы (11).

Мы используем полученные результаты и развиваем наши методы исследования бифуркаций предельных циклов полиномиальных динамических систем и в данной статье. Во втором разделе, применяя канонические системы с параметрами, поворачивающими векторное поле, и используя геометрические свойства спиралей, заполняющих внутренние и внешние области предельных циклов, мы решаем проблему о максимальном числе и распределении предельных циклов в механической системе типа Эйлера–Лагранжа–Льенара. Это связано с решением шестнадцатой проблемы Гильберта о максимальном числе и распределении предельных циклов в планарных полиномиальных динамических системах [Gaiko, 2003].

2. Бифуркации предельных циклов

Изучим бифуркации предельных циклов полиномиальной системы Эйлера–Лагранжа–Льенара (7) с помощью бифуркационно-геометрического подхода, разработанного в [Gaiko, 2003, 2008, 2009, 2012a, 2012b, 2012c, 2014, 2015]. Для исследования особых точек системы (2) мы будем использовать две теоремы Пуанкаре об индексе (см. [Баутин, Леонтович, 1990]). Определение индекса Пуанкаре следующее [Баутин, Леонтович, 1990].

Определение 1. Пусть S — простая замкнутая кривая на фазовой плоскости, не проходящая через особые точки системы

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y), \quad (12)$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — непрерывные функции (например, полиномы) и M — некоторая точка на S. Если точка M обходит один раз кривую S в положительном направлении (против часовой стрелки), то вектор, совпадающий с направлением касательной к траектории, проходящей через точку M, поворачивается на угол $2\pi j$ ($j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Целое число j называется *индексом Пуанкаре* замкнутой кривой S по отношению к векторному полю системы (12) и имеет выражение

$$j = \frac{1}{2\pi} \oint\limits_S \frac{PdQ - QdP}{P^2 + Q^2}. \tag{13}$$

В соответствии с этим определением индекс узла, фокуса или центра равен +1, а индекс седла равен –1. Имеют место следующие теоремы Пуанкаре [Баутин, Леонтович, 1990].

Теорема 1 (первая теорема Пуанкаре). Если в двумерной системе N, N_f, N_c и C — соответственно числа узлов, фокусов, центров и седел в конечной части фазовой плоскости, а N' и C' — числа узлов и седел на бесконечности, то имеет место соотношение

$$N + N_f + N_c + N' = C + C' + 1.$$

Теорема 2 (вторая теорема Пуанкаре). Если все точки двумерной системы простые, то вдоль изоклины без кратных точек, расположенной в пределах одной полусферы Пуанкаре, особые точки располагаются так, что вслед за седлом будет узел, фокус или центр и наоборот. Если на изоклине две точки разделены экватором, то за седлом следует опять седло, за узлом, фокусом или центром — узел, фокус или центр.

Рассмотрим систему (7), предполагая, что $a_1^2 + \ldots + a_{2l}^2 \neq 0.$ Ее особенности в конечной части фазовой плоскости определяются алгебраической системой

$$x(1 + a_1 x + \ldots a_{2l} x^{2l}) = 0, \quad y = 0. \tag{14}$$

Эта система всегда имеет антиседло в начале координат и в общем случае может иметь не более $2l + 1$ конечных особенностей, которые лежат на оси x и распределены так, что за седлом (или седло-узлом) следует узел, фокус или центр и наоборот [Баутин, Леонтович, 1990]. Для изучения бесконечно удаленных особенностей можно использовать методы, применяемые в [Баутин, Леонтович, 1990] для уравнений Рэлея и Ван-дер-Поля, а также наш подход, основанный на применении метода двух изоклин Еругина [Gaiko, 2003]. Следуя [Gaiko, 2003], мы будем изучать бифуркации предельных циклов (7) с помощью канонических систем, содержащих параметры, поворачивающие векторное поле (7) [Баутин, Леонтович, 1990; Gaiko, 2003].

Теорема 3. Полиномиальная система Эйлера–Лагранжа–Льенара (7), имеющая предельные циклы, может быть сведена к одной из канонических систем:

$$\begin{gathered}
\dot{x} = y, \\
\dot{y} = -x(1 + a_1 x + \ldots a_{2l} x^{2l}) + \\
+ y(\alpha_0 - \beta_1 - \ldots - \beta_{2k-1} + \beta_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \beta_{2k-1} x^{2k-1} + \alpha_{2k} x^{2k}) + \\
+ y^2 (c_0 + c_1 x + \ldots + c_{2n} x^{2n});
\end{gathered} \tag{15}$$

$$\begin{gathered}
\dot{x} = y \equiv P(x, y), \\
\dot{y} = x(x-1)(1 + b_1 x + \ldots b_{2l-1} x^{2l-1}) + \\
+ y(\alpha_0 - \beta_1 - \ldots - \beta_{2k-1} + \beta_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \beta_{2k-1} x^{2k-1} + \alpha_{2k} x^{2k}) + \\
+ y^2 (c_0 + c_1 x + \ldots + c_{2n} x^{2n}) \equiv Q(x, y),
\end{gathered} \tag{16}$$

где $1 + a_1 x + \ldots a_{2l} x^{2l} \neq 0$; $\alpha_0, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k}$ — параметры, поворачивающие векторное поле; $\beta_1, \beta_3, \ldots, \beta_{2k-1}$ — полуповорачивающие параметры.

Доказательство. Сравним систему (7) с (15) и (16). Легко видеть, что система (15) имеет единственную особую точку в конечной части плоскости: антиседло в начале координат. Система (16) имеет две особые точки, включая антиседло в начале координат и седло, которое без ограничения общности всегда можно поместить в точку (1, 0). Вместо нечетных параметров $\alpha_1, \alpha_3, \ldots, \alpha_{2k-1}$ в системе (7), также без ограничения общности, мы ввели новые параметры $\beta_1, \beta_3, \ldots, \beta_{2k-1}$ в (15) и (16).

Будем рассматривать систему (16) (система (15) рассматривается аналогично). Предположим, что в этой системе все параметры $\alpha_0, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k}$ и $\beta_1, \beta_3, \ldots, \beta_{2k-1}$ равны нулю:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = x(x-1)(1 + b_1 x + \ldots b_{2l-1} x^{2l-1}) + y^2 (c_0 + c_1 x + \ldots + c_{2n} x^{2n}). \tag{17}$$

Рассмотрим соответствующее уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(x-1)(1 + b_1 x + \ldots b_{2l-1} x^{2l-1}) + y^2 (c_0 + c_1 x + \ldots + c_{2n} x^{2n})}{y} \equiv F(x, y). \tag{18}$$

Поскольку $F(x, -y) = -F(x, y)$, поле направлений (18) (а также векторное поле (17)) симметрично относительно оси x. Отсюда следует, что для произвольных значений параметров $b_1, \ldots, b_{2l-1}$ система (17) имеет центры в качестве антиседел и не может иметь предельных циклов, окружающих эти точки. Следовательно, мы можем зафиксировать параметры $b_1, \ldots, b_{2l-1}$ в системе (16), фиксируя положение ее конечных особенностей на оси x.

Чтобы доказать, что четные параметры $\alpha_0, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k}$ поворачивают векторное поле (16), вычислим следующее определители:

$$\begin{gathered}
\Delta_{\alpha_0} = PQ'_{\alpha_0} - QP'_{\alpha_0} = y^2 \geq 0, \\
\Delta_{\alpha_2} = PQ'_{\alpha_2} - QP'_{\alpha_2} = x^2 y^2 \geq 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Delta_{\alpha_{2k}} = PQ'_{\alpha_{2k}} - QP'_{\alpha_{2k}} = x^{2k} y^2 \geq 0.
\end{gathered}$$

По определению параметра, поворачивающего поле [Баутин, Леонтович, 1990; Gaiko, 2003], при увеличении каждого из параметров $\alpha_0, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k}$ (при фиксированных остальных) векторное поле системы (16) поворачивается в положительном направлении (против часовой стрелки) во всей фазовой плоскости; и наоборот, при уменьшении каждого из этих параметров векторное поле (16) поворачивается в отрицательном направлении (по часовой стрелке). Вычисляя соответствующие определители для параметров $\beta_1, \beta_3, \ldots, \beta_{2k-1}$, получим

$$\begin{gathered}
\Delta_{\beta_1} = PQ'_{\beta_1} - QP'_{\beta_1} = (x-1) y^2, \\
\Delta_{\beta_3} = PQ'_{\beta_3} - QP'_{\beta_3} = (x^3 - 1) y^2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Delta_{\beta_{2k-1}} = PQ'_{\beta_{2k-1}} - QP'_{\beta_{2k-1}} = (x^{2k-1} - 1) y^2.
\end{gathered}$$

Отсюда следует [Баутин, Леонтович, 1990; Gaiko, 2003], что при увеличении каждого из параметров $\beta_1, \beta_3, \ldots, \beta_{2k-1}$ (при фиксированных остальных) векторное поле системы (16) поворачивается в положительном направлении (против часовой стрелки) в полуплоскости $x > 1$ и в отрицательном направлении (по часовой стрелке) в полуплоскости $x < 1$, и наоборот, при уменьшении каждого из этих параметров. Мы будем называть эти параметры полуповорачивающими.

Таким образом, для изучения бифуркаций предельных циклов (7) достаточно рассматривать канонические системы (15) и (16), содержащие параметры $\alpha_0, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k}$, поворачивающие векторное поле и полуповорачивающие параметры $\beta_1, \beta_3, \ldots, \beta_{2k-1}$. Теорема доказана. ■

С помощью канонических систем (15) и (16) мы докажем следующую теорему, которая дает решение шестнадцатой проблемы Гильберта для системы (7).

Теорема 4. Полиномиальная система Эйлера–Лагранжа–Льенара (7) может иметь не более $k+l+1$ предельных циклов, $k+1$ из которых окружают начало координат, а l — по одному другие особые точки системы (7).

Доказательство. По теореме 3, для изучения бифуркаций предельных циклов системы (7) достаточно рассматривать канонические системы (15) и (16), содержащие параметры $\alpha_0, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k}$, поворачивающие векторное поле, а также полуповорачивающие параметры $\beta_1, \beta_3, \ldots, \beta_{2k-1}$. Мы будем работать с системой (16) (система (15) рассматривается аналогично).

Полагая все параметры $\alpha_0, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k}$ и $\beta_1, \beta_3, \ldots, \beta_{2k-1}$ в (16) равными нулю, мы получим систему (17), которая симметрична относительно оси x и имеет центры в качестве антиседел. Области центров (17) ограничены либо петлями серапаратрис, либо двуугольниками ее седел или седло-узлов, лежащих на оси x.

Будем последовательно вводить в систему (17) полуповорачивающие параметры $\beta_1, \beta_3, \ldots, \beta_{2k-1}$, начиная с параметров при высших степенях x и чередуя их знаки. Таким образом, начнем с параметра β_{2k-1} и будем для определенности считать, что $\beta_{2k-1} > 0$:

$$\begin{gathered}\dot{x} = y, \\ \dot{y} = x(x-1)(1+b_1x+\ldots b_{2l-1}x^{2l-1}) + y(-\beta_{2k-1}+\beta_{2k-1}x^{2k-1}) + y^2(c_0+c_1x+\ldots+c_{2n}x^{2n}).\end{gathered} \tag{19}$$

В этом случае векторное поле (19) поворачивается в отрицательном направлении (по часовой стрелке) в полуплоскости $x<1$, превращая центр в начале координат в грубый устойчивый фокус. Все другие центры, лежащие в полуплоскости $x>1$, становятся грубыми неустойчивыми фокусами, так как векторное поле (19) в этой полуплоскости поворачивается в положительном направлении (против часовой стрелки) [Баутин, Леонтович, 1990; Gaiko, 2003].

Зафиксируем β_{2k-1} и введем в (19) параметр $\beta_{2k-3} < 0$:

$$\begin{gathered}\dot{x} = y, \\ \dot{y} = x(x-1)(1+b_1x+\ldots b_{2l-1}x^{2l-1}) + \\ +y(-\beta_{2k-3}-\beta_{2k-1}+\beta_{2k-3}x^{2k-3}+\beta_{2k-1}x^{2k-1}) + y^2(c_0+c_1x+\ldots+c_{2n}x^{2n}).\end{gathered} \tag{20}$$

Тогда векторное поле (20) повернется в противоположном направлении в каждой из полуплоскостей $x<1$ и $x>1$. При убывании β_{2k-3}, когда $\beta_{2k-3} = -\beta_{2k-1}$, фокус в начале координат становится негрубым, меняет характер своей устойчивости и порождает устойчивый предельный цикл. Все другие фокусы, лежащие в полуплоскости $x>1$, породят неустойчивые предельные циклы после смены характера своей устойчивости при некоторых значениях параметра β_{2k-3}. При дальнейшем убывании β_{2k-3} все эти предельны циклы будут увеличиваться в размерах, исчезая в сепаратрисных циклах (20) [Баутин, Леонтович, 1990; Gaiko, 2003].

Обозначим предельный цикл, окружающий начало координат, через Γ_0, область снаружи от этого цикла — через D_{01}, а область внутри него — через D_{02} и рассмотрим логические возможности появления других (полуустойчивых) предельных циклов из «уплотнения» траекторий вокруг начала координат. Ясно, что при убывании параметра β_{2k-3} в области D_{02} полуустойчивый предельный цикл появиться не может, так как из-за поворота векторного поля спирали фокуса, заполняющие эту область, будут раскручиваться, а расстояние между их кольцами будет увеличиваться.

От противного мы можем доказать также, что полуустойчивый предельный цикл не может появиться и в области D_{01}. Предположим, что он все-таки появился в этой области при некоторых значениях параметров $\beta^*_{2k-1} > 0$ и $\beta^*_{2k-3} < 0.$ Вернемся к исходной системе (17) и изменим порядок введения в нее полуповорачивающих параметров. Введем сначала параметр $\beta_{2k-3} < 0$:

$$\dot{x} = y,$$
$$\dot{y} = x(x-1)(1 + b_1 x + \ldots b_{2l-1} x^{2l-1}) + y(-\beta_{2k-3} + \beta_{2k-3} x^{2k-3}) + y^2 (c_0 + c_1 x + \ldots + c_{2n} x^{2n}). \qquad (21)$$

Зафиксируем его при $\beta_{2k-3} = \beta^*_{2k-3}.$ Векторное поле (21) повернется против часовой стрелки, и начало координат превратится в грубый неустойчивый фокус. Вводя в (21) параметр $\beta_{2k-1} > 0,$ мы снова получаем систему (20), векторное поле которой поворачивается по часовой стрелке. При этом повороте из сепаратрисного цикла (20) при некотором значении β_{2k-1} появится устойчивый предельный цикл Γ_0. При дальнейшем возрастании β_{2k-1} до значения β^*_{2k-1} этот предельный цикл будет сжиматься, внешние спирали, наматывающиеся на него, будут раскручиваться, и расстояние между их кольцами будет увеличиваться. Откуда следует, что таких значений $\beta^*_{2k-3} < 0$ и $\beta^*_{2k-1} > 0,$ при которых в области D_{01} мог бы появиться полуустойчивый предельный цикл, не существует.

Это противоречие доказывает единственность предельного цикла, окружающего начало координат системы (20), при любых значениях параметров β^*_{2k-3} и β^*_{2k-1} различного знака. Очевидно, что если эти параметры будут одного и того же знака, то система (20) не имеет предельных циклов вообще. По той же самой причине (20) не может иметь более l предельных циклов, окружающих по одному другие ее особенности (фокусы или узлы).

Ясно, что введение других полуповорачивающих параметров $\beta_{2k-5}, \ldots, \beta_1$ в систему (20) не даст нам новых предельных циклов, так как все эти параметры являются грубыми относительно начала координат и других антиседел, лежащих в полуплоскости $x > 1.$ Поэтому максимальное число предельных циклов для системы

$$\begin{gathered} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x(x-1)(1 + b_1 x + \ldots b_{2l-1} x^{2l-1}) + \\ + y(-\beta_1 - \ldots - \beta_{2k-3} - \beta_{2k-1} + \beta_1 x + \ldots + \beta_{2k-3} x^{2k-3} + \beta_{2k-1} x^{2k-1}) + y^2 (c_0 + c_1 x + \ldots + c_{2n} x^{2n}) \end{gathered} \qquad (22)$$

равно $l + 1$, и они окружают по одному антиседла (фокусы или узлы) системы (22).

Предположим, что $\beta_1 + \ldots + \beta_{2k-3} + \beta_{2k-1} > 0,$ и введем последний грубый параметр $\alpha_0 > 0$ в систему (22):

$$\begin{gathered} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x(x-1)(1 + b_1 x + \ldots b_{2l-1} x^{2l-1}) + \\ + y(\alpha_0 - \beta_1 - \ldots - \beta_{2k-1} + \beta_1 x + \ldots + \beta_{2k-1} x^{2k-1}) + y^2 (c_0 + c_1 x + \ldots + c_{2n} x^{2n}). \end{gathered} \qquad (23)$$

Этот параметр, поворачивающий векторное поле (23) против часовой стрелки на всей фазовой плоскости, также не даст нам новых предельных циклов. Однако, увеличивая α_0, при $\alpha_0 = \beta_1 + \ldots + \beta_{2k-3} + \beta_{2k-1}$, мы можем сделать фокус в начале координат негрубым после исчезновения в нем предельного цикла Γ_0. Зафиксируем это значение параметра α_0 $(\alpha_0 = \alpha_0^*)$:

$$\dot{x} = y,$$
$$\dot{y} = x(x-1)(1 + b_1 x + \ldots b_{2l-1} x^{2l-1}) + y(\beta_1 x + \ldots + \beta_{2k-1} x^{2k-1}) + y^2 (c_0 + c_1 x + \ldots + c_{2n} x^{2n}). \qquad (24)$$

Будем сейчас последовательно вводить в систему (24) другие параметры $\alpha_2,\ldots,\alpha_{2k}$, поворачивающие векторное поле, начиная опять с параметров при высших степенях x и чередуя их знаки. Итак, начнем с параметра α_{2k} и предположим, что $\alpha_{2k}<0$:

$$\begin{gathered}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=x(x-1)(1+b_1x+\ldots b_{2l-1}x^{2l-1})+\\ +y(\beta_1x+\ldots+\beta_{2k-1}x^{2k-1}+\alpha_{2k}x^{2k})+y^2(c_0+c_1x+\ldots+c_{2n}x^{2n}).\end{gathered}\tag{25}$$

В этом случае векторное поле (25) поворачивается по часовой стрелке на всей фазовой плоскости и фокус в начале координат меняет свой характер устойчивости, порождая снова устойчивый предельный цикл. Предельные циклы, окружающие другие особые точки (25), также при этом могут существовать. Обозначим предельный цикл, окружающий начало координат, через Γ_1, область снаружи от этого цикла — через D_1, а область внутри него — через D_2. Единственность предельного цикла, окружающего начало координат (а также предельных циклов, окружающих другие особые точки), может быть доказана от противного, подобно тому, как мы делали это для системы (20).

Пусть система (25) имеет единственный предельный цикл Γ_1, окружающий начало координат, и l предельных циклов, окружающих другие особые точки (25). Зафиксируем $\alpha_{2k}<0$ и введем в эту систему параметр $\alpha_{2k-2}>0$:

$$\begin{gathered}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=x(x-1)(1+b_1x+\ldots b_{2l-1}x^{2l-1})+\\ +y(\beta_1x+\ldots+\beta_{2k-1}x^{2k-1}+\alpha_{2k-2}x^{2k-2})+y^2(c_0+c_1x+\ldots+c_{2n}x^{2n}).\end{gathered}\tag{26}$$

Тогда векторное поле (26) повернется в противоположном направлении (против часовой стрелки), фокус в начале координат сразу же изменит свой характер устойчивости (так как его степень негрубости уменьшится и знак параметра, поворачивающего векторное поле, при более низкой степени x изменится на противоположный), и из этой точки появится второй (неустойчивый) предельный цикл, Γ_2. Предельные циклы, окружающие другие особые точки (26), при возрастании параметра α_{2k-2} могут только исчезнуть в соответствующих фокусах (26) (в силу их грубости). При дальнейшем возрастании α_{2k-2} предельный цикл Γ_2 сольется с Γ_1, образуя полуустойчивый предельный цикл Γ_{12}, который затем исчезнет в «уплотнении» траекторий, окружающих начало координат. Может ли вокруг начала координат появиться какой-нибудь другой полуустойчивый предельный цикл, отличный от Γ_{12}? Ясно, что такой предельный цикл не может появиться ни в области D_1, ограниченной изнутри циклом Γ_1, ни в области D_3, ограниченной началом координат и циклом Γ_2, так как при возрастании параметра α_{2k-2} расстояние между кольцами спиралей, заполняющих эти области, возрастает.

Чтобы доказать невозможность появления полуустойчивого предельного цикла в области D_2, ограниченной циклами Γ_1 и Γ_2, предположим противное, т. е. что для некоторого набора значений параметров, $\alpha^*_{2k}<0$ и $\alpha^*_{2k-2}>0$, такой полуустойчивый предельный цикл существует. Вернемся снова к системе (24) и введем в нее сначала параметр $\alpha_{2k-2}>0$:

$$\begin{gathered}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=x(x-1)(1+b_1x+\ldots b_{2l-1}x^{2l-1})+\\ +y(\beta_1x+\ldots+\beta_{2k-1}x^{2k-1}+\alpha_{2k-2}x^{2k-2})+y^2(c_0+c_1x+\ldots+c_{2n}x^{2n}).\end{gathered}\tag{27}$$

Этот параметр поворачивает векторное поле (27) против часовой стрелки, сохраняя начало координат в качестве негрубого устойчивого фокуса. Зафиксируем его при $\alpha_{2k-2} = \alpha^*_{2k-2}$ и введем в (27) параметр $\alpha_{2k} < 0$, получая снова систему (26). Так как, по нашему предположению, эта система имеет два предельных цикла, окружающих начало координат, при $\alpha_{2k} > \alpha^*_{2k}$, то существует некоторое значение параметра α^{12}_{2k} $(\alpha^{12}_{2k} < \alpha^*_{2k} < 0)$, при котором в системе (26) появляется полуустойчивый предельный цикл Γ_{12}, распадающийся затем на устойчивый цикл Γ_1 и неустойчивый Γ_2 при дальнейшем убывании α_{2k}. При убывании α_{2k} образованная область D_2, ограниченная предельными циклами Γ_1, Γ_2 и заполненная спиралями, будет увеличиваться, так как по свойствам параметра, поворачивающего векторное поле, внутренний неустойчивый цикл Γ_2 будет уменьшаться, а внешний устойчивый цикл Γ_1 будет увеличиваться. Расстояние между витками спиралей области D_2 будет, естественно, тоже увеличиваться, что, в свою очередь, будет препятствовать появлению полуустойчивого предельного цикла в этой области при $\alpha_{2k} < \alpha^{12}_{2k}$.

Таким образом, не существует таких значений параметров $\alpha^*_{2k-2} < 0$ и $\alpha^*_{2k-2} > 0$, для которых система (26) имела бы дополнительный полуустойчивый предельный цикл, окружающий начало координат. Очевидно также, что не существует и других значений параметров α_{2k} и α_{2k-2}, для которых система (26) имела бы более двух предельных циклов, окружающих эту особую точку. По той же самой причине дополнительный полуустойчивый предельный цикл не может появиться и вокруг других особых точек (фокусов или узлов) системы (26). Следовательно, $l+2$ — это и есть максимальное число предельных циклов системы (26).

Предположим, что система (26) имеет два предельных цикла, Γ_1 и Γ_2, окружающих начало координат, и l предельных циклов, окружающих другие особые точки (26) (это всегда возможно, если $-\alpha_{2k} \gg \alpha_{2k-2} > 0$). Зафиксируем параметры α_{2k}, α_{2k-2} и рассмотрим более общую систему, вводя в (26) третий параметр, $\alpha_{2k-4} < 0$:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = y, \\ &\dot{y} = x(x-1)(1 + b_1 x + \ldots b_{2l-1} x^{2l-1}) + \\ &+ y(\beta_1 x + \ldots + \beta_{2k-1} x^{2k-1} + \alpha_{2k-4} x^{2k-4} + \alpha_{2k-2} x^{2k-2} + \alpha_{2k} x^{2k}) + y^2 (c_0 + c_1 x + \ldots + c_{2n} x^{2n}). \end{aligned} \tag{28}$$

При убывании α_{2k-4} векторное поле (28) повернется по часовой стрелке и фокус в начале координат сразу же изменит свой характер устойчивости, порождая третий (устойчивый) предельный цикл, Γ_3. При дальнейшем убывании α_{2k-4} цикл Γ_3 сольется с Γ_2, образуя полуустойчивый предельный цикл Γ_{23}, который затем исчезнет в «уплотнении» траекторий, окружающих начало координат; цикл Γ_1 при этом будет увеличиваться в размерах, исчезая в сепаратрисном цикле (28).

Пусть система (28) имеет три предельных цикла, окружающих начало координат: $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$. Может ли при убывании α_{2k-4} появиться еще один полуустойчивый предельный цикл, после расщепления которого система (28) имела бы пять предельных циклов вокруг начала координат? Ясно, что такой предельный цикл не может появиться ни в области D_2, ограниченной циклами Γ_1 и Γ_2, ни в области D_4, ограниченной началом координат и Γ_3, так как при уменьшении α_{2k-4} расстояние между витками спиралей, заполняющих эти области, будет увеличиваться. Рассмотрим две другие области: D_1, ограниченную изнутри циклом Γ_1, и D_3, ограниченную циклами Γ_2 и Γ_3. Как и ранее, докажем невозможность появления полуустойчивого предельного цикла в этих областях от противного.

Предположим, что для некоторых значений параметров $\alpha_{2k}^* < 0,$ $\alpha_{2k-2}^* > 0$ и $\alpha_{2k-4}^* < 0$ такой полуустойчивый предельный цикл существует. Вернемся снова к системе (24), введем в нее сначала параметры $\alpha_{2k-2} > 0$ и $\alpha_{2k-4} < 0$:

$$\begin{gathered}\dot{x} = y,\\ \dot{y} = x(x-1)(1+b_1x+\ldots b_{2l-1}x^{2l-1}) + \\ +y(\beta_1 x+\ldots+\beta_{2k-1}x^{2k-1}+\alpha_{2k-4}x^{2k-4}+\alpha_{2k}x^{2k})+y^2(c_0+c_1x+\ldots+c_{2n}x^{2n}).\end{gathered} \tag{29}$$

Зафиксируем параметр α_{2k-2} при значении α_{2k-2}^*. При убывании α_{2k-4} сепаратрисный цикл, образованный вокруг начала координат, породит устойчивый предельный цикл Γ_1. Зафиксируем α_{2k-4} при значении α_{2k-4}^* и введем в (29) параметр $\alpha_{2k} > 0,$ получая систему (28).

Так как, по нашему предположению, система (28) при $\alpha_{2k} > \alpha_{2k}^*$ имеет три предельных цикла, то существует некоторое значение параметра α_{2k}^{23} $(\alpha_{2k}^{23} < \alpha_{2k}^* < 0),$ для которого в этой системе появляется полуустойчивый предельный цикл Γ_{23}, расщепляющийся при дальнейшем убывании α_{2k} на неустойчивый цикл Γ_2 и устойчивый Γ_3. Образованная область D_3, ограниченная циклами Γ_2, Γ_3, а также область D_1, ограниченная изнутри циклом Γ_1, будут увеличиваться, и спирали, заполняющие эти области, будут раскручиваться, исключая возможность появления там полуустойчивого предельного цикла.

Все другие комбинации параметров α_{2k}, α_{2k-2} и α_{2k-4} рассматриваются совершенно аналогично. Откуда следует, что система (28) имеет не более $l + 3$ предельных циклов.

А если мы продолжим процедуру последовательного введения параметров $\alpha_{2k},\ldots,\alpha_2$ в систему (24),

$$\begin{gathered}\dot{x} = y,\\ \dot{y} = x(x-1)(1+b_1x+\ldots b_{2l-1}x^{2l-1}) + \\ +y(\beta_1 x+\ldots+\beta_{2k-1}x^{2k-1}+\alpha_2x^2+\ldots+\alpha_{2k}x^{2k})+y^2(c_0+c_1x+\ldots+c_{2n}x^{2n}),\end{gathered} \tag{30}$$

то можем получить k предельных циклов, окружающих начало координат, и l, окружающих другие особые точки (фокусы или узлы) $(-\alpha_{2k} \gg \alpha_{2k-2} \gg -\alpha_{2k-4} \gg \alpha_{2k-6} \gg \ldots)$.

Затем с помощью параметра $\alpha_0 \neq \beta_1+\ldots+\beta_{2k-1}$ $(\alpha_0 > \alpha_0^*,$ если $\alpha_2 < 0,$ и $\alpha_0 < \alpha_0^*,$ если $\alpha_2 > 0)$ мы получим каноническую систему (16) с дополнительным предельным циклом, окружающим начало координат, и сможем утверждать, что эта система (а значит, и полиномиальная система Эйлера–Лагранжа–Льенара (7)) имеет не более $k + l + 1$ предельных циклов, $k + 1$ из которых окружают начало координат, а l — по одному другие антиседла (фокусы или узлы) системы (16) (и (7)). Теорема доказана. ■

3. Заключение

В данной статье был проведен глобальный бифуркационный анализ и решена проблема о максимальном числе и распределении предельных циклов (автоколебательных режимов, соответствующих состояниям динамического равновесия) в планарной полиномиальной механической системе типа Эйлера–Лагранжа–Льенара. Математический подход, используемый в статье, может быть применен для качественного анализа многопараметрических планарных полиномиальных динамических систем, моделирующих внутреннюю динамику реальных процессов, протекающих в электротехнических, экологических, биомедицинских и других системах.

Список литературы (References)

Баутин Н. Н., Леонтович Е. А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. — М.: Наука, 1990.

Bautin N. N., Leontovich E. A. Metody i priemy kachestvennogo issledovaniya dinamicheskikh sistem na ploskosti [Methods and ways of the qualitative analysis of dynamical systems in a plane]. — Moscow: Nauka, 1990 (in Russian).

Agarwal A., Ananthkrishnan N. Bifurcation analysis for onset and cessation of surge in axial flow compressors // Int. J. Turbo Jet-Eng. — 2000. — Vol. 17. — P. 207–217.

Bessa W. M., Dutra M. S., Kreuzer E. Depth control of remotely operated underwater vehicles using an adaptive fuzzy sliding mode controller // Robotics Autonom. Systems. — 2008. — Vol. 56. — P. 670–677.

Chang-Jian C. Nonlinear analysis of a rub-impact rotor supported by turbulent couple stress fluid film journal bearings under quadratic damping // Nonlinear Dynamics. — 2009. — Vol. 156. — P. 297–314.

de Maesschalck P., Dumortier F. Classical Liénard equations of degree $n \geq 6$ can have $\left[(n-1)/2\right]+2$ limit cycles // J. Differential Equations. — 2011. — Vol. 250. — P. 2162–2176.

Gaiko V. A. Global bifurcation theory and Hilbert's sixteenth problem. — Boston: Kluwer Academic Publishers, 2003.

Gaiko V. A. Limit cycles of Liénard-type dynamical systems // Cubo. — 2008. — Vol. 10, No. 3. — P. 115–132.

Gaiko V. A. On the geometry of polynomial dynamical systems // J. Math. Sci. — 2009. — Vol. 157, No. 3. — P. 400–412.

Gaiko V. A. On limit cycles surrounding a singular point // Differ. Equ. Dyn. Syst. — 2012. — Vol. 20, No. 3. — P. 329–337.

Gaiko V. A. The applied geometry of a general Liénard polynomial system // Appl. Math. Letters. — 2012. — Vol. 25, No. 12. — P. 2327–2331.

Gaiko V. A. Limit cycle bifurcations of a general Liénard system with polynomial restoring and damping functions // Int. J. Dyn. Syst. Differ. Equ. — 2012. — Vol. 4, No. 3. — P. 242–254.

Gaiko V. A. Limit cycle bifurcations of a special Liénard polynomial system // Adv. Dyn. Syst. Appl. — 2014. — Vol. 9, No. 1. — P. 109–123.

Gaiko V. A. Maximum number and distribution of limit cycles in the general Liénard polynomial system // Adv. Dyn. Syst. Appl. — 2015. — Vol. 10, No. 2. — P. 177–188.

Laalej H., Lang Z. Q., Daley S., Zazas I., Billings S. A., Tomlinson G. R. Application of non-linear damping to vibration isolation: an experimental study // Nonlin. Dynamics. — 2012. — Vol. 69. — P. 409–421.

Lins A., De Melo W., Pugh C. C. On Liénard's equation // Lecture Notes in Mathematics. — Springer, Berlin, 1977. — Vol. 597. — P. 335–357.

Owens D. B., Capone F. J., Hall R. M., Brandon J. M., Chambers J. R. Transonic free-to-roll analysis of abrupt wing stall on military aircraft // J. Aircraft. — 2004. — Vol. 41. — P. 474–484.

Savin S., Khusainov R., Klimchik A. Control of actuators with linearized variable stiffness // IFAC-PapersOnLine. — 2019. — Vol. 52. — P. 713–718.

Slight T. J., Romeira B., Liquan W., Figueiredo J. M. L., Wasige E., Ironside C. N. A. Liénard oscillator resonant tunnelling diode-laser diode hybrid integrated circuit: model and experiment // IEEE J. Quantum Electronics. — 2008. — Vol. 44. — P. 1158–1163.

Shiriaev A., Perram J., Canudas-de-Wit C. Constructive tool for an orbital stabilization of under-actuated nonlinear systems: virtual constraint approach // IEEE Trans. Automat. Control. — 2005. — Vol. 50. — P. 1164–1176.

Shiriaev A., Robertsson A., Perram J., Sandber A. Periodic motion planning for virtually constrained Euler–Lagrange systems // Syst. Control Letters. — 2006. — Vol. 55. — P. 900–907.

Smale S. Mathematical problems for the next century // Math. Intelligencer. — 1998. — Vol. 20. — P. 7–15.