

УДК: 519.63

Бикомпактные схемы для задач газовой динамики: обобщение на сложные расчетные области методом свободной границы

М. Д. Брагин^{1,2,a}, Б. В. Рогов^{1,2,b}

¹Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН,
Россия, 125047, г. Москва, Миусская пл., д. 4

²Московский физико-технический институт (НИУ),
Россия, 141701, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9

E-mail: ^a michael@bragin.cc, ^b rogov.boris@gmail.com

Получено 13.02.2020, после доработки — 27.02.2020.

Принято к публикации 02.03.2020.

Работа посвящена использованию бикомпактных схем для численного решения эволюционных уравнений гиперболического типа. Основным преимуществом схем этого класса является сочетание двух положительных свойств: пространственной аппроксимации высокого четного порядка на шаблоне, всегда занимающем одну ячейку сетки, и спектрального разрешения, лучшего по сравнению с классическими компактными конечно-разностными схемами того же порядка пространственной аппроксимации. Рассматривается одна особенность бикомпактных схем — жесткая привязка их пространственной аппроксимации к декартовым сеткам (с ячейками-параллелепипедами в трехмерном случае). Она делает затруднительным применение бикомпактных схем к решению задач в сложных расчетных областях в рамках подхода неструктурированных сеток. Предлагается решать эту проблему путем применения известных методов аппроксимации границ сложной формы и соответствующих им краевых условий на декартовых сетках. Обобщение бикомпактных схем на задачи в геометрически сложных областях проводится на примере задач газовой динамики и уравнений Эйлера. В качестве конкретного метода, позволяющего учесть на декартовых сетках влияние твердых границ произвольной формы на течение газа, выбирается метод свободной границы. Приводится краткое описание этого метода, выписываются его уравнения. Для них строятся бикомпактные схемы четвертого порядка аппроксимации по пространству с локально-одномерным расщеплением. Компенсационный поток метода свободной границы дискретизируется со вторым порядком точности. Для интегрирования по времени в получаемых схемах применяются неявный метод Эйлера и L -устойчивый жестко-точный трехстадийный однократно диагонально-неявный метод Рунге–Кутты третьего порядка точности. Разработанные бикомпактные схемы тестируются на трех двумерных задачах: о стационарном сверхзвуковом обтекании с числом Маха, равным трем, одного круглого цилиндра и группы из трех круглых цилиндров, а также о нестационарном взаимодействии плоской ударной волны и круглого цилиндра в канале с плоскопараллельными стенками. Полученные результаты хорошо согласуются с результатами других работ: твердые тела физически корректно влияют на поток газа, давление в контрольных точках на поверхностях тел рассчитывается с точностью, в целом отвечающей выбранному разрешению сетки и уровню численной диссипации.

Ключевые слова: газовая динамика, метод свободной границы, декартовы сетки, бикомпактные схемы, высокоточные схемы, неявные схемы

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-31-00045.

UDC: 519.63

Bicompact schemes for gas dynamics problems: introducing complex domains using the free boundary method

M. D. Bragin^{1,2,a}, B. V. Rogov^{1,2,b}

¹Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS,
4 Miusskaya square, Moscow, 125047, Russia

¹Moscow Institute of Physics and Technology (NRU),
9 Institutskiy per., Dolgoprudny, 141701, Russia

E-mail: ^a michael@bragin.cc, ^b rogov.boris@gmail.com

Received 13.02.2020, after completion – 27.02.2020.

Accepted for publication 02.03.2020.

This work is dedicated to application of bicompact schemes to numerical solution of evolutionary hyperbolic equations. The main advantage of this class of schemes lies in combination of two beneficial properties: the first one is spatial approximation of high even order on a stencil that always occupies only one mesh cell; the second one is spectral resolution which is better in comparison to classic compact finite-difference schemes of the same order of spatial approximation. One feature of bicompact schemes is considered: their spatial approximation is rigidly tied to Cartesian meshes (with parallelepiped-shaped cells in three-dimensional case). This feature makes rather challenging any application of bicompact schemes to problems with complex computational domains as treated in the framework of unstructured meshes. This problem is proposed to be solved using well-known methods for treating complex-shaped boundaries and their corresponding boundary conditions on Cartesian meshes. The generalization of bicompact schemes on problems in geometrically complex domains is made in case of gas dynamics problems and Euler equations. The free boundary method is chosen as a particular tool to introduce the influence of arbitrary-shaped solid boundaries on gas flows on Cartesian meshes. A brief description of this method is given, its governing equations are written down. Bicompact schemes of fourth order of approximation in space with locally one-dimensional splitting are constructed for equations of the free boundary method. Its compensation flux is discretized with second order of accuracy. Time stepping in the obtained schemes is done with the implicit Euler method and the third order accurate L -stable stiffly accurate three-stage singly diagonally implicit Runge–Kutta method. The designed bicompact schemes are tested on three two-dimensional problems: stationary supersonic flows with Mach number three past one circular cylinder and past three circular cylinders; the non-stationary interaction of planar shock wave with a circular cylinder in a channel with planar parallel walls. The obtained results are in a good agreement with other works: influence of solid bodies on gas flows is physically correct, pressure in control points on solid surfaces is calculated with the accuracy appropriate to the chosen mesh resolution and level of numerical dissipation.

Keywords: gas dynamics, free boundary method, Cartesian meshes, bicompact schemes, high-order schemes, implicit schemes

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2020, vol. 12, no. 3, pp. 487–504 (Russian).

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research, project No. 18-31-00045

Введение

Многие математические модели, применяемые в фундаментальной и прикладной физике, требуют решения краевых задач для уравнений в частных производных. Решить их нередко удастся только приближенно при помощи тех или иных численных методов. Среди последних большое значение имеют схемы высокого порядка точности, поскольку они позволяют достичь заданной точности решения на менее подробных сетках, т. е., другими словами, при меньших вычислительных затратах, что особенно актуально для решения многомерных задач [Ekaterinaris, 2005].

Существенное развитие в последнее время получил класс бикомпактных схем для уравнений гиперболического типа [Рогов, 2013; Chikitkin et al., 2015; Брагин, Рогов, 2016; Брагин, Рогов, 2018; Chikitkin, Rogov, 2019; Rogov, 2019; Bragin, Rogov, 2020]. Пространственная аппроксимация в этих схемах имеет высокий четный порядок (четвертый, шестой, восьмой и так далее [Chikitkin, Rogov, 2019]) и допускает непрерывное конечно-элементное представление [Bragin, Rogov, 2020], а их шаблон всегда содержится целиком в одной ячейке сетки. Кроме того, бикомпактные схемы имеют лучшее спектральное разрешение по сравнению с классическими компактными схемами того же порядка аппроксимации [Rogov, 2019]. Таким образом, бикомпактные схемы сочетают в себе лучшие черты конечно-элементных и компактных конечно-разностных схем, что и является их основным преимуществом. За счет того, что бикомпактные схемы выводятся методом прямых, временная аппроксимация в них настраивается под конкретную задачу и может быть выбрана подходящего порядка. В многомерном случае бикомпактные схемы могут быть эффективно реализованы методом локально-одномерного расщепления [Брагин, Рогов, 2016] или методом итерируемой приближенной факторизации (без ошибки расщепления) [Брагин, Рогов, 2018].

Однако бикомпактная пространственная аппроксимация по своей структуре жестко привязана к декартовым сеткам с ячейками-параллелепипедами. Очевидно, эта особенность делает проблематичным решение задач в областях произвольной формы. Тем не менее обобщить схему на сложные области возможно и на декартовых сетках, не прибегая к использованию неструктурированных сеток.

В литературе предлагается множество различных методов аппроксимации границ сложной формы и соответствующих им краевых условий на декартовых сетках. Перечислим некоторые из этих методов, ограничиваясь аэро- и гидродинамикой как областью их приложения.

Дискретизацию решаемых дифференциальных уравнений вблизи границ можно выполнить непосредственно в конечных объемах, получающихся в результате пересечения ячеек-параллелепипедов с расчетной областью, что приводит к методу усеченных ячеек (cut-cell method) [Mittal, Iaccarino, 2005; Ji et al., 2010; Hartmann et al., 2011; Bouchon et al., 2012; Neusius, Schmidt, 2013]. Несмотря на некоторые недостатки (сложность реализации и жесткие условия на численную устойчивость из-за ячеек малого объема), сильной стороной этого метода является его строгая консервативность. В методе образующего куба (building cube method) [Kim et al., 2007] декартова сетка очень сильно сгущается локально у границ, после чего реальные границы заменяется на границы этих мелких ячеек-параллелепипедов (своего рода угловатую «лесенку»). В гибридном подходе [Luo et al., 2006; Luo et al., 2009] у границ используется бессеточный метод с аппроксимацией потоковых членов методом наименьших квадратов, а в остальной расчетной области — стандартный сеточный метод. В методе [Sjögreen, Petersson, 2007], разработанном для конечно-разностных схем, потоки в точках пересечения границы и ячеек сетки вычисляются экстраполяцией по данным из узлов сетки внутри расчетной области. В методе фиктивных точек (ghost points) [Faroq et al., 2013], схожем с методом [Sjögreen, Petersson, 2007], численное решение продолжается на узлы сетки, лежащие за пределами расчетной области, и определяется там

из соображений симметрии по решению внутри области. В методе свободной границы [Меньшов, Корнев, 2014; Меньшов, Павлухин, 2016] влияние границы на решение моделируется путем добавления источника, так называемого компенсационного потока, в решаемые дифференциальные уравнения. Решение при этом вычисляется однородным образом, в том числе и за пределами исходной расчетной области сложной формы; влияние определенного там вспомогательного решения на искомое реальное решение исключается при помощи специальной процедуры расчета потоков на границах ячеек. Отметим, что метод [Меньшов, Корнев, 2014; Меньшов, Павлухин, 2016] может применяться и на сетках с адаптивным измельчением [Афендииков и др., 2017].

Целью настоящей работы является обобщение бикompактных схем на задачи в геометрически сложных расчетных областях в рамках подхода декартовых сеток. Поскольку аппроксимация границ сложной формы и условий на них сильно зависит от решаемых уравнений в частных производных, мы не будем рассматривать все возможные случаи и сделаем это применительно к газовой динамике и уравнениям Эйлера. Указанное обобщение проведем при помощи упомянутого выше метода свободной границы (далее сокращенно — МСГ), одного из новых и алгоритмически простых методов.

Работа излагается следующим образом. В § 1 кратко описывается МСГ для задач газовой динамики, приводятся уравнения этого метода. В § 2 для этих уравнений строятся бикompактные схемы четвертого порядка аппроксимации по пространству с локально-одномерным расщеплением. В § 3 разработанные схемы тестируются на двух задачах о стационарном обтекании одного и трех круглых цилиндров сверхзвуковым потоком, а также на одной задаче о нестационарном взаимодействии плоской ударной волны и круглого цилиндра в плоскопараллельном канале.

1. Описание МСГ

Прежде всего дадим краткое описание МСГ, следуя работе [Меньшов, Павлухин, 2016]. Рассмотрим задачу об обтекании системы твердых тел потоком идеального (т. е. невязкого) газа (см. рис. 1). Совокупная поверхность этих тел Σ_w полагается непроницаемой для газа. Обозначим через \mathbf{n} поле внешних единичных нормалей к Σ_w . Не будем пока конкретизировать способ задания Σ_w и \mathbf{n} , считая их так или иначе известными.

Здесь необходимо сделать одну оговорку. В МСГ допускается движение тел относительно выбранной системы отсчета, а также относительно друг друга без взаимных пересечений [Меньшов, Корнев, 2014]. Простота учета этого движения является одним из преимуществ МСГ.

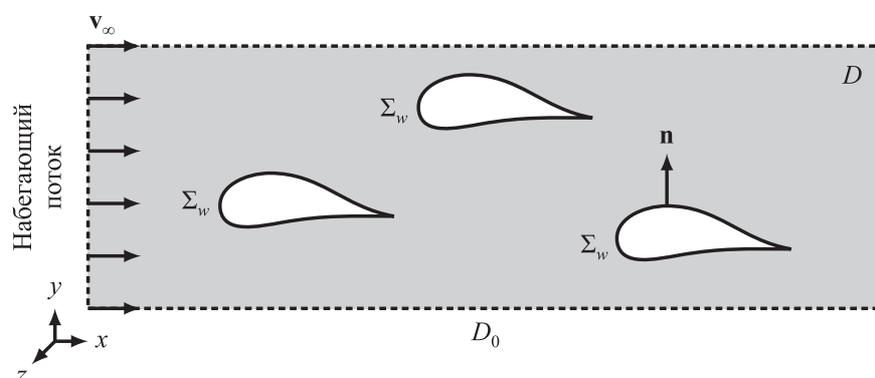


Рис. 1. К постановке задачи обтекания системы твердых тел потоком идеального газа. Пунктиром изображена граница области D_0 , сплошной линией — совокупная поверхность твердых тел Σ_w . Серым цветом закрашена область D — занятая газом часть области D_0

Однако в настоящей работе мы ограничимся случаем неподвижной поверхности Σ_w . Как было указано во введении, нас пока интересует лишь принципиальное обобщение бикомпактных схем на задачи газовой динамики, решаемые в геометрически сложных областях. Изменяющиеся области можно включить в дальнейшем, например, при помощи метода расщепления по физическим процессам, но это выходит за рамки настоящей работы.

Течение газа описывается системой уравнений Эйлера, в декартовых координатах x, y, z имеющей вид

$$\partial_t \mathbf{Q} + \partial_x \mathbf{F} + \partial_y \mathbf{G} + \partial_z \mathbf{H} = \mathbf{0}, \tag{1}$$

где $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{r}, t)$ — искомый вектор консервативных переменных, $\mathbf{r} = (x, y, z)$ — радиус-вектор, $t > 0$ — время, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{Q})$, $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathbf{Q})$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{Q})$ — векторы физических потоков в направлении осей Ox, Oy, Oz соответственно:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{v} \\ E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x \mathbf{v} + p \mathbf{e}_x \\ v_x(E + p) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \rho v_y \\ \rho v_y \mathbf{v} + p \mathbf{e}_y \\ v_y(E + p) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \rho v_z \\ \rho v_z \mathbf{v} + p \mathbf{e}_z \\ v_z(E + p) \end{bmatrix},$$

$$E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{\rho v^2}{2}.$$

Функции $\rho, \mathbf{v} = [v_x, v_y, v_z]^T, p, E$ — соответственно плотность, вектор скорости, давление, удельная энергия (на единицу объема) газа, $v = |\mathbf{v}|$ — абсолютная величина скорости, $\mathbf{e}_{x,y,z}$ — орты декартовой системы координат. За уравнение состояния газа принимается уравнение Клапейрона–Менделеева, $\gamma = \text{const}$ — показатель адиабаты. Символ $\partial_x \equiv \partial/\partial x$. Непроницаемость поверхности Σ_w выражается граничным условием непротекания:

$$v_n = 0, \quad \mathbf{r} \in \Sigma_w. \tag{2}$$

Стандартный подход к численному решению данной задачи обтекания состоит в том, чтобы поместить эту систему тел в достаточно большую расчетную область D_0 максимальной простой формы (как правило, это параллелепипед, см. также рис. 1), далее взять область D с границей $\Sigma_w \cup \partial D_0$, построить в ней сетку, связанную с Σ_w (т. е. «подогнанную» к границам обтекаемых тел), аппроксимировать на ней уравнения Эйлера (1) и граничные условия для них и, наконец, посчитать решение полученных дискретных уравнений. Очевидно, в этом подходе начально-краевая задача для уравнений Эйлера изначально ставится в геометрически сложной области D .

Альтернативный подход МСГ состоит из двух элементов.

Во-первых, уравнения Эйлера (1) заменяются на модифицированные уравнения Эйлера с источником:

$$\partial_t \mathbf{Q} + \partial_x \mathbf{F} + \partial_y \mathbf{G} + \partial_z \mathbf{H} = -\mathbf{S}_w. \tag{3}$$

Вектор $\mathbf{S}_w = \mathbf{S}_w(\mathbf{r}, \mathbf{Q})$ — так называемый компенсационный поток, отличный от нуля только на Σ_w :

$$\mathbf{S}_w = \begin{bmatrix} \rho v_n \\ \rho v_n \mathbf{v} + (p - p_w) \mathbf{n} \\ v_n(E + p) \end{bmatrix} \delta(\mathbf{r}; \Sigma_w), \tag{4}$$

где $\delta(\mathbf{r}; \Sigma_w)$ — поверхностная дельта-функция, определяемая соотношением

$$\int_V \varphi(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r}; \Sigma_w) dV = \int_{\Sigma_w \cap V} \varphi(\mathbf{r}) d\Sigma$$

для любой пробной функции $\varphi(\mathbf{r})$ и объема V (интеграл по $\Sigma_w \cap V$ поверхностный). Давление p_w отвечает за реакцию Σ_w (реакцию «стенки»), оно вычисляется по формуле

$$p_w = pf(M_w), \quad M_w = \frac{v_n}{c},$$

$$f(M_w) = \begin{cases} 1 + \frac{\gamma(\gamma+1)}{4}M_w^2 + \sqrt{\gamma^2M_w^2 + \frac{\gamma^2(\gamma+1)^2}{16}M_w^4} & \text{при } M_w \leq 0, \\ \left(1 - \frac{\gamma-1}{2}M_w\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} & \text{при } M_w > 0. \end{cases}$$

Величина $c = \sqrt{\gamma p/\rho}$ — скорость звука в газе. Начально-краевая задача для системы уравнений (3) ставится и решается не в области D , а в области D_0 , в том числе и внутри твердых тел. Граничное условие (2) выпадает из постановки задачи, поскольку оно моделируется источником ($-\mathbf{S}_w$) в системе (3). Решение, вычисляемое внутри тел, носит вспомогательный характер и, по сути, требуется, только если поверхность Σ_w подвижная, так как в этом случае точки D_0 могут с течением времени покидать твердые тела и попадать в них. В силу простоты области D_0 в ней генерируется декартова сетка (быть может, с адаптивным измельчением), на которой и аппроксимируется система (3).

Во-вторых, в МСГ предполагается, что для численного решения (3) применяется схема, в которой потоки на границах ячеек находятся посредством решения задачи Римана о распаде произвольного разрыва. Искомые потоки при этом, что важно, вычисляются по особому принципу. Если обе ячейки лежат либо полностью внутри тела, либо частично в газе, то потоки на границе между ними считаются как обычно (т. е. как изначально предусмотрено в схеме). Если ячейка номер i_1 лежит полностью внутри тела, а ячейка номер i_2 — частично внутри газа, то в любой точке границы между ними поток для ячейки i_1 считается как обычно, а поток для ячейки i_2 — по значению \mathbf{Q} из ячейки i_2 , без распада разрыва. Проще говоря, при вычислении потоков по такому принципу информация передается только от реального течения снаружи тел к вспомогательному течению внутри тел, но никогда наоборот.

2. Бикомпактные схемы для уравнений МСГ

Зададимся целью построить бикомпактные схемы с локально-одномерным пространственным расщеплением (см. [Марчук, 1988; Самарский, 1989; Яненко, 1967], а также [Брагин, Рогов, 2016]) для уравнений МСГ (3). Хорошо известно, что при решении систем уравнений локально-одномерное расщепление приводит к понижению порядка точности по времени до первого. Однако при расчетах стационарных течений это обстоятельство не играет существенной роли, а в нестационарном случае этот порядок можно повысить при помощи, например, симметризации схемы.

Поскольку форма области D_0 может быть любой, возьмем простейшую и наиболее «удобную» для бикомпактных схем — параллелепипед $(0, x_{\max}) \times (0, y_{\max}) \times (0, z_{\max})$. Введем на отрезке $[0, x_{\max}]$ (в общем случае неравномерную) сетку Ω_x :

$$\Omega_x = \{x_0, x_{1/2}, x_1, x_{3/2}, x_2, \dots, x_{N_x}\}, \quad x_0 = 0, \quad x_{N_x} = x_{\max},$$

$$h_{x, j+1/2} = x_{j+1} - x_j - \text{шаг по } x, \quad x_{j+1/2} = \frac{x_j + x_{j+1}}{2}.$$

Аналогично сетке Ω_x введем сетку Ω_y на отрезке $[0, y_{\max}]$ и сетку Ω_z на отрезке $[0, z_{\max}]$ и получим таким образом декартову сетку $\Omega = \Omega_x \times \Omega_y \times \Omega_z$ в замкнутой области \bar{D}_0 . Наши дальнейшие построения опираются на предположение, что координаты точек пересечения поверхности Σ_w

с прямыми, проходящими через узлы сетки Ω параллельно осям Ox, Oy, Oz , а также нормали \mathbf{n} в этих точках пересечения известны или могут быть найдены с любой наперед заданной точностью в момент времени $t = 0$.

Перед тем как перейти непосредственно к написанию схем, нужно расцепить систему трехмерных уравнений (3) на три системы одномерных уравнений. Представим компенсационный поток \mathbf{S}_w как сумму трех слагаемых, каждое из которых отвечает за реакцию стенки только вдоль одной из осей:

$$\mathbf{S}_w = [(\mathbf{F} - \mathbf{F}_w)n_x + (\mathbf{G} - \mathbf{G}_w)n_y + (\mathbf{H} - \mathbf{H}_w)n_z] \delta(\mathbf{r}; \Sigma_w), \quad (5)$$

где потоки $\mathbf{F}_w = \mathbf{F}_w(\mathbf{r}, \mathbf{Q})$, $\mathbf{G}_w = \mathbf{G}_w(\mathbf{r}, \mathbf{Q})$, $\mathbf{H}_w = \mathbf{H}_w(\mathbf{r}, \mathbf{Q})$ определены как

$$\mathbf{F}_w = \begin{bmatrix} 0 \\ p_w \mathbf{e}_x \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_w = \begin{bmatrix} 0 \\ p_w \mathbf{e}_y \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_w = \begin{bmatrix} 0 \\ p_w \mathbf{e}_z \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Используя представление (5) для компенсационного потока \mathbf{S}_w , можно без труда найти уравнения, необходимые для постановки одномерных задач метода пространственного расщепления:

$$\frac{1}{3} \partial_t \mathbf{Q} + \partial_x \mathbf{F} = n_x (\mathbf{F}_w - \mathbf{F}) \delta(\mathbf{r}; \Sigma_w), \quad (6)$$

$$\frac{1}{3} \partial_t \mathbf{Q} + \partial_y \mathbf{G} = n_y (\mathbf{G}_w - \mathbf{G}) \delta(\mathbf{r}; \Sigma_w), \quad (7)$$

$$\frac{1}{3} \partial_t \mathbf{Q} + \partial_z \mathbf{H} = n_z (\mathbf{H}_w - \mathbf{H}) \delta(\mathbf{r}; \Sigma_w). \quad (8)$$

Реализация бикомпактных схем опирается на метод глобального потокового расщепления Лакса–Фридрихса, поэтому каждая из систем уравнений (6)–(8) дополнительно расщепляется на две системы, у одной из которых матрица Якоби вектора потока является положительно определенной всюду, а у другой — отрицательно определенной всюду. Например, система (6) разбивается на

$$\frac{1}{6} \partial_t \mathbf{Q} + \partial_x \mathbf{F}^+ = \frac{1}{2} n_x (\mathbf{F}_w - \mathbf{F}) \delta(\mathbf{r}; \Sigma_w) \quad (9)$$

и

$$\frac{1}{6} \partial_t \mathbf{Q} + \partial_x \mathbf{F}^- = \frac{1}{2} n_x (\mathbf{F}_w - \mathbf{F}) \delta(\mathbf{r}; \Sigma_w). \quad (10)$$

Потоки \mathbf{F}^\pm даются формулой

$$\mathbf{F}^\pm = \frac{1}{2} \mathbf{F} \pm C_2^x \mathbf{Q},$$

где $C_2^x > 0$ — один из параметров потокового расщепления; он подбирается так, чтобы матрицы Якоби

$$\mathbf{A}^+ = \partial_{\mathbf{Q}} \mathbf{F}^+ > 0, \quad \mathbf{A}^- = \partial_{\mathbf{Q}} \mathbf{F}^- < 0$$

для всех значений \mathbf{Q} , возможных в \bar{D}_0 в течение некоторого отрезка времени. Конкретная формула для C_2^x приводится в конце настоящего раздела. Потоковое расщепление для систем (7) и (8) выполняется совершенно аналогично системе (6).

Построим полудискретную бикомпактную схему для системы уравнений (9); полудискретные схемы для системы (10), а также расщепленных по потоку версий систем (7) и (8) строятся аналогично, поэтому мы не будем рассматривать их отдельно. Заметим, что для аппроксимации правой части (9) мы не можем использовать выражения, полученные ранее при выводе бикомпактных схем для уравнений с гладкими источниками (см. [Брагин, Рогов, 2018]), так как эта

правая часть содержит очевидную особенность — δ -функцию, требующую специального подхода.

Рассмотрим отрезок, или одномерную ячейку,

$$\mathcal{I}_{j+1/2,k,\ell} = \{(x, y_k, z_\ell), x \in [x_j, x_{j+1}]\}, \quad (11)$$

где индекс $j = 0, 1, 2, \dots, N_x - 1$ (только целые значения), индексы $k = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots, N_y$ и $\ell = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots, N_z$ (все значения, целые и полуцелые). Возможны два варианта взаимного расположения отрезка $\mathcal{I}_{j+1/2,k,\ell}$ и поверхности Σ_w .

Вариант 1: отрезок $\mathcal{I}_{j+1/2,k,\ell}$ пересекает поверхность Σ_w в единственной точке P , а лежащая в газе часть отрезка $\mathcal{I}_{j+1/2,k,\ell}$ имеет ненулевую длину. Используя значения \mathbf{Q} в трех узлах сетки Ω , принадлежащих $\mathcal{I}_{j+1/2,k,\ell}$, вычислим квадратичную интерполяцию значения \mathbf{Q} в точке P (см. также [Bragin, Rogov, 2020]):

$$\mathbf{Q}_P = (2\xi_P^2 - \xi_P)\mathbf{Q}_{j,k,\ell} + (1 - 4\xi_P^2)\mathbf{Q}_{j+1/2,k,\ell} + (2\xi_P^2 + \xi_P)\mathbf{Q}_{j+1,k,\ell}, \quad (12)$$

где $\xi_P = (x_P - x_{j+1/2})/h_x$ — безразмерная относительная координата точки P в ячейке $\mathcal{I}_{j+1/2,k,\ell}$, x_P — x -координата точки P . Уточним, что $\mathbf{Q}_{j,k,\ell} = \mathbf{Q}_{j,k,\ell}(t)$ — это не проекция точного решения на сетку Ω , а сеточная функция, приближающая его в узлах Ω . Аппроксимируем интеграл по $\mathcal{I}_{j+1/2,k,\ell}$ от правой части (9) следующим образом:

$$\int_{\mathcal{I}_{j+1/2,k,\ell}} \frac{1}{2} n_x (\mathbf{F}_w - \mathbf{F}) \delta(\mathbf{r}; \Sigma_w) dx = \frac{1}{2} n_x(P) [\mathbf{F}_w(P, \mathbf{Q}_P) - \mathbf{F}(\mathbf{Q}_P)] + \mathbf{O}(h_x^3). \quad (13)$$

Формула (13) получена так: интеграл от произведения с δ -функцией заменен на значение подынтегрального выражения без δ -функции в точке P в момент времени t , при этом значение \mathbf{Q} в точке P аппроксимировано квадратичной интерполяцией (12), что и дает погрешность $\mathbf{O}(h_x^3)$. Отметим, что в бикомпактных схемах аппроксимируется не только исходная система уравнений в частных производных, но и ее дифференциальные следствия. Применительно к системе (9) это значит, что нам нужно дополнительно дискретизировать ее производную по x . Приближим интеграл по $\mathcal{I}_{j+1/2,k,\ell}$ от производной по x правой части (9) по такой формуле:

$$\int_{\mathcal{I}_{j+1/2,k,\ell}} \partial_x \left[\frac{1}{2} n_x (\mathbf{F}_w - \mathbf{F}) \delta(\mathbf{r}; \Sigma_w) \right] dx = \mathbf{0}, \quad (14)$$

т. е. мы принимаем значения δ -функции на концах отрезка $\mathcal{I}_{j+1/2,k,\ell}$ нулевыми.

Вариант 2: все остальные взаимные расположения отрезка $\mathcal{I}_{j+1/2,k,\ell}$ и поверхности Σ_w . Здесь возможны три случая. Первый случай: $\mathcal{I}_{j+1/2,k,\ell}$ не пересекается с Σ_w . Это значит, что данный отрезок целиком содержится либо в газе, либо в твердом теле; следовательно, интегралы по нему от правой части (9) и ее производной по x равны нулю в точности. Второй случай: $\mathcal{I}_{j+1/2,k,\ell}$ пересекается с Σ_w более чем в одной точке. Это значит, что особенность в форме тел не разрешается на сетке; интегралы по $\mathcal{I}_{j+1/2,k,\ell}$ от правой части (9) и ее производной по x полагаются равными нулю, так что эта недоразрешенная особенность в форме тел не дает вклада в численное решение. Третий случай: $\mathcal{I}_{j+1/2,k,\ell}$ пересекает Σ_w в единственной точке P , но лежащая в газе часть отрезка $\mathcal{I}_{j+1/2,k,\ell}$ имеет нулевую длину. Другими словами, отрезок $\mathcal{I}_{j+1/2,k,\ell}$ лежит внутри твердого тела целиком, за исключением лишь точки P . В этом случае интегралы по $\mathcal{I}_{j+1/2,k,\ell}$ от правой части (9) и ее производной по x вновь полагаются равными нулю,

поскольку реакция поверхности Σ_w уже учтена в одном из соседних отрезков. Подытоживая вышесказанное, для варианта 2 получим

$$\int_{\mathcal{I}_{j+1/2,k,\ell}} \frac{1}{2} n_x (\mathbf{F}_w - \mathbf{F}) \delta(\mathbf{r}; \Sigma_w) dx = \mathbf{0}, \quad \int_{\mathcal{I}_{j+1/2,k,\ell}} \partial_x \left[\frac{1}{2} n_x (\mathbf{F}_w - \mathbf{F}) \delta(\mathbf{r}; \Sigma_w) \right] dx = \mathbf{0}.$$

Теперь, применяя формулы (13), (14) и учитывая разбор вариантов взаимного расположения отрезка $\mathcal{I}_{j+1/2,k,\ell}$ и поверхности Σ_w , мы можем написать полудискретную бикомпактную схему для системы (9):

$$\begin{cases} \frac{1}{6} \frac{d}{dt} (A_0^x \mathbf{Q}_{j+1/2,k,\ell}) + \Lambda_1^x \mathbf{F}_{j+1/2,k,\ell}^+ = \Phi_{j+1/2,k,\ell}, \\ \frac{1}{6} \frac{d}{dt} (\Lambda_1^x \mathbf{Q}_{j+1/2,k,\ell}) + \Lambda_2^x \mathbf{F}_{j+1/2,k,\ell}^+ = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (15)$$

где

$$\Phi_{j+1/2,k,\ell} = \begin{cases} \frac{n_x(P)}{2h_x} [\mathbf{F}_w(P, \mathbf{Q}_P) - \mathbf{F}(\mathbf{Q}_P)] & \text{для варианта 1,} \\ \mathbf{0} & \text{для варианта 2.} \end{cases}$$

Разностные операторы A_0^x , Λ_1^x , Λ_2^x определяются для произвольной сеточной функции U формулами

$$\begin{aligned} A_0^x U_{j+\frac{1}{2},k,\ell} &= \frac{U_{j,k,\ell} + 4U_{j+\frac{1}{2},k,\ell} + U_{j+1,k,\ell}}{6}, & \Lambda_1^x U_{j+\frac{1}{2},k,\ell} &= \frac{U_{j+1,k,\ell} - U_{j,k,\ell}}{h_x}, \\ \Lambda_2^x U_{j+\frac{1}{2},k,\ell} &= \frac{4(U_{j,k,\ell} - 2U_{j+\frac{1}{2},k,\ell} + U_{j+1,k,\ell})}{h_x^2}. \end{aligned}$$

Отметим, что погрешность аппроксимации для первого уравнения схемы (15) составляет $\mathbf{O}(h_x^2)$ у границы твердых тел (только за счет члена $\Phi_{j+1/2,k,\ell}$) и $\mathbf{O}(h_x^4)$ вдали от нее. На это можно смотреть как на схему четвертого порядка аппроксимации по пространству, граничные условия для которой имеют второй порядок аппроксимации. Вообще говоря, формулу (13) можно написать с большей точностью, применяя для этого интерполяции более высоких порядков по значениям не только в узлах отрезка $\mathcal{I}_{j+1/2,k,\ell}$, но и по значениям в узлах его соседей. Однако расширение шаблона за пределы одной ячейки противоречит основной идее бикомпактных схем, поэтому порядок аппроксимации внутренних граничных условий на Σ_w (т.е. членов компенсационного потока МСГ) предпочтительнее повышать путем использования бикомпактных схем более высокого порядка аппроксимации по пространству.

Для аппроксимации по времени в полудискретной схеме (15) можно использовать любой устойчивый метод Рунге–Кутты (предпочтительно применение именно одношаговых методов, так как одномерная схема (15) является частью пространственного и потокового расщеплений). В расчетах настоящей работы мы используем два метода: неявный метод Эйлера и L -устойчивый жестко-точный трехстадийный SDIRK-метод (однократно диагонально-неявный метод Рунге–Кутты) третьего порядка [Alexander, 1977, теорема 5]. Обозначим операторы перехода соответствующих им бикомпактных схем как $\mathbf{S}_1^{x,+}(\tau)$ и $\mathbf{S}_3^{x,+}(\tau)$, где τ — шаг по времени. Аналогичным образом обозначим операторы перехода у полностью дискретных бикомпактных схем для остальных систем уравнений: $\mathbf{S}_1^{x,-}(\tau)$ и $\mathbf{S}_3^{x,-}(\tau)$ для (10); $\mathbf{S}_1^{y,\pm}(\tau)$ и $\mathbf{S}_3^{y,\pm}(\tau)$ для (7); $\mathbf{S}_1^{z,\pm}(\tau)$ и $\mathbf{S}_3^{z,\pm}(\tau)$ для (8). Каждый из перечисленных операторов перехода реализуется бегущим счетом по соответствующему ему направлению (см. [Рогов, 2013]). Кроме того, обозначим через \mathbf{Q}^n численное решение на слое t^n , $n = 0, 1, \dots$

Таким образом, мы получаем две полностью дискретные локально-одномерные бикомпактные схемы для системы уравнений МСГ (3): схему DIRK1B4 с результирующим оператором перехода

$$\mathbf{Q}^{n+1} = \mathbf{S}_1^{z,-}\left(\frac{\tau}{6}\right) \mathbf{S}_1^{y,-}\left(\frac{\tau}{6}\right) \mathbf{S}_1^{x,-}\left(\frac{\tau}{6}\right) \mathbf{S}_1^{z,+}\left(\frac{\tau}{6}\right) \mathbf{S}_1^{y,+}\left(\frac{\tau}{6}\right) \mathbf{S}_1^{x,+}\left(\frac{\tau}{6}\right) \mathbf{Q}^n \quad (16)$$

и схему SDIRK3B4 с результирующим оператором перехода

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^{n+1} = \mathbf{S}_{\text{CLM}}(C_1) \frac{1}{2} \left[\mathbf{S}_3^{x,+}\left(\frac{\tau}{6}\right) \mathbf{S}_3^{y,+}\left(\frac{\tau}{6}\right) \mathbf{S}_3^{z,+}\left(\frac{\tau}{6}\right) \mathbf{S}_3^{x,-}\left(\frac{\tau}{6}\right) \mathbf{S}_3^{y,-}\left(\frac{\tau}{6}\right) \mathbf{S}_3^{z,-}\left(\frac{\tau}{6}\right) + \right. \\ \left. + \mathbf{S}_3^{z,-}\left(\frac{\tau}{6}\right) \mathbf{S}_3^{y,-}\left(\frac{\tau}{6}\right) \mathbf{S}_3^{x,-}\left(\frac{\tau}{6}\right) \mathbf{S}_3^{z,+}\left(\frac{\tau}{6}\right) \mathbf{S}_3^{y,+}\left(\frac{\tau}{6}\right) \mathbf{S}_3^{x,+}\left(\frac{\tau}{6}\right) \right] \mathbf{Q}^n. \quad (17) \end{aligned}$$

В схеме SDIRK3B4 дополнительно применяется метод консервативной монотонизации [Bragin, Rogov, 2020], что формально выражается действием оператора $\mathbf{S}_{\text{CLM}}(C_1)$, где $C_1 > 0$ — единственный настраиваемый параметр этого метода. Заметим, что все расщепления в схеме SDIRK3B4 симметризованы по пространственным направлениям.

Напомним, что, помимо компенсационного потока \mathbf{S}_w , важным элементом МСГ является особый принцип вычисления потоков на границах между ячейками, лежащими частично в газе, и ячейками, лежащими полностью внутри твердых тел. Этот принцип легко реализуется в конечно-объемных схемах и разрывных схемах Галёркина, допускающих некоторую свободу в определении потоков на границах между ячейками. Однако реализовать его для бикомпактных схем напрямую нельзя. Во-первых, данный класс схем оперирует сеточными функциями, однозначно определенными в том числе в узлах на границах между ячейками, т. е. аппроксимация в бикомпактных схемах непрерывная. Во-вторых, в силу этой непрерывности для вычисления потоков в бикомпактных схемах не нужно решать задачу о распаде произвольного разрыва — поток непосредственно считается на значении \mathbf{Q} в рассматриваемом узле сетки; определить поток по какой-то другой формуле нельзя.

Реализуем этот принцип МСГ иным способом. Будем говорить, что ячейка

$$K_i = [x_j, x_{j+1}] \times [y_k, y_{k+1}] \times [z_\ell, z_{\ell+1}], \quad i = jN_y N_z + kN_z + \ell + 1,$$

где

$$j = 0, 1, 2, \dots, N_x - 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N_y - 1, \quad \ell = 0, 1, 2, \dots, N_z - 1,$$

имеет тип 1, если она целиком лежит в газе или хотя бы один из 3 отрезков вида (11), проходящих через ее центр (1 отрезок параллелен оси Ox , 1 — оси Oy , 1 — оси Oz), пересекается с Σ_w по варианту 1. В противном случае будем говорить, что эта ячейка имеет тип 2. Пусть Ω' — подмножество сетки Ω , состоящее из узлов, лежащих на границах между ячейками типов 1 и 2. Тогда сделаем сеточные функции \mathbf{Q}^n и любые другие искомые сеточные функции двузначными в узлах Ω' . Далее при обходе ячеек во время реализации очередного оператора перехода мы действуем следующим образом. Если искомое значение \mathbf{Q} было найдено в узле Ω' при обходе ячейки типа 1, то это значение дублируется и передается в соседнюю ячейку типа 2. Если искомое значение \mathbf{Q} было найдено в узле Ω' при обходе ячейки типа 2, то это значение сохраняется только со стороны данной ячейки и не передается в соседнюю ячейку типа 1. Тем самым исключается влияние вспомогательного течения внутри тел на реальное течение снаружи: в узлах Ω' выполняется односторонняя передача искомых значений \mathbf{Q} от ячеек типа 1 к ячейкам типа 2.

Наконец, приведем формулу для вычисления параметров потокового расщепления:

$$C_2^d = \left(\frac{1}{2} + \delta\right) V_{\max}^d, \quad V_{\max}^d = \max_{\mathbf{r} \in \Omega} |v_d^n(\mathbf{r})| + c^n(\mathbf{r}), \quad d = x, y, z, \quad (18)$$

где $\delta > 0$ — параметр «запаса положительной/отрицательной определенности» матриц Якоби потоков \mathbf{F}^\pm , \mathbf{G}^\pm , \mathbf{H}^\pm . Шаг по времени τ переменный и вычисляется так:

$$\tau = \frac{\kappa}{1 + \delta} \min_{d=x,y,z} \frac{h_d}{V_{\max}^d}. \quad (19)$$

Буквой κ обозначено число Куранта, являющееся одним из задаваемых параметров используемой схемы. Параметры C_2^x , C_2^y , C_2^z и шаг τ пересчитываются по формулам (18) и (19) только перед переходом со слоя t^n на слой t^{n+1} , т. е. перед реализацией формул (16) или (17).

Итак, мы полностью описали применение МСГ к бикомпактным схемам: аппроксимировали систему уравнений (3) и адаптировали сеточные функции, которыми оперируют бикомпактные схемы, к особому принципу расчета потоков на границах между ячейками разных типов.

3. Результаты расчетов

Протестируем построенные в § 2 бикомпактные схемы на трех двумерных задачах: двух стационарных и одной нестационарной. Постановки этих задач взяты из работы [Faroq et al., 2013]. Сразу поясним, что система уравнений Эйлера (1) считается уже безразмерной, поэтому числовые значения всех величин приводятся ниже без размерностей. Размерные масштабы могут быть выбраны произвольными при условии, что при безразмеривании по ним система уравнений Эйлера принимает именно вид (1), не содержащий чисел подобия или дополнительных безразмерных множителей.

Задача 1. Рассматривается задача о стационарном обтекании круглого прямого цилиндра радиусом $R = 0.5$ и с бесконечной высоты сверхзвуковым потоком с числом Маха $M_\infty = 3$. Скорость набегающего потока \mathbf{v}_∞ направлена перпендикулярно оси цилиндра; приведем также значения плотности и давления газа в бесконечности: $\rho_\infty = 1.2$, $p_\infty = 10^5$. Выберем систему координат $Oxuz$ так: ось цилиндра параллельна оси Oz и проходит через точку $(2, 2, 0)$. Данная задача является двумерной, будем решать ее на плоскости Oxy . В качестве D_0 возьмем квадрат $(x, y) \in (0, 4) \times (0, 4)$. На границе $x = 0$ выставляется условие Дирихле $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_\infty$ (набегающий поток), на трех оставшихся границах D_0 , $x = 4$, $y = 0$ и $y = 4$, граничные условия отсутствуют (свободное вытекание). Наличие твердого непроницаемого цилиндра в потоке учитывается, очевидно, по МСГ.

Рассчитаем стационарное решение задачи 1 методом установления по бикомпактной схеме DIRK1B4 (16) на равномерной сетке в 320×320 ячеек. Значения остальных параметров схемы таковы: $\delta = 0.05$, $\kappa = 1$. В качестве начального условия, или приближения, берется следующее распределение параметров газа: $\rho \equiv 1.2$, $p \equiv 1$, $\mathbf{v} \equiv \mathbf{0}$ всюду в D_0 .

На рис. 2 приведены графики полей плотности и числа Маха $M = v/c$, полученных после 10 000 шагов по времени, или итераций. Значения функций показаны цветовой заливкой. Отметим хорошее разрешение головной ударной волны (далее — УВ), правильную симметрию решения, а также качественное (визуальное) согласие результатов для схемы DIRK1B4 и результатов из работы [Faroq et al., 2013].

Вообще, решение устанавливается намного раньше 10 000 итераций, после примерно 1500 итераций, как видно из истории сходимости, изображенной на рис. 3. Уточним, что норма $\|\rho^n\|_2$ определяется по формуле

$$\|\rho^n\|_2 = \sqrt{\frac{1}{|\Omega|} \sum_{\mathbf{r} \in \Omega} |\rho^n(\mathbf{r})|^2}, \quad |\Omega| = (2N_x + 1)(2N_y + 1).$$

Заметим, что финальное плато у графика относительного изменения поля плотности за одну итерацию находится на уровне $2 \cdot 10^{-3}$ (см. рис. 3). Это значение достаточно велико, если

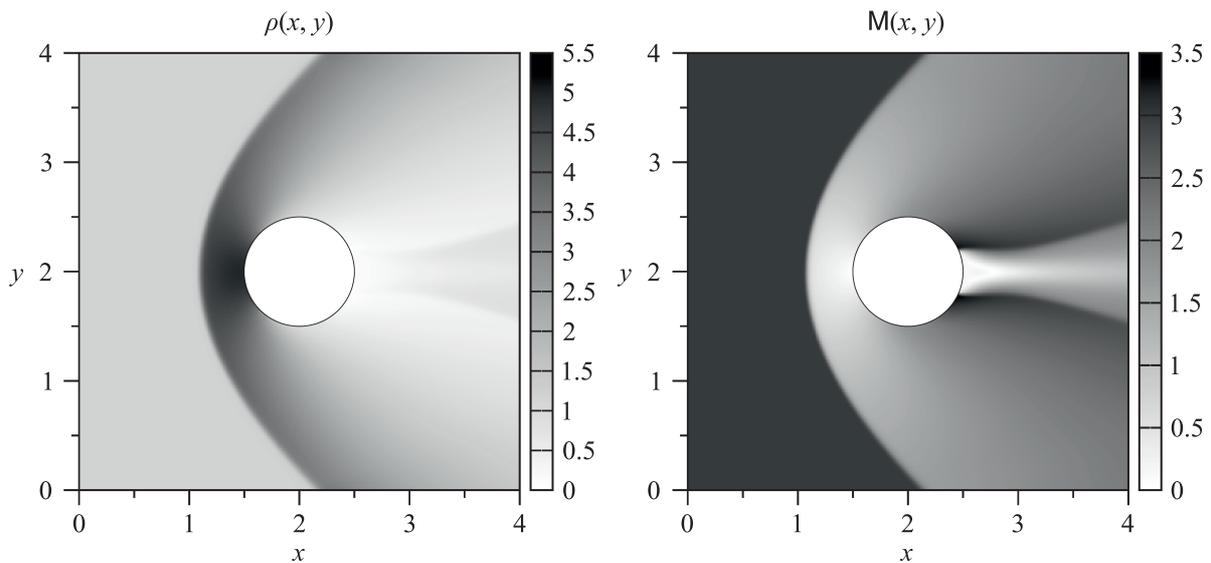


Рис. 2. Поля плотности (слева) и числа Маха (справа) в задаче о стационарном сверхзвуковом обтекании круглого цилиндра (задача 1). Результаты получены методом установления по локально-одномерной бикомпактной схеме DIRK1B4 с аппроксимацией четвертого порядка по пространству и первого порядка по времени

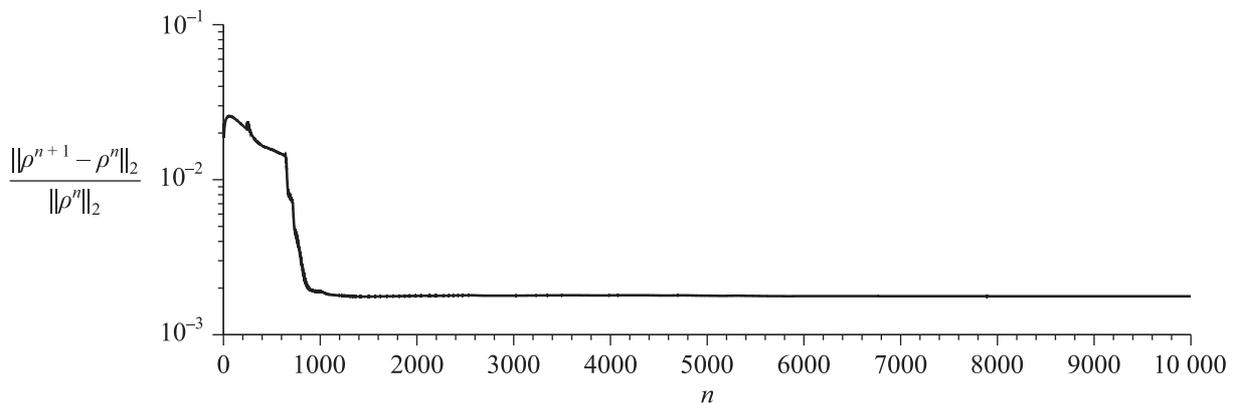


Рис. 3. История сходимости в задаче 1 (см. также рис. 2)

сравнивать его с величиной $\text{rtol} = 10^{-9}$ — относительной точностью итераций в методе Ньютона, который применяется для решения нелинейных уравнений бикомпактных схем. Данное явление объясняется тем, что в области за тыльной частью цилиндра существует отрывная зона в виде «хвоста», чрезвычайно медленно эволюционирующего с течением времени. Этот элемент течения не является физически корректным: в уравнениях Эйлера отсутствует физическая вязкость, а значит, предсказываемое ими течение не может содержать вязкий отрыв потока. «Хвост», наблюдаемый на рис. 2, связан исключительно со схемной вязкостью, не имеющей никакого отношения к реальной физической вязкости.

Задача 2 является усложненной версией задачи 1 не с одним, а с тремя цилиндрами радиусом $R = 0.55$. Центры их поперечных сечений-кругов расположены на плоскости Oxy в точках с координатами $(4, 2)$, $(5.38, 4)$, $(4, 5.35)$; расчетная область $D_0 = (0, 8) \times (0, 8)$. Условия на границах D_0 такие же, как и в задаче 1.

Стационарное решение задачи 2 вычислим методом установления по бикомпактной схеме DIRK1B4 на той же равномерной сетке в 320×320 ячеек, при тех же параметрах схемы и начиная с того же начального приближения, что и в задаче 1.

На рис. 4 представлены графики полей плотности и числа Маха, полученных после 10 000 итераций. Мы вновь констатируем, что посчитанное по DIRK1B4 решение качественно хорошо согласуется с решением из работы [Faroq et al., 2013]. Важно отметить, что добавление еще двух обтекаемых тел не влияет на вычислительный алгоритм бикомпактных схем с включением внутренних краевых условий по МСГ, поэтому такое усложнение задачи 1 потребовало минимальных изменений в программной реализации.

На рис. 5 приведена история сходимости схемы DIRK1B4 в задаче 2. Как и в задаче 1, решение устанавливается после примерно 1500 итераций, выходя на достаточно высокое плато по относительному изменению поля плотности за одну итерацию. Подобно задаче с одним цилиндром, за тремя цилиндрами возникают аналогичные нефизические отрывные зоны-«хвосты» (особенно заметные на графике числа Маха, см. правую часть рис. 4), где течение очень медленно меняется даже после 10 000 итераций.

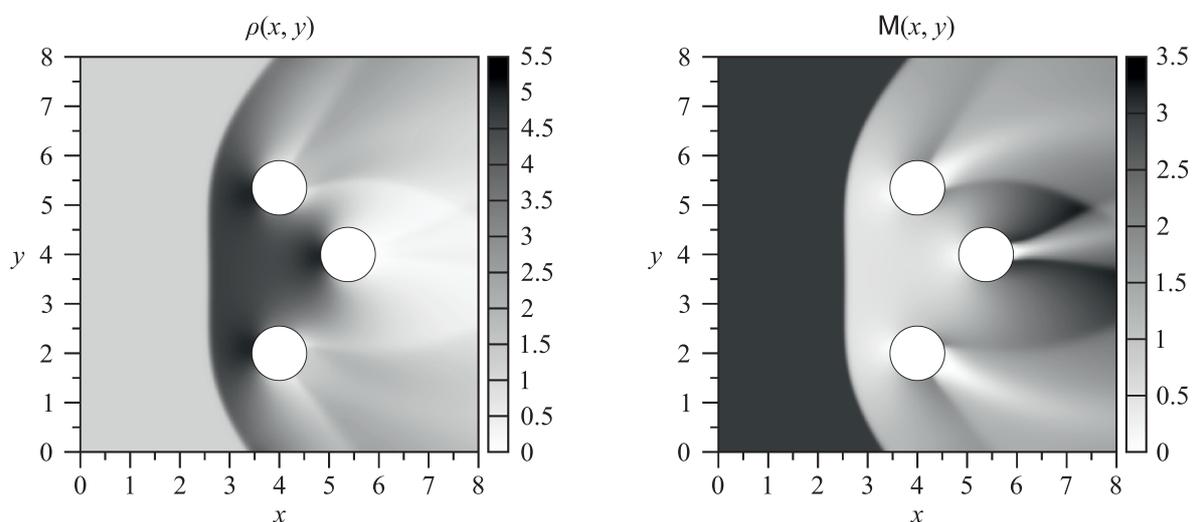


Рис. 4. Поля плотности (слева) и числа Маха (справа) в задаче о стационарном сверхзвуковом обтекании трех круглых цилиндров (задача 2). Результаты получены методом установления по локально-одномерной бикомпактной схеме DIRK1B4 с аппроксимацией четвертого порядка по пространству и первого порядка по времени

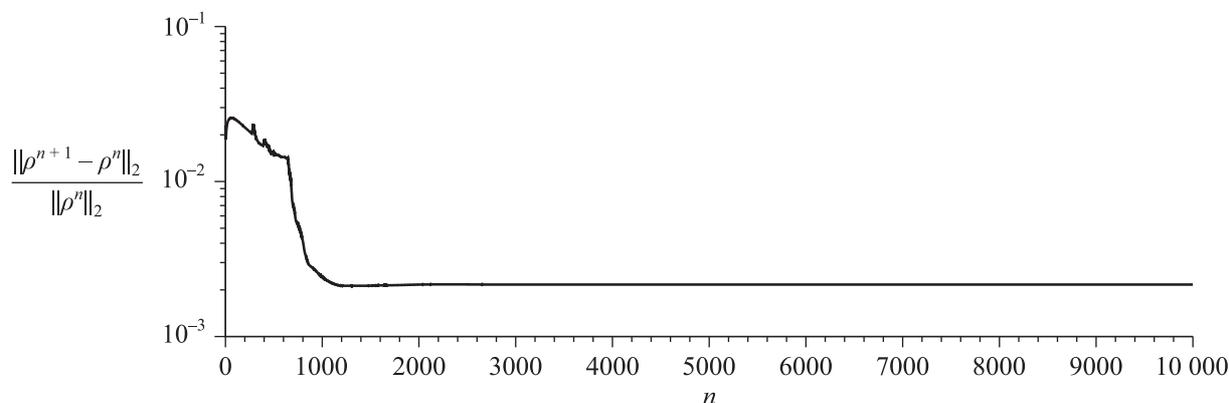


Рис. 5. История сходимости в задаче 2 (см. также рис. 4)

Задача 3. Рассматривается движение плоской УВ в канале с плоскими параллельными стенками бесконечного размаха, внутри которого расположен круглый прямой цилиндр бесконечной высоты (см. рис. 6). Стенки канала ортогональны плоскости УВ и параллельны оси цилиндра. Канал имеет ширину 3, цилиндр имеет радиус $R = 0.5$, а его ось находится на середине ширины канала. Газ перед УВ имеет плотность $\rho_1 = 1$, давление $p_1 = 1$ и покоится. В момент времени $t = 0$ УВ находится на расстоянии 1 от оси цилиндра, налетая на него со скоростью $2c_1$ (с числом Маха 2). Требуется рассчитать нестационарное течение газа в канале до момента времени $t = t_{\max} = 1.1$.

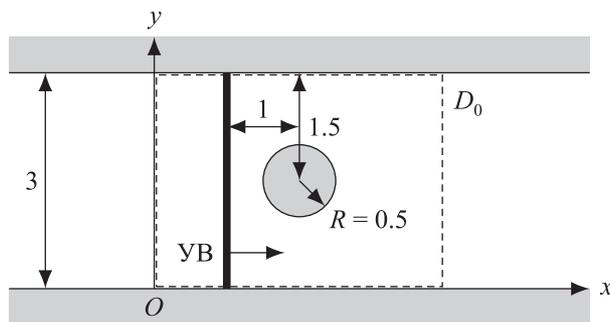


Рис. 6. К постановке задачи о взаимодействии плоской ударной волны и круглого цилиндра в канале с плоскопараллельными стенками (задача 3). Пунктиром изображена граница расчетной области D_0

Выберем систему координат $Oxuz$ так: ось цилиндра параллельна оси Oz и проходит через точку $(2, 1.5, 0)$. В силу очевидной двумерности данной задачи будем решать ее на плоскости Oxy в расчетной области $D_0 = (0, 4) \times (0, 3)$. Начальное условие имеет вид

$$(\rho, v_x, v_y, p)(x, y, 0) = \begin{cases} \left(\frac{8}{3}\rho_1, 1.25c_1, 0, 4.5p_1 \right) & \text{при } x < 1, \\ (\rho_1, 0, 0, p_1) & \text{при } x \geq 1. \end{cases}$$

На границе $x = 0$ параметры газа остаются неизменными (состояние за начальной УВ), на границах $y = 0, y = 3$ ставится условие $v_y = 0$ (непроницаемость стенок канала), на границе $x = 4$ условий нет (свободное вытекание).

Расчет задачи 3 выполним по бикompактной схеме SDIRK3B4 (17) на равномерной сетке в 220×165 ячеек при параметрах $\delta = 1, \kappa = 1, C_1 = 20$. Большее значение δ по сравнению с другими расчетами по бикompактным схемам (обычно $\delta = 0.2$) обусловлено тем, что ближе к моменту времени $t = t_{\max}$ за цилиндром образуются две зоны очень сильного разрежения, для преодоления которых нужна повышенная численная диссипация, или, другими словами, лучшая монотонность схемы.

На рис. 7 изображено поле плотности в моменты времени $t = 0.35, 0.60, 0.85, 1.10$, на рис. 8 — эволюция давления в четырех контрольных точках с координатами

$$(1.5, 1.5), \quad (2, 2), \quad (2 + 0.25\sqrt{2}, 1.5 + 0.25\sqrt{2}), \quad (2.5, 1.5),$$

расположенных на поверхности цилиндра (им соответствуют повороты вокруг оси цилиндра по часовой стрелке от лобовой точки на $0, 90, 135, 180^\circ$). Дополнительно на рис. 8 делается сравнение с результатами, полученными с очень высоким разрешением при помощи гибридного сеточно-бессеточного метода [Luo et al., 2006].

Качественно картина течения, рассчитанная по МСГ и бикompактной схеме SDIRK3B4, мало отличается от картин, представленных в работах [Faroog et al., 2013; Luo et al., 2006]. Весьма схожим образом начальная УВ обтекает цилиндр и отражается от него, отраженная УВ сама

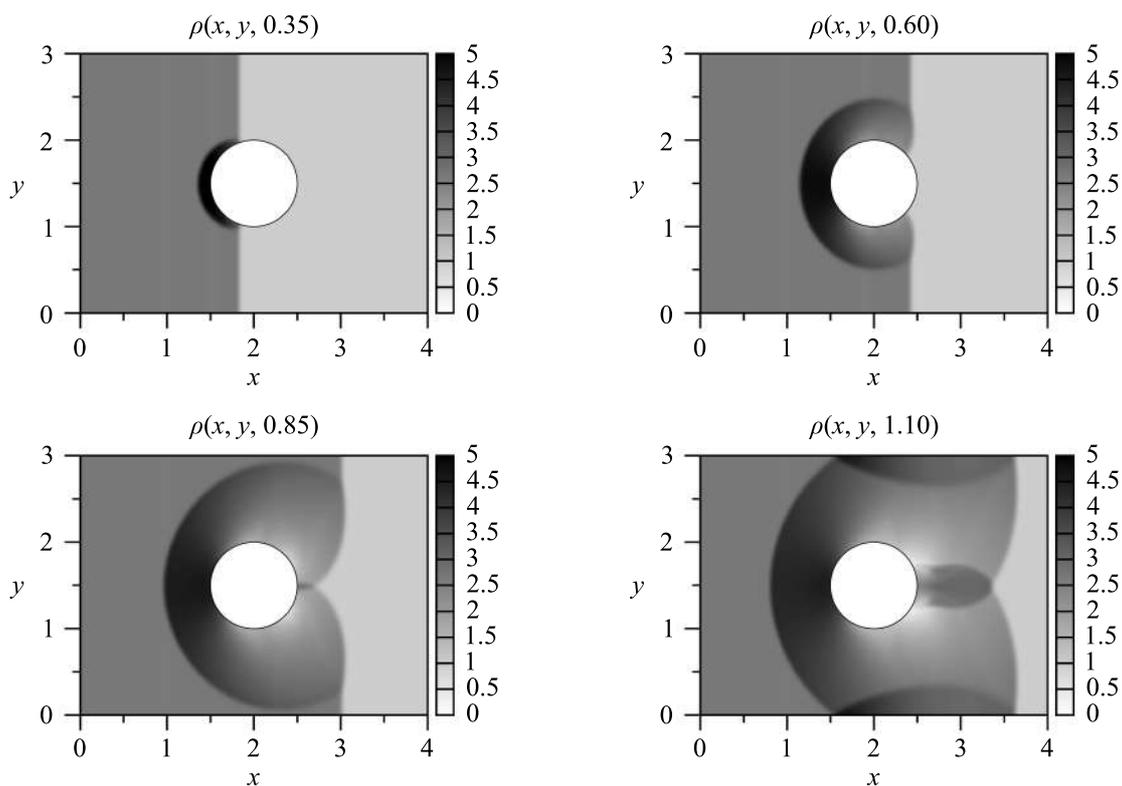


Рис. 7. Поле плотности в моменты времени $t = 0.35, 0.60, 0.85, 1.10$ в задаче 3 (ее постановка изображена отдельно на рис. 6). Расчет проведен по локально-одномерной бикомпактной схеме SDIRK3B4 с аппроксимацией четвертого порядка по пространству и второго порядка по времени

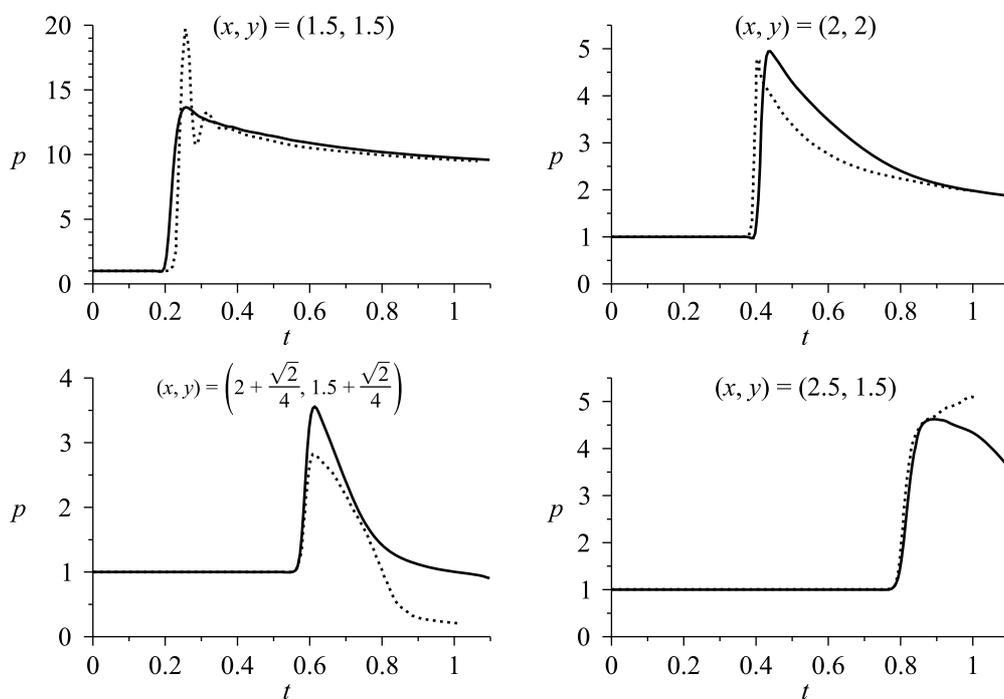


Рис. 8. Зависимость давления от времени в контрольных точках на поверхности цилиндра в задаче 3 (см. также рис. 7). Сплошная линия — расчет по МСГ и бикомпактной схеме SDIRK3B4; пунктирная линия — расчет по гибриднему методу [Luo et al., 2006]

отражается от стенок канала и порождает две новые УВ,двигающиеся к цилиндру. Количественно давление в контрольных точках согласуется с [Luo et al., 2006] удовлетворительно. В лобовой точке (1.5, 1.5) значительные отличия имеются только на небольшом временном промежутке после момента падения исходной УВ; при заданном уровне диссипации схемы и разрешении несвязанной с телом декартовой сетки получить эти быстрые осцилляции, по-видимому, нельзя, в пользу чего говорят также результаты работы [Farooq et al., 2013]. В точке (2, 2) у SDIRK3B4 начальный скачок давления имеет ту же амплитуду, но затем давление уменьшается не так быстро, как в [Luo et al., 2006], впрочем, выходя на правильное значение ближе к концу расчета. В точке $(2 + 0.25\sqrt{2}, 1.5 + 0.25\sqrt{2})$ схема SDIRK3B4 дает существенно большие давления, однако эволюцию давления, более похожую на эталон, можно найти вниз по течению, ближе к прямой $y = 1.5$. В точке (2.5, 1.5) схема SDIRK3B4 верно предсказывает амплитуду начального скачка, но затем занижает давление аналогично [Farooq et al., 2013]. Отметим, что все «события», т. е. первоначальные резкие возмущения давления, происходят для схемы SDIRK3B4 в те же моменты времени, что и для схем из других работ.

Заключение

При помощи МСГ построено обобщение бикompактных схем на многомерные задачи газовой динамики, решаемые в геометрически сложных областях. Рассмотрены бикompактные схемы четвертого порядка аппроксимации по пространству с локально-одномерным расщеплением. В разработанных схемах компенсационный поток МСГ дискретизирован со вторым порядком точности без расщепления по физическим процессам. Описан подход, позволяющий в рамках аппроксимации, непрерывной на границах ячеек, реализовать другой важный элемент МСГ — особый принцип вычисления потоков на границах между ячейками двух разных типов: лежащих полностью внутри твердых тел и лежащих частично или полностью в газе. Для счета по времени в бикompактных схемах использованы неявный метод Эйлера и L -устойчивый жестко-точный трехстадийный SDIRK-метод третьего порядка точности.

Бикompактные схемы с аппроксимацией внутренних граничных условий по МСГ протестированы на трех задачах: о стационарном сверхзвуковом обтекании одного и трех круглых цилиндров, а также о нестационарном взаимодействии плоской ударной волны и одного круглого цилиндра в плоскопараллельном канале. Полученные результаты хорошо согласуются с результатами других работ: поток газа физически корректно реагирует на находящиеся в нем твердые тела, картины течений имеют правильный вид, давление в контрольных точках рассчитывается с точностью, соответствующей разрешению сетки и уровню схемной диссипации.

Список литературы (References)

- Афендииков А. Л., Давыдов А. А., Луцкий А. Е., Меньшов И. С., Меркулов К. Д., Пленкин А. В., Ханхасаева Я. В. Адаптивные вейвлетные алгоритмы для решения задач гидро- и газовой динамики на декартовых сетках. — М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2017. — 232 с.
- Afendikov A. L., Davydov A. A., Lutskii A. E., Men'shov I. S., Merkulov K. D., Plenkin A. V., Khankhasaeva Ya. V. Adaptive wavelet algorithms for solving problems of hydro- and gas dynamics on Cartesian grids. — Moscow: Keldysh Institute of Applied Mathematics, 2017. — 232 p. (in Russian).
- Брагин М. Д., Рогов Б. В. О точном пространственном расщеплении многомерного скалярного квазилинейного гиперболического закона сохранения // Докл. АН. — 2016. — Т. 469, № 2. — С. 143–147.
- Bragin M. D., Rogov B. V. On exact dimensional splitting for a multidimensional scalar quasilinear hyperbolic conservation law // Dokl. Math. — 2016. — Vol. 94, Iss. 1. — P. 382–386. (Original Russian paper: Bragin M. D., Rogov B. V. O tochnom prostranstvennom rasshcheplenii mnogomernogo skalyarnogo kvazilineinogo giperbolicheskogo zakona sokhraneniya // Dokl. AN. — 2016. — Vol. 469, No. 2. — P. 143–147.)

- Брагин М. Д., Рогов Б. В.* Метод итерированной приближенной факторизации операторов высоко-точной бикомпактной схемы для систем многомерных неоднородных квазилинейных уравнений гиперболического типа // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2018. — Т. 58, № 3. — С. 313–325.
- Bragin M. D., Rogov B. V.* Iterative approximate factorization of difference operators of high-order accurate bicom- pact schemes for multidimensional nonhomogeneous quasilinear hyperbolic systems // *Comput. Math. Math. Phys.* — 2018. — Vol. 58, Iss. 3. — P. 295–306. (Original Russian paper: *Bragin M. D., Rogov B. V.* Metod iteriruemoi priblizhennoi faktorizatsii operatorov vysokotochnoi bikompaktnoi skhemy dlya sistem mnogomernykh neodnorodnykh kvazilineinykh uravnenii giperbolicheskogo tipa // *Zh. vychisl. matem. i matem. fiz.* — 2018. — Vol. 58, No. 3. — P. 313–325.)
- Марчук Г. И.* Методы расщепления. — М.: Наука, 1988. — 263 с.
- Marchuk G. I.* Metody rasshchepeniya [Splitting methods]. — Moscow: Nauka, 1988. — 263 p. (in Russian).
- Меньшов И. С., Корнев М. А.* Метод свободной границы для численного решения уравнений газовой динамики в областях с изменяющейся геометрией // *Матем. моделирование.* — 2014. — Т. 26, № 5. — С. 99–112.
- Menshov I. S., Kornev M. A.* Free-boundary method for the numerical solution of gas-dynamic equations in domains with varying geometry // *Math. Models. Comput. Simul.* — 2014. — Vol. 6. — P. 612–621. (Original Russian paper: *Men'shov I. S., Kornev M. A.* Metod svobodnoi granitsy dlya chislennogo resheniya uravnenii gazovoi dinamiki v oblastiakh s izmenyayushcheysya geometriey // *Matem. modelirovanie.* — 2014. — Vol. 26, No. 5. — P. 99–112.)
- Меньшов И. С., Павлухин П. В.* Эффективный параллельный метод сквозного счета задач аэродинамики на несвязных декартовых сетках // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2016. — Т. 56, № 9. — С. 1677–1691.
- Menshov I. S., Pavlukhin P. V.* Efficient parallel shock-capturing method for aerodynamics simulations on body-unfitted cartesian grids // *Comput. Math. Math. Phys.* — 2016. — Vol. 56, Iss. 9. — P. 1651–1664. (Original Russian paper: *Men'shov I. S., Pavlukhin P. V.* Effektivnyi parallel'nyi metod skvoznogo scheta zadach aerodinamiki na nesvyaznykh dekartovykh setkakh // *Zh. vychisl. matem. i matem. fiz.* — 2016. — Vol. 56, No. 9. — P. 1677–1691.)
- Рогов Б. В.* Высокоточная монотонная компактная схема бегущего счета для многомерных уравнений гиперболического типа // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2013. — Т. 53, № 2. — С. 264–274.
- Rogov B. V.* High-order accurate monotone compact running scheme for multidimensional hyperbolic equations // *Comput. Math. Math. Phys.* — 2013. — Vol. 53, Iss. 2. — P. 205–214. (Original Russian paper: *Rogov B. V.* Vysokotochnaya monotonnaya kompaktnaya skhema begushchego scheta dlya mnogomernykh uravnenii giperbolicheskogo tipa // *Zh. vychisl. matem. i matem. fiz.* — 2013. — Vol. 53, No. 2. — P. 264–274.)
- Самарский А. А.* Теория разностных схем. — М.: Наука, 1989. — 616 с.
- Samarskii A. A.* The theory of difference schemes. — New York: Marcel Dekker, 2001. — 762 p. (Original Russian paper: *Samarskii A. A.* Teoriya raznostnykh skhem. — Moscow: Nauka, 1989. — 616 p.)
- Яненко Н. Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. — Новосибирск: Наука, 1967. — 197 с.
- Yanenko N. N.* The method of fractional steps: the solution of problems of mathematical physics in several variables. — Berlin: Springer-Verlag, 1971. — 160 p. (Original Russian paper: *Yanenko N. N.* Metod drobnykh shagov resheniya mnogomernykh zadach matematicheskoi fiziki. — Novosibirsk: Nauka, 1967. — 197 p.)
- Alexander R.* Diagonally implicit Runge–Kutta methods for stiff O.D.E.'s // *SIAM J. Numer. Anal.* — 1977. — Vol. 14, Iss. 6. — P. 1006–1021.
- Bouchon F., Dubois T., James N.* A second-order cut-cell method for the numerical simulation of 2D flows past obstacles // *Comput. Fluids.* — 2012. — Vol. 65. — P. 80–91.
- Bragin M. D., Rogov B. V.* Conservative limiting method for high-order bicom- pact schemes as applied to systems of hyperbolic equations // *Appl. Numer. Math.* — 2020. — Vol. 151. — P. 229–245.
- Chikitkin A. V., Rogov B. V., Utyuzhnikov S. V.* High-order accurate monotone compact running scheme for multidimensional hyperbolic equations // *Appl. Numer. Math.* — 2015. — Vol. 93. — P. 150–163.
- Chikitkin A. V., Rogov B. V.* Family of central bicom- pact schemes with spectral resolution property for hyperbolic equations // *Appl. Numer. Math.* — 2019. — Vol. 142. — P. 151–170.
- Ekaterinaris J. A.* High-order accurate, low numerical diffusion methods for aerodynamics // *Prog. Aerosp. Sci.* — 2005. — Vol. 41. — P. 192–300.

- Farooq M. A., Skøien A. A., Müller B.* Cartesian grid method for the compressible Euler equations using simplified ghost point treatments at embedded boundaries // *Comput. Fluids*. — 2013. — Vol. 82. — P. 50–62.
- Hartmann D., Meinke M., Schröder W.* A strictly conservative Cartesian cut-cell method for compressible viscous flows on adaptive grid // *Appl. Mech. Eng.* — 2011. — Vol. 200. — P. 1038–1052.
- Ji H., Lien F.-S., Yee E.* Numerical simulation of detonation using an adaptive Cartesian cut-cell method combined with a cell-merging technique // *Comput. Fluids*. — 2010. — Vol. 39. — P. 1041–1057.
- Kim L. S., Nakahashi K., Jeong H. K., Ha M. Y.* High density mesh flow computations by building cube method // *J. Mech. Sci. Technol.* — 2007. — Vol. 21. — P. 1306–1319.
- Luo H., Baum J. D., Löhner R.* A hybrid Cartesian grid and gridless method for compressible flows // *J. Comput. Phys.* — 2006. — Vol. 214. — P. 618–632.
- Luo H., Baum J. D., Löhner R.* A hybrid building-block and gridless method for compressible flows // *Int. J. Numer. Meth. Fluids*. — 2009. — Vol. 59. — P. 459–474.
- Mittal R., Iaccarino G.* Immersed boundary methods // *Annu. Rev. Fluid. Mech.* — 2005. — Vol. 37, Iss. 1. — P. 239–261.
- Neusius D., Schmidt S.* A Cartesian cut-cell method for the isothermal compressible viscous Navier–Stokes equations. — Kaiserslautern: Fraunhofer ITWM, 2013. — 48 p.
- Rogov B. V.* Dispersive and dissipative properties of the fully discrete bicomact schemes of the fourth order of spatial approximation for hyperbolic equations // *Appl. Numer. Math.* — 2019. — Vol. 139. — P. 136–155.
- Sjögreen B., Petersson N. A.* A Cartesian embedded boundary method for hyperbolic conservation laws // *Commun. Comput. Phys.* — 2007. — Vol. 2, Iss. 6. — P. 1199–1219.