**КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2020 Т. 12 № 3 С. 475–485**
DOI: 10.20537/2076-7633-2020-12-3-475-485

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

УДК: 519.6

Свойство устойчивости статистического распределения Райса: теория и применение в задачах измерения фазового сдвига сигналов

Т. В. Яковлева

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук,
Россия, 119333, г. Москва, ул. Вавилова, д. 44, к. 2

E-mail: tan-ya@bk.ru

*Получено 30.09.2019, после доработки — 14.02.2020.
Принято к публикации 17.02.2020.*

В работе рассматриваются особенности статистического распределения Райса, обусловливающие возможность его эффективного применения при решении задач высокоточных фазовых измерений в оптике. Дается строгое математическое доказательство свойства устойчивости статистического распределения Райса на примере рассмотрения разностного сигнала, а именно: доказано, что сумма или разность двух райсовских сигналов также подчиняются распределению Райса. Кроме того, получены формулы для параметров райсовского распределения результирующего суммарного или разностного сигнала. На основании доказанного свойства устойчивости распределения Райса в работе разработан новый оригинальный метод высокоточного измерения разности фаз двух квазигармонических сигналов. Этот метод базируется на статистическом анализе измеренных выборочных данных для обоих амплитуд сигналов и амплитуды третьего сигнала, представляющего собой разность сопоставляемых по фазе сигналов. Искомый фазовый сдвиг двух квазигармонических сигналов определяется исходя из геометрических соображений как угол треугольника, сформированного восстановленными на фоне шума значениями амплитуд трех упомянутых сигналов. Тем самым предлагаемый метод измерения фазового сдвига с использованием разностного сигнала основан исключительно на амплитудных измерениях, что существенно снижает требования к оборудованию и облегчает реализацию метода на практике. В работе представлены как строгое математическое обоснование нового метода измерения разности фаз сигналов, так и результаты его численного тестирования. Разработанный метод высокоточных фазовых измерений может эффективно применяться для решения широкого круга задач в различных областях науки и техники, в частности в дальнометрии, в системах коммуникации, навигации и т. п.

Ключевые слова: распределение Райса, плотность вероятности, свойство устойчивости, обработка стохастических данных, квазигармонический сигнал, фазовый сдвиг, фазовые измерения

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ), проект № 17-07-00064 по программе фундаментальных исследований.

COMPUTER RESEARCH AND MODELING
2020 VOL. 12 NO. 2 P. 475–485
DOI: 10.20537/2076-7633-2020-12-3-475-485

MATHEMATICAL MODELING AND NUMERICAL SIMULATION

UDC: 519.6

Stable character of the Rice statistical distribution: the theory and application in the tasks of the signals' phase shift measuring

T. V. Yakovleva

Federal Research Center "Computer Science and Control" of Russian Academy of Sciences,
44/2 Vavilov st., Moscow, 119333, Russia

E-mail: tan-ya@bk.ru

Received 30.09.2019, after completion — 14.02.2020.
Accepted for publication 17.02.2020.

The paper concerns the study of the Rice statistical distribution's peculiarities which cause the possibility of its efficient application in solving the tasks of high precision phase measuring in optics. The strict mathematical proof of the Rician distribution's stable character is provided in the example of the differential signal consideration, namely: it has been proved that the sum or the difference of two Rician signals also obey the Rice distribution. Besides, the formulas have been obtained for the parameters of the resulting summand or differential signal's Rice distribution. Based upon the proved stable character of the Rice distribution a new original technique of the high precision measuring of the two quasi-harmonic signals' phase shift has been elaborated in the paper. This technique is grounded in the statistical analysis of the measured sampled data for the amplitudes of the both signals and for the amplitude of the third signal which is equal to the difference of the two signals to be compared in phase. The sought-for phase shift of two quasi-harmonic signals is being calculated from the geometrical considerations as an angle of a triangle which sides are equal to the three indicated signals' amplitude values having been reconstructed against the noise background. Thereby, the proposed technique of measuring the phase shift using the differential signal analysis, is based upon the amplitude measurements only, what significantly decreases the demands to the equipment and simplifies the technique implementation in practice. The paper provides both the strict mathematical substantiation of a new phase shift measuring technique and the results of its numerical testing. The elaborated method of high precision phase measurements may be efficiently applied for solving a wide circle of tasks in various areas of science and technology, in particular — at distance measuring, in communication systems, in navigation, etc.

Keywords: Rice distribution, probability density, stable character, stochastic data processing, quasi-harmonic signal, phase shift, phase measurements

The work was supported by the Russian Foundation of Basic Research Grant No. 17-07-00064.

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2020, vol. 12, no. 3, pp. 475–485 (Russian).

1. Введение

Современная наука характеризуется динамичным развитием новых математических методов решения задачи анализа и обработки данных в условиях стохастичности. Настоящая работа направлена на теоретическое обоснование особенностей статистического распределения Райса, которые обеспечивают возможность их эффективного использования при решении прикладных задач, связанных с высокоточными фазовыми измерениями.

Растущий интерес к данному распределению связан с широким кругом научных и прикладных задач, которые адекватно описываются статистической моделью Райса [Rice, 1945]. Круг таких задач охватывает задачи анализа данных, решаемые в системах магнитно-резонансной и ультразвуковой визуализации, прием и обработку радиосигналов и сигналов радаров, задачи, связанные с оптическими измерениями, в частности в системах дальнометрии и коммуникации и т. п. [Sijbers, den Dekker, 2004; den Dekker, Sijbers, 2014]. Эти задачи объединяет то, что анализируемой величиной в них является амплитуда, или огибающая, выходного сигнала, который в свою очередь образуется как сумма исходно детерминированного сигнала и случайного гауссова шума, сформированного вкладом многих независимых составляющих. Такой сигнал, как известно, подчиняется статистическому распределению Райса.

Ввиду широкой применимости данного статистического распределения при решении различных прикладных задач свойства распределения Райса стали предметом многих научных исследований [Carobbi, Cati, 2008; Sijbers, den Dekker, 2004; Yakovleva, Kulberg, 2013], что позволило строго обосновать использование тех или иных методов анализа райсовских данных.

Во многих задачах, сопряженных с обработкой райсовских сигналов, возникает необходимость анализа сигналов, представляющих собой сумму или разность исходных райсовских сигналов. В этой связи актуальным является вопрос об устойчивости распределения Райса. Однако до последнего времени этот вопрос оставался открытым. В настоящей работе дается математическое обоснование свойства устойчивости распределения Райса и получены формулы зависимости величины параметров суммарного или разностного сигналов от значения параметров исходных райсовских сигналов.

Строгое доказательство свойства устойчивости райсовского распределения, представленное в настоящей работе, позволяет обосновать применимость ранее развитого аппарата анализа райсовских данных [den Dekker, Sijbers, 2014; Яковлева, 2016] для решения многих актуальных задач, адекватно описываемых статистической моделью Райса, в частности для решения метрологических задач посредством фазовых измерений в оптике.

В настоящее время решение метрологических задач измерения расстояния между двумя объектами становится весьма значимой проблемой из-за необходимости высокой точности позиционирования объектов в навигации, геодезии, строительстве и т. п. Методы измерения расстояний, как правило, связаны с необходимостью фазовых измерений [Webster, 2004; So, Zhou, 2013]. Решение задачи измерения разности фаз двух сигналов является значимым в различных областях науки и техники, таких как радиофизика, оптика, радиолокация, радионавигация и т. д. Такие измерения разности фаз используются при определении расстояний, в системах дальнометрии, при определении геометрических параметров объектов, при решении задач неразрушающего контроля и в ряде других прикладных задач [Webster, 2004; So, Zhou, 2013].

Проблема высокоточного измерения разности фаз двух сигналов является предметом научных исследований в течение десятилетий, и за это время было разработано много различных методов ее решения.

Некоторые из существующих методов измерения фазы априорно используют модель гармонического синусоидального сигнала, т. е. предполагают, что величина амплитуды сигнала является постоянной, что не соответствует действительности. На практике, как правило, имеют дело с так называемыми квазигармоническими сигналами, которые из-за неизбежного воздействия гауссова шума характеризуются наличием случайных флуктуаций величины амплитуды сигнала. При этом, как известно, огибающая и фаза квазигармонического сигнала, соответствующего тому или иному случайному процессу, взаимосвязаны в силу амплитудно-фазовой модуляции, и случайные изменения амплитуды существенно понижают точность измерения фазы. Для измерения фазы квазигармонического сигнала было разработано несколько различных параметрических способов [Игнатьев и др., 2013], основанных на вычислениях достаточно большого числа параметров сигнала, в силу чего реализация этих методов требует значительного объема вычислительных ресурсов.

Развиваемый в настоящей работе оригинальный метод измерения разности фаз двух сигналов принципиально отличается от известных методов прежде всего тем, что он не связан с какими-либо априорными предположениями и полностью основан на обработке результатов выборочных измерений лишь величины амплитуды, или огибающей, анализируемых сигналов. Причем данный метод использует взаимосвязь амплитуды и фазы случайного процесса, и именно эта взаимосвязь, как будет показано ниже, обеспечивает возможность проведения высокоточных измерений фазового сдвига двух сигналов, распространяющихся по разным каналам связи, на основе статистического анализа их амплитуд (огибающих) как случайных райсовских величин.

2. Основы теории

Распределение Райса, как известно, характеризует случайную величину, сформированную суммированием исходно детерминированной составляющей сигнала и искажающего ее гауссова шума.

Обозначим как A детерминированную, информативную составляющую измеряемого сигнала. Искажающий эту величину гауссов шум неизбежно образуется как сумма многих независимых компонент и характеризуется нулевой средней величиной и дисперсией σ^2. Обозначим амплитуду результирующего анализируемого сигнала как $x = \sqrt{x_{\mathrm{Re}}^2 + x_{\mathrm{Im}}^2}$. Действительная x_{Re} и мнимая x_{Im} части комплексного сигнала с амплитудой x являются случайными гауссовыми величинами с математическими ожиданиями $\overline{x_{\mathrm{Re}}}$ и $\overline{x_{\mathrm{Im}}}$ соответственно и дисперсией σ^2. При этом $\overline{x_{\mathrm{Re}}}^2 + \overline{x_{\mathrm{Im}}}^2 = A^2$, а величина амплитуды x удовлетворяет статистическому распределению Райса с параметрами $\nu = A$ и σ^2 [Rice, 1945]. Очевидно, что величина x принадлежит подмножеству неотрицательных величин: $x \in (0, \infty)$. Отношение райсовских параметров $SNR = \nu / \sigma$ характеризует величину отношения сигнала к шуму. Таким образом, райсовская случайная величина представляет собой амплитуду комплексного сигнала с гауссовыми действительной и мнимой частями. Функция плотности вероятности распределения Райса дается следующей формулой:

$$P\left(x \mid \nu, \sigma^2\right) = \frac{x}{\sigma^2} \cdot \exp\left(-\frac{x^2 + \nu^2}{2\sigma^2}\right) \cdot I_0\left(\frac{x\nu}{\sigma^2}\right), \qquad (1)$$

где I_0 — модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка [Абрамовиц, Стиган, 1979]. Здесь и ниже будем использовать следующие обозначения: $I_\alpha(z)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода (или функция Инфельда) порядка α; x_i — величина сигнала, полученная в результате i-го измерения в выборке; n — количество измерений в выборке, называемое также длиной выборки.

Очевидно, что окончательной целью анализа райсовского сигнала данных является восстановление его информативной составляющей A, которая совпадает с параметром ν распределения Райса.

Математическое ожидание и дисперсия райсовской случайной величины выражаются следующими формулами:

$$\overline{x} = \sigma \cdot \sqrt{\pi / 2} \cdot L_{1/2}\left(-\nu^2 / 2\sigma^2\right), \tag{2}$$

$$\sigma_x^2 = 2 \cdot \sigma^2 + \nu^2 - \sigma^2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot L_{1/2}^2\left(-\nu^2 / 2\sigma^2\right), \tag{3}$$

где $L_{1/2}(z)$ — полином Лагерра. Как следует из формул (2) и (3), математическое ожидание $\overline{x}$ и дисперсия σ_x^2 райсовской случайной величины не совпадают с райсовскими параметрами ν и σ^2 соответственно. Тем не менее оба райсовских параметра имеют определенный физический смысл, а именно: параметр ν совпадает с величиной исходного детерминированного сигнала: $\nu = A$, а параметр σ^2 представляет собой величину дисперсии искажающего этот сигнал гауссова шума.

Таким образом, для эффективного восстановления информативной составляющей райсовского сигнала на фоне шума необходимо решить задачу совместного определения априорно неизвестных параметров распределения Райса ν и σ^2. Решение такой двухпараметрической задачи позволит рассчитать искомое значение полезного, не искаженного шумом, сигнала A, совпадающего с райсовским параметром ν: $A = \nu$.

3. Доказательство устойчивости распределения Райса

В данном разделе дается строгое математическое доказательство свойства устойчивости распределения Райса. Как известно, статистическое распределение называется устойчивым, если сумма (или разность) двух независимых случайных величин, подчиняющихся данному распределению (возможно, с различающимися параметрами), также подчиняется этому статистическому распределению.

Нижеприведенное доказательство свойства устойчивости статистического распределения Райса основывается на определении райсовской случайной величины с параметрами ν и σ^2 как амплитуды комплексного сигнала $x = \sqrt{x_{\text{Re}}^2 + x_{\text{Im}}^2}$, действительная x_{Re} и мнимая x_{Im} части которого являются случайными гауссовыми величинами с математическими ожиданиями $\overline{x_{\text{Re}}}$ и $\overline{x_{\text{Im}}}$ соответственно и дисперсией σ^2, при этом $\overline{x_{\text{Re}}}^2 + \overline{x_{\text{Im}}}^2 = \nu^2$.

Для доказательства устойчивости распределения Райса рассмотрим сигнал, сформированный суммой двух райсовских сигналов.

Будем использовать векторное представление сигналов: райсовскую случайную величину, представляющую собой амплитуду, или огибающую, комплексного сигнала, будем представлять как амплитуду вектора, декартовы координаты которого соответствуют действительной и мнимой частям комплексного сигнала.

Такое представление райсовских сигналов на двумерной плоскости, с одной стороны, соответствует двумерному «происхождению» райсовской величины как амплитуды вектора с гауссовыми декартовыми координатами, а с другой стороны, позволяет наглядно проиллюстрировать рассматриваемое в настоящей работе приложение свойства устойчивости для решения задачи измерения фазовых сдвигов квазигармонических сигналов.

Обозначим как $\vec{R}_1$ и $\vec{R}_2$ два исходных сигнала с амплитудами R_1 и R_2, удовлетворяющими распределению Райса с параметрами (A_1, σ_1) и (A_2, σ_2) соответственно (рис. 1).

В силу вышеуказанной направленности рассматриваемой задачи на измерение фазового сдвига на рис. 1 обозначен угол $\Delta\varphi$ между векторами $\vec{R}_1$ и $\vec{R}_2$, определяющий искомый сдвиг фазы между соответствующими сигналами.

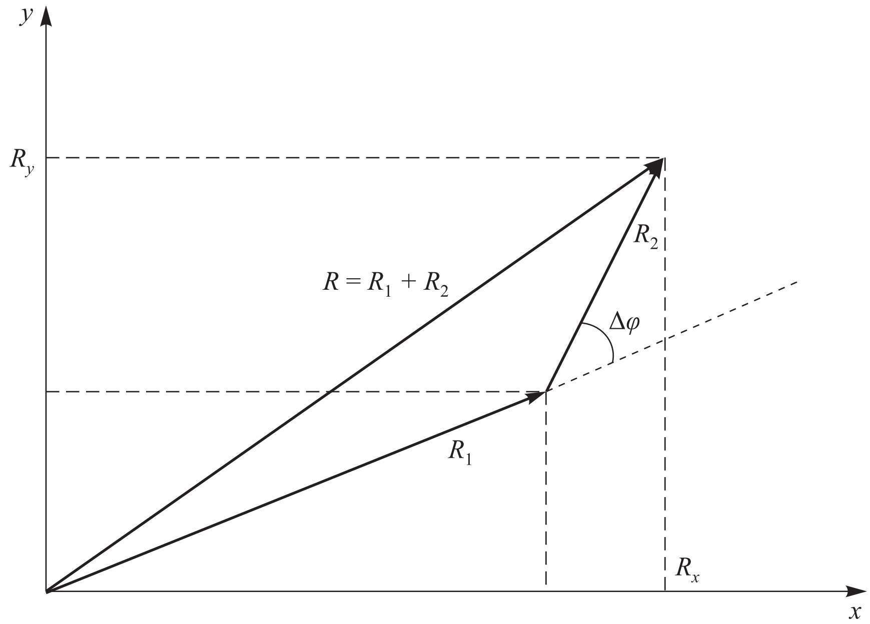

Рис. 1. Иллюстрация доказательства устойчивости распределения Райса путем рассмотрения сигналов в декартовых координатах

Рассмотрим вектор $\vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2$, представляющий собой сумму двух исходных сигналов.

Из определения райсовской величины следует, что величины декартовых координат R_{ix}, R_{iy}, где $i = 1, 2$, подчиняются статистическому распределению Гаусса. Очевидно, что величины декартовых координат суммарного вектора $\vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2$, представляя собой сумму декартовых координат векторов $\vec{R}_1$ и $\vec{R}_2$: $R_x = R_{1x} + R_{2x}$, $R_y = R_{1y} + R_{2y}$, также являются гауссовыми случайными величинами в силу свойства устойчивости статистического распределения Гаусса (чтобы не загромождать рис. 1, на нем не приведены очевидные обозначения декартовых координат векторов $\vec{R}_1$ и $\vec{R}_2$). Таким образом, амплитуда $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$ суммарного вектора $\vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2$ представляет собой корень квадратный из суммы квадратов двух гауссовых величин: R_x и R_y и, таким образом, по определению является райсовской случайной величиной, что и требовалось доказать.

Очевидно, что в случае разности двух райсовских величин доказательство не изменится в силу того, что если некая величина z является гауссовой случайной величиной, то и величина $(-z)$ также является гауссовой величиной, при этом лишь меняется знак параметра математического ожидания данной величины.

Как известно, при суммировании независимых случайных величин дисперсия суммы равна сумме дисперсий складываемых величин. В силу этого, как легко видеть из приведенного выше доказательства устойчивости распределения Райса, параметр дисперсии суммарного райсовского сигнала равен сумме параметров дисперсии суммируемых величин: $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$.

Что касается второго параметра райсовского распределения амплитуды результирующего (суммарного или разностного) сигнала, то этот параметр представляет собой величину амплитуды результирующего сигнала, вычисленную в отсутствие шума, и его нетрудно определить из геометрических соображений; а именно, можно показать, что данный параметр выражается формулой $A_0 = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 \pm 2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$, где знаки «+» и «–» в подкоренном выражении относятся к случаям суммарного и разностного сигналов соответственно.

Таким образом, устойчивость статистического распределения Райса строго доказана и получены формулы для параметров райсовского распределения результирующего сигнала, являющегося суммой или разностью исходных райсовских сигналов.

$$A_0 = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 \pm 2A_1A_2\cos\Delta\varphi},$$
$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2. \tag{4}$$

Важно отметить, что выше проанализировано и доказано свойство устойчивости статистического распределения Райса в обобщенном смысле, более «сильное», чем традиционно понимаемое свойство устойчивости какого-либо статистического распределения. А именно, показано, что райсовскому распределению подчиняется амплитуда сигнала, полученного в результате векторного сложения двух сигналов, амплитуды которых подчиняются распределению Райса, в то время как понимаемая в традиционном смысле устойчивость статистического распределения предполагает лишь скалярное сложение (вычитание) двух случайных величин, подчиняющихся данному распределению. Очевидно, что традиционное понимание устойчивости при скалярном суммировании (вычитании) исходных случайных величин соответствует лишь частному случаю рассматриваемого нами векторного сложения сигналов, а именно случаю синфазных сигналов, не имеющих между собой фазового сдвига: $\Delta\varphi = 0$.

Но, с точки зрения перспективы использования свойства устойчивости распределения Райса в прикладных задачах, значительный интерес представляет именно рассматриваемый нами случай векторного сложения сигналов, т. е. доказанное обобщенное свойство устойчивости. Именно это свойство позволяет решать задачи высокоточного расчета фазового сдвига сигналов методами анализа их амплитуд как райсовских данных.

В следующем разделе статьи рассматривается один из таких методов в качестве примера использования доказанного обобщенного свойства устойчивости распределения Райса.

4. Метод измерения фазового сдвига квазигармонических сигналов, основанный на свойстве устойчивости распределения Райса

В качестве примера приложения свойства устойчивости распределения Райса в данном разделе рассматривается метод высокоточного вычисления фазового сдвига двух квазигармонических сигналов на основе статистического анализа их амплитуд и амплитуды разностного сигнала.

Развиваемый в настоящей работе оригинальный метод измерения разности фаз двух сигналов принципиально отличается от известных методов прежде всего тем, что он не связан с какими-либо априорными предположениями и полностью основан на обработке результатов выборочных измерений лишь величины амплитуды, или огибающей, анализируемых сигналов.

Этот метод основан на статистическом анализе и обработке измеренных выборочных значений амплитуд сигналов, которые подчиняются статистическому распределению Райса, а именно на анализе амплитуд двух исходных сигналов и их разностного сигнала, причем использование разностного сигнала обеспечивает дополнительное повышение точности измерений, особенно при выявлении незначительных фазовых сдвигов между сигналами, когда амплитуда разностного сигнала невелика, и ошибка при ее оценивании значительно меньше, чем ошибка при оценивании амплитуды суммарного сигнала.

Этот метод разработан в рамках нового подхода к фазовым измерениям, предложенного автором [Yakovleva, 2018; Яковлева, 2017]. В отличие от метода, представленного в упомянутых работах, в данной работе для измерения разности фаз предлагается использовать не суммарный, а разностный сигнал, что позволяет повысить точность определения фазового сдвига, в особенности для случая незначительного расхождения исходных сопоставляемых сигналов.

Постановка задачи такова: два исходно гармонических сигнала одинаковой частоты распространяются по разным каналам, тем самым накапливая фазовый сдвиг, который должен быть измерен с высокой точностью. На практике распространение гармонического сигнала в среде неизбежно сопровождается воздействием шума на данный сигнал, что приводит к случайным флуктуациям его амплитуды. В результате вместо гармонического сигнала мы должны рассматривать квазигармонический сигнал, амплитуда которого является случайной величиной. Нетрудно показать, что огибающая квазигармонического сигнала подчиняется статистическому распределению Райса.

Рассматриваемая математическая задача состоит в определении фазового сдвига между двумя квазигармоническими сигналами посредством статистического анализа амплитуд обоих сигналов и амплитуды разностного сигналов, причем в силу доказанного свойства устойчивости все три амплитуды подчиняются распределению Райса.

Обозначим как $\vec{R}_1$ и $\vec{R}_2$ квазигармонические сигналы с разностью фаз $\Delta\varphi$. Задача состоит в высокоточном измерении разности фаз $\Delta\varphi$, таком, которое позволило бы исключить искажающее влияние гауссова шума на результат фазовых измерений.

Амплитуды R_1 и R_2 подчиняются распределению Райса с параметрами $\left(A_1,\sigma^2\right)$ и $\left(A_2,\sigma^2\right)$ соответственно, где A_1 и A_2 — исходные, не искаженные шумом амплитуды сигналов, а величина σ^2 представляет собой дисперсию гауссова шума.

Предположим, что величина дисперсии гауссова шума одинакова для обоих каналов, по которым распространяются сигналы, хотя ниже приведенные математические выкладки могут быть легко обобщены на случай различных величин дисперсии шума. А именно, если дисперсии гауссова шума для каналов различны и равны σ_1^2 и σ_2^2 соответственно, то параметр шума разностного сигнала, как показано выше при доказательстве свойства устойчивости райсовского распределения, определяется суммой дисперсий исходных сигналов: $\sigma_3^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$.

Введем третий вектор, равный разности анализируемых сигналов: $\vec{R}_3 = \vec{R}_1 - \vec{R}_2$. Векторы $\vec{R}_1$, $-\vec{R}_2$ и $\vec{R}_3$ формируют треугольник, а искомую разность фаз, как нетрудно видеть, можно определить путем расчета величин всех сторон этого треугольника, т. е. путем расчета амплитуд трех рассматриваемых сигналов. Однако неизбежный шум искажает каждый вектор независимо, и значения амплитуд, измеренные в каждый момент времени, являются искаженными, что в свою очередь приведет к получению неправильного, искаженного значения для фазового сдвига.

Искомый фазовый сдвиг между сигналами $\vec{R}_1$ и $\vec{R}_2$ мог бы быть правильно рассчитан только из треугольника, сформированного исходными, неискаженными значениями амплитуд: A_1, A_2, A_3. Эта задача может быть решена путем обработки измеренных значений амплитуд с учетом их статистических свойств как случайных величин, подчиняющихся распределению Райса, а именно методами расчета райсовских параметров амплитуд двух квазигармонических сигналов A_i, σ^2, $i = 1, 2$. Что касается третьего, разностного, сигнала $\vec{R}_3 = \vec{R}_1 - \vec{R}_2$, его амплитуда в силу выше доказанного свойства устойчивости распределения Райса, также является райсовской величиной с параметрами $\left(A_3, 2\sigma^2\right)$, где $A_3 = \left|\vec{A}_3\right|$. В общем случае различных дисперсий каналов распространения сигналов разностный сигнал подчиняется распределению Райса с параметрами $\left(A_3, \sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)$. Величины параметров A_1, A_2, A_3 как стороны треугольника, сформированного неискаженными шумом векторами рассматриваемых сигналов, однозначно определяют искомый фазовый сдвиг.

Методы так называемого двухпараметрического анализа, разработанные в [Yakovleva, Kulberg, 2013; Яковлева, Кульберг, 2014; Яковлева, 2016], позволяют получить высокоточные оценки для параметров сигнала $\left(A_i, i = 1, 2, 3\right)$ и шума (σ^2) на основе выборочных измерений, без каких-либо априорных предположений. Вычисляя не искаженные шумом значения амплитуд трех сигналов, мы тем самым «замораживаем» анализируемый треугольник в состоянии отсутствия шума и тем самым можем рассчитать искомую разность фаз на основе геометрических соображений с высокой точностью по следующей формуле:

$$\Delta\varphi = \arccos\left(\frac{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}{2A_1A_2}\right). \tag{5}$$

Таким образом, разность фаз двух квазигармонических сигналов может быть рассчитана на основе лишь амплитудных измерений для трех вышеуказанных сигналов.

Разработанный метод измерения фазового сдвига был протестирован численно. При проведении численного эксперимента райсовские данные генерировались на трехмерной сетке, узлы которой соответствовали различным предопределенным значениям параметров сигнала и шума райсовского распределения трех амплитуд рассматриваемых сигналов. На основании выборочных райсовских данных, сгенерированных в каждом узле сетки, вычислялись не искаженные шумом значения амплитуды каждого из рассматриваемых сигналов и затем — искомая разность фаз по формуле (5).

Рис. 2 иллюстрирует полученные в численном эксперименте зависимости значений ошибок при расчете фазового сдвига от отношения сигнала к шуму при различных значениях длины выборки. Вдоль оси ординат откладываются абсолютные величины фазового сдвига в радианах, а точки оси абсцисс отображают узлы сетки, соответствующие различным значениям дисперсии, так что вдоль оси абсцисс дисперсия шума возрастает, и, соответственно, отношение сигнала к шуму падает. Вполне ожидаемо, что с ростом дисперсии шума величина ошибки при расчете разности фаз также увеличивается, что демонстрируется графиками на рис. 2.

При проведении численного эксперимента двухмерная сетка соответствовала изменению параметра сигнала от 0 до 3.0 с шагом 0.5, в то время как дисперсия шума изменялась в интервале (0.005, 0.15) с шагом 0.005.

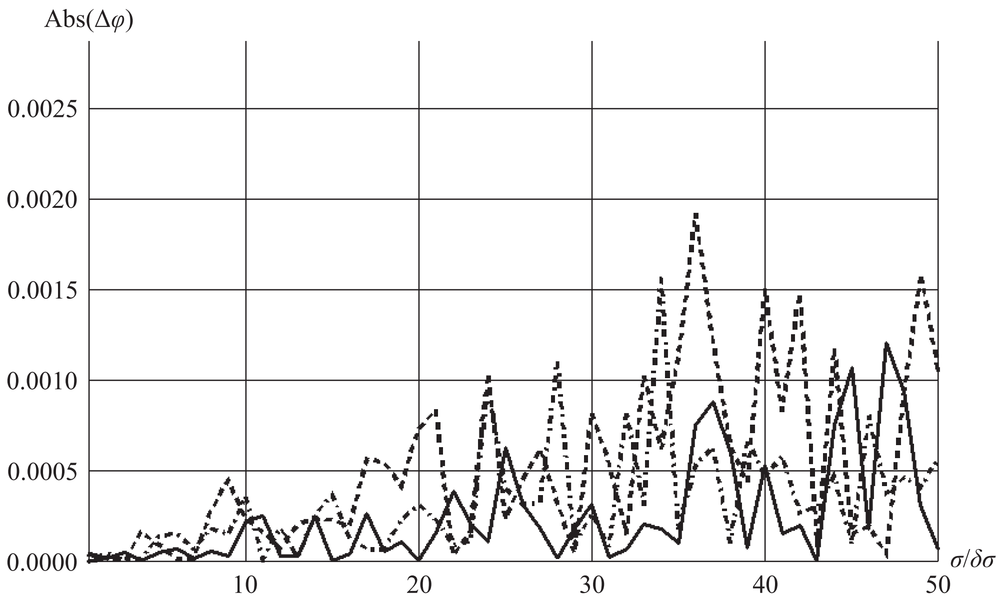

Рис. 2. Зависимость абсолютной величины ошибки при расчете разности фаз разработанным методом от отношения сигнала к шуму при различных значениях длины выборки: $n = 8$ (пунктирная линия), $n = 16$ (штрихпунктирная линия), $n = 32$ (сплошная линия)

Компьютерное моделирование проводилась для следующих значений длины выборки n: $n=8$, $n=16$, $n=32$. Соответствующие графики зависимости значений ошибки расчета сдвига фазы от величины дисперсии шума представлены пунктирной, штрихпунктирной и сплошной линиями. Точность расчетов фазового сдвига ожидаемо растет с ростом длины выборки.

Результаты численных экспериментов подтверждают эффективность и достаточно высокую точность (до 10^{-4}) измерения разности фаз предлагаемым методом.

5. Заключение

В работе исследуются особенности статистического распределения Райса, дается строгое доказательство свойства устойчивости данного распределения, что открывает возможности применения разработанных методов анализа райсовских данных для решения задач, где анализируемый сигнал формируется как сумма или разность других райсовских сигналов, в частности для решения метрологических задач посредством фазовых измерений в оптике.

В качестве примера применения свойства устойчивости распределения Райса в работе развивается оригинальный метод высокоточного измерения разности фаз между двумя квазигармоническими оптическими сигналами, основанный на статистическом анализе амплитуд двух исходных сопоставляемых сигналов и разностного сигнала. При этом искомая разность фаз рассчитывается как результат лишь амплитудных измерений, что существенно понижает требования к измерительной аппаратуре по сравнению с другими известными методами.

Важно, что предлагаемый подход к фазовым измерениям основан на фильтрации шумовых составляющих анализируемых сигналов и поэтому обеспечивает существенное повышение точности при оценивании фазового сдвига по сравнению с другими методами.

Представленные результаты численных экспериментов согласуются с теоретическими оценками и подтверждают реализуемость и эффективность предлагаемого метода измерения фазового сдвига сигналов.

Список литературы (References)

Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. — М.: Наука, 1979.

Abramowitz M., Stegun I. A. (eds.) Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables / Applied Mathematics Series 55. — Washington D.C., USA; New York, USA: United States Department of Commerce, National Bureau of Standards, 1964. (Russ. ed.: *Abramovic M., Stigan I.* Spravochnik po special'nym funkciyam. — Moscow: Nauka, 1979.)

Игнатьев В. К., Никитин А. В., Юшанов С. В. Измерение фазового сдвига квазигармонических сигналов // Численные методы и программирование. — 2013. — Т. 4. — С. 424–431.

Ignat'ev V. K., Nikitin A. V., Yushanov S. V. Izmerenie phazobogo sdviga kvazigarmonicheskih signalov [Measurement of the quasi-harmonic signals' phase shift] // Numerical Methods and Programming. — 2013. — Vol. 4. — P. 424–431 (in Russian).

Яковлева Т. В. Теоретическое обоснование математических методов совместного оценивания параметров сигнала и шума при анализе райсовских данных // Компьютерные исследования и моделирование. — 2016. — Т. 8, № 3. — С. 445–473.

Yakovleva T. V. Teoreticheskoe obosnovanie matematicheskih metodov sovmestnogo otseinvaniya parametrov signala i shuma pri analize raisovskih dannyh [Theoretical substantiation of the mathematical techniques for joint signal and noise estimation at rician data analysis] // Computer Research and Modeling. — 2016. — Vol. 8, No. 3. — P. 445–473 (in Russian).

Яковлева Т. В. Метод определения фазового сдвига квазигармонических сигналов, основанный на анализе огибающей // Компьютерная оптика. — 2017. — Т. 41, № 6. — С. 950–956.

Yakovleva T. V. Metod opredeleniya phazovogo sdviga kvazigarmonicheskih signalov, osnovannyi na analize ogibayuschei [Phase shift measuring technique based on the differential signal's amplitude estimation] // Computer Optics. — 2017. — Vol. 41, No. 6. — P. 950–956 (in Russian).

Яковлева Т. В., Кульберг Н. С. Методы математической статистики как инструмент двухпараметрического анализа магнитно-резонансного изображения // Информатика и ее применения. — 2014. — Т. 8, вып. 3. — С. 51–61.

Yakovleva T. V., Kulberg N. S. Metody matematicheskoi statistiki kak instrument dvukhparametrichskogo analiza magnitno-rezonansnogo izobrazheniya [Mathematical statistics methods as a tool of two-parameter magnetic-resonance image analysis] // Informatics and its application. — 2014. — Vol. 8, iss. 3. — P. 51–61 (in Russian).

Carobbi C. F. M., Cati M. The Absolute Maximum of the Likelihood Function of the Rice Distribution: Existence and Uniqueness // IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement. — 2008. — Vol. 57, No. 4. — P. 682–689.

den Dekker A. J., Sijbers J. Data distributions in magnetic resonance images: A review // Physica Medica. — 2014. — Vol. 30, Iss. 7. — P. 725–741.

Rice S. O. Mathematical Analysis of Random Noise // Bell System Technical Journal. — 1945. — Vol. 24. — P. 46–156.

Sijbers J., den Dekker A. J. Maximum Likelihood estimation of signal amplitude and noise variance from MR data // Magn Reson Med. — 2004. — Vol. 51 (3). — P. 586–594.

So H. Ch., Zhou Z. Two accurate phase-difference estimators for dual-channel sine-wave model // EURASIP Journal on Advances in Signal Processing. — 2013. — Vol. 122.

Webster J. G. (ed.) Electrical Measurement, Signal Processing, and Displays. — Boca Raton: CRC Press, 2004.

Yakovleva T. Nonlinear Filtration of Rician Data as a Tool for the Phase Measurements: Aspects of a Theory // Journal of Physics: Conf. Series 1096. — 2018. — 012136.

Yakovleva T. V., Kulberg N. S. Noise and Signal Estimation in MRI: Two-Parametric Analysis of Rice-Distributed Data by Means of the Maximum Likelihood Approach // American Journal of Theoretical and Applied Statistics. — 2013. — Vol. 2, No. 3. — P. 67–79.