

УДК: 517.958

## Моделирование взаимодействия стенки канала с упругозакрепленным торцевым уплотнением

В. С. Попов<sup>а</sup>, А. А. Попова

Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А.,  
Россия, 410054, г. Саратов, ул. Политехническая, д. 77

E-mail: <sup>а</sup> vic\_p@bk.ru

*Получено 28.09.2019, после доработки — 26.12.2019.*

*Принято к публикации 17.02.2020.*

В работе предложена новая математическая модель для исследования динамики взаимодействия продольной стенки узкого канала с его торцевым уплотнением — торцевой стенкой, имеющей упругое закрепление. В рамках данной модели взаимодействие указанных стенок происходит через слой вязкой жидкости, заполняющей канал, и ранее не исследовалось. Это потребовало постановки и решения задачи гидроупругости. Поставленная задача состоит из уравнений Навье–Стокса, уравнения неразрывности, уравнения динамики торцевой стенки как одномассовой модели и соответствующих краевых условий. На первом этапе задача исследована при ползучем течении. На втором этапе исследования данное ограничение снимается и, при использовании метода итераций, осуществлено обобщение исходной задачи с учетом инерции движения жидкости. Решение сформулированной задачи позволило определить законы распределения скоростей и давления в слое жидкости, а также закон движения торцевой стенки. Показано, что при ползучем течении физические свойства слоя жидкости и геометрические размеры канала полностью определяют демпфирование в рассматриваемой колебательной системе. При этом на демпфирующие свойства слоя жидкости оказывает влияние как скорость движения торцевой стенки, так и скорость движения продольной стенки. Найдены выражения для коэффициентов демпфирования слоя жидкости в продольном и поперечном направлении. При учете сил инерции жидкости выявлено их влияние на колебания торцевой стенки, проявляющиеся в виде двух присоединенных масс в уравнении ее движения. Определены выражения для указанных присоединенных масс. Для режима установившихся гармонических колебаний построены амплитудно-частотные и фазово-частотные характеристики торцевой стенки, учитывающие демпфирующие и инерционные свойства слоя вязкой жидкости в канале. Моделирование показало, что совместный учет инерции движения слоя жидкости в канале и его демпфирующих свойств приводит к сдвигу резонансных частот колебаний в низкочастотную область и возрастанию амплитуд колебаний торцевой стенки.

Ключевые слова: гидроупругие колебания, торцевая стенка, вязкая жидкость, сильфон, частотные характеристики

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 18-01-00127-а).

UDC: 517.958

## Modeling of a channel wall interaction with an end seal flexibly restrained at the edge

**V. S. Popov<sup>a</sup>, A. A. Popova**Yuri Gagarin State Technical University of Saratov,  
77 Politechnicheskaya st., Saratov, 410054, RussiaE-mail: <sup>a</sup> vic\_p@bk.ru*Received 28.09.2019, after completion — 26.12.2019.**Accepted for publication 17.02.2020.*

The paper proposes a new mathematical model to study the interaction dynamics of the longitudinal wall of a narrow channel with its end seal. The end seal was considered as the edge wall on a spring, i.e. spring-mass system. These walls interaction occurs via a viscous liquid filling the narrow channel; thus required the formulation and solution of the hydroelasticity problem. However, this problem has not been previously studied. The problem consists of the Navier–Stokes equations, the continuity equation, the edge wall dynamics equation, and the corresponding boundary conditions. Two cases of fluid motion in a narrow channel with parallel walls were studied. In the first case, we assumed the liquid motion as the creeping one, and in the second case as the laminar, taking into account the motion inertia. The hydroelasticity problem solution made it possible to determine the distribution laws of velocities and pressure in the liquid layer, as well as the motion law of the edge wall. It is shown that during creeping flow, the liquid physical properties and the channel geometric dimensions completely determine the damping in the considered oscillatory system. Both the end wall velocity and the longitudinal wall velocity affect the damping properties of the liquid layer. If the fluid motion inertia forces were taken into account, their influence on the edge wall vibrations was revealed, which manifested itself in the form of two added masses in the equation of its motion. The added masses and damping coefficients of the liquid layer due to the joint consideration of the liquid layer inertia and its viscosity were determined. The frequency and phase responses of the edge wall were constructed for the regime of steady-state harmonic oscillations. The simulation showed that taking into account the fluid layer inertia and its damping properties leads to a shift in the resonant frequencies to the low-frequency region and an increase in the oscillation amplitudes of the edge wall.

Keywords: hydroelastic oscillations, end seal, viscous fluid, metal bellows, frequency and phase responses

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2020, vol. 12, no. 2, pp. 387–400 (Russian).

The work was supported by Russian Foundation for Basic Research (RFBR) according to the project No. 18-01-00127-a.

## 1. Введение

Математическое моделирование взаимодействия упругих элементов конструкций с жидкостью является важной проблемой, так как с ней приходится часто сталкиваться в современной технике и производственных процессах. К одной из первых работ, посвященных данному вопросу, следует отнести [Lamb, 1921], где предложена модель для исследования свободных колебаний жестко защемленной круглой пластины, закрывающей отверстие в абсолютно твердой поверхности, с одной стороны которой находится неограниченный объем идеальной жидкости. Для построения модели используется энергетический метод Рэля, а за форму прогиба пластины принимается форма статического прогиба при равномерно распределенной нагрузке. Обобщение предложенной модели выполнено в [Amabili, 1996], где прогиб пластины определяется на базе совместного рассмотрения уравнений движения упругого элемента и жидкости. В [Kozlovsky, 2009] выполнено обобщение исследования [Lamb, 1921] на случай учета вязкости жидкости. В указанных выше работах моделирование показало важность учета влияния жидкости, так как возникает демпфирование колебаний, вызванное преобразованием энергии на волнообразование в жидкости совместно с эффектом увеличения инерции, который оценивается присоединенной массой, приводящий к снижению частот колебаний. Дальнейшие исследования по данному вопросу направлены на изучение влияния сопутствующих факторов. Например, исследование присоединенных масс жидкости при колебаниях пластин различной формы и при различных способах их закрепления выполнено в [Mogozov et al., 2019]. Модель гидроупругости балки кольцевого сечения, заполненной идеальной жидкостью, для исследования трубопровода рассмотрена в [Veklich, 2013], а в монографии [Païdoussis, 2004] освещены вопросы разработки моделей и моделирования гидроупругого поведения тонких упругих элементов конструкций, по которым движется поток идеальной жидкости, в осесимметричной постановке. В [Mogilevich et al., 2008] предложена модель гидроупругих колебаний гильзы цилиндра двигателя внутреннего сгорания с водяным охлаждением на базе решения трехмерной задачи гидроупругости цилиндрической оболочки, окруженной слоем вязкой жидкости. Динамика стенок кольцевого канала и идеальной жидкости в нем изучена в [Bochkarev, Lekomtsev, 2017]. В [Кондратов, Быкова, 2011; Mogilevich et al., 2017] рассмотрены вопросы разработки математических моделей гидроупругости стенок кольцевых каналов с вязкой жидкостью для исследования вынужденных колебаний стенок данных каналов. Математическое моделирование процессов гидроупругости цилиндрической оболочки с ламинарным потоком внутри нее проведено в [Могилевич и др., 2007]. Модель для исследования колебаний круглой пластины, окруженной идеальной жидкостью, находящейся в жестком цилиндре, предложена в [Askari et al., 2013]. Динамика и устойчивость пластины, входящей в состав стенки, разделяющей две вязкие жидкости, рассмотрены в [Velmisov, Ankilov, 2017]. Моделирование демпфирования колебаний балки, лежащей на слое вязкой жидкости, выполнено в [Önsay, 1993]. В работе [Королева и др., 2018] проведено исследование взаимодействия упругозакрепленного жесткого диска с вязким сжимаемым газом для моделирования срабатывания предохранительного клапана. Модели для исследования влияния динамики взаимодействия жидкости с элементами гироскопических приборов на их динамику и точность предложены в [Andreichenko, Smarun, 2011; Цинь, Подчерцев, 2017]. Исследования по определению коэффициентов демпфирования гидравлических опор при использовании в них различных жидкостей для систем виброгашения были выполнены в [Аббакумов и др., 2002]. Математическая модель изгибных колебаний консольной балки, окруженной неограниченным объемом вязкой несжимаемой жидкости, разработана в [Faria, Inman, 2014]. Аналогичная проблема для балки-пьезоэлемента, находящейся в потоке вязкой несжимаемой жидкости, рассмотрена в [Аксбау, Young, 2015]. Следует выделить работы, в которых рассматриваются вопросы моделирования колебаний элементов конструкций с учетом влияния упругой податливости их закрепления или особенности торцевого истечения. Например, в [Kurzin, 2011] разработана модель для исследования продольных колебаний пластины, упругозакрепленной на торце и обтекаемой потоком вязкой жидкости в канале с парал-

лельными стенками. Исследование влияния упругого закрепления на торце трубопровода, перекачивающего жидкость, на его динамику и устойчивость выполнено в [Kheiri et al., 2014]. Продольные и поперечные колебания упругозакрепленной стенки клиновидного канала с вязкой жидкостью исследованы в [Mogilevich et al., 2018; Mogilevich et al., 2016]. Моделирование влияния наличия торцевого уплотнения и особенностей торцевого истечения жидкости на возмущающие моменты в поплавковом гироскопе проведено в [Antsiferov et al., 2009]. В данных работах показана важность учета упругой податливости закрепления торца канала и наличия жесткого уплотнения, ограничивающего истечение жидкости на торце канала. Вместе с тем в указанных выше работах не рассмотрен одновременный учет наличия упругого закрепления элемента конструкции и особенности торцевого истечения жидкости, что необходимо для канала с упругим уплотняющим элементом (сильфоном), и одной из параллельных стенок в виде вибрирующего штампа.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим узкий канал, образованный двумя параллельными стенками (см. рис. 1). Декартову систему координат  $xuz$  свяжем с нижней неподвижной стенкой, которая считается абсолютно жесткой. Верхняя стенка канала — жесткий штамп, совершающий колебания по заданному закону вдоль оси  $z$ . Размеры стенок канала в плане  $2\ell \times b$ . Далее полагаем, что  $b \gg 2\ell$ , и рассматриваем плоскую задачу. В невозмущенном состоянии штампа расстояние между стенками канала  $\delta_0$  и  $2\ell \gg \delta_0$ . Канал полностью заполнен вязкой несжимаемой жидкостью. Амплитуда колебаний штампа  $z_m \ll \delta_0$ . На левом торце жидкость свободно вытекает в ту же жидкость с постоянным давлением  $p_0$ , а на правом торце установлена упругозакрепленная стенка (сильфон), которая может перемещаться в направлении оси  $x$  с амплитудой  $x_m$ . Ниже будем принимать во внимание, что при свободном истечении жидкости давление в сечении на левом торце совпадает с постоянным давлением  $p_0$ . На правом торце, в силу отсутствия утечек, расход жидкости совпадает с расходом жидкости в сильфоне. Далее сосредоточимся на исследовании установившихся вынужденных колебаний торцевой стенки, в силу того, что вязкость жидкости ведет к быстрому затуханию переходных процессов [Пановко, Губанова, 1987].

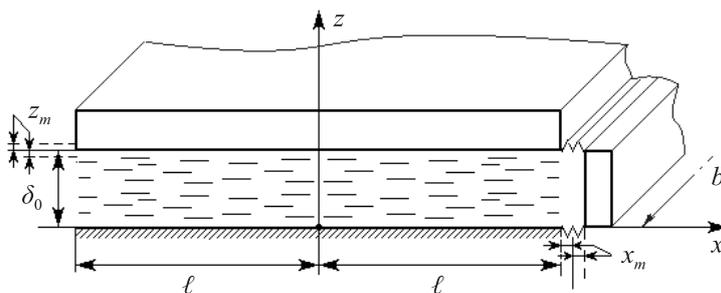


Рис. 1. Узкий канал с упругозакрепленной торцевой стенкой

Уравнения движения вязкой жидкости представляют собой уравнения Навье–Стокса совместно с уравнением неразрывности [Lamb, 1945]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right), \quad \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $u_x, u_z$  — проекции вектора скорости жидкости на оси координат,  $p$  — давление,  $\rho, \nu$  — плотность и коэффициент кинематической вязкости жидкости.

Граничные условия уравнений (1) представляют собой условия прилипания жидкости к стенкам канала, которые выражаются в совпадении скоростей движения жидкости и стенки канала:

$$u_x = 0, u_z = 0 \text{ при } z = 0, u_x = 0, u_z = \frac{dz_*}{dt} \text{ при } z = z_*, \quad (2)$$

а также условий на торцах канала, заключающихся в условии совпадения давления на левом торце канала с давлением окружающей жидкости и условия совпадения расхода жидкости на правом торце канала и торцевой полости (сильфоне):

$$p = p_0 \text{ при } x = -\ell, \quad \int_0^{z_*} u_x dz = \delta_0 \frac{dx_*}{dt} \text{ при } x = x_*. \quad (3)$$

Здесь  $z_*$  — закон движения штампа,  $x_*$  — закон движения правой торцевой стенки (сильфона) канала,  $p_0$  — уровень отсчета давления. Заметим, что в условиях (2), (3) перемещения штампа и сильфона в направлении осей  $x$  и  $z$  представлены в форме  $x_* = \ell + x_m f_x(\omega t)$ ,  $z_* = \delta_0 + z_m f_z(\omega t)$ .

Далее, рассмотрим два случая: в первом движение жидкости в узком канале изучается как ползущее, т. е. в данном случае пренебрегаем силами инерции жидкости в узком канале, а во втором — снимем данное ограничение.

Уравнение движения торцевой стенки как одномассовой модели запишем в виде

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + nx = b \int_0^{z_*} p|_{x=x_*} dz, \quad (4)$$

где  $m$  — масса торцевой стенки,  $n$  — коэффициент жесткости упругой связи торцевой стенки.

### 3. Определение реакции торцевой стенки

Введем в рассмотрение безразмерные переменные и малые параметры задачи:

$$\psi = \frac{\delta_0}{\ell} \ll 1, \quad \lambda = \frac{z_m}{\delta_0} \ll 1, \quad \tau = \omega t, \quad \xi = \frac{x}{\ell}, \quad \zeta = \frac{z}{\delta_0}, \quad u_x = \frac{z_m \omega}{\psi} U_\xi, \quad (5)$$

$$u_z = z_m \omega U_\zeta, \quad p = p_0 + \frac{\rho \nu z_m \omega}{\delta_0 \psi^2} P,$$

где  $\psi, \lambda$  — малые параметры, характеризующие задачу; кроме того, далее будем учитывать, что в рассматриваемой постановке  $x_m/\ell \ll 1$  и  $x_m \psi/z_m = O(1)$ .

Тогда с учетом переменных (5) уравнения (1) для ползущего течения (первый случай) имеют вид

$$-\frac{\partial P}{\partial \xi} + \psi^2 \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \zeta^2} = 0, \quad (6)$$

$$-\frac{\partial P}{\partial \zeta} + \psi^2 \left[ \psi^2 \frac{\partial^2 U_\zeta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U_\zeta}{\partial \zeta^2} \right] = 0, \quad \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} = 0.$$

Во втором случае уравнения (1) в переменных (5) запишутся как

$$\frac{\omega\delta_0^2}{\nu} \left[ \frac{\partial U_\xi}{\partial \tau} + \lambda \left( U_\xi \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + U_\zeta \frac{\partial U_\xi}{\partial \zeta} \right) \right] = -\frac{\partial P}{\partial \xi} + \psi^2 \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \zeta^2}, \quad (7)$$

$$\psi^2 \frac{\omega\delta_0^2}{\nu} \left[ \frac{\partial U_\zeta}{\partial \tau} + \lambda \left( U_\xi \frac{\partial U_\zeta}{\partial \xi} + U_\zeta \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} \right) \right] = -\frac{\partial P}{\partial \zeta} + \psi^2 \left[ \psi^2 \frac{\partial^2 U_\zeta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U_\zeta}{\partial \zeta^2} \right],$$

$$\frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} = 0.$$

Граничные условия для уравнений (6), (7) в безразмерных переменных (5) согласно (2), (3) имеют вид

$$U_\xi = U_\zeta = 0 \text{ при } \zeta = 0, \quad U_\xi = 0, \quad U_\zeta = \frac{df_z}{d\tau} \text{ при } \zeta = 1 + \lambda f_z, \quad (8)$$

$$P = 0 \text{ при } \xi = -1, \quad \int_0^{1+\lambda f_z} U_\xi d\zeta = \frac{x_m \psi}{z_m} \frac{df_x}{d\tau} \text{ при } \xi = 1 + (x_m/\ell) f_x.$$

Заметим, что в предлагаемой постановке имеют место регулярные возмущения, т. е. при асимптотическом разложении по малому параметру каждый последующий член данного разложения будет значительно меньше предыдущих во всем диапазоне изменений независимых переменных и физических параметров задачи. В таком подходе в уравнениях (6), (7) и граничных условиях (8)  $\psi = o(1)$ ,  $\lambda = x_m/\ell = o(1)$ ,  $x_m \psi/z_m = O(1)$ , и члены при  $\lambda$ ,  $x_m/\ell$ ,  $\psi$  и  $\psi^2$  можно опустить. В результате для случая ползущего движения жидкости в узком канале получим следующие уравнения ее динамики:

$$-\frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \zeta^2} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} = 0. \quad (9)$$

Для случая учета сил инерции жидкости в узком канале получим линеаризованные уравнения ее динамики:

$$\frac{\omega\delta_0^2}{\nu} \frac{\partial U_\xi}{\partial \tau} = -\frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \zeta^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} = 0. \quad (10)$$

Принимая во внимание сделанные выше замечания, граничные условия (8) имеют вид

$$U_\xi = U_\zeta = 0 \text{ при } \zeta = 0, \quad U_\xi = 0, \quad U_\zeta = \frac{df_z}{d\tau} \text{ при } \zeta = 1, \quad (11)$$

$$P = 0 \text{ при } \xi = -1, \quad \int_0^1 U_\xi d\zeta = \frac{x_m \psi}{z_m} \frac{df_x}{d\tau} \text{ при } \xi = 1.$$

Согласно (9), (10) для двух рассматриваемых случаев  $\frac{\partial P}{\partial \zeta} = 0$ ; следовательно, уравнение движения торцевой стенки (4) с учетом (5) запишется как

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + nx = \delta_0 b \left( p_0 + \rho \nu z_m \omega (\delta_0 \psi^2)^{-1} P|_{\xi=1} \right). \quad (12)$$

Для случая ползущего движения жидкости, решая (9) с граничными условиями (11), находим, что

$$U_\xi = \frac{\zeta^2 - \zeta}{2} \frac{\partial P}{\partial \xi}, \quad U_\zeta = \frac{1}{12} \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} (3\zeta^2 - 2\zeta^3), \quad (13)$$

$$P = 6 \frac{df_z}{d\tau} (\xi^2 - 1) - 12 \left( \frac{df_z}{d\tau} + \frac{x_m \psi}{z_m} \frac{df_x}{d\tau} \right) (\xi + 1).$$

Тогда давление в сечении канала на правом торце равно

$$P|_{\xi=1} = -24 \left( \frac{df_z}{d\tau} + \frac{x_m \psi}{z_m} \frac{df_x}{d\tau} \right). \quad (14)$$

Принимая во внимание (14), уравнение (12) запишем как

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + K_x \frac{dx}{dt} + nx = \delta_0 b p_0 - K_z \frac{dz}{dt}, \quad (15)$$

где  $K_x = 24 \frac{b\ell\rho\nu}{\delta_0}$ ,  $K_z = 24 \frac{b\ell^2\rho\nu}{\delta_0^2}$  — коэффициенты демпфирования, обусловленные влиянием вязкой жидкости.

Заметим, что уравнение (15) будет справедливо как для произвольного закона вибрации штампа, так и для гармонического. Рассмотрим далее установившиеся гармонические колебания, при этом закон вибрации штампа считаем заданным как  $z = \delta_0 + z_m f_z(\omega t)$ ,  $f_z(\omega t) = \sin(\omega t)$ . В этом случае из уравнения (15) определяем закон движения торцевой стенки и, с учетом последнего, распределение давления вдоль канала, которые имеют вид

$$x = \frac{\delta_0 b}{n} p_0 - \left[ \frac{K_z(n - m\omega^2)}{(n - m\omega^2)^2 + (K_x\omega)^2} \dot{z} - \frac{K_z K_x}{(n - m\omega^2)^2 + (K_x\omega)^2} \ddot{z} \right], \quad (16)$$

$$p = p_0 + \frac{\xi^2 - 2\xi - 3}{4\delta_0 b} K_z \dot{z} + \frac{\xi + 1}{2\delta_0 b} \left[ \frac{K_x K_z (n - m\omega^2)}{(n - m\omega^2)^2 + (K_x\omega)^2} \ddot{z} + \frac{K_x^2 K_z \omega^2}{(n - m\omega^2)^2 + (K_x\omega)^2} \dot{z} \right].$$

Здесь и далее точка обозначает производную по времени.

Из данного решения можно выделить амплитудно-частотную характеристику  $A(\omega)$  и фазово-частотную характеристику  $\phi(\omega)$  торцевой стенки на виброскорость штампа, т. е. записать закон движения торцевой стенки (16) в виде

$$x = \frac{\delta_0 b}{n} p_0 - z_m \omega \frac{24b\rho\nu}{n\psi^2} A(\omega) \sin(\omega t + \phi(\omega)), \quad (17)$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 - m\omega^2/n)^2 + (K_x\omega/n)^2}}, \quad \phi(\omega) = \arctg \left( \frac{n - m\omega^2}{K_x\omega} \right).$$

Определим максимум амплитудно-частотной характеристики  $A(\omega)$ . Для этого приравняем ее производную по  $\omega$  к нулю и получим следующее уравнение:

$$\omega \left( \omega^2 + \frac{1}{2} \frac{K_x^2}{m^2} - \frac{n}{m} \right) = 0. \quad (18)$$

Уравнение (18) имеет три корня:  $\omega_1 = -\sqrt{n/m - 0,5K_x^2/m^2}$ ,  $\omega_2 = 0$ ,  $\omega_3 = \sqrt{n/m - 0,5K_x^2/m^2}$ . Среди данных корней практический интерес имеет только корень  $\omega_3$ , так как корень  $\omega_1$  не имеет физического смысла, а корень  $\omega_2$  соответствует статическому значению амплитудной частотной характеристики  $A(\omega_2) = 1$ . Подставляя корень  $\omega_3$  в  $A(\omega)$ , находим соответствующее ему максимальное значение:

$$A(\omega_3) = \frac{1}{D\sqrt{1-D^2/4}}, \quad D = \frac{K_x}{\sqrt{mn}}. \quad (19)$$

Таким образом, корень  $\omega_3$  — это резонансная частота колебаний торцевой стенки канала, вызванных вибрацией штампа.

Введем в рассмотрение безразмерную частоту как отношение текущей частоты  $\omega$  к собственной частоте системы без демпфирования  $\sqrt{n/m}$ , т. е.  $\eta = \sqrt{\omega^2 m/n}$ . Тогда, по (17) получаем безразмерную амплитудно-частотную характеристику торцевой стенки при ползучем движении жидкости в канале:

$$A(\eta) = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + D^2\eta^2}}. \quad (20)$$

Для случая учета инерции движения жидкости решим уравнения (10) с граничными условиями (11) методом итераций. При первой итерации полагаем  $\omega\delta_0^2/\nu$  малым, т. е. исключаем локальный член инерции в (10) и получаем решение (13) для случая ползущего движения жидкости. На второй итерации определяем  $\partial U_\xi/\partial\tau$  из (13) и подставляем в (10), а затем, решая полученные уравнения с граничными условиями (11), находим

$$U_\xi = \frac{\zeta^2 - \zeta}{2} \frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{\omega\delta_0^2}{\nu} \left( \frac{d^2 f_z}{d\tau^2} \xi - \left( \frac{d^2 f_z}{d\tau^2} + \frac{x_m \psi}{z_m} \frac{d^2 f_z}{d\tau^2} \right) \right) \frac{\zeta^4 - 2\zeta^3 + \zeta}{2}, \quad (21)$$

$$U_\zeta = \frac{3\zeta^2 - 2\zeta^3}{12} \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} + \frac{\omega\delta_0^2}{\nu} \frac{d^2 f_z}{d\tau^2} \frac{5\zeta^4 - 5\zeta^2 - 2\zeta^5}{20},$$

$$P = \frac{\xi^2 - 2\xi - 3}{2} \left( \frac{6\omega\delta_0^2}{5\nu} \frac{d^2 f_z}{d\tau^2} + 12 \frac{df_z}{d\tau} \right) - \frac{x_m \psi}{z_m} \left( \frac{1}{10} \frac{\omega\delta_0^2}{\nu} \frac{d^2 f_x}{d\tau^2} + 12 \frac{df_x}{d\tau} \right) (\xi + 1).$$

Согласно (21) давление в сечении канала на правом торце равно

$$P|_{\xi=1} = - \left( \frac{12\omega\delta_0^2}{5\nu} \frac{d^2 f_z}{d\tau^2} + 24 \frac{df_z}{d\tau} \right) - \frac{x_m \psi}{z_m} \left( \frac{2\omega\delta_0^2}{10\nu} \frac{d^2 f_x}{d\tau^2} + 24 \frac{df_x}{d\tau} \right). \quad (22)$$

Подставляя (22) в (12), получим уравнения движения торцевой стенки в виде

$$(m + M_x) \frac{d^2 x}{dt^2} + K_x \frac{dx}{dt} + nx = \delta_0 b p_0 - K_z \frac{dz}{dt} - M_z \frac{d^2 z}{dt^2}. \quad (23)$$

Здесь  $M_z = \frac{12}{5} \rho b l^2$ ,  $M_x = \frac{1}{5} \rho b l \delta_0$  — присоединенные массы жидкости,  $K_x = 24 \frac{b l \rho \nu}{\delta_0}$ ,

$K_z = 24 \frac{b l^2 \rho \nu}{\delta_0^2}$  — коэффициенты демпфирования вязкой жидкости.

Заметим, что (23) справедливо для произвольного закона вибрации штампа, а для режима установившихся гармонических колебаний из этого уравнения определяем закон движения торцевой стенки и, с учетом последнего, закон распределения давления вдоль канала, т. е.

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{\delta_0 b}{n} p_0 - \left[ \frac{(n - (m + M_x)\omega^2)K_z + M_z\omega^2 K_x}{(n - (m + M_x)\omega^2)^2 + (K_x\omega)^2} \dot{z} + \frac{(n - (m + M_x)\omega^2)M_z - K_z K_x}{(n - (m + M_x)\omega^2)^2 + (K_x\omega)^2} \ddot{z} \right], \\
 p &= p_0 + \frac{\xi^2 - 2\xi - 3}{4\delta_0 b} (M_z \ddot{z} + K_z \dot{z}) - \frac{\xi + 1}{2\delta_0 b} \left[ \left( M_x \omega^2 \frac{(n - (m + M_x)\omega^2)K_z + M_z\omega^2 K_x}{(n - (m + M_x)\omega^2)^2 + (K_x\omega)^2} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + K_x \omega^2 \frac{(n - (m + M_x)\omega^2)M_z - K_z K_x}{(n - (m + M_x)\omega^2)^2 + (K_x\omega)^2} \right) \dot{z} + \left( M_x \omega^2 \frac{(n - (m + M_x)\omega^2)M_z - K_z K_x}{(n - (m + M_x)\omega^2)^2 + (K_x\omega)^2} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - K_x \frac{(n - (m + M_x)\omega^2)K_z + M_z\omega^2 K_x}{(n - (m + M_x)\omega^2)^2 + (K_x\omega)^2} \right) \ddot{z} \right].
 \end{aligned} \tag{24}$$

Выделим амплитудно-частотную характеристику  $A(\omega)$  и фазово-частотную характеристику  $\phi(\omega)$  торцевой стенки на виброскорость штампа, т. е. запишем закон движения торцевой стенки (24) в виде

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{\delta_0 b}{n} p_0 - \frac{z_m \omega K_z}{n} A(\omega) \sin(\omega t + \phi(\omega)), \\
 A(\omega) &= \sqrt{\frac{M_z^2 \omega^2 / K_z^2 + 1}{(1 - (m + M_x)\omega^2 / n)^2 + (K_x \omega / n)^2}}, \\
 \phi(\omega) &= -\arctg \left( \frac{(n - (m + M_x)\omega^2)K_z + M_z\omega^2 K_x}{(n - (m + M_x)\omega^2)M_z\omega - K_z K_x \omega} \right).
 \end{aligned} \tag{25}$$

Переходя к безразмерной частоте  $\eta = \sqrt{\omega^2 m / n}$ , получим безразмерную амплитудно-частотную характеристику торцевой стенки при учете инерции движения жидкости в канале:

$$A(\eta) = \sqrt{\frac{\eta^2 (M_z / K_z)^2 n / m + 1}{(1 - \eta^2 (1 + M_x / m))^2 + \eta^2 K_x^2 / (mn)}}. \tag{26}$$

#### 4. Результаты расчетов

Для иллюстрации построенной модели приведем пример моделирования амплитудных частотных характеристик торцевой стенки канала со следующими параметрами:  $\ell = 0.1$  м,  $\delta_0 / \ell = 1/10$ ,  $b / \ell = 5$ ,  $m = 0.5$  кг,  $n = 300$  кг/с<sup>2</sup>. В расчетах рассматривались сильно вязкая жидкость (масло АМГ-10) с параметрами  $\rho = 840$  кг/м<sup>3</sup>,  $\nu = 2 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с и вода с параметрами  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $\nu = 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с.

В случае ползущего течения результаты расчетов  $A(\eta)$  по (20) для воды при последовательном уменьшении безразмерной ширины канала  $\delta_0 / \ell$  представлены на рис. 2. Аналогичные расчеты  $A(\eta)$  для масла АМГ-10 представлены на рис. 3.

В случае учета инерции движения жидкости результаты расчетов  $A(\eta)$  по (26) для воды при последовательном уменьшении безразмерной ширины канала  $\delta_0 / \ell$  представлены на рис. 4. Аналогичные расчеты  $A(\eta)$  для масла АМГ-10 представлены на рис. 5.

Проведенное моделирование показало существенное влияние динамики слоя жидкости на колебания торцевой стенки. В частности, при рассмотрении ползущего движения тонкого слоя

жидкости в канале, осуществлен учет его демпфирующих свойств, что проявляется в виде ограниченности амплитуд колебания торцевой стенки на резонансных частотах, близких к собственной частоте системы без демпфирования. Расчеты показали важность учета инерции движения вязкой жидкости в узком канале, так как кроме демпфирования проявляется эффект появления присоединенной массы. В результате, как показало моделирование, наблюдается сдвиг резонансных частот к более низким частотам от собственной частоты системы без демпфирования. Данный сдвиг сопровождается существенным возрастанием амплитуд колебаний. Расчеты также показали возможность демпфирования амплитуд колебаний торцевой стенки путем уменьшения толщины слоя жидкости в канале либо путем увеличения вязкости жидкости.

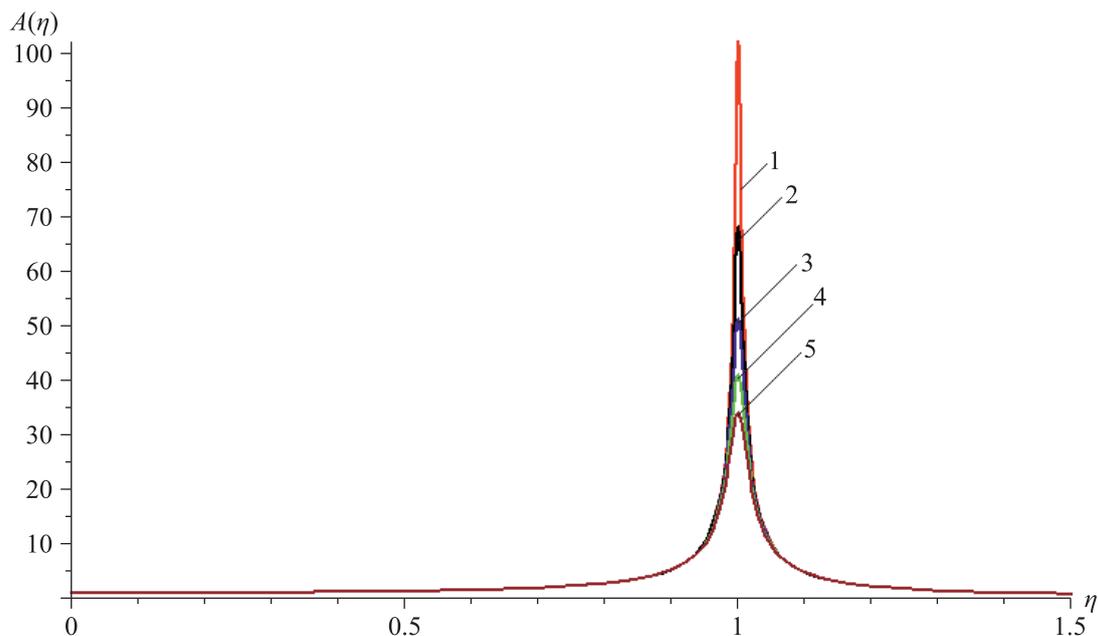


Рис. 2. Безразмерные амплитудно-частотные характеристики  $A(\eta)$  торцевой стенки для случая ползучего течения воды в канале при различных значениях безразмерной толщины слоя жидкости  $\delta_0/\ell$ : 1 — при  $\delta_0/\ell = 1/10$ , 2 — при  $\delta_0/\ell = 1/15$ , 3 — при  $\delta_0/\ell = 1/20$ , 4 — при  $\delta_0/\ell = 1/25$ , 5 — при  $\delta_0/\ell = 1/30$ ;  $\eta$  — безразмерная частота,  $\delta_0$  — средняя толщина слоя жидкости в канале,  $\ell$  — характерная длина канала

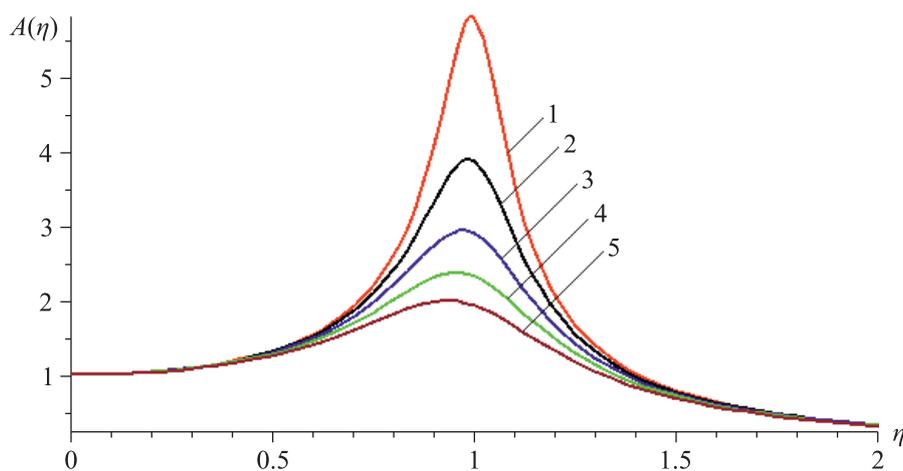


Рис. 3. Безразмерные амплитудно-частотные характеристики  $A(\eta)$  торцевой стенки для случая ползучего течения масла АМГ-10 в канале при различных значениях безразмерной толщины слоя жидкости  $\delta_0/\ell$ : 1 — при  $\delta_0/\ell = 1/10$ , 2 — при  $\delta_0/\ell = 1/15$ , 3 — при  $\delta_0/\ell = 1/20$ , 4 — при  $\delta_0/\ell = 1/25$ , 5 — при  $\delta_0/\ell = 1/30$ ;  $\eta$  — безразмерная частота,  $\delta_0$  — средняя толщина слоя жидкости в канале,  $\ell$  — характерная длина канала

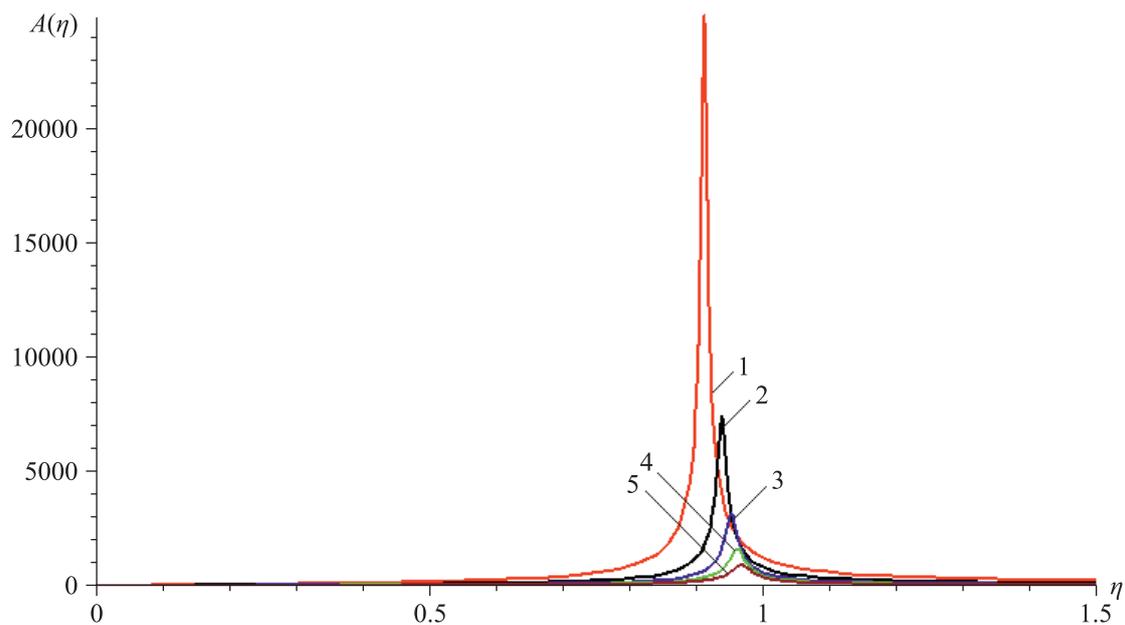


Рис. 4. Безразмерные амплитудно-частотные характеристики  $A(\eta)$  торцевой стенки для случая учета инерции течения воды в канале при различных значениях безразмерной толщины слоя жидкости  $\delta_0/\ell$ : 1 — при  $\delta_0/\ell = 1/10$ , 2 — при  $\delta_0/\ell = 1/15$ , 3 — при  $\delta_0/\ell = 1/20$ , 4 — при  $\delta_0/\ell = 1/25$ , 5 — при  $\delta_0/\ell = 1/30$ ;  $\eta$  — безразмерная частота,  $\delta_0$  — средняя толщина слоя жидкости в канале,  $\ell$  — характерная длина канала

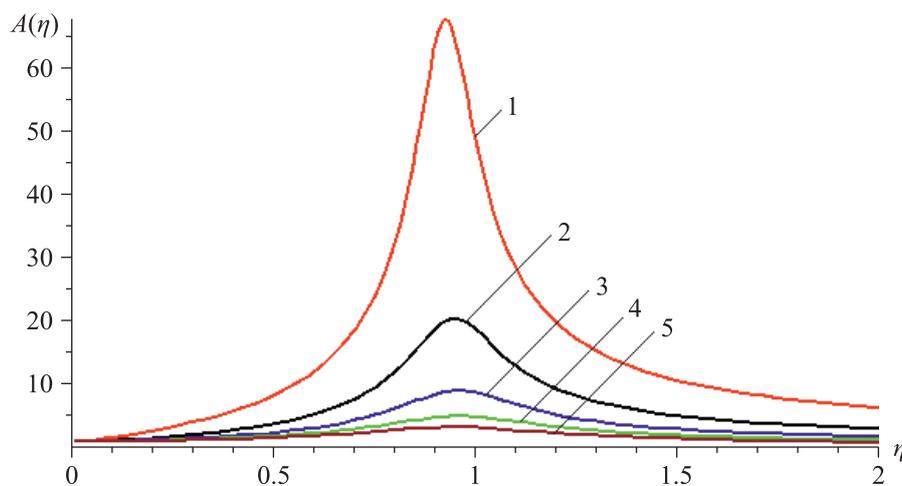


Рис. 5. Безразмерные амплитудно-частотные характеристики  $A(\eta)$  торцевой стенки для случая учета инерции течения масла АМГ-10 в канале при различных значениях безразмерной толщины слоя жидкости  $\delta_0/\ell$ : 1 — при  $\delta_0/\ell = 1/10$ , 2 — при  $\delta_0/\ell = 1/15$ , 3 — при  $\delta_0/\ell = 1/20$ , 4 — при  $\delta_0/\ell = 1/25$ , 5 — при  $\delta_0/\ell = 1/30$ ;  $\eta$  — безразмерная частота,  $\delta_0$  — средняя толщина слоя жидкости в канале,  $\ell$  — характерная длина канала

## 5. Заключение

В работе предложена математическая модель для исследования гидроупругих колебаний торцевой стенки — торцевого уплотнения (сильфона) канала, — обусловленных вибрацией штампа — продольной стенки канала. В рамках данной модели определены законы распределения скоростей и давления в слое жидкости, заполняющей канал. Найденный закон распределения давления вдоль канала существенно отличается от соответствующих законов, найденных в [Mogilevich et al., 2018; Mogilevich et al., 2016] для случаев сдавливания жидкости вибрирую-

щей стенкой и при стеснении потока за счет клиновидности канала. Из анализа найденного распределения давления в канале следует, что демпфирующие свойства слоя вязкой жидкости в нем определяются физическими свойствами жидкости, геометрическими размерами канала, скоростью движения торцевой стенки, а также скоростью движения продольной стенки. В результате этого в уравнении движения торцевой стенки появляются коэффициенты демпфирования в продольном и поперечном направлении  $K_x$ ,  $K_z$ . При учете инерции движения жидкости возникает эффект появления присоединенной массы [Mogozov et al., 2019]. При этом модель позволила выявить, что необходимо учитывать как появление присоединенной массы  $M_x$ , обусловленной взаимодействием жидкости с торцевой стенкой, так и присоединенной массы  $M_z$  за счет взаимодействия продольной стенки канала с жидкостью, находящейся в нем. Данный вывод обусловлен вхождением двух указанных присоединенных масс в полученное уравнение движения торцевой стенки. Проведенные расчеты амплитудно-частотных характеристик торцевой стенки показали, что исключение из рассмотрения инерционных свойств вязкой жидкости, т. е. моделирование динамики жидкости в узком канале как ползучего течения, приводит к заниженным значениям амплитуд колебаний торцевой стенки и завышенным значениям ее резонансных частот. Следует отметить, что предложенная модель может быть использована как для гармонического закона вибрации продольной стенки (штампа), так и для произвольного. В последнем случае, если закон движения штампа задан нелинейно, уравнение движения торцевой стенки (сильфона) необходимо решать соответствующими методами, например численно.

Полученные в работе результаты могут быть использованы на практике для определения резонансных частот колебаний сильфонов и соответствующих им амплитуд колебаний, а также для исследования распределения давления жидкости вдоль канала в системах смазки, гидропривода, охлаждения и т. д. Найденное аналитическое решение задачи гидроупругости может быть использовано в качестве тестовой задачи при отладке численных методов и комплексов программ. Кроме того, данная модель может применяться для создания неразрушающих методов диагностирования и мониторинга колебаний продольной стенки канала и давления жидкости в нем на базе сравнения расчетных амплитуд колебаний торцевой стенки с экспериментально снятыми.

## Список литературы (References)

- Аббакумов Е. И., Гордеев Б. А., Ерофеев В. И., Синева А. В., Ложкин Ф. В. Исследования гидравлических виброопор с различными рабочими жидкостями // Проблемы машиностроения и надежности машин. — 2002. — № 2. — С. 33–36.  
*Abbakumov E. I., Gordeev B. A., Erofeev V. I., Sineva A. V., Lozhkin F. V. Issledovaniya gidravlicheskikh vibroopor s razlichnymi rabochimi zhidkostyami* [Investigation of hydraulic vibrosupports with different working liquids] // Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin. — 2002. — No. 2. — P. 33–36 (in Russian).
- Кондратов Д. В., Быкова Т. В. Колебания упругих стенок трубы кольцевого сечения при пульсирующем ламинарном течении жидкости // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. — 2011. — № 4–5. — С. 2255–2257.  
*Kondratov D. V., Bykova T. V. Kolebaniya uprugikh stenok truby kol'tsevogo secheniya pri pul'siruyushchem laminarnom techenii zhidkosti* [Oscillations of elastic pipe walls of annular section with pulsating fluid laminar flow] // Vestnik Nizhego-rodskogo universiteta im. N. I. Lobachevskogo. — 2011. — No. 4–5. — P. 2255–2257 (in Russian).
- Королева М. Р., Мищенко О. В., Редер Т., Тенев В. А., Чернова А. А. Численное моделирование процесса срабатывания предохранительного клапана // Компьютерные исследования и моделирование. — 2018. — Т. 10, № 4. — С. 495–509.  
*Koroleva M. R., Mishchenkova O. V., Reder T., Tenenev V. A., Chernova A. A. Chislennoe modelirovanie processa sra-batyvaniya predohranitel'nogo klapana* [Numerical simulation of the process of activation of the safety valve] // Computer Research and Modeling. — 2018. — Vol. 10, No. 4. — P. 495–509 (in Russian).
- Могилевич Л. И., Попова А. А., Попов В. С. Динамика взаимодействия упругой цилиндрической оболочки с ламинарным потоком жидкости внутри нее применительно к трубопроводному транспорту // Наука и техника транспорта. — 2007. — № 2. — С. 64–72.

- Mogilevich L. I., Popova A. A., Popov V. S.* Dinamika vzaimodeistviya uprugoi tsilindricheskoj obolochki s laminarnym potokom zhidkosti vnutri nee primenitel'no k truboprovodnomu transportu [Interaction dynamics of an elastic cylindrical shell with a laminar fluid flow inside it in relation to pipeline transport] // *Nauka i tekhnika transporta*. — 2007. — No. 2. — P. 64–72 (in Russian).
- Пановко Я. Г., Губанова И. И.* Устойчивость и колебания упругих систем. — М.: Наука, 1987.  
*Panovko Ya. G., Gubanova I. I.* Ustoichivost' i kolebaniia uprugikh sistem [Stability and Oscillations of Elastic Systems]. — Moscow: Nauka, 1987 (in Russian).
- Цинь Ц., Подчерзев В. П.* Влияние конструктивных особенностей и параметров газового заполнения на характеристики динамически настраиваемых гироскопов // *Вестник Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана. Сер. Приборостроение*. — 2017. — № 2 (113). — С. 4–20.  
*Qin Z., Podchertsev V. P.* Vliyanie konstruktivnykh osobennostej i parametrov gazovogo zapolneniya na karakteristiki dinamicheski nastroivaemykh giroskopov [Influence of Design Features and Gas Filling Parameters on Dynamically Tuned Gyroscope Characteristics] // *Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ. Instrum. Eng.* — 2017. — No. 2. — P. 4–20 (in Russian).
- Akcbay D. T., Young Y. L.* Hydroelastic response and energy harvesting potential of flexible piezoelectric beams in viscous flow // *Physics of Fluids*. — 2015. — Vol. 24, No. 5.
- Amabili M., Kwak M. K.* Free vibrations of circular plates coupled with liquids: revising the Lamb problem // *Journal of Fluids and Structures*. — 1996. — Vol. 10, No. 7. — P. 743–761.
- Andreichenko K. P., Smarun A. B.* Simulation of the axial hydromechanical effect in gyroscopes with a spherical hydrodynamic suspension // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. — 2011. — Vol. 40, No. 3. — P. 216–221.
- Antsiferov S. A., Kondratov D. V., Mogilevich L. I.* Perturbing moments in a floating gyroscope with elastic device housing on a vibrating base in the case of a nonsymmetric end outflow // *Mechanics of Solids*. — 2009. — Vol. 44, No. 3. — P. 352–360.
- Askari E., Jeong K.-H., Amabili M.* Hydroelastic vibration of circular plates immersed in a liquid-filled container with free surface // *Journal of Sound and Vibration*. — 2013. — Vol. 332, No. 12. — P. 3064–3085.
- Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V.* Aeroelastic stability of cylindrical shells interacting with internal annular fluid flow // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. — 2017. — Vol. 208. — 012009.
- Faria C. T., Inman D. J.* Modeling energy transport in a cantilevered Euler-Bernoulli beam actively vibrating in Newtonian fluid // *Mechanical Systems and Signal Processing*. — 2014. — Vol. 45, No. 2. — P. 317–329.
- Kheiri M., Paidoussis M. P., Costa Del Pozo G., Amabili M.* Dynamics of a pipe conveying fluid flexibly restrained at the ends // *Journal of Fluids and Structures*. — 2014. — Vol. 49. — P. 360–385.
- Kozlovsky Y.* Vibration of plates in contact with viscous fluid: Extension of Lamb's model // *Journal of Sound and Vibration*. — 2009. — Vol. 326. — P. 332–339.
- Kurzin V. B.* Streamwise vibrations of a plate in a viscous fluid flow in a channel, induced by forced transverse vibrations of the plate // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. — 2011. — Vol. 52, No. 3. — P. 459–463.
- Lamb H.* On the vibrations of an elastic plate in contact with water // *Proc. Roy. Soc. A*. — 1921. — Vol. 98. — P. 205–216.
- Lamb H.* Hydrodynamics, 6th edition. — New York: Dover Publications Inc, 1945.
- Mogilevich L. I., Popov V. S., Popova A. A.* Longitudinal and transverse oscillations of an elastically fixed wall of a wedge-shaped channel installed on a vibrating foundation // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. — 2018. — Vol. 47, No. 3. — P. 227–234.
- Mogilevich L. I., Popov V. S., Rabinsky L. N.* Mathematical modeling of elastically fixed wall longitudinal oscillations of wedge-shaped channel under foundation vibration // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. — 2016. — Vol. 12, No. 4. — P. 9–17.

- Mogilevich L. I., Popov V. S., Popova A. A.* Oscillations of a cylinder liner of an internal combustion engine with a water cooling system caused by piston group impacts // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. — 2008. — Vol. 37, No. 3. — P. 293–299.
- Mogilevich L. I., Popov V. S., Kondratov D. V., Rabinskiy L. N.* Bending oscillations of a cylinder, surrounded by an elastic medium and containing a viscous liquid and an oscillator // *Journal of Vibroengineering*. — 2017. — Vol. 19, No. 8. — P. 5758–5766.
- Morozov D., Indeitsev D., Michailov A.* Added mass study of plane structures at their various motions // *Materials Physics and Mechanics*. — 2019. — Vol. 41, No. 1. — P. 116–124.
- Önsay T.* Effects of layer thickness on the vibration response of a plate-fluid layer system // *Journal of Sound and Vibration*. — 1993. — Vol. 163, No. 2. — P. 231–259.
- Paidoussis M. P.* *Fluid-Structure Interactions: Slender Structures and Axial Flow*. Vol. 2. — London: Elsevier Academic Press, 2004.
- Veklich N. A.* Equation of Small Transverse Vibrations of an Elastic Pipeline Filled with a Transported Fluid // *Mechanics of Solids*. — 2013. — Vol. 48, No. 6. — P. 673–681.
- Velmisov P. A., Ankilov A. V.* Dynamic stability of plate interacting with viscous fluid // *Cybernetics and Physics*. — 2017. — Vol. 6, No. 4. — P. 262–270.