

УДК: 519.6

## Моделирование процессов миграции загрязнений от свалки твердых бытовых отходов

Л. В. Лобачева<sup>1,a</sup>, Е. В. Борисова<sup>2,b</sup>

<sup>1</sup>Тверской государственный технический университет,  
Россия, 170022, г. Тверь, наб. А. Никитина, д. 22

<sup>2</sup>Федеральное казенное учреждение  
«Научно-исследовательский институт Федеральной службы исполнения наказаний»,  
125130, г. Москва, ул. Нарвская, д. 15а, стр. 1

E-mail: <sup>a</sup> firslud@mail.ru, <sup>b</sup> elenborisov@mail.ru

*Получено 03.10.2019, после доработки — 24.02.2020.*

*Принято к публикации 10.03.2020.*

В статье представлены результаты исследования процессов миграции загрязнений от свалки твердых бытовых отходов (ТБО), расположенной в водоохранной зоне озера Селигер. Для изучения особенностей распространения загрязняющих веществ и определения миграционных параметров проведен комплекс полевых и лабораторных исследований в районе расположения свалки. Построена математическая модель, описывающая физико-химические процессы миграции веществ в почвогрунтовой толще. Процесс движения загрязняющих веществ обуславливается разнообразными факторами, оказывающими существенное влияние на миграцию ингредиентов ТБО, основными из которых являются: конвективный перенос, диффузия и сорбционные процессы, которые учтены в математической постановке задачи. Модифицированная математическая модель отличается от известных аналогов учетом ряда параметров, отражающих снижение концентрации ионов аммонийного и нитратного азота в грунтовых водах (транспирация корнями растений, разбавление инфильтрационными водами и т. д.). Представлено аналитическое решение по оценке распространения загрязнений от свалки ТБО. На основе математической модели построен комплекс имитационных моделей, который позволяет получить численное решение частных задач: вертикальной и горизонтальной миграции веществ в подземном потоке. В ходе выполнения численных экспериментов, получения аналитических решений, а также на основе данных полевых и лабораторных исследований изучена динамика распределения загрязнений в толще объекта исследования до озера. Сделан долгосрочный прогноз распространения загрязнений от свалки. В результате компьютерных и модельных экспериментов установлено, что при миграции загрязнений от свалки можно выделить ряд зон взаимодействия чистых грунтовых вод с загрязненными подземными водами, каждая из которой характеризуется различным содержанием загрязняющих веществ. Данные вычислительных экспериментов и аналитических расчетов согласуются с результатами полевых и лабораторных исследований объекта, что дает основание рекомендовать предлагаемые модели для прогнозирования миграции загрязнений от свалки ТБО. Анализ результатов моделирования миграции загрязнений позволяет обосновать численные оценки увеличения концентрации ионов  $\text{NH}_4^+$  и  $\text{NO}_3^-$  со временем функционирования свалки. Выявлено, что уже через 100 лет после начала существования свалки токсичные компоненты фильтрата заполняют все поровое пространство от свалки до озера, что приведет к существенному ухудшению экосистемы озера Селигер.

Ключевые слова: моделирование, миграция, фильтрация, сорбция, полигон твердых бытовых отходов (ТБО)

UDC: 519.6

## Simulation of pollution migration processes at municipal solid waste landfills

L. V. Lobacheva<sup>1,a</sup>, E. V. Borisova<sup>2,b</sup>

<sup>1</sup> Tver State Technical University,  
22 Af. Nikitina emb., Tver, 170022, Russia

<sup>2</sup> Research Institute of the Federal Penitentiary Service of Russia,  
15a/1 Narva st., Moscow, 125130, Russia

E-mail: <sup>a</sup> firslud@mail.ru, <sup>b</sup> elenborisov@mail.ru

*Received 03.10.2019, after completion — 24.02.2020.  
Accepted for publication 10.03.2020.*

The article reports the findings of an investigation into pollution migration processes at the municipal solid waste (MSW) landfill located in the water protection zone of Lake Seliger (Tver Region). The distribution of pollutants is investigated and migration parameters are determined in field and laboratory conditions at the landfill site. A mathematical model describing physical and chemical processes of substance migration in soil strata is constructed. Pollutant migration is found to be due to a variety of factors. The major ones, having a significant impact on the migration of MSW ingredients and taken into account mathematically, include convective transport, diffusion and sorption processes. A modified mathematical model differs from its conventional counterparts by considering a number of parameters reflecting the decrease in the concentration of ammonium and nitrate nitrogen ions in ground water (transpiration by plant roots, dilution with infiltration waters, etc.). An analytical solution to assess the pollutant spread from the landfill is presented. The mathematical model provides a set of simulation models helping to obtain a computational solution of specific problems, vertical and horizontal migration of substances in the underground flow. Numerical experiments, analytical solutions, as well as field and laboratory data was studied the dynamics of pollutant distribution in the object under study up to the lake. A long-term forecast for the spread of landfill pollution is made. Simulation experiments showed that some zones of clean groundwater interact with those of contaminated groundwater during the pollution migration from the landfill, each characterized by a different pollutant content. The data of a computational experiments and analytical calculations are consistent with the findings of field and laboratory investigations of the object and give grounds to recommend the proposed models for predicting pollution migration from a landfill. The analysis of the pollution migration simulation allows to substantiate the numerical estimates of the increase in  $\text{NH}_4^+$  and  $\text{NO}_3^-$  ion concentration with the landfill operation time. It is found that, after 100 years following the landfill opening, toxic filtrate components will fill the entire pore space from the landfill to the lake resulting in a significant deterioration of the ecosystem of Lake Seliger.

Keywords: simulation, migration, filtration, sorption, a solid waste landfill

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2020, vol. 12, no. 2, pp. 369–385 (Russian).

## 1. Введение

Проблема образования и использования твердых бытовых отходов является наиболее актуальной среди всего комплекса вопросов, связанных с обеспечением экологической устойчивости территории. В результате различных процессов жизнедеятельности человека в почве городских поселений накапливаются различные органические и неорганические вещества, биологически активные компоненты. Основными источниками органических загрязнений являются бытовые отходы. Поэтому снижение негативного влияния полигонов твердых бытовых отходов (ТБО) является одной из актуальных и нерешенных проблем современных урбанизированных территорий.

При взаимодействии ТБО с инфильтрующимися атмосферными осадками образуется фильтрат, который представляет собой высокотоксичную жидкость с минерализацией до 11–17 г/л. Фильтрат попадает через почву и зону аэрации в горизонт грунтовых вод, что приводит к его загрязнению.

На процесс распространения загрязняющих веществ в подземных и поверхностных водах влияет значительное количество факторов, многие из которых в настоящее время еще недостаточно изучены. К ним можно отнести конвективный перенос веществ потоком жидкости, молекулярную диффузию, сорбционные процессы, химические реакции, транспирацию корнями растений, микробиологические процессы и т. д. [Иванов и др., 2012].

Для эффективного выбора мероприятий по защите экосистем от загрязнений, находящихся в фильтрате свалок ТБО и способных распространяться по каналам гидродинамических связей, возникает необходимость создания математических моделей для прогнозирования ареалов миграции токсикантов при ограниченном количестве исходной информации.

В большинстве случаев математические модели учитывают влияние основных в рассматриваемых природных условиях факторов, а менее значительные (второстепенные или мало изученные) либо вообще не принимают во внимание, либо учитывают косвенно при определении гидрохимических параметров.

Однако с возрастанием сложности математической модели растет число гидрохимических параметров (коэффициентов уравнений), определение которых требует создания специальных методик, включающих проведение целенаправленных полевых и лабораторных экспериментов.

Вместе с тем процесс распространения загрязнений от какого-либо источника реально происходит по трем измерениям. Математическое моделирование физико-химических процессов в трехмерном пространстве требует больших временных затрат и информационных ресурсов. На практике принято путем схематизации природных условий упрощать математическую задачу, ограничившись рассмотрением групп двухмерных или одномерных математических моделей [Косов, 1994].

Использование для прогнозных расчетов более сложных математических моделей приводит к увеличению стоимости проектно-изыскательских и исследовательских работ. Здесь следует искать разумный компромисс, соизмеряя эффект от более точного прогноза исследуемых процессов и отмеченное увеличение затрат.

## 2. Обзор литературы

Для решения задач количественного описания процессов миграции загрязнений в почвогрунтах существует несколько подходов:

- макроскопический, позволяющий представить систему в виде протяженной гомогенной среды, имеющей макроскопические характеристики, которые можно определить с помощью методов математического и физического моделирования [Лаврик, 1982; Худжиров, 2004];
- микроскопический, основанный на описании процесса переноса веществ на уровне порового пространства, детализируя структуру пористой среды; модели, получаемые на

основе данного подхода, часто называют математическими моделями с «двойной пористостью» [Дворкин, 1968; Lindstrom, 1971; Мошинский, 2015];

- молекулярный, предполагает рассмотрение дисперсной системы как комплекса молекул, ионов и атомов, взаимодействие которых подчиняется законам классической или квантовой механики [Чураев, 1990; Гамаюнов, 2004].

Для прогноза переноса веществ в почвогрунтах наибольший интерес представляет первый подход, который основан на представлении о движении жидкой фазы почвы как сплошной среды с осредненными характеристиками потоков компонентов этой фазы. Поэтому он был использован для оценки миграции загрязнений в почвогрунтах.

Анализ литературных источников показал, что к основным факторам, оказывающим существенное влияние на миграцию ингредиентов, относятся конвективный перенос, диффузия и сорбционные процессы.

В природных условиях конвективный перенос осложняется гидродисперсией, молекулярной диффузией и обменными процессами, в результате на фронте движения раствора формируется переходная зона, отличительной особенностью которой является переменная концентрация вещества по длине потока. Для определения суммарного влияния гидродисперсии и молекулярной диффузии на перенос компонентов используется параметр

$$D_i = D_m + \lambda_i |v_i| \quad (i=1, 2, 3),$$

где  $D_i$  — коэффициент конвективной диффузии, м<sup>2</sup>/сут;  $D_m$  — коэффициент молекулярной диффузии, м<sup>2</sup>/сут;  $\lambda_i$  — коэффициент гидродисперсии, м;  $v_i$  — проекции скорости фильтрации на оси координат, м/сут.

Значения коэффициента конвективной диффузии  $D_i$  изменяются в интервале от  $k \cdot 10$  до  $k \cdot 10^{-3}$  м<sup>2</sup>/сут ( $1 \leq k \leq 10$ ), тогда как  $D_m$  не превышает  $10^{-4}$  м<sup>2</sup>/сут, поэтому им часто пренебрегают и принимают  $D_i \approx \lambda |v_i|$ .

Коэффициент конвективной диффузии зависит от таких параметров, как скорость течения жидкости в порах, извилистость путей миграции, соотношение объемов сквозных и застойных пор и др. В физико-химической гидродинамике выделяют коэффициенты продольной ( $D_{пр}$ ) и поперечной ( $D_{п}$ ) диффузии, соответственно вдоль и поперек потока. В природных условиях распространение загрязнений часто достигает значительных ареалов, поэтому основное внимание следует уделять вертикальным потокам влаги, т. е. одномерным потокам жидкости, что позволяет рассматривать продольный коэффициент гидродисперсии как ведущий расчетный параметр [Иванов, 1984].

С учетом указанных допущений миграция веществ в почве описывается системой уравнений, представленной в источниках [Шульгин, 1972; Rolston, 2007; Матвеев и др., 2016].

$$\begin{cases} n_a \frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - v \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t}, \\ \frac{\partial N}{\partial t} = \beta (C - C_p), \\ C_p = f(N_p, \alpha, \gamma). \end{cases}$$

Здесь  $C(x,t)$ ,  $N(x,t)$  — массовые концентрации компонентов в подвижном поровом растворе и в почвенном поглощающем комплексе (ППК) почвы соответственно;  $C_p$ ,  $N_p$  — те же параметры в условиях равновесия;  $v(t)$  — скорость фильтрации;  $n$  — пористость почвы;  $D$  — коэффициент конвективной диффузии;  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  — экспериментальные константы обмена между раствором и твердой фазой почвы.

Первое уравнение системы выражает материальный баланс исследуемого вещества в элементе почвенного слоя. Второе представляет собой уравнение кинетики массообмена вместе с изотермой сорбции, которое отражает механизм сорбционного процесса.

В настоящее время для математического описания этих процессов используют изотермы типа Генри и Ленгмюра:

$$N_p = \frac{n_a \cdot C_p}{\alpha},$$

$$N_p = \frac{N_{np} \cdot C_p}{(k + C_p)}, \quad C_p = \frac{N_{np} \cdot k}{(N_{np} - N_p)},$$

где  $C_p$ ,  $N_p$  — равновесные концентрации исследуемого вещества в поровом растворе и поглощающем комплексе;  $N_{np}$  — предельное содержание иона в ППК;  $n_a$  — активная пористость;  $\alpha$ ,  $k$  — экспериментальные постоянные.

Впервые количественное исследование процесса конвективной диффузии в активных пористых средах при наличии кинетики сорбции было проведено Лapidусом и Амудсенom [Lapidus, Amudson, 1952], которые получили аналитическое решение системы уравнений (1), при граничном условии первого рода на концах полуограниченной толщи среды и равномерном начальном засолении модельной среды:

$$\begin{cases} n_a \frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - v \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t}, & 0 < x < \infty, \\ \frac{\partial N}{\partial t} = -\beta(\alpha N - n_a C), & 0 \leq x \leq \infty, \end{cases} \quad (1)$$

где  $C(x, t)$  — концентрация сорбируемого иона в поровом растворе ммоль/дм<sup>3</sup>;  $N(x, t)$  — концентрация того же иона в ППК, ммоль/дм<sup>3</sup>;  $\beta \approx \beta_1 v(t)$  — коэффициент скорости сорбционного обмена, 1/сут;  $\beta_1 = \text{const}$  — коэффициент пропорциональности 1/м;  $\alpha$  — параметр распределения [Иванов, 1984].

Позднее отечественные ученые [Веригин, 1953; Аравин, 1954] предложили дифференциальное уравнение конвективной диффузии в частных производных для описания процессов перемещения и растворения солей в почвогрунтах.

В дальнейшем исследования в области математического моделирования массопереноса веществ в подземных водах развиты в работах [Аверьянов, 1965; Шестаков, 1989] и многих других.

Изучением процессов совместной миграции влаги и растворенных в ней веществ занимаются многие исследователи [Кундас, 2011; Шеин, 2016] и другие. В ряде работ зарубежных [Prosperetti, 2009; Wu, 2015] и отечественных [Конюхов, 2004] авторов рассматриваются математические модели перемещения веществ в неоднородных водоносных пластах. В работе [Battiatto, Tartakovsky, 2011] рассматривается перенос растворенного вещества, которое подвергается нелинейному гетерогенному влиянию. В некоторых исследованиях [Roubinet, Tartakovsky, 2013; Yousefzadeh, Battiatto, 2017; Molins, Knabner, 2019] предлагается использовать для моделирования процесса массопереноса многократное увеличение масштаба. Однако неоднородность диффузионных условий в разных масштабах увеличивает число определяемых параметров модели.

Для прогнозирования миграции загрязнений в почвогрунтах в работах [Молокова, 2008; Carrel et al., 2018] предлагаются трехмерные дифференциальные уравнения. Практическое применение их ограничено из-за большого числа параметров, необходимых для прогнозирования переноса веществ, зависящих от природы почвогрунта, природы ионов и т. д. Достоверное определение этих показателей во многих случаях задача более сложная, чем прогнозирование миграции веществ.

Школой профессора Д. Ф. Шульгина в Тверском государственном техническом университете [Шульгин и др., 1987; Шульгин, 1995] разработана двухмерная математическая модель процесса переноса солей фильтрационным потоком в почве, учитывающая не только сорбционные явления, но и наличие тупиково-застойных зон, что позволяет решать как миграционные, так и гидродинамические задачи.

В ряде работ зарубежных авторов [Mikhailoy, 2010; Михайлов, 2014] для исследований в области солепереноса в условиях стационарного водно-солевого режима почвогрунтов применяются математические модели, предложенные в работах профессора Д. Ф. Шульгина.

Использование различных математических моделей для прогнозирования миграции загрязнений требует знания гидрохимических параметров, являющихся коэффициентами дифференциальных уравнений. Отсутствие надежных методик их определения по данным полевых и лабораторных опытов ограничивает практическое применение многих из приведенных выше моделей для прикладных задач.

### 3. Постановка задачи

В статье рассматривается прогностическая модель миграции ингредиентов от свалки твердых бытовых отходов в грунтовые воды, поступающих в озеро Селигер.

В качестве модельного объекта выбрана свалка ТБО, расположенная в поселке Солнечный Осташковского района Тверской области, в 60–65 м от озера Селигер. По своим размерам и составу складированных отходов объект относится к малым свалкам, а по условию эксплуатации классифицируется как насыпь, расположенная на поверхности земли. На свалке ежедневно складировются твердые бытовые отходы: бытовой мусор, который включает в себя пищевые отходы, упаковочные материалы, пришедшие в негодность предметы домашнего обихода, отходы от уборки и текущего ремонта квартир и т. п., а также мусор общественных зданий. В ближайшие годы консервация свалки ТБО не планируется.

Уровень грунтовых вод в пробуренных скважинах на территории свалки близок к поверхности земли и располагается в пределах 1.5–2.0 м. Геологический разрез верхней толщи в районе объекта представлен достаточно мощным слоем песчаных отложений озерно-аллювиального происхождения [Иванов и др., 2012].

Для экологического обоснования и информационного обеспечения математической модели в соответствии с реальными условиями объекта был проведен ряд полевых и лабораторных исследований. В результате для прогноза воздействия свалки на грунтовые и поверхностные воды в качестве основных загрязняющих веществ были выбраны аммонийный азот и нитратный азот, поскольку их концентрация в фильтрате по сравнению с другими веществами значительно превышает предельно допустимые концентрации (ПДК).

Анализ гидрогеологических условий в районе свалки позволил сделать вывод, что разгрузка грунтовых вод под объектом исследований происходит в озеро Селигер. Фильтрационный поток по направлению от свалки к озеру с достаточной точностью можно считать прямолинейным. Процесс передвижения загрязняющих веществ осложняется разнообразными факторами, основными из которых (оказывающими существенное влияние на миграцию ингредиентов) являются конвективный перенос, диффузия и сорбционные процессы.

Распространение мигрантов в направлениях, перпендикулярных скорости фильтрационного потока, определяемое механизмом молекулярной диффузии, происходит весьма медленно. На этом основании при модификации модели молекулярной диффузией в горизонтальном направлении можно пренебречь. Иначе за счет нее даже за достаточно большой промежуток времени незначительно изменится ширина загрязненного потока грунтовых вод с соответствующим уменьшением концентрации ингредиентов по краям потока. Такое допущение при прогнозных расчетах незначительно уменьшит ширину участка выклинивания загрязненного потока в озеро и не исказит расчетное валовое поступление загрязняющих веществ в водоем.

С другой стороны, диффузионным (хотя также весьма медленным) распространением ингредиентов вглубь почвогрунтовой толщи пренебрегать нельзя, так как этот процесс определяет мощность загрязненного потока грунтовых вод. Недостаточно точный учет этого фактора может существенно исказить расчетное поступление загрязнений в озеро. Такая молекулярная диффузия учтена при математическом моделировании миграции загрязнений по вертикали, проведенной в исследовании.

Описанные процессы и соответствующие допущения в равной мере учитывались при математическом моделировании миграции обоих выделенных ингредиентов. Укажем индивидуальные свойства ионов  $\text{NO}_3^-$  и  $\text{NH}_4^+$ .

Положительно заряженные ионы (к ним относится выделенный нами ион  $\text{NH}_4^+$ ) активно участвуют во взаимодействии с почвенным поглощающим комплексом (ППК). С достаточной для практики точностью это взаимодействие может быть учтено при помощи уравнения кинетики обмена с линейной изотермой сорбции (типа Генри). В отличие от ионов  $\text{NH}_4^+$  ионы  $\text{NO}_3^-$  практически не сорбируются ППК, состоящим главным образом из отрицательно заряженных частиц коллоидной фракции почвогрунта.

Наряду с этим, как уже отмечалось, в анаэробных условиях имеют место процессы трансформации нитратной формы азота в аммонийную, которые также учтены в процессе математического моделирования.

В математическую модель включены члены  $k_1C_2$  и  $k_2C_1$ , учитывающие процессы, снижающие количественные значения концентраций ионов в грунтовых водах (транспирация корнями растений, разбавление инфильтрационными водами и т. д.).

### 3.1. Математические модели процессов миграции загрязнений от свалки ТБО

Для прогноза горизонтального переноса ингредиентов в направлении фильтрационного потока (рис. 1) была использована система дифференциальных уравнений (2), которая дополнена параметрами, учитывающими процессы трансформации вещества, транспирации корнями растений, разбавления инфильтрационными водами.

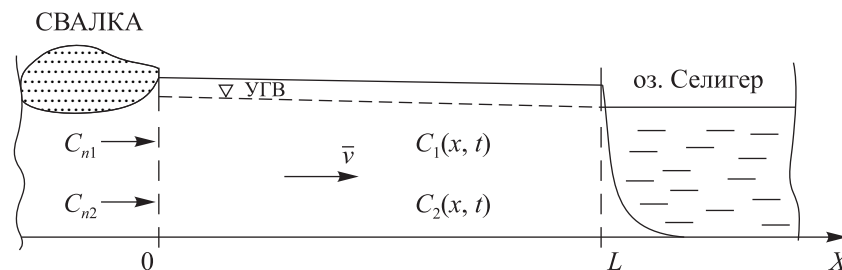


Рис. 1. Расчетная схема к описанию горизонтального распространения загрязняющих веществ в грунтовых водах:  $v$  — скорость фильтрации, м/сут;  $C_1(x, t)$ ,  $C_2(x, t)$  — концентрация ионов  $\text{NH}_4^+$  и  $\text{NO}_3^-$  соответственно в поровом растворе, мг/л;  $C_{n1}$ ,  $C_{n2}$  — концентрация ионов  $\text{NH}_4^+$  и  $\text{NO}_3^-$  в поровом растворе, поступающем через сечение  $x = 0$ , мг/л;  $L$  — протяженность потока до озера, м

$$\begin{cases} n_a \frac{\partial C_1}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} - v \frac{\partial C_1}{\partial x} - \frac{\partial N_1}{\partial t} + k_1 C_2 - k_2 C_1, \\ \frac{\partial N_1}{\partial t} = -\beta(\alpha N_1 - n_a C_1), \\ n_a \frac{\partial C_2}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 C_2}{\partial x^2} - v \frac{\partial C_2}{\partial x} - k_1 C_2. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь введены следующие обозначения:  $C_1(x, t)$  — концентрация ионов  $\text{NH}_4^+$  поровом растворе, мг/л;  $C_2(x, t)$  — концентрация ионов  $\text{NO}_3^-$  в поровом растворе, мг/л;  $N_1(x, t)$  — количество

ионов  $\text{NH}_4^+$ , сорбированное твердой фазой почвогрунта,  $\text{г/м}^3$ ;  $x$  — горизонтальная координата, м;  $D_1 = D_{m1} + \lambda_1 |v|$  — коэффициент конвективной диффузии ионов  $\text{NH}_4^+$ ,  $\text{м}^2/\text{сут}$ ;  $D_2 = D_{m2} + \lambda_2 |v|$  — коэффициент конвективной диффузии ионов  $\text{NO}_3^-$ ,  $\text{м}^2/\text{сут}$ ;  $D_{m1}$ ,  $D_{m2}$  — коэффициенты молекулярной диффузии соответствующих ионов,  $\text{м}^2/\text{сут}$ ;  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  — параметры гидродисперсии, м;  $v$  — скорость фильтрации,  $\text{м/сут}$ ;  $n_a$  — активная пористость грунта;  $\beta$  — коэффициент скорости сорбционного обмена,  $\text{сут}^{-1}$ ;  $\alpha$  — коэффициент распределения;  $k_1$  — коэффициент скорости трансформации,  $\text{сут}^{-1}$ ;  $k_2$  — эмпирический коэффициент, учитывающий процессы, приводящие к снижению концентрации иона  $\text{NH}_4^+$  в поровом растворе за счет транспирации корнями растений, разбавления инфильтрационными водами,  $\text{сут}^{-1}$ ;  $t$  — время, сут.

Распространение загрязняющих веществ по вертикали (рис. 2) вглубь почвогрунтовой толщи описывается системой уравнений (3):

$$\begin{cases} n_a \frac{\partial C_2}{\partial t} = D_{m1} \frac{\partial^2 C_1}{\partial z^2} - \frac{\partial N_1}{\partial t} + K_1 C_2, \\ \frac{\partial N_1}{\partial t} = -\beta(\alpha N_1 - n_a C_1), \\ n_a \frac{\partial C_2}{\partial t} = D_{m2} \frac{\partial^2 C_2}{\partial z^2} - K_1 C_2. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь  $z$  — вертикальная координата, отсчитываемая от поверхности грунтовых вод и ориентированная вниз. Остальные обозначения имеют прежний смысл.

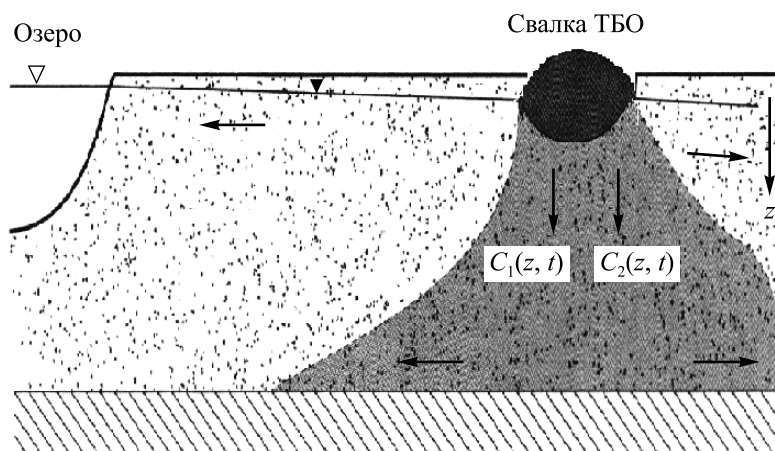


Рис. 2. Расчетная схема к описанию вертикальной миграции загрязняющих веществ в грунтовых водах:  $C_1(z, t)$ ,  $C_2(z, t)$  — концентрация ионов  $\text{NH}_4^+$  и  $\text{NO}_3^-$  соответственно,  $\text{мг/л}$ ;  $z$  — вертикальная координата

### 3.2. Постановка краевых задач

Для получения аналитического и численного решения по построенным математическим моделям (2) и (3) процессов распространения загрязнений определены начальные и граничные условия.

Начальные условия системы уравнений (2):

$$t = 0: C_1(x, 0) = C_{10}(x), C_2(x, 0) = C_{20}(x), N_1(x, 0) = C_{10}(x) \cdot n_a / \alpha, \quad (4)$$

где  $C_{10}(x)$ ,  $C_{20}(x)$  — начальные распределения концентрации ионов  $\text{NH}_4^+$  и  $\text{NO}_3^-$  в поровом растворе,  $\text{мг/л}$ .



Граничные условия системы уравнений (2): во входном сечении потока ( $x=0$ ) задается условие третьего рода, выражающее материальный баланс вещества через сечение ( $x=0$ ) с учетом конвективного переноса и дисперсии; на второй границе потока ( $x=L$ ) задается условие второго рода, учитывающее отсутствие возврата загрязняющего вещества, где  $L$  — протяженность потока до озера:

$$t > 0 \quad \begin{cases} x=0: [C_1(0,t) - C_{n1}] \cdot v = D_1[\partial C_1(0,t) / \partial x], \\ [C_2(0,t) - C_{n2}] \cdot v = D_2[\partial C_2(0,t) / \partial x], \\ x=L: \partial C_1(L,t) / \partial x = 0, \quad \partial C_2(L,t) / \partial x = 0, \end{cases} \quad (5)$$

где  $C_{n1}$  — концентрация ионов  $\text{NH}_4^+$  в поровом растворе, поступающем через сечение  $x=0$ , мг/л;  $C_{n2}$  — концентрация ионов  $\text{NO}_3^-$  в поровом растворе, поступающем через сечение  $x=0$ , мг/л.

При проведении расчетов за начальный момент времени ( $t=0$ ) принят момент начала функционирования свалки ТБО (1947 год). При этом для начального момента грунтовые воды считались незагрязненными. Начальные концентрации ионов  $\text{NH}_4^+$  и  $\text{NO}_3^-$  в поровом растворе были приняты равными фоновым концентрациям.

Начальные условия системы уравнений (3):

$$t=0: C_1(z,0) = C_{10}(z), \quad C_2(z,0) = C_{20}(z), \quad N_1(z,0) = C_{10}(z) \cdot n_a / \alpha. \quad (6)$$

Граничные условия системы уравнений (3): на верхней границе почвогрунтовой толщ ( $x=0$ ) задается условие первого рода, учитывающее зависимость концентрации вещества от времени; на нижней границе принимается условие второго рода, поскольку покровная толща на глубине  $L$  подстилается хорошо проницаемым дренирующим пластом:

$$t > 0 \quad \begin{cases} z=0: C_1(0,t) = C_{n1}, \quad C_2(0,t) = C_{n2}, \\ z=L: \partial C_1(L,t) / \partial z = 0, \quad \partial C_2(L,t) / \partial z = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Здесь  $z$  — вертикальная координата, отсчитываемая от поверхности грунтовых вод и ориентированная вниз;  $L$  — протяженность области фильтрации, м. Остальные обозначения имеют прежний смысл.

Численное решение приведенных выше краевых задач осуществлялось методом конечных разностей, с использованием консервативной конечно-разностной схемы [Самарский, 1983].

### 3.3. Решение задачи миграции загрязнений от свалки ТБО

Точное решение задачи миграции (2) в условиях (4)–(5) получено с помощью интегрального преобразования Лапласа в виде

$$C(x,t) = \frac{1}{2} C_n \left( e^{\varepsilon_1} \operatorname{erfc} \phi_1 + e^{\varepsilon_2} \operatorname{erfc} \phi_2 \right) - \frac{1}{2} C_0 e^{-\gamma' t} \left( e^{\frac{v' \cdot x}{D'}} \operatorname{erfc} \phi_3 + \operatorname{erfc} \phi_4 - 2 \right). \quad (8)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$z_{1,2} = \frac{v' \cdot x (1 \pm \sqrt{1 + \varepsilon})}{2D'}; \quad \phi_{1,2} = \frac{x \pm v' \cdot t \cdot \sqrt{1 + \varepsilon}}{2\sqrt{D' \cdot t}}; \quad \varepsilon = \frac{4\gamma' D'}{(v')^2}; \quad \phi_{3,4} = \frac{x \pm v' \cdot t}{2\sqrt{D' \cdot t}};$$

$$v' = \frac{v}{n_3}; \quad \gamma' = \frac{\gamma}{n_3}; \quad D' = \frac{D}{n_3}; \quad n_3 = n_a \frac{1 + \alpha}{\alpha};$$

$erfc \eta = 1 - erf \eta$ ;  $erf \eta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-u^2} du$  — интеграл вероятности, причем  $erfc(-\eta) = 2 - erf \eta$ ;  $erf \eta$  — табулированная функция.

Заметим, что выражение (8) при определенных условиях можно упростить. Так, при достаточно больших значениях времени  $t$  и координаты  $x$   $\left(\frac{x \cdot v'}{D'}\right)$  члены  $e^{\pm 1} erfc \phi_1$  и  $e^{\frac{x \cdot v'}{D'}} erfc \phi_3$  становятся весьма малыми, и ими можно пренебречь. Кроме того, при малых значениях  $\varepsilon \ll 1$  в выражении для  $\phi_2$  можно положить  $(1 + \varepsilon)^{0.5} \approx 1$ , а в выражении для  $z_2$ , разлагая  $1 - (1 + \varepsilon)^{0.5}$  в ряд Тейлора и удерживая первые два члена разложения, можно принять  $1 - (1 + \varepsilon)^{0.5} \approx -0.5\varepsilon$ .

В результате сделанных допущений решение задачи (2) при условиях (4)–(5) примет более простой вид:

$$\bar{C}(x, t) = \frac{C(x, t) - C_0}{C_n - C_0} = \frac{erfc \phi_4}{2(C_n - C_0)} \left( C_n e^{\frac{-\gamma' \cdot x}{v'}} - C_0 e^{-\gamma' \cdot t} \right) - \frac{C_0}{C_n} (1 - e^{-\gamma' \cdot t}),$$

где  $\bar{C}(x, t)$ ,  $C(x, t)$ ,  $C_0$ ,  $C_n$  — соответственно относительная концентрация, концентрация вещества в подвижном поровом пространстве (фильтрате), начальная (фоновая) и концентрация во входном растворе;  $\gamma$  — коэффициент скорости поглощения вещества почвогрунтом, сут<sup>-1</sup> [Косов, 1998].

$$\phi_4 = \frac{x - V^* t}{2\sqrt{D^* t}}; \quad v^* = \frac{v}{n_3}; \quad n_3 = n_a \frac{1 + \alpha}{\alpha}; \quad D^* = \frac{\lambda \cdot v}{n_a};$$

$erfc \eta = 1 - erf \eta$ ;  $erfc \eta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-u^2} du$  — интеграл вероятности, причем  $erfc(-\eta) = 2 - erfc \eta$ ;  $erfc(-\eta) = erfc(\eta)$ ;  $erfc \eta$  — табулированная функция [Косов, 1994; Шестаков, 1989].

В случае распространения консервативного сорбируемого вещества ( $\gamma = 0$ ,  $n_a \leq n_3$ ) в любом створе потока в момент времени  $t$  формула (8) примет вид [Косов, 1998]

$$\bar{C}(x, t) = \frac{C(x, t) - C_0}{C_n - C_0} = \frac{1}{2} erfc \left( \frac{x - v' t}{2\sqrt{D' t}} \right).$$

При  $n_a = n_3$  ( $\alpha = \infty$ ) имеем случай несорбируемого мигранта.

Для неконсервативного вещества ( $\gamma \neq 0$ ) и при равенстве нулю его фоновой концентрации в пласте ( $C_0 = 0$ ) при решении (8) получим

$$\bar{C}(x, t) = \frac{C(x, t)}{C_n} = \frac{1}{2} y^{\frac{-\gamma' t}{v}} erfc \left( \frac{x - v' t}{2\sqrt{D' t}} \right).$$

Аналитическое решение задачи распространения загрязнений свалки ТБО было получено с использованием параметров миграции сорбируемых и несорбируемых ингредиентов, полученных в рамках полевых и лабораторных исследований объекта.

#### 4. Полевые и лабораторные исследования миграции загрязнений от свалки ТБО

Для прогноза продвижения загрязнений в водоносных пластах и количественной оценки процесса взаимодействия загрязненных вод с природными подземными водами с помощью математических моделей требуются достоверные гидродинамические и физико-химические параметры пласта, а также реальные данные о составе естественных подземных и загрязняющих вод.

В районе изучаемого полигона вскрытая мощность песков составляет порядка 13 м; мощность водоносного горизонта составляет около 15–16 м. По данным наших экспериментов на монолитах грунта, отобранных на участке между границей свалки и урезом озера Селигер, коэффициент фильтрации имеет высокое значение, порядка 11.4–18.2 м/сут. Уровень грунтовых вод в пробуренных скважинах фиксируется близко к поверхности земли и располагается в интервале 1.5–2.0 м.

В Тверском государственном техническом университете (ТвГТУ) разработан ряд методик по определению параметров миграции загрязняющих веществ в почвогрунтовой толще для последующего их использования в математических моделях по прогнозированию возможного распространения ингредиентов с шламохранилищ, полигонов промышленных и бытовых отходов [Косов, 1994]. В рамках полевого эксперимента для получения фильтрационных и гидрохимических параметров, были отобраны монолиты грунта ненарушенной структуры на разном расстоянии от свалки до озера.

Для определения гидрохимических параметров в гидроэкологической лаборатории ТвГТУ была проведена серия экспериментов по промывке отобранных на объекте исследования монолитов грунта раствором хлористого калия. По результатам каждого эксперимента строились две выходные кривые — для хлор-ионов и иона калия. Анализ выходных кривых выполнялся с помощью алгоритмов, разработанных в ТвГТУ [Иванов, 2018]. В результате были получены осредненные гидрохимические параметры модели.

Кроме того, был произведен отбор проб грунтовых вод в скважинах. Анализ проб воды был выполнен на вещества, представляющие наибольший интерес при прогнозировании распространения их в водоносном пласте, то есть на содержание в фильтрате аммонийного азота, нитратного азота, хлоридов, сульфатов, калия.

Результаты лабораторных анализов отобранных проб грунтовых вод позволили подтвердить выбор аммонийного азота и нитратного азота в качестве основных ингредиентов при прогнозе воздействия свалки на подземные воды, поскольку их содержание в исследуемом фильтрационном потоке значительно превышает предельно допустимые концентрации (ПДК). Кроме того, дополнительное поступление иона аммония с грунтовыми водами со свалки может способствовать бурному развитию фитопланктона в летний период и так называемому «цветению» озера. В зимний период поступление аммония также нежелательно, поскольку будет токсично для гидробионтов и ихтиофауны.

#### 5. Анализ модельных решений и прогноз динамики загрязнения

Прогноз распространения основных ингредиентов (ионов  $\text{NH}_4^+$  и  $\text{NO}_3^-$ ) в подземных водах осуществлялся с помощью построенных выше математических моделей (2)–(3) при условиях (4)–(7). Нами разработан алгоритм численного решения данных краевых задач с использованием консервативной разностной схемы повышенной точности. Для проведения конкретных вариантов расчетов в соответствии с разработанным алгоритмом построена имитационная модель.

Расчеты осуществлялись по следующей схеме. Вначале с использованием соответствующей математической модели (3) при условиях (6)–(7) было рассчитано распространение ингре-

диентов по вертикали вглубь почвогрунтовой толщи. Для любого момента времени  $t$  можно построить эпюру распределения концентрации по глубине для каждого из двух рассматриваемых ионов. Оценка распространения загрязнений вглубь почвогрунтовой толщи на период длительностью до 100 лет позволила установить характер распределения ионов  $\text{NH}_4^+$  и  $\text{NO}_3^-$  по глубине и выяснить зависимость приведенной глубины миграции рассматриваемых веществ от времени функционирования свалки. Соответствующие графики глубины распространения от времени для рассматриваемых веществ показаны на рис. 3. Различие в графиках можно объяснить тем, что при миграции в подземных водах нитратный азот не сорбируется почвой, а аммонийный азот частично удерживается ППК.

Для прогноза горизонтального распространения аммонийного азота также выполнен вычислительный эксперимент и получено аналитическое решение задачи. Сделан сравнительный анализ модельных результатов с данными полевых и лабораторных экспериментов в районе свалки ТБО.

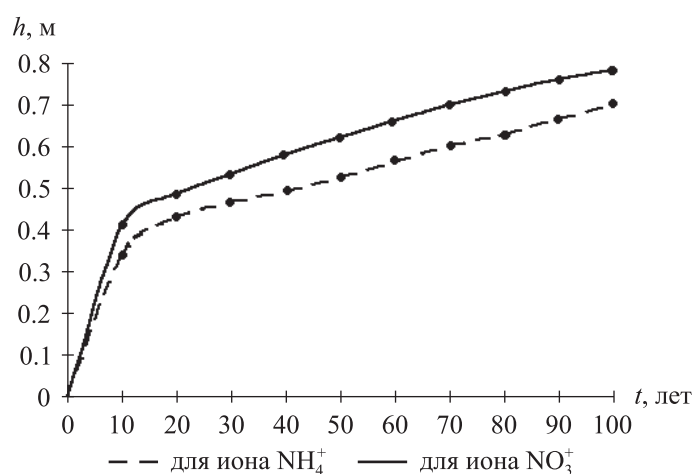


Рис. 3. Зависимость приведенной глубины распространения аммонийного азота и нитратного азота от времени

В результате исследований получено, что концентрация нитратного азота на всем протяжении исследуемого фильтрационного потока значительно меньше ПДК, поэтому для прогнозных расчетов в дальнейшем будут анализироваться данные только для аммонийного азота.

Моделирование миграции аммонийного азота позволило установить динамику распределения ингредиентов в почвогрунтовой толще исследуемого объекта в зависимости от времени существования свалки (50 лет, 75 лет, 100 лет).

В результате анализа данных прогнозных расчетов на период времени 50 лет установлено, что на кривых, характеризующих миграцию аммонийного азота в почвогрунтовой толще (рис. 4), полученных и для численного, и для аналитического решения, можно выделить три зоны: зона с максимальным загрязнением подземных вод, где содержание аммонийного азота приближается к его концентрации в фильтрате (64 мг/л); переходная зона, где происходит смешение загрязненных вод с чистыми грунтовыми водами; зона с наименьшим загрязнением подземных вод, где содержание ингредиента близко к его фоновым значениям в подземных водах (1.3 мг/л).

Следует отметить, что численный эксперимент показал, что фронт загрязнения грунтовых вод с максимальной концентрацией распространяется на расстоянии примерно 20 м от свалки ТБО, тогда как при аналитическом решении это расстояние составляет порядка 30 м. При полевом исследовании максимальное продвижение загрязнений выявлено на расстояниях, не превышающих 10 м от границы свалки.

При этом миграция веществ происходит со скоростью, меньшей скорости движения порового раствора, что объясняется буферными свойствами почвы (по мере продвижения в почве с фильтрационным потоком аммонийный азот поглощаются ППК).

Результаты моделирования горизонтального переноса аммонийного азота на период времени 75 лет (рис. 5), что примерно соответствует прогнозу загрязнения подземных вод в настоящий период времени, позволяют сделать вывод о том, что на кривых, характеризующих распространение аммонийного азота в почвогрунтовой толще на расстоянии примерно 25 м (при численном решении) и 40 м (при аналитическом решении), можно выделить зону максимального загрязнения грунтовых вод, с концентрацией, близкой к содержанию аммония в фильтрате. Следует отметить, что результаты полевого и лабораторного исследования несколько в большей степени согласуются с данными численного эксперимента.

На основании численного моделирования и аналитического решения задачи миграции аммонийного азота (рис. 6) можно сделать вывод о том, что через 100 лет с момента существования объекта исследования ионы аммония заполняют поровое пространство между свалкой и озером с предельной концентрацией 64 мг/л.

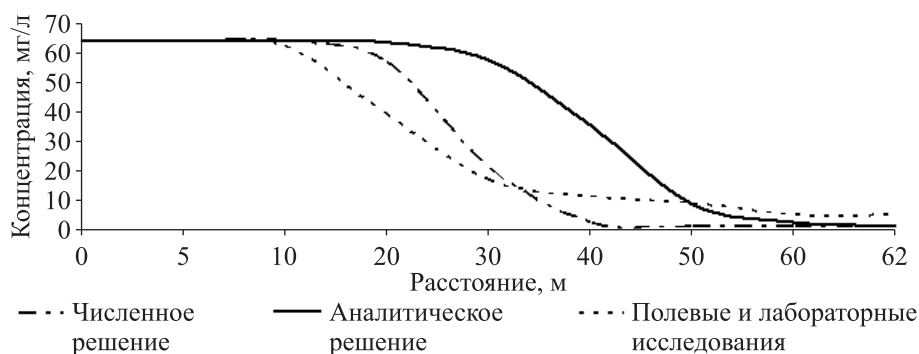


Рис. 4. Результаты полевых исследований и прогнозных расчетов миграции аммония в районе свалки ТБО через 50 лет

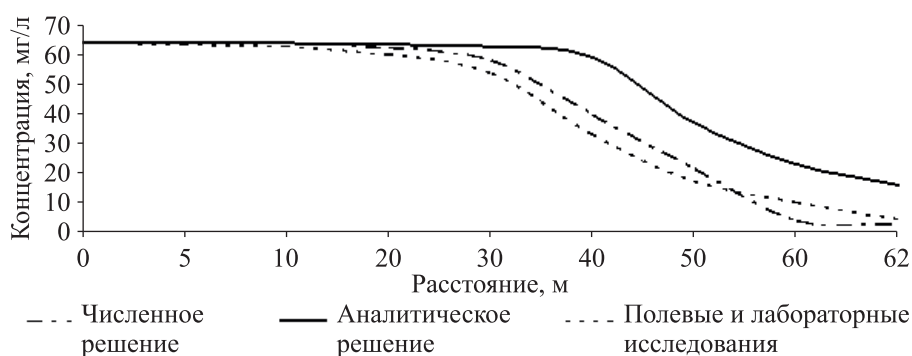


Рис. 5. Результаты прогнозных расчетов миграции аммония в районе свалки ТБО через 75 лет (настоящее время)

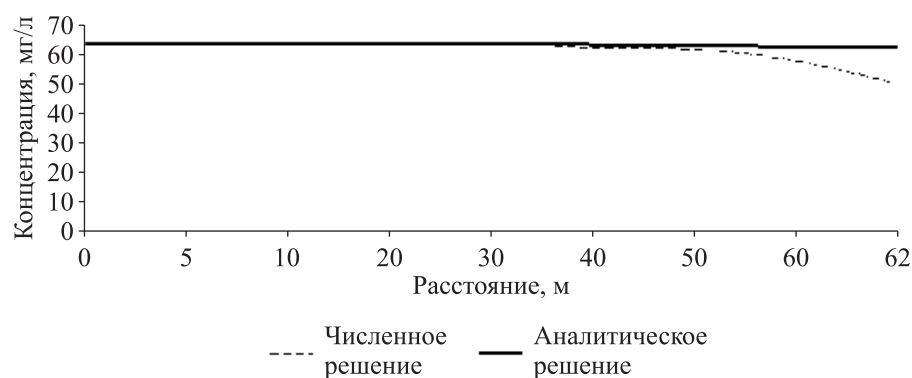


Рис. 6. Результаты прогнозных расчетов миграции аммония в районе свалки ТБО через 100 лет

## 6. Заключение

Для решения актуальной экологической задачи предложена двухмерная система дифференциальных уравнений, позволяющая установить динамику распределения компонентов фильтрата (аммонийного азота и нитратного азота) свалки в почвогрунтовой толще.

Представлен эффективный вычислительный алгоритм решения задачи переноса загрязнений в подземном потоке от свалки ТБО с использованием консервативной разностной схемы, позволяющий наиболее точно учитывать геометрию моделируемых объектов.

Установлено, что существенное влияние на скорость продвижения фронта загрязнений оказывают процессы трансформации вещества, учитываемые в модификации математической модели эмпирическими коэффициентами  $k_1$  и  $k_2$ .

Разработан специализированный моделирующий программный комплекс для компьютерной реализации модели миграции загрязнений от свалки ТБО при различных начально-граничных условиях с целью получения прогнозных значений.

Показано, что в ближайшие годы не предвидится существенного увеличения загрязнения вод озера Селигер в районе свалки ТБО за счет поступления загрязняющих веществ с выклинивающимся в озеро фильтрационным потоком.

Результаты вычислительных экспериментов и аналитических расчетов согласуются с данными полевых и лабораторных исследований объекта, что дает основание рекомендовать предлагаемые математические модели для прогнозирования миграции загрязнений от свалки ТБО.

## Список литературы (References)

*Аверьянов С. Ф.* Некоторые вопросы предупреждения засоления орошаемых земель и меры борьбы с ним в европейской части СССР // Орошаемое земледелие в европейской части СССР. — М., 1965. — С. 90–151.

*Aver'yanov S. F.* Nekotorye voprosy preduprezhdeniya zasoleniya oroshaemykh zemel' i mery bor'by s nim v evropejskoj chasti SSSR [Some issues of preventing and fight with salinization of irrigated lands in the European part of the USSR] // Oroshaemoe zemledelie v evropejskoj chasti SSSR [Irrigated agriculture in the European part USSR]. — Moscow, 1965. — P. 90–151 (in Russian).

*Аравин В. И., Нумеров С. Н.* Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде. — М.: Гостехиздат, 1954.

*Aravin V. I., Numerov S. N.* Teoriya dvizheniya zhidkostej i gazov v nedeformiruemoj poristoj srede [The theory of the motion of liquids and gases in an undeformable porous environment]. — Moscow: Gostekhizdat, 1954 (in Russian).

*Веригин Н. Н.* Некоторые вопросы химической гидродинамики, представляющие интерес для мелиорации и гидротехники // Известия АН СССР. Отделение техн. наук. — 1953. — № 10. — С. 1369–1382.

*Verigin N. N.* Nekotorye voprosy himicheskoi gidrodinamiki, predstavlyayushchie interes dlya melioracii i gidrotekhniki [Some issues of chemical hydrodynamics for land reclamation and hydraulic engineering] // Izvestiya AN SSSR. Otdelenie tekhn. nauk [Bulletin of the USSR Academy of Sciences. Tech. sci.]. — 1953. — No. 10. — P. 1369–1382 (in Russian).

*Гамаюнов Н. И.* Процессы переноса энергии и вещества. — Тверь: ТГТУ, 2004.

*Gamayunov N. I.* Processy perenosa energii i veshchestva [The processes of energy and matter transfer]. — Tver': TGTU, 2004 (in Russian).

*Дворкин Л. Б.* К теории конвективной диффузии солей в пористых средах. Конвективная диффузия солей в пористых средах с учетом влияния «тупиковых» пор // Журнал физической химии. — 1968. — Т. 42, № 4. — С. 948–956.

*Dvorkin L. B.* K teorii konvektivnoi diffuzii v poristyx sredakh. Konvektivnaia diffuziia soli v poristyx sredakh s uchetom vliianiia "tupikovykh por" [On the theory of convective diffusion of salts in porous media. Convective differential fusion of salts in porous media, taking into account the influence of "dead end" pores] // Zhurn. fiz. khimii [Journal of Physical Chemistry]. — 1968. — Vol. 42, No. 4. — P. 948–956 (in Russian).

- Иванов В. Н. Технология отбора почвенных монолитов для лизиметрических установок // Саморазвивающаяся среда технического университета: Материалы III Всероссийской научно-практической конференции. — 2018. — Ч. 1. — С. 66–70.  
*Ivanov V. N. Tekhnologiya otbora pochvennyh monolitov dlya lizimetriceskikh ustanovok* [Technology of selection of soil monoliths for lysimetric installations] // Samorazvivayushchayasya sreda tekhnicheskogo universiteta: Materialy III Vserossijskoj nauchno-prakticheskoy konferencii [Self-Developing environment of technical University: Materials of III all-Russian scientific and practical conference]. — Tver, 2018. — Part 1. — P. 66–70 (in Russian).
- Иванов В. Н., Лобачева Л. В., Кундряков В. В. Моделирование распространения загрязнений в подземном потоке от полигона твердых бытовых отходов // Научно-технический вестник Поволжья. — 2012. — № 5. — С. 183–187.  
*Ivanov V. N., Lobacheva L. V., Kundryakov V. V. Modelirovanie rasprostraneniya zagryaznenij v podzemnom potoke ot poligona tverdyh bytovykh othodov* [Modeling of Pollution Spreading in the Underground Flow from the Solid Waste Disposal Area] // Nauchno-tekhnicheskij vestnik Povolzh'ya [Scientific and Technical Bulletin of the Volga Region]. — 2012. — No. 5. — P. 183–187 (in Russian).
- Иванов В. Н. Процессы переноса и поглощения компонентов минеральных удобрений в торфе: автореф. дис. канд. тех. наук. — Калинин, 1984.  
*Ivanov V. N. Processy perenosa i pogloshcheniya komponentov mineral'nyh udobrenij v torfe* [The processes of transfer and absorption of mineral fertilizers components in peat]: avtoref. dis. kand. tekhn. nauk. — Kalinin, 1984 (in Russian).
- Клыков В. Е., Шульгин Д. Ф. О решении некоторых обратных краевых задач подземной физико-химической гидродинамики // Исследования по специальным задачам гидродинамики. — М., 1982. — С. 45–51.  
*Klykov V. E., Shul'gin D. F. O reshenii nekotorykh obratnykh kraevykh zadach podzemnoj fiziko-himicheskoy gidrodinamiki* [On the solution of some inverse boundary value problems of the underground physical-chemical hydrodynamics] // Issledovaniya po special'nym zadacham gidrodinamiki [Research on the special problems of hydrodynamics]. — Moscow, 1982. — P. 45–51 (in Russian).
- Компьютерное моделирование миграции загрязняющих веществ в природных дисперсных средах / С. П. Кундас, И. А. Гишкелюк, В. И. Коваленко, О. С. Хилько; под общ. ред. С. П. Кундаса. — Минск: МГЭУ им. А. Д. Сахарова, 2011.  
*Komp'yuternoe modelirovanie migracii zagryaznyayushchih veshchestv v prirodnyh dispersnyh sredah* [Computer simulation of the migration of pollutants in natural dispersed media] / S. P. Kundas, I. A. Gishkelyuk, V. I. Kovalenko, O. S. Khilko; pod obshch. red. S. P. Kundas. — Minsk: MGEU im. A. D. Saharova, 2011 (in Russian).
- Конюхов В. М., Храмченков М. Г., Чекалин А. Н. Фильтрационно-диффузионная модель миграции рассолов в неоднородных водоносных пластах // Изв. РАН. МЖГ. — 2004. — Т. 2. — С. 140–151.  
*Konyukhov V. M., Khranchenkov M. G., Chekalin A. N. Fil'tracionno-diffuzionnaya model' migracii rassolov v neodnorodnyh vodonosnyh plastah* [Filtration-diffusion model of brine migration in heterogeneous aquifers] // Izv. MZHG. — 2004. — Vol. 2. — P. 140–151 (in Russian).
- Косов В. И., Шульгин Д. Ф. Теоретические основы экологии и рационального природопользования. — Тверь: ТГТУ, 1994.  
*Kosov V. I., Shul'gin D. F. Teoreticheskie osnovy ekologii i racional'nogo prirodopol'zovaniya* [Theoretical foundations of ecology and environmental management]. — Tver': TGTU, 1994 (in Russian).
- Косов В. И. и др. Математическое моделирование природных экосистем. — Тверь: ТГТУ, 1998.  
*Kosov V. I. et al. Matematicheskoe modelirovanie prirodnyh ekosistem* [Mathematical modeling of natural ecosystems]. — Tver': TGTU, 1998 (in Russian).
- Лаврик В. И. Решение краевой задачи конвективной диффузии водорастворимых веществ с изменяющимся во времени граничным условием // Дифференциальные уравнения с частными производными в прикладных задачах. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1982. — С. 68–69.  
*Lavrik V. I. Reshenie kraevoy zadachi konvektivnoj diffuzii vodorastvorimyh veshchestv s izmenyayushchimsya vo vremeni granichnym uslovиеm* [Solving the boundary value problem of convective diffusion of water-soluble substances with a time-varying boundary condition] / Differencial'nye uravneniya s chastnymi proizvodnymi v prikladnykh zadachah [Partial differential equations derivatives in applied problems]. — Kiev: In-t matematiki AN USSR, 1982. — P. 68–69 (in Russian).

- Матвеев Ю. Н., Масленников Б. И., Карельская К. А., Стукалова Н. А.* Математическое моделирование процессов распространения загрязняющего вещества в почвогрунтах и атмосфере при его аварийном разливе // Интернет-журнал «НАУКОВЕДЕНИЕ». — 2016. — Т. 8, № 5.  
*Matveev Yu. N., Maslennikov B. I., Karelskaya K. A., Stukalova N. A.* Matematicheskoe modelirovanie processov rasprostraneniya zagryaznyayushchego veshchestva v pochvogrunтах i atmosfere pri ego avarijnom razlive [Mathematical model operation of processes of distribution of a contaminant in soils and the atmosphere at its emergency flood] // Internet-zhurnal "NAUKOVEDENIE" [Internet journal "SCIENCE"]. — 2016. — Vol. 8, No. 5 (in Russian).
- Микайылов Ф. Д.* Прямые и обратные задачи модели солепереноса в условиях стационарного водно-солевого режима почвогрунтов // Пермский аграрный вестник. — 2014. — № 3. — С. 52–59.  
*Mikajylov F. D.* Pryamye i obratnye zadachi modeli soleperenosa v usloviyah stacionarnogo vodno-solevogo rezhima pochvogrunтов [Direct and inverse problems of the salt transport model under conditions of stationary water-salt regime of soils] // Permskij agrarnyj vestnik [Perm Agrarian Bulletin]. — 2014. — No. 3. — P. 52–59 (in Russian).
- Молокова Н. В.* Решение геофильтрационных задач средствами математического моделирования // Вестник СибГАУ. — 2008. — Вып. 3 (20). — С. 31–34.  
*Molokova N. V.* Reshenie geofil'tracionnyh zadach sredstvami matematicheskogo modelirovaniya [Solution of geofiltration problems by means of mathematical modeling] // Vestnik SibGAU. — 2008. — Vol. 3 (20). — P. 31–34 (in Russian).
- Мошинский А. И.* Тепломассоперенос в пористом материале при учете релаксации потока массы // Математическое моделирование. — 2015. — Т. 27, № 4. — С. 97–114.  
*Moshinskij A. I.* Teplomassoperenos v poristom materiale pri uchete relaksacii potoka massy [Thermal mass transfer in porous material taking into account the relaxation of the mass flow] // Matematicheskoe modelirovanie [Mathematical modeling]. — 2015. — Vol. 27, No. 4. — P. 97–114 (in Russian).
- Самарский А. А.* Теория разностных схем. — М.: Наука, 1983.  
*Samarskij A. A.* Teoriya raznostnyh skhem [Theory of difference schemes]. — Moscow: Nauka, 1983 (in Russian).
- Хужаеров Б. Х.* Макроскопическое моделирование релаксационного переноса вещества в пористой среде // Известия РАН, серия Механика жидкости и газа. — 2004. — № 5. — С. 21–30.  
*Huzhaerov B. H.* Makroskopicheskoe modelirovanie relaksacionnogo perenosa veshchestva v poristoj srede [Macroscopic modeling of the relaxation transfer of matter in a porous medium] // Izvestiya RAN, seriya Mekhanika zhidkosti i gaza [Izvestia RAS, series of Mechanics of liquid and gas]. — 2004. — No. 5. — P. 21–30 (in Russian).
- Чураев Н. В.* Физикохимия процессов массопереноса в пористых телах. — М.: Химия, 1990.  
*Churaev N. V.* Fizikohimiya processov massoperenosa v poristyh telah [Physicochemistry of mass transfer processes in porous bodies]. — Moscow: Himiya, 1990 (in Russian).
- Шейн Е. В., Рыжова И. М.* Математическое моделирование в почвоведении: учебник. — М.: ИП Маракушев А. Б., 2016.  
*Shein E. V., Ryzhova I. M.* Matematicheskoe modelirovanie v pochvovedenii. Uchebnik [Mathematical modeling in soil science: a textbook]. — Moscow: IP Marakushev A. B., 2016 (in Russian).
- Шестаков В. М.* Динамика подземных вод. — М.: МГУ, 1989.  
*Shestakov V. M.* Dinamika podzemnyh vod [Groundwater dynamics]. — Moscow: MGU, 1989 (in Russian).
- Шульгин Д. Ф., Клыков В. Е., Иванов В. Н.* Моделирование процессов миграции растворенных загрязняющих веществ в водоносных пластах: научное издание // Мелиоративное и водное хозяйство. — 1995. — № 2. — С. 25–27.  
*Shul'gin D. F., Klykov V. E., Ivanov V. N.* Modelirovanie processov migracii rastvorennyh zagryaznyayushchih veshchestv v vodonosnyh plastah: nauchnoe izdanie [Modeling the processes of migration of dissolved pollutants in aquifers: a scientific publication] // Meliorativnoe i vodnoe hozyajstvo [Land reclamation and water household]. — 1995. — No. 2 (in Russian).
- Шульгин Д. Ф.* Вопросы динамики подземных вод и солей в почвогрунтах орошаемых земель (в связи с проблемой борьбы с засолением земель аридной зоны): автореф. дис. д-ра техн. наук. — М., 1972.  
*Shul'gin D. F.* Voprosy dinamiki podzemnyh vod i solej v pochvogrunтах oroshaemyh zemel' (v svyazi s problemoj bor'by s zasoleniem zemel' aridnoj zony) [Issues of the dynamics of groundwater and salts in the soil of irrigated lands (in connection with the problem of combating salinization of arid zone lands)]: avtoref. dis. d-ra tekhn. nauk. — Moscow, 1972 (in Russian).



- Шульгин Д. Ф., Иванов В. Н., Клыков В. Е.* Гидрохимические параметры математических моделей переноса питательных веществ в торфяных и дерновоподзолистых почвах // Почвоведение. — 1987. — № 3. — С. 27–34.
- Shul'gin D. F., Ivanov V. N., Klykov V. E.* Gidrohimicheskie parametry matematicheskikh modelej perenosa pitatel'nyh veshchestv v torfyanyh i dernovopodzolistyh pochvah [Hydrochemical parameters of mathematical models of nutrient transfer in peat and sod-podzolic soils] // Pochvovedenie [Soil science]. — 1987. — No. 3. — P. 27–34 (in Russian).
- Battiato I., Tartakovsky D. M.* Applicability regimes for macroscopic models of reactive transport in porous media // J. Contam. Hydrol. — 2011. — Vol. 120–121. — P. 18–26.
- Cerrel M., Morales V. L., Dents M., Derlon N., Morgenroth E., Holzner M.* Pore scale hydrodynamics in a progressively bioclogged three dimensional porous medium: 3D particle tracking experiments and stochastic transport modeling // J. Water Resources Research. — 2018. — Vol. 54. — P. 83–98.
- Lapidus L., Amudson N. R.* Mathematics of adsorption in beads. The effect of longitudinal diffusion in ion exchange and chromatographic columns // J. Phys. Chem. — 1952. — Vol. 56, No. 8. — P. 984–988.
- Lindstrom F. T., Boersma L., Stokard D.* A theory of the mass transport of previously distributed chemicals in a water saturated sorbing porous medium: isothermal cases // Soil Science. — 1971. — Vol. 112, No. 5. — P. 291–300.
- Mikhailsoy F. D., Pachepsky Y. A.* Average Concentration of Soluble Salts in Leached Soils Inferred from the Convective-Dispersive Equation // Irrigation Science. — 2010. — Vol. 28, No. 5. — P. 431–434.
- Molins S., Knabner P.* Multiscale approaches in reactive transport modeling // J. Reviews in Mineralogy & Geochemistry. — 2019. — Vol. 85. — P. 27–48.
- Prosperetti A., Tryggvason G.* Computational Methods for multiphase flow. — Cambridge University Press, 2009.
- Rolston D. E.* Historical development of soilwater physics and solute transport in porous media // Water Sci Technol Water Supply. — 2007. — Vol. 7. — P. 59–66.
- Roubinet D., Tartakovsky D. M.* Hybrid modeling of heterogeneous geochemical reactions in fractured porous media // J. Water Resources Research. — 2013. — Vol. 49, No. 12. — P. 45–56.
- Wu Y. S.* Multiphase Fluid Flow in porous and fractured reservoirs. — Gulf professional publishing, 2015.
- Yousefzadeh M., Battiato I.* Physics-based hybrid method for multiscale transport in porous media // Journal of Computational Physics. — 2017. — Vol. 344. — P. 320–338.
- Zhao C., Poulet T., Regenauer-Lieb K.* Numerical modeling of toxicnonaqueous-phase-liquid removal from contaminated groundwater systems: mesh effect and discretization error estimation // International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. — 2015. — Vol. 60. — P. 1197–1210.

