

УДК: 51-76

Решение задачи оптимального управления процессом метаногенеза на основе принципа максимума Понтрягина

С. А. Королёв^{1,a}, Д. В. Майков^{2,b}

¹ Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова, Россия, 426069, г. Ижевск, ул. Студенческая, д. 7

² Ижевский торгово-экономический техникум, Россия, 426000, г. Ижевск, ул. Ворошилова, д. 20а

E-mail: ^a stkj@mail.ru, ^b MaykovD@yandex.ru

Получено 17.11.2018, после доработки — 07.04.2019.

Принято к публикации 26.12.2019.

В работе представлена математическая модель, описывающая процесс получения биогаза из отходов животноводства. Данная модель описывает процессы, протекающие в биогазовой установке для мезофильной и термофильной сред, а также для непрерывного и периодического режимов поступления субстрата. Приведены найденные ранее для периодического режима значения коэффициентов этой модели, полученные путем решения задачи идентификации модели по экспериментальным данным с использованием генетического алгоритма.

Для модели метаногенеза сформулирована задача оптимального управления в форме задачи Лагранжа, критериальный функционал которой представляет собой выход биогаза за определенный промежуток времени. Управляющим параметром задачи служит скорость поступления субстрата в биогазовую установку. Предложен алгоритм решения данной задачи, основанный на численной реализации принципа максимума Понтрягина. При этом в качестве метода оптимизации применялся гибридный генетический алгоритм с дополнительным поиском в окрестности лучшего решения методом сопряженных градиентов. Данный численный метод решения задачи оптимального управления является универсальным и применим к широкому классу математических моделей.

В ходе исследования проанализированы различные режимы подачи субстрата в метантенк, температурные среды и виды сырья. Показано, что скорость образования биогаза при непрерывном режиме подачи сырья в 1.4–1.9 раза выше в мезофильной среде (в 1.9–3.2 — в термофильной среде), чем при периодическом режиме за период полной ферментации, что связано с большей скоростью подачи субстрата и большей концентрацией питательных веществ в субстрате. Однако выход биогаза за период полной ферментации при периодическом режиме вдвое выше выхода за период полной смены субстрата в метантенке при непрерывном режиме, что означает неполную переработку субстрата во втором случае. Скорость образования биогаза для термофильной среды при непрерывном режиме и оптимальной скорости подачи сырья втрое выше, чем для мезофильной среды. Сравнение выхода биогаза для различных типов сырья показывает, что наибольший выход биогаза наблюдается для отходов птицефабрик, наименьший — для отходов ферм КРС, что связано с содержанием питательных веществ в единице субстрата каждого вида.

Ключевые слова: метаногенез, биогаз, математическая модель, система дифференциальных уравнений, оптимальное управление, принцип максимума Понтрягина

UDC: 51-76

Solution of the problem of optimal control of the process of methanogenesis based on the Pontryagin maximum principle

S. A. Korolev^{1,a}, D. V. Maykov²

¹ Kalashnikov Izhevsk State Technical University,
7 Studencheskaya st., Izhevsk, 426069, Russia

² Izhevsk Trade and Economic College,
20a Voroshilova st., Izhevsk 426000, Russia

E-mail: ^a stkj@mail.ru, ^b MaykovD@yandex.ru

Received 17.11.2018, after completion — 07.04.2019.

Accepted for publication 26.12.2019.

The paper presents a mathematical model that describes the process of obtaining biogas from livestock waste. This model describes the processes occurring in a biogas plant for mesophilic and thermophilic media, as well as for continuous and periodic modes of substrate inflow. The values of the coefficients of this model found earlier for the periodic mode, obtained by solving the problem of model identification from experimental data using a genetic algorithm, are given.

For the model of methanogenesis, an optimal control problem is formulated in the form of a Lagrange problem, whose criterial functionality is the output of biogas over a certain period of time. The controlling parameter of the task is the rate of substrate entry into the biogas plant. An algorithm for solving this problem is proposed, based on the numerical implementation of the Pontryagin maximum principle. In this case, a hybrid genetic algorithm with an additional search in the vicinity of the best solution using the method of conjugate gradients was used as an optimization method. This numerical method for solving an optimal control problem is universal and applicable to a wide class of mathematical models.

In the course of the study, various modes of submission of the substrate to the digesters, temperature environments and types of raw materials were analyzed. It is shown that the rate of biogas production in the continuous feed mode is 1.4–1.9 times higher in the mesophilic medium (1.9–3.2 in the thermophilic medium) than in the periodic mode over the period of complete fermentation, which is associated with a higher feed rate of the substrate and a greater concentration of nutrients in the substrate. However, the yield of biogas during the period of complete fermentation with a periodic mode is twice as high as the output over the period of a complete change of the substrate in the methane tank at a continuous mode, which means incomplete processing of the substrate in the second case. The rate of biogas formation for a thermophilic medium in continuous mode and the optimal rate of supply of raw materials is three times higher than for a mesophilic medium. Comparison of biogas output for various types of raw materials shows that the highest biogas output is observed for waste poultry farms, the least — for cattle farms waste, which is associated with the nutrient content in a unit of substrate of each type.

Keywords: methanogenesis, biogas, mathematical model, system of differential equations, optimal control, Pontryagin maximum principle

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2020, vol. 12, no. 2, pp. 357–367 (Russian).

1. Введение

Для улучшения экологической ситуации в окрестностях животноводческих предприятий их отходы перерабатываются в топливный газ (биогаз) и органические удобрения в процессе метаногенеза [Гюнтер, Гольдфарб, 1991]. На практике метаногенез осуществляется в двух средах: мезофильной (оптимальная температура 37 °С) и термофильной (оптимальная температура 56 °С).

По характеру подачи субстрата в метантенк выделяются следующие режимы: периодический (при котором происходит однократное наполнение метантенка и его полное опорожнение по завершении периода ферментации) и непрерывный (характеризующийся непрерывной подачей новой порции субстрата при одновременном удалении переработанной порции субстрата).

Периодический режим характеризуется существенной неравномерностью выработки биогаза. Кроме того, скорость получения биогаза в начале и в конце периода ферментации достаточно низка. Эти недостатки позволяют устранить непрерывный режим ферментации.

Полезный выход биогаза зависит от множества факторов: состава сырья, климатических условий [Королев, Майков, 2011], температуры в метантенке, режима подачи перерабатываемого субстрата в метантенк и т. д. Для достижения наибольшей экономической эффективности производства биогаза требуется найти оптимальные значения параметров процесса.

Существенное влияние на скорость выработки биогаза оказывает скорость поступления субстрата в метантенк. Оптимальное значение данного параметра зависит от объема метантенка и вида сырья. Для нахождения этого значения требуется решить задачу оптимального управления.

Во многих работах, например [Batstone et al., 2002; Acosta-Humánez et al., 2017; Delgadillo-Mirquez, Hernández-Sarabia, 2018], поиск оптимального управления не выполняется. В других работах [Королев, Майков, 2012; Русяк и др., 2012; Cortes et al., 2018] находится асимптотическое значение оптимального управления. Аналитическое решение задачи оптимального управления получено в работе [Baeyn et al., 2018]. Исследуемая там математическая модель существенно отличается от представленной в данной статье. Рассматриваемый в этой работе численный метод решения задачи является универсальным и применим к широкому классу моделей.

2. Математическая модель метаногенеза

Для описания процесса роста популяции метанообразующих бактерий используется следующая математическая модель [Русяк и др., 2012]:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = \left(\frac{\mu_{mg}L}{a+L} - \frac{\mu_{md}b}{b+L} - u \right) X, \\ \frac{dL}{dt} = u(L_0 - L) - \frac{\beta\mu_{mg}LX}{a+L}, \end{cases} \quad (1)$$

с начальными условиями:

$$X(0) = X_0, \quad L(0) = L_0, \quad V(0) = V_0 = 0. \quad (2)$$

Переменными модели служат: X — концентрация бактерий, кг/м³, и L — концентрация питательных веществ, усваиваемых бактериями, кг/м³. В состав параметров модели входят: μ_{mg} и μ_{md} — максимально возможные относительные скорости соответственно прироста и отмирания бактерий, сут⁻¹; β — безразмерный коэффициент усвоения субстрата; γ — коэффициент, характеризующий скорость преобразования питательных веществ субстрата в биогаз, м³/(сут · кг/м³); a и b — эмпирические коэффициенты, м³/кг.

Относительная скорость поступления субстрата u (сут^{-1}) представляет собой управляющий параметр. Эта величина связана с объемом метантенка Q соотношением

$$u = \frac{1}{Q} \frac{dQ}{dt}.$$

В результате ввода критериального функционала, представляющего собой объем выхода биогаза с 1 м^3 субстрата за время T суток:

$$V = \int_0^T \frac{\gamma \mu_{mg} LX}{a + L} dt \rightarrow \max, \quad (3)$$

задача (1)–(3) становится задачей оптимального управления относительно функции $u(t)$.

Если целью является обезвреживание животноводческих отходов, то необходимо минимизировать содержание питательных веществ в субстрате. Критериальный функционал в этом случае для продолжительного периода времени T имеет вид

$$L(T) \rightarrow \min,$$

и оптимальным является периодический режим поступления субстрата.

Оценки значений параметров модели метаногенеза для различных видов сырья приведены в таблице 1. Задача их нахождения по экспериментальным данным называется задачей идентификации. Для ее решения выполнялась минимизация ошибки идентификации — суммы квадратов отклонений теоретических (модельных) и экспериментальных значений [Королев, Майков, 2011а, 2011б]. Теоретические значения получены в результате численного решения системы дифференциальных уравнений (1) методом Рунге–Кутты четвертого порядка. В качестве метода минимизации ошибки идентификации применялся генетический алгоритм с вещественным кодированием и дополнительным поиском в окрестности лучшего решения с помощью метода сопряженных градиентов [Lee, 2018; Zhoua, Xie, 2018].

Таблица 1. Оценки значений параметров модели метаногенеза для мезофильной/термофильной сред

Коэффициент	Отходы		
	птицефабрик	свинокомплексов	ферм КРС
μ_{mg}	0.482/0.821	0.346/0.783	0.297/0.563
μ_{md}	0.353/0.528	0.291/0.423	0.254/0.351
a	34.781/43.875	7.242/21.653	5.013/8.733
b	116.457/14.674	37.347/9.278	18.722/5.455
β	2.344/3.189	1.495/2.084	1.413/1.983
γ	1.463/1.963	1.373/1.907	1.299/1.813

3. Постановка задачи оптимального управления и численный метод ее решения

Задача (1)–(3) представляет собой задачу Лагранжа для системы дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), u(t), t) \quad (4)$$

(при $t \in [0, T]$, $\mathbf{x} \in R^n$, $\mathbf{u} \in R^k$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$) и максимизируемого относительно неизвестного управления $\mathbf{u}(t)$ критериального функционала

$$J = \int_0^T \phi(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \rightarrow \max. \quad (5)$$

Решение задачи (4)–(5) находится с помощью принципа максимума Понтрягина [Евтушенко, 1982; Vendahmane, Chatakuric, 2017; Tamellini et al., 2018], для численной реализации которого на промежутке $[0, T]$ вводится разностная сетка с узлами $t_0 = 0$, t_1 , t_2 , ..., t_i , t_{i+1} , ..., $t_q = T$ с постоянным шагом $h = t_{i+1} - t_i$.

Численное решение системы дифференциальных уравнений (4) осуществляется методом Рунге–Кутты четвертого порядка. Расчетные формулы имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{i+1} &= \mathbf{x}_i + \frac{h}{6} \cdot (\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4), \quad i = \overline{0, q-1}, \\ \mathbf{k}_1 &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i, t_i), \\ \mathbf{k}_2 &= \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_i + \frac{h}{2} \cdot \mathbf{k}_1, \mathbf{u}_i, t_i + \frac{h}{2}\right), \\ \mathbf{k}_3 &= \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_i + \frac{h}{2} \cdot \mathbf{k}_2, \mathbf{u}_i, t_i + \frac{h}{2}\right), \\ \mathbf{k}_4 &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_i + h \cdot \mathbf{k}_3, \mathbf{u}_i, t_i + h). \end{aligned} \quad (6)$$

Затем вводится qk -мерный полный вектор управлений $\mathbf{U} = (\mathbf{u}_i)$, $i = \overline{1, q}$. В этом случае разностной аппроксимацией критериального функционала (5) является выражение

$$J = J(\mathbf{U}) = \sum_{i=1}^q \phi(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i, t_i) \cdot h \rightarrow \max_{\mathbf{U}}. \quad (7)$$

В теории оптимального управления доказывается, что

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_i &= \mathbf{p}_{i+1} + h \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}_i} + G_i^T \cdot \mathbf{p}_{i+1} \cdot h, \quad i = \overline{1, q-1}, \\ \mathbf{p}_q &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (8)$$

где \mathbf{p} — двойственные переменные, $G_i = \left(\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i, t_i)}{\partial \mathbf{x}_i} \right)$ — матрица Якоби, составленная для системы (4).

Для решения оптимизационной задачи (5) при использовании градиентных методов требуется вычисление частных производных критериального функционала. Эти производные равны

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_i &= h \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{u}_i} + \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}_i} \right)^T \cdot \mathbf{p}_{i+1} \cdot h, \quad i = \overline{1, q-1}, \\ \mathbf{y}_q &= \frac{dJ}{d\mathbf{u}_q} = \frac{\partial J}{\partial \mathbf{u}_q} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (9)$$

Решение задачи осуществляется следующим образом:

- 1) задается полный вектор управлений \mathbf{U} ;
- 2) численно решается исходная система дифференциальных уравнений (4) с помощью соотношений (6) и вычисляется значение критериального функционала (7);

3) численно интегрируется система сопряженных уравнений согласно соотношениям (8) (в направлении «справа налево»);

4) выполняется процесс оптимизации, при необходимости используются производные, вычисляемые по формуле (9).

В данной работе в качестве метода оптимизации использовался генетический алгоритм с вещественным кодированием и дополнительным поиском в окрестности лучшего решения с помощью метода сопряженных градиентов [Тененев и др., 2010]. Генетические алгоритмы успешно применяются для решения многоэкстремальных задач, и в отличие от алгоритмов локальной оптимизации (Ньютона, сопряженных градиентов и т. д.) не требуется тщательного выбора начального приближения для обеспечения сходимости. Для повышения скорости сходимости после каждой итерации генетического алгоритма выполняется одна итерация метода сопряженных градиентов.

Уточнение решения методом сопряженных градиентов осуществляется по следующему алгоритму [Аттетков и др., 2003]. Сначала задается начальное направление минимизации целевой функции $J(\mathbf{U})$: $\mathbf{d}^p = -\nabla J(\mathbf{U}^p)$, $p = 0$. В процессе одной итерации метода $k = \dim \mathbf{U} + 1$ раз выполняется следующее.

1. Вычисляется шаг $\delta^p = \arg \min_{\delta} (\mathbf{U}^p + \delta \mathbf{d}^p)$ с помощью какого-либо метода одномерной оптимизации (например, метода «золотого сечения»).

2. Определяется новое приближение $\mathbf{U}^{p+1} = \mathbf{U}^p + \delta^p \cdot \mathbf{d}^p$.

3. Находится коэффициент $w^p = \frac{\nabla^T J(\mathbf{U}^{p+1}) \cdot \nabla J(\mathbf{U}^{p+1})}{\nabla^T J(\mathbf{U}^p) \cdot \nabla J(\mathbf{U}^p)}$ и направление минимизации

$\mathbf{d}^{p+1} = -\nabla J(\mathbf{U}^{p+1}) + w^p \cdot \mathbf{d}^p$. Сопряженность направлений \mathbf{d}^{p+1} и \mathbf{d}^p означает выполнение равенства $(\mathbf{d}^{p+1})^T \cdot H \cdot \mathbf{d}^p = 0$, где $H = \nabla^2 J(\mathbf{U})$ — матрица вторых частных производных.

Применяя описанный алгоритм к оптимизационной задаче (3)–(4), необходимо учитывать следующее:

1) вектор фазовых переменных имеет вид $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} X \\ L \end{pmatrix}$; вектор управляющих параметров \mathbf{u} в рассматриваемой задаче представляет собой скорость поступления субстрата u ; вектор двойственных переменных $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$;

2) матрица Якоби равна

$$G = \begin{pmatrix} \frac{\mu_{mg}L}{a+L} - \frac{\mu_{md}b}{b+L} - u & \frac{a\mu_{mg}X}{(a+L)^2} + \frac{b\mu_{md}X}{(b+L)^2} \\ -\frac{\beta\mu_{mg}L}{a+L} & -u - \frac{\beta a\mu_{mg}X}{(a+L)^2} \end{pmatrix};$$

3) частные производные критериального функционала выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial V(t_i)}{\partial u} = y(t_i) = -X(t_i) \cdot p_1(t_{i+1}) \cdot h + (L_0 - L(t_i)) \cdot p_2(t_{i+1}) \cdot h, \quad i = \overline{1, q-1},$$

$$\frac{\partial V(t_q)}{\partial u} = y_q = 0.$$

4. Результаты численного решения задачи оптимального управления

Алгоритм решения задачи оптимального управления процессом метаногенеза программно реализован в качестве модуля информационно-аналитической системы, позволяющей рассчитать технико-экономические характеристики биогазовых комплексов [Королев, Майков, 2013]. Проведено исследование сходимости и устойчивости алгоритма. Пример зависимости десятичного логарифма значений критериального функционала лучшего решения, найденного генетическим алгоритмом, от номера итерации приведен на рис. 1. График отражает усредненные значения для десяти запусков программы до сходимости.

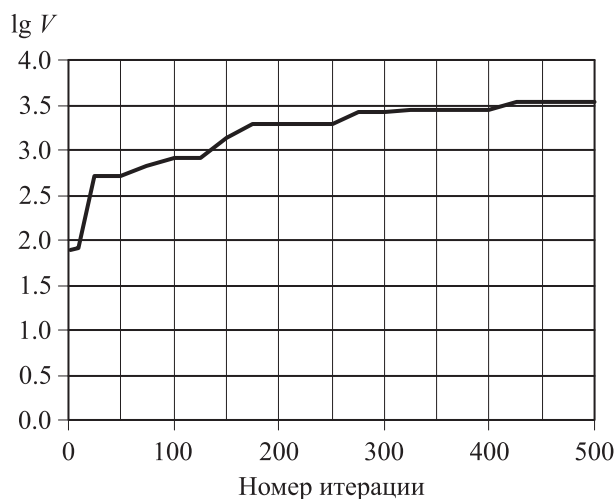


Рис. 1. Зависимость десятичного логарифма значений критериального функционала от номера итерации

Оптимальные значения относительной скорости поступления субстрата u^* , среднесуточный выход биогаза w^* , период полной смены субстрата в метантенке $\frac{1}{u^*}$, отношение d_1 выхода биогаза за этот период к полному выходу биогаза при периодическом режиме, отношение d_2 выхода биогаза при непрерывном и периодическом режимах за период ферментации, степень переработки субстрата $\frac{L^*}{L_0}$ приведены в таблице 2.

Таблица 2. Оптимальные параметры метаногенеза для мезофильной/термофильной сред

Характеристики	Источник сырья		
	птицефабрики	свинокомплексы	фермы КРС
u^* , сут ⁻¹	0.149/0.401	0.131/0.342	0.112/0.273
w^* , м ³ /сут	7.17/24.78	3.61/10.96	1.81/5.34
$\frac{1}{u^*}$, сут	6.71/2.49	7.63/2.92	8.93/3.66
d_1	0.50/0.66	0.48/0.54	0.49/0.57
d_2	1.92/3.18	1.57/2.25	1.36/1.86
$\frac{L^*}{L_0}$, %	54/42	51/40	49/39

Динамика фазовых переменных для непрерывного и периодического режимов поступления субстрата на примере отходов свиноккомплексов и мезофильной среды приведена на рис. 2. Период полной ферментации для периодического режима метаногенеза в мезофильной среде составляет 24 сут. В течение данного периода происходит рост популяции бактерий до своего максимума, а затем вымирание вследствие нехватки питательных веществ. По завершении периода ферментации (24 сут) полностью меняется субстрат в метантенке, и процесс роста и вымирания бактерий повторяется. При непрерывном режиме подачи субстрата концентрация бактерий и питательных веществ в субстрате с течением времени стабилизируются.

Графики скорости образования биогаза при различных средах (мезофильной и термофильной) на примере отходов свиноккомплексов представлены на рис. 3.

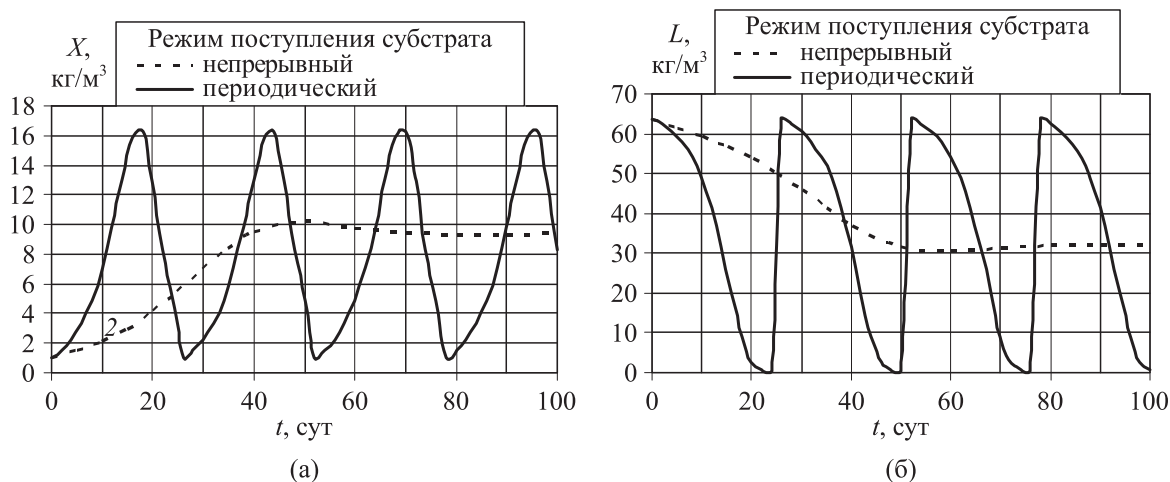


Рис. 2. Динамика фазовых переменных метаногенеза для мезофильной среды и отходов свиноккомплексов: а) концентрация бактерий; б) концентрация питательных веществ в субстрате

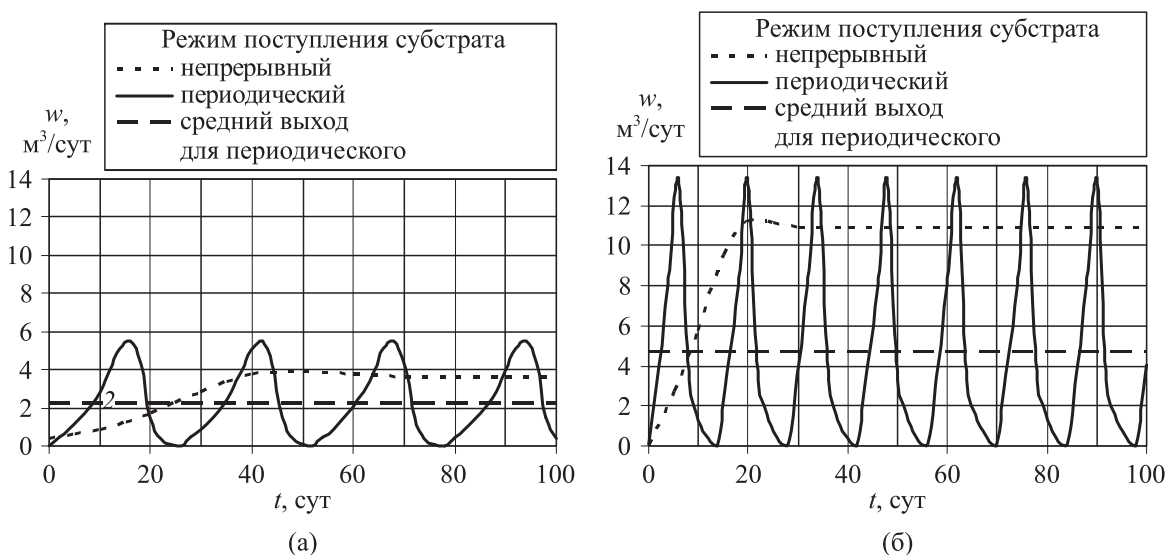


Рис. 3. Скорость образования биогаза для различных режимов подачи сырья для мезофильной (а) и термофильной (б) сред

Анализ данных, представленных в таблице 2 и на рис. 3, показывает, что степень переработки субстрата при непрерывном режиме для мезофильной среды составляет 49–54 %, а для термофильной — 39–42 %. Скорость образования биогаза в условиях мезофильной среды при непрерывном режиме в 1.4–1.9 раза выше, чем при периодическом режиме за период полной

ферментации. В условиях термофильной среды скорость образования биогаза при непрерывном режиме в 1.9–3.2 раза выше, чем при периодическом режиме. Это связано с большей концентрацией питательных веществ в субстрате вследствие постоянного поступления нового субстрата.

Выход биогаза за период полной ферментации при периодическом режиме вдвое выше выхода за период полной смены субстрата в метантенке при непрерывном режиме, что означает более полную переработку субстрата в первом случае.

Выход биогаза для различных видов сырья при непрерывном режиме его поступления приведен на рис. 4.

Как видно из графиков, приведенных на рис. 4, при непрерывном режиме подачи сырья скорость образования биогаза для термофильной среды втрое выше, чем для мезофильной среды. Наибольший выход биогаза наблюдается для отходов птицефабрик, наименьший — для отходов ферм КРС. Это связано с содержанием питательных веществ для метанообразующих бактерий в единице субстрата каждого вида.

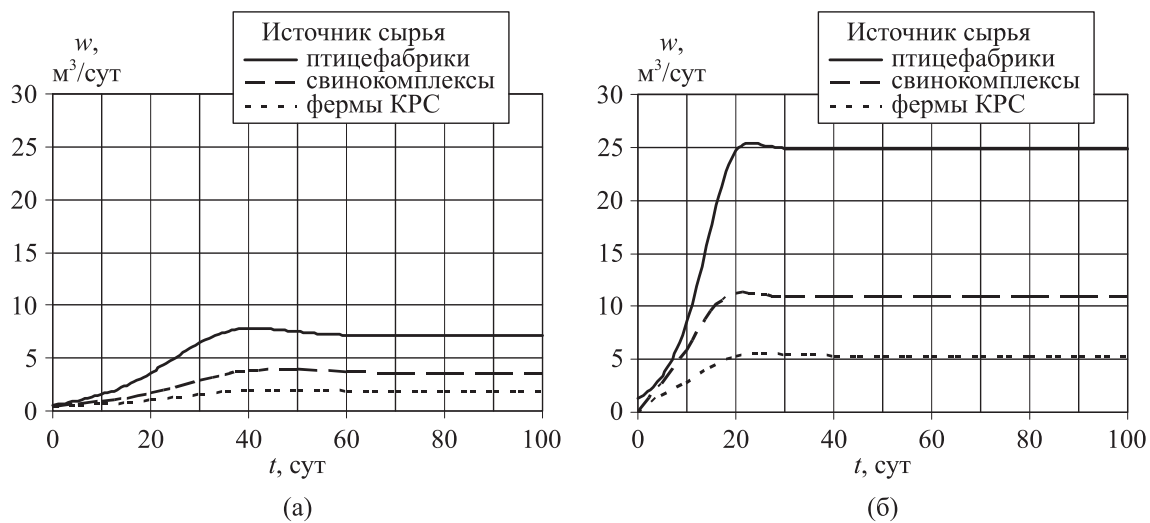


Рис. 4. Скорость образования биогаза из различных видов сырья для мезофильной (а) и термофильной (б) сред

5. Заключение

В работе представлены математическая постановка и алгоритм решения задачи оптимального управления процессом метаногенеза на основе принципа максимума Понтрягина. С помощью разработанной численной методики проведена оптимизация параметров метаногенеза. Получено оптимальное значение относительной скорости подачи субстрата при непрерывном режиме, соответствующее максимальной средней скорости выхода биогаза для различных видов сырья.

В ходе исследования проанализированы различные режимы подачи субстрата в метантенк. Показано, что скорость образования биогаза при непрерывном режиме подачи сырья в 1.4–1.9 раза выше в мезофильной среде (в 1.9–3.2 — в термофильной среде), чем при периодическом режиме за период полной ферментации. Это связано с большей скоростью подачи субстрата и большей концентрацией питательных веществ при непрерывной подаче. Однако общий выход биогаза с единицы объема субстрата при периодическом режиме вдвое выше выхода биогаза при непрерывном режиме, что означает неполную переработку субстрата во втором случае.

Представлены результаты моделирования метаногенеза для различных сред и видов сырья. Показано, что скорость образования биогаза для термофильной среды при непрерывном режиме и оптимальной скорости подачи сырья втрое выше, чем для мезофильной среды.

Сравнение выхода биогаза для различных типов сырья показывает, что наибольший выход биогаза наблюдается для отходов птицефабрик, наименьший — для отходов ферм КРС. Это связано с содержанием питательных веществ для метанообразующих бактерий в единице субстрата каждого вида.

Список литературы (References)

- Аттетков А. В., Галкин С. В., Зарубин В. С.* Методы оптимизации. — М.: Изд-во МГТУ имени Н. Э. Баумана, 2003.
Attekov A. V., Galkin S. V., Zarubin V. S. Metody optimizatsii [Optimization methods]. — Moscow: Proc. of BMSTU, 2003 (in Russian).
- Гюнтер Л. И., Гольдфарб Л. Л.* Метантенки. — М.: Стройиздат, 1991.
Gyunter L. I., Goldfarb L. L. Metantunki [Methantanks]. — Moscow: Stroizdat, 1991 (in Russian).
- Евтушенко Ю. Г.* Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. — М.: Наука, 1982.
Evtushenko Yu. G. Metody resheniya ekstremal'nykh zadachi i ikh primeneniye v sistemakh optimizatsii [Methods for solving extremal problems and their application in optimization systems]. — Moscow: Nauka, 1982 (in Russian).
- Королев С. А., Майков Д. В.* Влияние климатических условий на тепловой режим работы биогазовой установки // Вестник ИжГТУ. — № 2 (50). — Ижевск: Изд-во ИжГТУ, 2011. — С. 209–213.
Korolev S. A., Maikov D. V. Vliyanie klimaticheskikh uslovii na teplovoi rezhim raboty biogazovoi ustanovki [The Influence of Climatic Conditions on the Thermal Regime of a Biogas Plant] // Vestnik IzhGTU [Proc. of ISTU]. — 2011. — No. 2 (50). — P. 209–213 (in Russian).
- Королев С. А., Майков Д. В.* Идентификация математической модели и исследование различных режимов метаногенеза в мезофильной среде // Компьютерные исследования и моделирование. — Т. 4, № 1. — М.: Изд-во Института компьютерных исследований, 2012. — С. 131–141.
Korolev S. A., Maikov D. V. Identifikatsiya matematicheskoi modeli i issledovanie razlichnykh rezhimov metanogeneza v mezofil'noi srede [Identification of a mathematical model and research of the various modes of methanogenesis in mesophilic environments] // Kompyuternye issledovaniya i modelirovaniye [Computer Research and Modeling]. — 2012. — No. 1. — P. 131–141 (in Russian).
- Королев С. А., Майков Д. В.* Метод идентификации параметров модели метаногенеза в виде системы дифференциальных уравнений на основе генетического алгоритма // Интеллектуальные системы в производстве. — № 1. — Ижевск: Изд-во ИжГТУ, 2012. — С. 29–35.
Korolev S. A., Maikov D. V. Metod identifikatsii parametrov modeli metanogeneza v vide sistemy differentsial'nykh uravnenii na osnove geneticheskogo algoritma [The Identification Method of Model Parameters of Methanogenesis in the Form of Set of Differential Equations based on genetic Algorithm] // Intelktual'nye sistemy v proizvodstve [Intellect systems in production]. — 2012. — No. 1. — P. 29–35 (in Russian).
- Королев С. А., Майков Д. В.* Информационно-аналитическая система проектирования структуры, расчета и оптимизации технологических и экономических параметров биогазовых комплексов // Интеллектуальные системы в производстве. — № 2 (22). — Ижевск: Изд-во ИжГТУ, 2013. — С. 198–202.
Korolev S. A., Maikov D. V. Informatsionno-analiticheskaya sistema proektirovaniya struktury, rascheta i optimizatsii tekhnologicheskikh i ekonomicheskikh parametrov biogazovykh kompleksov [Information-Analitical System Design of Structure, Calculation and Optimization of the Technological and Economic Parameters of Biogas Complexes] // Intelktual'nye sistemy v proizvodstve [Intellect systems in production]. — 2013. — No. 2 (22). — P. 198–202 (in Russian).
- Русяк И. Г., Королев С. А., Майков Д. В.* Исследование стационарных решений и оптимизация параметров математической модели метаногенеза // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. — № 3 (19). — Томск: Изд-во ТГУ, 2012. — С. 15–21.
Rusyak I. G., Korolev S. A., Maikov D. V. Issledovanie statsionarnykh reshenii i optimizatsiya parametrov matematicheskoi modeli metanogeneza [The Research of Stationary Solutions and the Optimization of the Parameters of the Mathematical Model of Methanogenesis] // Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika [Proc. of TSU "Mathematics and Mechanics"]. — 2012. — No. 3 (19). — P. 15–21 (in Russian).

- Тененев В. А., Якимович Б. А.* Генетические алгоритмы в моделировании систем. — Ижевск: Издательство ИжГТУ, 2010.
Tenenev V. A., Yakimovich B. A. Geneticheskie algoritmy v modelirovanii sistem [Genetic algorithms in modeling systems]. — Izhevsk: Publishing office IzhGTU, 2010 (in Russian).
- Acosta-Humánez P. B., Higuera M. M., Sinitsyn A. V.* A model of anaerobic digestion for biogas production using Abel Equations // *Far East Journal of Mathematical Sciences*. — 2017. — Vol. 101, No. 6. — P. 1295–1311. — DOI: 10.17654/MS101061295
- Batstone D. J., Keller J., Angelidaki I., Kalyuzhnyi S. V., Pavlostathis S. G., Rozzi A., Sanders W. T. M., Siegrist H., Vavilin V. A.* The IWA Anaerobic Digestion Model No 1 (ADM1) // *Water Science and Technology*. — 2002. — Vol. 45, No. 10. — P. 65–73.
- Bayen E., Cots O., Gajardo P.* Analysis of an optimal control problem related to anaerobic digestion process // *Journal of Optimization Theory and Applications*. — 2018. — Vol. 178. — P. 627–659. — DOI: 10.1007/s1095
- Bendahmane M., Chamakuric N.* Numerical analysis for an optimal control of bidomain-bath model // *Journal of Differential Equations*. — 2017. — Vol. 263, No. 5. — P. 2419–2456. — DOI: 10.1016/j.jde.2017.04.001
- Cortes L. G., Cortes S., Cortes L. E.* Optimal Control Scheme on Anaerobic Processes in Bioreactors // *Chemical engineering transaction*. — 2018. — Vol. 65. — P. 433–438. — DOI: 10.3303/CET1865073
- Delgadillo-Mirquez L., Hernández-Sarabia M.* Mathematical modelling and simulation for biogas production from organic waste // *International Journal of Engineering Systems Modelling and Simulation*. — 2018. — Vol. 10, No. 2. — P. 97–102. — DOI: 10.1504/IJESMS.2018.10013112
- Lee C. K. H.* A review of applications of genetic algorithms in operations management // *Engineering Applications of Artificial Intelligence*. — 2018. — Vol. 76. — P. 1–12. — DOI: 10.1016/j.engappai.2018.08.011
- Tamellini M., Parolini N., Verani M.* An optimal control problem for two-phase compressible–incompressible flows // *Computers & Fluids*. — 2018. — Vol. 172. — P. 538–548. — DOI: 10.1016/j.compfluid.2018.03.039
- Zhoua Sh., Xie J.* A random-keys genetic algorithm for scheduling unrelated parallel batch processing machines with different capacities and arbitrary job sizes // *Applied Mathematics and Computation*. — 2018. — Vol. 334. — P. 254–268. — DOI: 10.1016/j.amc.2018.04.024

