

УДК: 004.896: 621.865

Поиск реализуемых энергоэффективных походок плоского пятизвенного двуногого робота с точечным контактом

Р. Р. Хусаинов^a, Ш. Н. Мамедов^b, С. И. Савин^c, А. С. Климчик^d

Центр технологий компонентов робототехники и мехатроники, Университет «Иннополис»,
Россия, 420500, Иннополис, ул. Университетская, д. 1

E-mail: ^a r.khusainov@innopolis.ru, ^b sh.mamedov@innopolis.ru, ^c s.savin@innopolis.ru,
^d a.klimchik@innopolis.ru

Получено 13.01.2020.

Принято к публикации 16.01.2020.

В статье рассматривается процесс поиска опорных траекторий движения плоского пятизвенного двуногого шагающего робота с точечным контактом. Для этого используются метод приведения динамики к низкоразмерному нулевому многообразию с помощью наложения виртуальных связей и алгоритмы нелинейной оптимизации для поиска параметров наложенных связей. Проведен анализ влияния степени полиномов Безье, аппроксимирующих виртуальные связи, а также условия непрерывности управляющих воздействий на энергоэффективность движения. Численные расчеты показали, что на практике достаточно рассматривать полиномы со степенями 5 или 6, так как дальнейшее увеличение степени приводит к увеличению вычислительных затрат, но не гарантирует уменьшение энергозатрат походки. Помимо этого, было установлено, что введение ограничений на непрерывность управляющих воздействий не приводит к существенному уменьшению энергоэффективности и способствует реализуемости походки на реальном роботе благодаря плавному изменению крутящих моментов в приводах. В работе показано, что для решения задачи поиска минимума целевой функции в виде энергозатрат при наличии большого количества ограничений целесообразно на первом этапе найти допустимые точки в пространстве параметров, а на втором этапе — осуществлять поиск локальных минимумов, стартуя с этих точек. Для первого этапа предложен алгоритм расчета начальных приближений искомых параметров, позволяющий сократить время поиска траекторий (в среднем до 3-4 секунд) по сравнению со случайным начальным приближением. Сравнение значений целевых функций на первом и на втором этапах показывает, что найденные на втором этапе локальные минимумы дают в среднем двукратный выигрыш по энергоэффективности в сравнении со случайно найденной на первом этапе допустимой точкой. При этом времязатраты на выполнение локальной оптимизации на втором этапе являются существенными.

Ключевые слова: двуногий шагающий робот, неполноприводная система, гибридная система, оптимальная траектория

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-38-00945.

UDC: 004.896: 621.865

Searching for realizable energy-efficient gaits of planar five-link biped with a point contact

R. R. Khusainov^a, Sh. N. Mamedov^b, S. I. Savin^c, A. S. Klimchik^d

Center for Technologies in Robotics and Mechatronics Components, Innopolis University,
1 University st., Innopolis, 420500, Russia

E-mail: ^a r.khusainov@innopolis.ru, ^b sh.mamedov@innopolis.ru, ^c s.savin@innopolis.ru,
^d a.klimchik@innopolis.ru

Received 13.01.2020.

Accepted for publication 16.01.2020.

In this paper, we discuss the procedure for finding nominal trajectories of the planar five-link bipedal robot with point contact. To this end we use a virtual constraints method that transforms robot's dynamics to a low-dimensional zero manifold; we also use a nonlinear optimization algorithms to find virtual constraints parameters that minimize robot's cost of transportation. We analyzed the effect of the degree of Bezier polynomials that approximate the virtual constraints and continuity of the torques on the cost of transportation. Based on numerical results we found that it is sufficient to consider polynomials with degrees between five and six, as further increase in the degree of polynomial results in increased computation time while it does not guarantee reduction of the cost of transportation. Moreover, it was shown that introduction of torque continuity constraints does not lead to significant increase of the objective function and makes the gait more implementable on a real robot.

We propose a two step procedure for finding minimum of the considered optimization problem with objective function in the form of cost of transportation and with high number of constraints. During the first step we solve a feasibility problem: remove cost function (set it to zero) and search for feasible solution in the parameter space. During the second step we introduce the objective function and use the solution found in the first step as initial guess. For the first step we put forward an algorithm for finding initial guess that considerably reduced optimization time of the first step (down to 3–4 seconds) compared to random initialization. Comparison of the objective function of the solutions found during the first and second steps showed that on average during the second step objective function was reduced twofold, even though overall computation time increased significantly.

Keywords: bipedal robot, underactuated system, hybrid system, optimal trajectory

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2020, vol. 12, no. 1, pp. 155–170 (Russian).

This work was supported by RFBR grant No. 18-38-00945.

Введение

Двуногие шагающие роботы (ДШР) являются объектом исследований на протяжении последних десятилетий. За это время был достигнут значительный прогресс как в области механики таких роботов, так и в области программного обеспечения [Goswami, Vadakkepat, 2018]. Ожидается, что роботы такого типа могут быть использованы в спасательных операциях, в производстве, в индустрии развлечений, а также способны заменить человека при выполнении операций в труднодоступных или опасных местах. Однако по-прежнему наиболее актуальной задачей, стоящей перед исследователями, является задача обеспечения устойчивых движений ДШР. При наличии большого количества прототипов шагающих роботов, все еще наблюдается значительный недостаток эффективных на практике методов управления ими. Современное состояние принципов управления ДШР характеризуется сильной зависимостью от эвристики или же от некоторых критериев, таких как критерий точки нулевого момента (Zero Moment Point, ZMP) [Vukobratović, Borovac, 2004], критерий точки захвата (Capture point) [Pratt et al., 2006] и т. д. Такие принципы управления не позволяют реализовывать высокодинамические режимы движения ДШР, характеризующиеся наличием неуправляемых напрямую степеней свободы [Dehghani et al., 2013; Miossec, Aoustin, 2002; Westervelt et al., 2003; Hereid et al., 2016].

Важным направлением исследования ДШР является использование подходов для управления неполноприводными роботами (underactuated robots) [Moreno-Valenzuela, Aguilar-Avelar, 2018]. Такие роботы представляют интерес по двум причинам. Во-первых, можно показать, что даже в относительно простых моделях ДШР такого типа существуют человекоподобные движения [McGeer, 1990]. Во-вторых, движение человека по своей природе также имеет неуправляемую степень в опорной ноге ввиду сильной ограниченности моментов в стопе, а также ввиду перекатывания стопы опорной ноги. Современные методы стабилизации гибридных систем с пассивными степенями свободы позволяют решить проблему орбитальной устойчивости движения таких роботов [Westervelt et al., 2003; Shiriaev, Freidovich, 2009; Shiryayev et al., 2019]. Однако они требуют наличия опорных периодических траекторий движения гибридной системы, поиск которых в общем случае является нетривиальной задачей.

В работах, посвященных поиску номинальных траекторий в рамках гибридной нулевой динамики (ГНД), авторами чаще всего используются полиномы Безье [Westervelt et al., 2003; Hereid et al., 2016] в качестве аппроксимирующих функций для виртуальных связей. Однако, на наш взгляд, недостаточное внимание было уделено анализу влияния степени полиномов Безье и непрерывности управляющих воздействий на энергоэффективность найденных номинальных траекторий движения. Поэтому целью данной работы является реализация методов нахождения номинальных траекторий движения плоского пятизвенного ДШР с точечным контактом и анализ вышеобозначенных замечаний. В работе также предлагается алгоритм расчета начального приближения решения задачи оптимизации, позволяющий существенно сократить расчетное время поиска траектории.

Данная статья организована следующим образом. В начале описана полная гибридная модель движения ДШР. Затем проведен обзор алгоритма нахождения периодических траекторий движения робота на основе метода ГНД. Далее приведены результаты численных расчетов и их анализ. В заключении подчеркнуты основные выводы на основе проведенного анализа.

Моделирование динамики робота

Рассмотрим схематичное изображение плоского двуногого шагающего робота с точечным контактом (рис. 1), состоящего из пяти звеньев. Звенья соединены между собой вращательными шарнирами. Первые два звена, начиная с точки опоры, соответствуют голени и бедру робота.

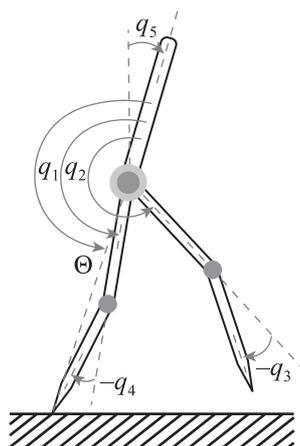


Рис. 1. Схематичный рисунок плоского двуногого робота с пятью звеньями с обозначением обобщенных координат $q_1 \dots q_5$. Θ — генератор движения для виртуальных связей

Третье звено соответствует туловищу, а последние два звена, четвертый и пятый, аналогично первым двум звеньям, соответствуют бедру и голени. Без потери общности ноги будем считать одинаковыми. Для вывода уравнений динамики введем следующие обобщенные координаты $\mathbf{q} = [q_1 \dots q_5]^T$, как показано на рисунке (рис. 1). Все степени свободы, за исключением пятого, напрямую управляемы. Крутящий момент, прикладываемый в шарнирах робота, будем обозначать $\mathbf{u} = [u_1 \dots u_4]^T$. Робот относится к классу систем с дефицитом управляющих воздействий первого порядка, так как количество неуправляемых степеней свободы равняется единице.

Непрерывная динамика

Предположим, что конец опорной ноги жестко связан с опорной поверхностью во время движения. Получим непрерывную динамику двуногого шагающего робота в фазе переноса ноги, используя подход Эйлера – Лагранжа [Sciavico, Siciliano, 2012]. Для этого определим лагранжиан системы, $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, зная кинетическую энергию $K = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$ и потенциальную энергию $\Pi(\mathbf{q})$:

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = K - \Pi = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \Pi(\mathbf{q}), \quad (1)$$

где $\mathbf{x} = [q^T \quad \dot{q}^T]^T \in \mathbb{R}^{10}$ — вектор состояний динамической системы, $\mathbf{M}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ — симметричная положительно определенная матрица инерции, элементы которой определяются как

$$m_{i,j}(\mathbf{q}) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (2)$$

Определив лагранжиан, получим дифференциальные уравнения движения робота, воспользовавшись уравнениями Эйлера – Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{B}(\mathbf{q}) \mathbf{u}, \quad (3)$$

где $\mathbf{B}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{5 \times 4}$ — матрица входных сигналов. Уравнения движения системы (3) могут быть записаны в эквивалентной форме:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \mathbf{B}(\mathbf{q}) \mathbf{u}, \quad (4)$$

где $C(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ — матрица кориолисовых и центробежных сил, $G(q) \in \mathbb{R}^5$ — вектор гравитационных сил.

Дискретная динамика

Уравнение движения (4) определяет динамику двуногого шагающего робота во время одноопорной фазы. Однако этого недостаточно, чтобы полностью описать движение шагающего робота. В конце одноопорной фазы происходит соударение переносимой ноги с опорной поверхностью. Представим контакт как абсолютно неупругий удар [Hurmuzlu, Marghitu, 1994]. Это означает, что в момент касания происходит мгновенное изменение скоростей без изменения конфигурации, переносимая нога «прилипает» к земле без проскальзывания и становится опорной, а опорная нога сразу же отрывается от поверхности (отсутствует двухопорная фаза). Ударные силы, которые испытывает робот во время соударения, считаются мгновенными.

Для вывода соотношения между скоростями до и после соударения дополним обобщенные координаты декартовыми координатами любой точки на роботе ($p = [p_x \ p_y]^T$). Для простоты в качестве p были выбраны координаты точки опоры. Используя расширенные обобщенные координаты $q_e = [q^T \ p^T]^T$ и метод Лагранжа – Эйлера, получим расширенную динамическую модель робота:

$$M_e(q_e)\ddot{q}_e + C_e(q_e, \dot{q}_e)\dot{q}_e + G_e(q_e) = B_e(q_e)u + \delta F_{ext}, \quad (5)$$

где $\delta F_{ext} \in \mathbb{R}^2$ — вектор обобщенных сил, возникающий за счет взаимодействия конца ноги с опорной поверхностью в момент удара. Интегрируя (5) и пренебрегая всеми силами, кроме контактных, получим

$$M_e(q_e^+)\dot{q}_e^+ - M_e(q_e^-)\dot{q}_e^- = F_{ext}, \quad (6)$$

где $F_{ext} = \int_{t^-}^{t^+} \delta F_{ext}(\tau) d\tau$. С другой стороны, связь между импульсом обобщенных сил и импульсом внешних сил может быть найдена на основе принципа виртуальной работы:

$$F_{ext} = J_c^T(q)\lambda, \quad (7)$$

где $J_c(q) \in \mathbb{R}^{2 \times 7}$ — матрица Якоби, которая связывает угловые скорости в шарнирах и скорости вдоль ограниченных направлений движения конца ноги, а $\lambda \in \mathbb{R}^2$ является вектором импульса сил реакции вдоль тех же направлений. Если удар моделируется как абсолютно неупругий, то условие отсутствия отскока можно записать в следующем виде:

$$J_c(q)\dot{q}_e^+ = 0. \quad (8)$$

Совместное решение уравнений (6) и (8) позволяет получить отображение Δ_q между скоростями до удара (\dot{q}^+) и после удара (\dot{q}^-), а также отображение между скоростями до удара и вектором внешних сил:

$$\begin{aligned} \lambda &= -(J_c M_e^{-1} J_c^T)^{-1} J_c \dot{q}_e^- = \Delta_\lambda \dot{q}_e^-, \\ \dot{q}^+ &= (I - M_e^{-1} J_c^T (J_c M_e^{-1} J_c^T)^{-1} J_c) \dot{q}_e^- = \bar{\Delta}_q(q) \dot{q}_e^-. \end{aligned} \quad (9)$$

Поскольку после удара происходит переключение между опорной и переносимой ногами, необходимо переобозначить углы в шарнирах робота:

$$\begin{bmatrix} q^+ \\ \dot{q}^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{R} \bar{\Delta}_q \Xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q^- \\ \dot{q}^- \end{bmatrix} = \Delta \begin{bmatrix} q^- \\ \dot{q}^- \end{bmatrix}, \quad (10)$$

где $\Xi \in \mathbb{R}^{7 \times 5}$ — отображение от обобщенных скоростей начальной модели \dot{q} к обобщенным скоростям расширенной модели \dot{q}_e . Уравнения движения (4) совместно с отображениями (10), возникающими во время удара, описывают гибридную динамику двуногого робота.

Поиск опорных траекторий

В этом разделе мы напомним читателю основные результаты, полученные авторами в [Westervelt et al., 2003], для управления ходьбой двуногих роботов в сагиттальной плоскости в случае одной неуправляемой степени свободы. Опишем выбор генератора движения и функций виртуальных связей. Далее сформулируем целевую функцию и ограничения задачи оптимизации для поиска наиболее энергоэффективных траекторий.

Приведенная динамика

Для начала рассмотрим непрерывную динамику движения в фазе переноса ноги, описываемую уравнением (4). Нулевой динамикой динамической системы, заданной в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений, называется максимальная внутренняя динамика, при которой выход системы равен нулю [Isidori, 2014]. Пусть выход системы (4), представленной в виде $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}$, задается функцией $\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{q})$, зависящей только от обобщенных координат системы. Тогда очевидно, что производная по времени выхода системы \mathbf{y} не зависит от входного управления \mathbf{u} . Проинтегрировав \mathbf{y} дважды по времени, получим

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{y} = L_f^2\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + L_gL_f\mathbf{h}(\mathbf{q})\mathbf{u}. \quad (11)$$

Матрица $L_gL_f\mathbf{h}(\mathbf{q})$ называется матрицей декомпозиции и зависит только от конфигурации системы. Сформулируем принцип инвариантности нулевой динамики для непрерывной фазы переноса ноги.

Лемма [Westervelt et al., 2007]. Пусть гладкая функция h определена так, что

- 1) функция h зависит только от обобщенных координат;
- 2) существует открытое множество $\tilde{Q} \subset Q$ такое, что для каждого элемента $\mathbf{q} \in \tilde{Q}$ матрица декомпозиции квадратная и обратима;
- 3) существует такая гладкая действительная функция $\theta(\mathbf{q})$, что отображение $[\mathbf{h}(\mathbf{q})^T, \theta(\mathbf{q})]^T : \tilde{Q} \rightarrow \mathbb{R}^N$ является диффеоморфизмом;
- 4) существует как минимум один элемент \tilde{Q} , в котором h обращается в нуль.

Тогда

- 1) $Z := \{\mathbf{x} \in T\tilde{Q} \mid \mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0, L_f\mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0\}$ — гладкое двумерное подмногообразие многообразия $T\tilde{Q}$;
- 2) обратная связь

$$\mathbf{u}^*(\mathbf{x}) = -\left(L_gL_f\mathbf{h}(\mathbf{x})\right)^{-1}L_f^2\mathbf{h}(\mathbf{x}) \quad (12)$$

обеспечивает инвариантность Z . То есть для любого $\mathbf{z} \in Z$ $f_{\text{zero}}(\mathbf{z}) := \mathbf{f}(\mathbf{z}) + \mathbf{g}(\mathbf{z})\mathbf{u}^*(\mathbf{z}) \in T_zZ$.

Z называется многообразием нулевой динамики, а $\dot{\mathbf{z}} = f_{\text{zero}}(\mathbf{z})$ — нулевой динамикой или приведенной динамикой. Преобразование координат на \tilde{Q} можно выписать в общем виде как

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \mathbf{h}(\mathbf{q}), & \eta_2 &= L_f\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \\ \xi_1 &= \theta(\mathbf{q}), & \xi_2 &= L_f\theta(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}). \end{aligned} \quad (13)$$

Подстановкой $y \equiv 0$ ($\eta_1 = 0, \eta_2 = 0$) и \mathbf{u}^* получаем уравнения приведенной динамики:

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= L_f^2 \theta + L_g L_f \theta \mathbf{u}^*.\end{aligned}\quad (14)$$

Однако уравнения в данном виде не совсем удобны для применения. Как показано в [Westervelt et al., 2007], замена координат в виде $(\xi_1, \xi_2) = (\theta(\mathbf{q}), \gamma_0(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}})$ приводит уравнения (14) к виду

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \kappa_1(\xi_1)\xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= \kappa_2(\xi_1).\end{aligned}\quad (15)$$

Более того, если использовать обозначения, как показано на рис. 1, то можно выписать выражения для ξ_1, ξ_2 в явном виде:

$$\dot{\xi}_1 = \theta|_Z, \quad (16)$$

$$\xi_2 = \left. \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_5} \right|_Z, \quad (17)$$

$$\kappa_1(\xi_1) = \left. \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{q}} \left[\frac{\partial h}{\partial \mathbf{q}} \right]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right|_Z, \quad (18)$$

$$\kappa_2(\xi_1) = \left. -\frac{\partial V}{\partial q_5} \right|_Z, \quad (19)$$

где γ_0 — последняя строка матрицы инерции $\mathbf{M}(\mathbf{q})$.

Переключение системы при контакте с опорной поверхностью, описываемое оператором (10), и свойство инвариантности подмногообразия Z по отношению к оператору Δ ($\Delta(S \cap Z) \subset Z$) задают ГНД

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}} &= f_{\text{zero}}(\mathbf{z}), \quad \mathbf{z}^- \notin S \cap Z, \\ \mathbf{z}^+ &= \Delta(\mathbf{z}^-), \quad \mathbf{z}^- \in S \cap Z.\end{aligned}\quad (20)$$

Как показано в [Westervelt et al., 2007], отображение Пуанкаре для ГНД $\rho: \cap Z \rightarrow S \cap Z$ задается как

$$\rho(\zeta_2^-) = \delta_{\text{zero}}^2 \zeta_2^- - V_{\text{zero}}(\theta^-), \quad (21)$$

$$V_{\text{zero}}(\theta^-) = - \int_{\theta^+}^{\theta^-} \frac{\kappa_2(\xi)}{\kappa_1(\xi)} d\xi, \quad (22)$$

где $\zeta_2 = \frac{1}{2}\xi_2^2$, $\delta_{\text{zero}} = \gamma_0(\mathbf{q}^+) \Delta \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_0^-) \sigma_{\dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}_0^-)$. Более того, если задать $V_{\text{zero}}^{\text{max}}$ как

$$V_{\text{zero}}^{\text{max}} := \max_{\theta^+ \leq \xi_1 \leq \theta^-} V_{\text{zero}}(\xi_1), \quad (23)$$

то неподвижная точка отображения (22) —

$$\zeta_2^* := - \frac{V_{\text{zero}}(\theta^-)}{1 - \delta_{\text{zero}}^2} \quad (24)$$

— устойчива, и существует экспоненциально устойчивая периодическая траектория, если

$$\frac{\delta_{\text{zero}}^2}{1 - \delta_{\text{zero}}^2} V_{\text{zero}}(\theta^-) + V_{\text{zero}}^{\text{max}} < 0, \quad (25)$$

$$0 < \delta_{\text{zero}}^2 < 1. \quad (26)$$

Функция $y = h(\mathbf{q})$, зависящая только от обобщенных координат системы, накладывает так называемые виртуальные голономные связи (сервосвязи) на систему. Подход виртуальных связей является полезным инструментом как для планирования, так и для стабилизации движений для неполноприводных механических систем [Aoustin, Formal'sky, 2003; Shiriaev et al., 2004]. Рассмотрим выход системы в виде $y = h(\mathbf{q}) := \mathbf{h}_a - \mathbf{h}_d(\theta(\mathbf{q}), \alpha)$, где \mathbf{h}_a — функция от $(N - 1)$ управляемых координат, $\mathbf{h}_d(\theta(\mathbf{q}), \alpha)$ — функция, которая задает желаемое поведение этих координат в зависимости от скалярной монотонной функции $\theta(\mathbf{q})$, которая в свою очередь зависит от обобщенных координат \mathbf{q} и параметров α . Отметим, что виртуальные голономные связи не являются неотъемлемой частью динамики системы, а представляют собой соотношения между степенями свободы, налагаемые внешним регулятором и параметризованные скалярным генератором движения (пространственной фазовой переменной) θ .

Выбор генератора движения и виртуальных связей

Генератор движения $\theta(t)$ должен представлять собой монотонную функцию на требуемой траектории, чтобы его обратная величина была однозначно определена. В нашем случае это абсолютный угол линии, соединяющей конец опорной ноги с бедром (рис. 1). В качестве функции $\mathbf{h}_d(\theta(\mathbf{q}), \alpha)$ использовались полиномы Безье:

$$\mathbf{h}_d(\theta, \alpha) = \sum_{k=0}^m \alpha_k \frac{M!}{k!(M-k)!} s^k (1-s)^{M-k}, \quad s = \frac{\theta - \theta^+}{\theta^- - \theta^+}, \quad (27)$$

выбор которых обоснован их полезными функциями, такими как

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_d(\theta^+) &= \alpha_0, & \frac{d}{dt} \mathbf{h}_d(\theta^+) &= \frac{M}{\theta^- - \theta^+} (\alpha_1 - \alpha_0) \dot{\theta}^+, \\ \mathbf{h}_d(\theta^-) &= \alpha_M, & \frac{d}{dt} \mathbf{h}_d(\theta^-) &= \frac{M}{\theta^- - \theta^+} (\alpha_M - \alpha_{M-1}) \dot{\theta}^-. \end{aligned}$$

Однако полиномы Безье не единственный кандидат на роль виртуальных связей. В литературе также использовались обыкновенные полиномы [Aoustin, Formal'sky, 2003; Формальский, 1982], тригонометрические полиномы [Paramonov et al., 2015; Shiriaev, Freidovich, 2009] и канонические функции ходьбы [Ames, 2014].

Выбор целевой функции

В литературе было предложено много целевых функций для нахождения оптимальных походок [Römer et al., 2015]. Одним из наиболее часто используемых критериев, который применяется и в нашей работе, является минимизация механических энергетических затрат на транспортировку, приведенных на вес робота. Данный критерий записывается в виде безразмерной величины:

$$W_{COT} = \frac{1}{gm_T L_{step}} \int_0^T \left(\sum_{i=1}^4 |u_i(t) \dot{q}_i(t)| \right) dt, \quad (28)$$

где m_T — масса всего робота, L_{step} — длина шага, u_i , q_i — крутящие моменты и скорости в управляемых шарнирах.

Ограничения на траектории движения

Ограничения на траектории могут быть разделены на две категории: нелинейные ограничения в виде неравенств, $c(\mathbf{x})$, и нелинейные ограничения в виде равенств, $g(\mathbf{x})$. Неравенства,

$\mathbf{c}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}$, должны выполняться вдоль всей траектории. К ним относятся следующие ограничения:

- сила реакции на опорную ногу:

$$\mathbf{c}_1(\mathbf{x}) = -\mathbf{F}_1^N, \quad \mathbf{c}_2(\mathbf{x}) = |\mathbf{F}_1^T| - \mu_s \cdot \mathbf{F}_1^N; \quad (29)$$

- минимальная высота туловища, выраженная с помощью ограничений на угол наклона туловища:

$$\mathbf{c}_3(\mathbf{x}) = |\mathbf{q}_5| - \frac{\pi}{4}; \quad (30)$$

- ограничения на распрямление и сгибание коленей:

$$\mathbf{c}_4(\mathbf{x}) = \mathbf{q}_3, \quad \mathbf{c}_5(\mathbf{x}) = -\mathbf{q}_3 - \frac{\pi}{2}, \quad (31)$$

$$\mathbf{c}_6(\mathbf{x}) = \mathbf{q}_4, \quad \mathbf{c}_7(\mathbf{x}) = -\mathbf{q}_4 - \frac{\pi}{2}; \quad (32)$$

- силы в точке контакта переносимой ноги с поверхностью ходьбы:

$$\mathbf{c}_8(\mathbf{x}) = -\delta \mathbf{F}^N, \quad \mathbf{c}_9(\mathbf{x}) = |\delta \mathbf{F}^T| - \mu_s \delta \mathbf{F}^N; \quad (33)$$

- положительность скорости переносимой ноги после удара:

$$\mathbf{c}_{10}(\mathbf{x}) = -J_e(\mathbf{q}^-) \dot{\mathbf{q}}_e^+; \quad (34)$$

- устойчивость точки равновесия отображения Пуанкаре:

$$\mathbf{c}_{11}(\mathbf{x}) = \delta_{zero}^2 - 1, \quad \mathbf{c}_{12}(\mathbf{x}) = -\delta_{zero}^2; \quad (35)$$

- минимальная высота подъема переносимой ноги, заданная с помощью виртуального барьера высотой $p_{2,min}^v$:

$$\mathbf{c}_{13}(\mathbf{x}) = -p_2^v(\theta_c) + p_{2,min}^v, \quad \{\theta_c: p_2^h(\theta_c) = 0\}; \quad (36)$$

- максимальный крутящий момент в шарнирах:

$$\mathbf{c}_{14:17}(\mathbf{x}) = |u_i(x)| - u_{i,max}, \quad 1 \leq i \leq 4; \quad (37)$$

- максимальная скорость вращения шарниров:

$$\mathbf{c}_{18:21}(\mathbf{x}) = |\dot{q}_i(x)| - \dot{q}_{i,max}, \quad 1 \leq i \leq 4. \quad (38)$$

К ограничениям в виде равенств, $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, относятся:

- средняя скорость движения:

$$\mathbf{g}_1(\mathbf{x}) = \bar{v} - \frac{p_2^h(\mathbf{q}^+)}{T}; \quad (39)$$

- равенство нулю вертикальной координаты переносимой ноги в начале и в конце движения:

$$\mathbf{g}_2(\mathbf{x}) = p_2^v(\mathbf{q}^-), \quad \mathbf{g}_3(\mathbf{x}) = p_2^v(\mathbf{q}^+); \quad (40)$$

- непрерывность крутящих моментов:

$$\mathbf{g}_{4:7}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\theta^+) - \mathcal{R}\mathbf{u}(\theta^-). \quad (41)$$

Результаты

В качестве моделируемого робота был выбран пятизвенный робот Rabbit [Chevallereau et al., 2003]. В таблице 1 представлены параметры робота, а также параметры алгоритма поиска походок. Вектор оптимизационных параметров состоит из двух частей: параметра ξ , определяющего диапазон изменений θ в виде $\theta^+ = \pi + \xi$, $\theta^- = \pi - \xi$, где θ^- , θ^+ — значения генератора движения в начале и в конце шага (до и после удара) соответственно, и параметров полиномов Безье α .

Инициализация

Начальные приближения решения задачи оптимизации выбирались по следующему принципу.

1. В заданном диапазоне случайным образом выбираются параметры, которые определяют начальное и конечное состояние робота на одном шаге. К ним относятся длина шага L_{step} , высота бедра y_{hip} , горизонтальная координата положения бедра x_{hip} и угол наклона туловища σ_{lean} .
2. На основе L_{step} , y_{hip} , x_{hip} и σ_{lean} решается обратная задача кинематики в начале (q^+) и в конце (q^-) шага.
3. Производится интерполяция координат между q^+ и q^- с количеством интерполяционных точек равным $(m + 1)$, где m — степень полинома Безье. Затем составляется система линейных уравнений в виде $A\alpha = b$, где матрица A и вектор b получены путем вычислений полиномов Безье в интерполяционных точках. Начальный вектор α находится из решения системы линейных уравнений.
4. Начальное значение ξ вычисляется с использованием равенства $\theta^+ = c \cdot q^+$ или $\theta^- = c \cdot q^-$.

Таблица 1. Параметры модели и алгоритма поиска

Параметры	Значения	Ед. измерения
L_t	длина голени	0.4 м
L_f	длина бедра	0.4 м
L_T	длина туловища	0.63 м
l_t	положение центра масс бедра	0.24 м
l_f	положение центра масс голени	0.11 м
l_T	положение центра масс туловища	0.24 м
m_t	масса голени	3.2 кг
m_f	масса голени	6.8 кг
m_T	масса голени	12 кг
I_t	момент инерции голени	0.2 кг·м ²
I_f	момент инерции голени	0.47 кг·м ²
I_T	момент инерции голени	1.33 кг·м ²
u_{max}	максимальный момент сил	100 Н·м
\dot{q}_{max}	максимальная угловая скорость	π рад/с
$p_{2,\text{min}}^v$	высота виртуального барьера	0.05 м
ξ	диапазон θ	$0.001 - \pi/3$ рад
μ_s	коэффициент трения	0.6
N	количество узлов в сетке	100

Для решения оптимизационной задачи была использована стандартная функция нелинейной оптимизации с ограничениями в среде MATLAB — *fmincon* с алгоритмом внутренней точки. Везде, где это не указано в явном виде, использовались параметры алгоритма по умолчанию для версии MATLAB 2019b. Ввиду невыпуклого характера поставленной задачи оптимизации существует множество локальных минимумов, и задача поиска глобального минимума решалась в два этапа. На первом этапе решалась упрощенная задача, в которой целевая функция выбиралась равной нулю и искалось допустимое с точки зрения ограничений решение. Упрощенная задача запускалась с 1000 инициализированных начальных точек. Далее найденные допустимые решения использовались в качестве исходных приближений для поиска минимума оптимизационной задачи с целевой функцией. Наконец, среди всех найденных локальных минимумов выбирался тот, у которого целевая функция была минимальной.

Влияние степени полинома на целевую функцию

Согласно теореме Вейерштрасса, для непрерывной функции f , определенной на отрезке $[a, b]$, и для любого $\epsilon > 0$ существует такой многочлен p с вещественными коэффициентами, что для всех x из $[a, b]$ одновременно выполняется условие $|f(x) - p(x)| < \epsilon$. Следовательно, полиномы более высокого порядка должны точнее приближать идеальную походку с минимальной целевой функцией. Однако в наших расчетах увеличение степени полиномов Безье не привели к уменьшению целевой функции (рис. 2). Сначала мы отнесли такое поведение к недостаточному количеству начальных данных, с которых запускается оптимизация, и для полинома степени 9, мы запустили оптимизацию с 5000 разных начальных точек. На расчеты потребовалось порядка 18 часов при запуске на 40 параллельных процессорах. К сожалению, даже в таком случае нам не удалось найти походку с целевой функцией меньше, чем для походки, описываемой полиномом 5-й степени. Мы считаем, что это связано с сильной невыпуклостью решаемой задачи.

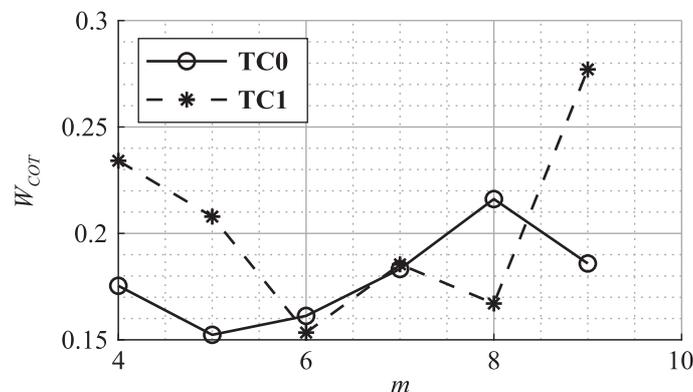


Рис. 2. Зависимость энергоэффективности движения ДШР, W_{COT} , от степени полиномов Безье, m , задающих виртуальные связи. TC0 означает отсутствие ограничения на непрерывность управляющих воздействий, TC1 — наличие ограничения на непрерывность управляющих воздействий

Непрерывность крутящих моментов

Насколько нам известно, в литературе, посвященной управлению двуногими роботами методом ГНД, не рассматривалась непрерывность управляющих воздействий в виде крутящих моментов в шарнирах. Мы считаем, что для реализации походок на реальном роботе необходимо обеспечить непрерывность крутящих моментов, так как двигатели не способны обеспечить мгновенное изменение моментов во время удара переносимой ноги об опорную поверхность.

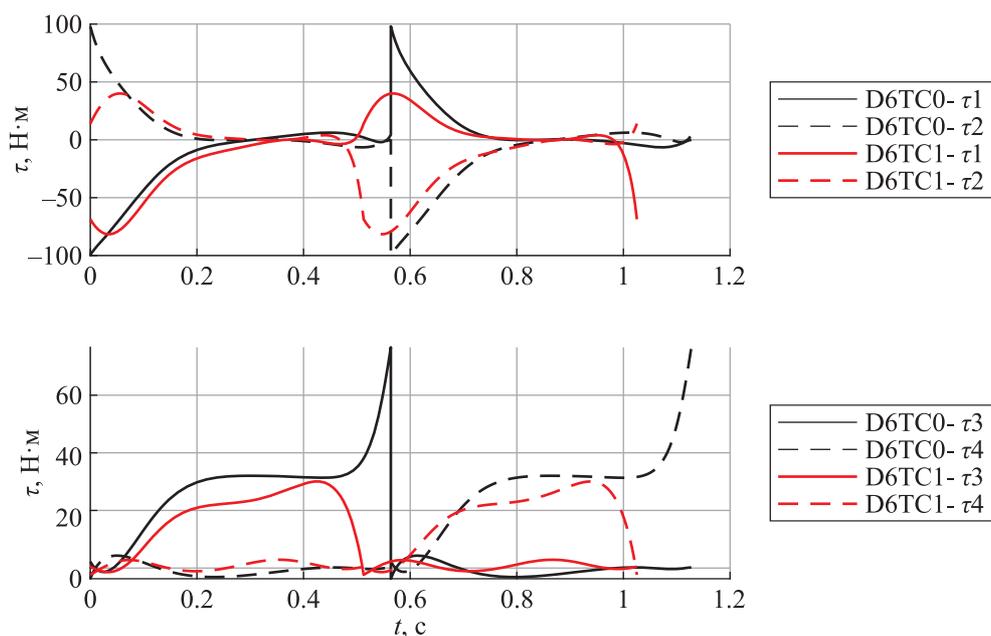


Рис. 3. Зависимость крутящих моментов в шарнирах робота от времени в случае, когда виртуальные связи задаются полиномом Безье 6-й степени. TC0 означает отсутствие ограничения на непрерывность управляющих воздействий, TC1 — наличие ограничения на непрерывность управляющих воздействий

Крутящие моменты для походки, заданной полиномом Безье со степенью 6, как с ограничениями на непрерывность моментов на шарнирах, так и без, приведены на рис. 3. Для экономии места мы не стали приводить графики моментов для остальных степеней (4, 5, 7, 8, 9). Чтобы продемонстрировать наличие или отсутствие разрывов в моментах, на рисунке показано два шага. Из приведенного рисунка видно, что при отсутствии ограничений на непрерывность мгновенное изменение моментов могут достигать $70 \text{ Н} \cdot \text{м}$. Подобные графики были приведены в [Westervelt et al., 2007]. Нам неизвестно, каким образом авторам удавалось обеспечить мгновенное изменение крутящих моментов во время экспериментов, учитывая, что они использовали двигатели с редукторами.

Одним из ожидаемых недостатков введения ограничений на непрерывность моментов является ожидаемое увеличение целевой функции, то есть энергетических затрат на транспортировку, так как задача оптимизации становится более ограниченной. Однако результаты оптимизации показали, что для некоторых степеней полиномов полученные значения W_{COT} без ограничений на непрерывность управляющих воздействий были даже больше, чем в случае с ограничениями на непрерывность моментов. Данный факт противоречит постановке задачи, так как минимум целевой функции с ограничением также является минимумом целевой функции без ограничения. На наш взгляд, здесь снова играет роль сильная невыпуклость задачи оптимизации, что приводит к таким странным на первый взгляд результатам.

Расчетное время

Особенностью задачи поиска глобального минимума для невыпуклой и существенно нелинейной задачи большой размерности, как рассматриваемая в данной работе задача, является существенное расчетное время. В таблице 2 приведена информация о количестве найденных локальных минимумов и о среднем времени расчета. Стоит отметить, что описанный выше метод инициализации начальных точек, использующий решение системы линейных уравнений, позволяет существенно сократить время поиска множества допустимых решений. Для сравнения

Таблица 2. Влияние степени полинома Безье на время расчета и количество допустимых и оптимальных решений

m	Количество найденных допустимых точек	Среднее время нахождения допустимой точки (с)	Количество найденных локальных минимумов	Среднее время нахождения локального минимума (с)
4	979	14.4	186	37.4
5	975	4.2	105	82.8
6	931	3.0	90	105.8
7	968	4.6	37	320.4
8	961	6.7	56	217.9
9	913	7.2	63	203.2

нами был проведен поиск допустимых решений в случае, когда вектор начального приближения задавался случайным образом. Это привело к увеличению среднего времени поиска допустимых решений примерно в 500 раз. Таким образом, если ограничиться только задачей поиска виртуальных связей для заданной скорости движения, независимо от энергетических затрат на транспортировку, то предложенный способ позволяет находить решения во время движения робота (онлайн). Похожий результат был продемонстрирован авторами в работе [Hereid et al., 2016], где также стояла задача обеспечения лишь заданной скорости походки.

Анализ результатов, приведенных в таблице 2, показывает, что с увеличением степени полиномов Безье среднее количество найденных допустимых точек меняется незначительно, среднее время нахождения сначала уменьшается, а затем возрастает. На наш взгляд, большое время расчета для степени $m = 4$ связано с малым количеством независимых оптимизационных переменных, что усложняет задачу поиска. Увеличение среднего времени расчета, начиная с $m = 7$, связано с увеличением размерности задачи и, следовательно, увеличением времени вычисления целевой функции и вектора ограничений.

При поиске оптимальных решений, начальным приближением которых служат допустимые точки, прослеживается иная зависимость между средним временем нахождения решения и степенью полинома. Сначала с увеличением m увеличивается время расчета, что свидетельствует о том, что задача оптимизации становится все сложнее и сложнее. Это отражается на количестве найденных локальных минимумов, которые уменьшаются с возрастанием m . Начиная с $m = 8$ среднее время расчета уменьшается, а количество найденных локальных минимумов растет. В целом немонотонность полученных результатов при увеличении степени полинома, на наш взгляд, обуславливается сильной невыпуклостью поставленной задачи, и при увеличении количества начальных приближений (мы используем 1000 точек) монотонность должна проявляться ярче.

На рис. 4 приведены гистограммы распределения значений целевых функций в допустимых точках до (931 точка) и после (90 точек) поиска локальных минимумов для $m = 6$. Анализ гистограмм показывает, что поиск локальных минимумов позволяет в среднем снизить целевую функцию примерно в два раза, с 1 до 0.5.

Заключение

В данной работе проведен анализ влияния степени полиномов Безье, аппроксимирующих виртуальные связи в методе ГНД, на энергоэффективность движения пятизвенного плоского ДШР. Для этого был проведен поиск наиболее оптимальных траекторий для степени полиномов с $m = 4 \dots 9$. Показано, что увеличение m не гарантирует уменьшение энергоэффективности. Это

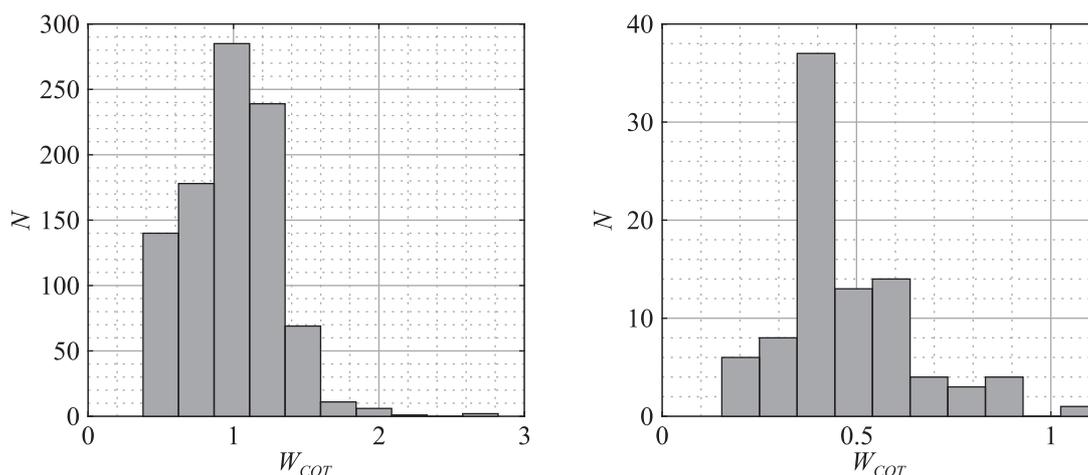


Рис. 4. Гистограмма распределения значений целевых функций энергозатрат в допустимых точках (слева) и после поиска локальных минимумов (справа) в случае, когда виртуальные связи задаются полиномом Безье 6-й степени

может быть непосредственно связано с характером целевой функции полученной оптимизационной задачи, которая является невыпуклой и может иметь сложную геометрию. Современные алгоритмы невыпуклой оптимизации зачастую не позволяют эффективно находить глобальный минимум для такого рода функций и не гарантируют сходимость (или скорость сходимости) итеративных оптимизационных схем, что могло стать причиной результатов, полученных в приведенном здесь исследовании. Установлено, что для практического применения достаточно рассматривать полиномы со степенями 5 или 6.

Более того, продемонстрировано, что введение ограничений на непрерывность управляющих воздействий при поиске оптимальных траекторий не приводит к однозначному увеличению энергозатрат движения, что опять же связано с невыпуклостью рассматриваемой задачи. Учет этого ограничения важен при использовании предложенного метода для поиска траекторий реального робота, в связи с тем, что реализация быстро изменяющихся крутящих моментов двигателей не всегда возможна и ограничена их инерционными и другими характеристиками.

Было установлено, что для решения задачи поиска минимума целевой функции при наличии большого количества ограничений целесообразно на первом этапе найти допустимые точки в пространстве параметров без учета целевой функции в виде энергозатрат, а на втором этапе — осуществлять поиск локальных минимумов, стартуя с этих точек. Для первого этапа предложен алгоритм расчета начальных приближений, позволяющий ощутимо сократить время поиска траекторий. Более того, сравнение значений целевых функций найденных траекторий на первом и на втором этапах показывает, что в среднем энергоэффективность движения уменьшается в два раза. Следовательно, в тех случаях, когда энергоэффективность движения не является критичной, предложенный нами алгоритм позволяет регулировать характеристики походки робота (например, скорость) во время его движения.

Список литературы (References)

- Формальский А. М.* Перемещение антропоморфных механизмов. — М.: Наука, 1982. — 368 с.
Formalskiy A. M. Peremeschenie antropomorfnykh mekhanizmov. — Moscow: Nauka, 1982. — 368 p. (in Russian).
Ames A. D. Human-inspired control of bipedal walking robots // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2014. — Vol. 59, No. 5. — P. 1115–1130.

- Aoustin Y., Formal'sky A. M.* Control design for a biped: Reference trajectory based on driven angles as functions of the undriven angle // *Journal of Computer and Systems Sciences International*. — 2003. — Vol. 42, No. 4. — P. 645–662.
- Chevallereau C. et al.* RABBIT: a testbed for advanced control theory // *IEEE Control Systems Magazine*. — 2003. — Vol. 23, No. 5. — P. 57–79.
- Dehghani R., Fattah A., Abedi E.* Cyclic gait planning and control of a five-link biped robot with four actuators during single support and double support phases // *Multibody System Dynamics*. — 2015. — Vol. 33, No. 4. — P. 389–411.
- Goswami A., Vadakkepat P.* *Humanoid Robotics: A Reference*. — Dordrecht: Springer Netherlands, 2018.
- Hereid A., Kolathaya S., Ames A. D.* Online optimal gait generation for bipedal walking robots using legendre pseudospectral optimization // *2016 IEEE 55th Conference on Decision and Control (CDC)*. — IEEE, 2016. — P. 6173–6179.
- Hurmuzlu Y., Marghitu D. B.* Rigid Body Collisions of Planar Kinematic Chains With Multiple Contact Points // *The International Journal of Robotics Research*. — 1994. — Vol. 13, No. 1. — P. 82–92.
- Isidori A.* Nonlinear Zero Dynamics // *Encyclopedia of Systems and Control* / ed. by John Baillieul, Tariq Samad. — London: Springer London, 2014. — P. 1–11.
- Moreno-Valenzuela J., Aguilar-Avelar C.* *Motion Control of Underactuated Mechanical Systems*. — Springer, 2018.
- McGeer T.* Passive Dynamic Walking // *The International Journal of Robotics Research*. — 1990. — Vol. 9, No. 2. — P. 62–82.
- Miossec S., Aoustin Y.* Walking Gait Composed of Single and Double Supports for a Planar Biped Without Feet // *Conference on Climbing and Walking Robots*. — Paris, France, 2002.
- Paramonov L., Torleif A., Sætre C., Shiriaev A.* Steps in model-based trajectory searching as a tool for biped design. — 2017. — URL: <https://pdfs.semanticscholar.org/82d3/3ae909189fb9072ee441f84086f70478d953.pdf> (accessed 12.01.2020).
- Pratt J. et al.* Capture point: A step toward humanoid push recovery // *2006 6th IEEE-RAS international conference on humanoid robots*. — IEEE, 2006. — P. 200–207.
- Römer U., Fidlin A., Seemann W.* Investigation of optimal bipedal walking gaits subject to different energy-based objective functions // *Pamm*. — 2015. — Vol. 15, No. 1. — P. 69–70.
- Scheint M., Sobotka M., Buss M.* Virtual holonomic constraint approach for planar bipedal walking robots extended to double support // *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*. — 2009. — P. 8180–8185.
- Sciavicco L., Siciliano B.* *Modelling and control of robot manipulators*. — Springer Science & Business Media, 2012.
- Shiriaev A., Perram J., Robertsson A., Sandberg A.* Explicit formulas for general integrals of motion for a class of mechanical systems subject to virtual constraints // *43rd IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. — 2004. — Dec. — Vol. 2. — P. 1158–1163.
- Shiriaev A. S., Freidovich L. B.* Transverse Linearization for Impulsive Mechanical Systems With One Passive Link // *IEEE Transactions on Automatic Control*. — 2009. — Dec. — Vol. 54, No. 12. — P. 2882–2888.
- Shiriaev A. S., Freidovich L. B., Gusev S. V.* Transverse Linearization for Controlled Mechanical Systems With Several Passive Degrees of Freedom // *IEEE Transactions on Automatic Control*. — 2010. — April. — Vol. 55, No. 4. — P. 893–906.

- Shiryaev A. S., Khusainov R. R., Mamedov Sh. N. et al.* On Leonov's Method for Computing the Linearization of Transverse Dynamics and Analyzing Zhukovsky Stability // Vestnik St. Petersburg University, Mathematics. — 2019. — Vol. 52, No. 4. — P. 334–341.
- Strogatz S. H.* Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering. — CRC press, 2018.
- Vukobratović M., Borovac B.* Zero-moment point — thirty five years of its life // International Journal of Humanoid Robotics. — 2004. — Vol. 01, No. 01. — P. 157–173.
- Westervelt E. R., Grizzle J. W., Koditschek D. E.* Hybrid zero dynamics of planar biped walkers // IEEE transactions on automatic control. — 2003. — Vol. 48, No. 1. — P. 42–56.
- Westervelt E., Chevallereau C., Choi J. H. et al.* Feedback control of dynamic bipedal robot locomotion. — CRC press, 2007.