(Ки&М)

МОДЕЛИ В ФИЗИКЕ И ТЕХНОЛОГИИ

УДК: 533.2, 51-72

# Численное исследование интенсивных ударных волн в запыленных средах с однородной и двухкомпонентной несущей фазой

## Д. А. Тукмаков

Институт механики и машиностроения — обособленное структурное подразделение Федерального государственного бюджетного учреждения науки «Федеральный исследовательский центр «Казанский научный центр Российской академии наук», Россия, 420111, г. Казань, ул. Лобачевского, д. 2/31

E-mail: tukmakovDA@imm.knc.ru

Получено 27.04.2019, после доработки — 25.09.2019. Принято к публикации 07.10.2019.

Статья посвящена численному исследованию ударно-волновых течений в неоднородных средах газовзвесях. В данной работе применяется двухскоростная двухтемпературная модель, в которой дисперсная компонента смеси имеет свою скорость и температуру. Для описания изменения концентрации дисперсной компоненты решается уравнение сохранения «средней плотности». В данном исследовании учитывались межфазное тепловое взаимодействие и межфазный обмен импульсом. Математическая модель позволяет описывать несущею фазу смеси как вязкую, сжимаемою и теплопроводную среду. Система уравнений решалась с помощью явного конечно-разностного метода Мак-Кормака второго порядка точности. Для получения монотонного численного решения к сеточной функции применялась схема нелинейной коррекции. В задаче ударно-волнового течения для составляющих скорости задавались однородные граничные условия Дирихле, для остальных искомых функций задавались граничные условия Неймана. В численных расчетах для того, чтобы выявить зависимость динамики всей смеси от свойств твердой компоненты, рассматривались различные параметры дисперсной фазы — объемное содержание, а также линейный размер дисперсных включений. Целью исследований было определить, каким образом свойства твердых включений влияют на параметры динамики несущей среды — газа. Исследовалось движение неоднородной среды в ударной трубе — канале, разделенном на две части; давление газа в одном из отсеков канала имело большее значение, чем в другом. В статье моделировались движение прямого скачка уплотнения из камеры высокого давления в камеру низкого давления, заполненную запыленной средой, последующее отражение ударной волны от твердой поверхности. Анализ численных расчетов показал, что уменьшение линейного размера частиц газовзвеси и увеличение физической плотности материала, из которого состоят частицы, приводят к формированию более интенсивной отраженной ударной волны с большей температурой и плотностью газа, а также меньшей скоростью движения отраженного возмущения и меньшей скоростью спутного потока газа в отраженной волне.

Ключевые слова: многофазные среды, гомогенные смеси, гетерогенные смеси, уравнение Навье-Стокса, ударные волны, газовзвеси, численное моделирование, межфазное взаимодействие

> © 2020 Дмитрий Алексеевич Тукмаков Статья доступна по лицензии Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Unported License. Чтобы получить текст лицензии, посетите веб-сайт http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/ или отправьте письмо в Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

MODELS IN PHYSICS AND TECHNOLOGY

UDC: 533.2, 51-72

## Numerical study of intense shock waves in dusty media with a homogeneous and two-component carrier phase

### **D. A. Tukmakov**

Institute of Mechanics and Engineering — Subdivision of the Federal State Budgetary Institution of Science "Kazan Scientific Center of the Russian Academy of Sciences" 2/31 Lobachevsky st., Kazan, 420111, Russia

E-mail: tukmakovDA@imm.knc.ru

Received 27.04.2019, after completion — 25.09.2019. Accepted for publication 07.10.2019.

The article is devoted to the numerical study of shock-wave flows in inhomogeneous media–gas mixtures. In this work, a two-speed two-temperature model is used, in which the dispersed component of the mixture has its own speed and temperature. To describe the change in the concentration of the dispersed component, the equation of conservation of "average density" is solved. This study took into account interphase thermal interaction and interphase pulse exchange. The mathematical model allows the carrier component of the mixture to be described as a viscous, compressible and heat-conducting medium. The system of equations was solved using the explicit Mac-Cormack second-order finite-difference method. To obtain a monotone numerical solution, a nonlinear correction scheme was applied to the grid function. In the problem of shock-wave flow, the Dirichlet boundary conditions were specified for the velocity components, and the Neumann boundary conditions were specified for the other unknown functions. In numerical calculations, in order to reveal the dependence of the dynamics of the entire mixture on the properties of the solid component, various parameters of the dispersed phase were considered - the volume content as well as the linear size of the dispersed inclusions. The goal of the research was to determine how the properties of solid inclusions affect the parameters of the dynamics of the carrier medium — gas. The motion of an inhomogeneous medium in a shock duct divided into two parts was studied, the gas pressure in one of the channel compartments is more important than in the other. The article simulated the movement of a direct shock wave from a high-pressure chamber to a low-pressure chamber filled with a dusty medium and the subsequent reflection of a shock wave from a solid surface. An analysis of numerical calculations showed that a decrease in the linear particle size of the gas suspension and an increase in the physical density of the material from which the particles are composed leads to the formation of a more intense reflected shock wave with a higher temperature and gas density, as well as a lower speed of movement of the reflected disturbance reflected wave.

Keywords: multiphase media, homogeneous mixtures, heterogeneous mixtures, Navier-Stokes equation, shock waves, gas suspension, numerical simulation, interfacial interaction

Citation: Computer Research and Modeling, 2020, vol. 12, no. 1, pp. 141–154 (Russian).

© 2020 Dmitriy A. Tukmakov This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Unported License. To view a copy of this license, visit http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/ or send a letter to Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

## 1. Введение

Многие явления и процессы, протекающие в природе и технике, связаны с движением сплошных сред, являющихся неоднородными по своим механическим и физико-химическим свойствам. В связи с этим одним из важных разделов современной механики жидкости и газа является динамика неоднородных сред. При этом экспериментальное исследование динамических процессов в неоднородных средах в ряде случаев затруднено. Следовательно, изучение динамики данных сред требуют создания математических моделей таких течений [Нигматулин, 1987; Кутушев, 2003]. Неоднородные среды могут быть смесью компонент, имеющих одинаковое агрегатное состояние, — гомогенными смесями [Баженова и др., 2007; Козлов и др., 2009; Рыжков, Степанова, 2011; Zabelinskii et al., 2011; Борисов и др., 2014; Губайдуллин, Тукмаков, 2014] или же объединением компонент с разными агрегатными состояниями — гетерогенными смесями [Гельфанд и др., 1985; Hishida et al., 2009; Дикалюк, Суржиков, 2012; Зинченко, Толмачёв, 2012; Вараксин и др., 2013; Глазинов и др., 2013; Zhang et al., 2015; Нигматулин и др., 2016; Садин, 2016; Арсланова и др., 2016; Zhuoqing, Jesse, 2019].

Следует отметить, что математическое моделирование смесей с различным фазовым составом компонент является наиболее сложной задачей в случае, когда требуется описание фазовых переходов [Кутушев, 2003; Садин, 2016].

Особенностью динамики многокомпонентных смесей является необходимость учитывать эффекты, связанные с межкомпонентным взаимодействием. Учет взаимодействия компонент смеси тем более важен, если различные компоненты имеют сопоставимые массовые доли. В таких смесях наблюдаются эффекты, отличные от эффектов, выявленных в классической аэро- и гидромеханике, так как динамика таких смесей во многом определяется взаимодействием компонент смеси. Примером таких смесей могут быть газовзвеси — взвеси твердых или жидких дисперсных включений в газе. Среды, состоящие из взвешенных в газе твердых частиц, называются запыленными средами. В настоящее время в работах, посвященных теоретическому исследованию динамики многофазных сред, основной целью является разработка математических моделей течений гетерогенных смесей, как можно более полно учитывающих взаимодействие компонент смеси [Вараксин и др., 2013].

В литературе имеется несколько подходов к моделированию динамики неоднородных сред. В зависимости от параметров неоднородной среды это могут быть равновесный и неравновесный подходы. Равновесный подход предполагает исследование смеси как квазиоднородной, то есть введение параметров, учитывающих неоднородность среды, и описание динамики такой системы как однородной жидкости или газа [Нигматулин, 1987]. Также имеется «континуальный» — неравновесный подход, в котором описание движения каждой компоненты смеси требует решения полной системы уравнений динамики сплошной среды, включающей в себя уравнения сохранения массы, импульса и энергии [Нигматулин, 1987; Кутушев, 2003]. Подобный подход более предпочтителен для описания течений газовзвесей, имеющих большое объемное содержание дисперсной компоненты.

Интерес к математическому моделированию динамики газовзвесей вызван задачами, связанными с промышленными технологиями, оптимизацией установок транспорта дисперсных сред, оптимизацией технологий экранирования промышленных взрывов запыленными средами. А также исследованием ударно-волновых течений многофазных сред в реактивных двигателях детонационного типа, оптимизацией сверхзвукового напыления порошковых покрытий в электрическом поле и моделированием неравновесных процессов, протекающих в запыленной плазме.

В то же время практический интерес к исследованию динамики гомогенных смесей связан с необходимостью моделировать процессы химических технологий и оптимизировать конструкции энергетических установок. В частности, исследование распространения ударной волны из водорода в воздух вызвано рядом задач, связанных с развитием водородной энергетики. Математическая модель, применяемая в данной работе, позволяет учесть скоростную и тепловую неравновесность исследуемых процессов, межфазное силовое взаимодействие и межфазный теплообмен. Несущая среда гетерогенной смеси описывается как вязкий сжимаемый и теплопроводный газ. Помимо этого, модель позволяет описывать течения запыленной среды, несущая компонента которой представлена смесью двух различных газов, разделенных в начальный момент времени.

В данной статье изучается движение запыленной среды в ударной трубе — канале, разделенном на две части. В одной части канала находился газ, имеющий высокое давление, в другой части канала — газ, имеющий существенно меньшее давление и содержащий в себе взвешенные твердые частицы.

Как известно из классической газовой динамики, столкновение скачка уплотнения газа с твердой поверхностью приводит к формированию отраженного возмущения. В работе математическая модель динамики газовзвеси, учитывающая взаимообратное влияние компонент на общую динамику гетерогенной смеси, применяется для исследования влияния свойств частиц дисперсной компоненты на параметры отраженной от твердой поверхности ударной волны, в запыленной среде, имеющей существенное объемное содержание дисперсной фазы.

#### 2. Математическая модель

Система уравнений математической модели гетерогенной смеси включает в себя уравнения движения несущей среды и дисперсной фазы. Одним из наиболее важных параметров дисперсной компоненты неоднородной смеси являлась «средняя плотность», представляющая собой произведение объемного содержания дисперсной компоненты на физическую плотность материала дисперсной фазы [Нигматулин, 1987]. Физическая плотность материала дисперсных включений в процессе течения многофазной среды не изменяется. При этом объемное содержание является функцией временной и пространственной переменных.

В работе используется модель движения двухскоростной двухтемпературной монодисперсной газовзвеси с несущей средой — двухкомпонентной смесью. Система уравнений движения двухкомпонентной смеси вязких теплопроводных газов имеет вид [Нигматулин, 1987]

$$\frac{\partial \rho_{a}}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_{a}u)}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial \rho_{b}}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_{b}u)}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^{2} + p - \tau) = \alpha \frac{\partial p}{\partial x} - F,$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( [e + p - \tau] u - \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) = Q - |F| (u - u_{1}) + \alpha \frac{\partial (up)}{\partial x},$$

$$p = \rho_{a} R_{a} T + \rho_{b} R_{b} T, \quad e = \rho_{a} c_{va} T + \rho_{b} c_{vb} T + \rho (u^{2}) / 2,$$

$$\mu = \frac{\rho_{a}}{\rho} \mu_{a} + \frac{\rho_{b}}{\rho} \mu_{b}, \quad \lambda = \frac{\rho_{a}}{\rho} \lambda_{a} + \frac{\rho_{b}}{\rho} \lambda_{b}, \quad \rho = \rho_{a} + \rho_{b}, \quad \tau = \frac{4}{3} \mu \frac{\partial u}{\partial x}.$$
(1)

Здесь  $\rho$ , u, T,  $\alpha$  — плотность; x и y — составляющие скорости газовой смеси, температура газовой смеси и объемное содержание дисперсной фазы. Для несущей фазы вводятся индексы a для газа в камере высокого давления ударной трубы (КВД) и b для газа в камере низкого давления ударной трубы (КВД). k,  $c_v$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$  — газовые постоянные, удельные массовые теплоемкости при постоянном объеме, коэффициенты теплопроводности и вязкости газов; p, e — давление и удельная полная энергия несущей фазы. Величины F, Q определяются законами межфазного трения и теплообмена.

Движение дисперсной фазы описывается следующей системой уравнений [Кутушев 2003]:

$$\frac{\partial \rho_{1}}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_{1}u_{1})}{\partial x} = 0, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial (\rho_{1}u_{1})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_{1}u_{1}^{2}) = F - \alpha \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{\partial e_{1}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (e_{1}u_{1}) = \operatorname{Nu}_{1} \frac{6\alpha}{(2r)^{2}} \lambda (T - T_{1}),$$

$$\rho_{1} = \alpha \rho_{10}, \quad e_{1} = \rho_{1}c_{1}T_{1}.$$

Нижний индекс 1 относится к параметрам дисперсной фазы. Здесь  $\rho_1$ ,  $\rho_{10}$  — средняя и истинная (физическая) плотности дисперсной фазы,  $e_1$  — удельная внутренняя энергия дисперсной фазы. Сила межфазного взаимодействия включает в себя силу аэродинамического сопротивления, силу Архимеда и силу присоединенных масс [Кутушев, 2003]:

$$F_{x} = \frac{3}{4} \frac{\alpha}{(2r)} C_{d} \rho \sqrt{(u-u_{1})^{2}} (u-u_{1}) + \alpha \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x}\right) + 0.5 \alpha \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u_{1}}{\partial t} - u_{1} \frac{\partial u_{1}}{\partial x}\right),$$

$$C_{d} = C_{d}^{0} \psi (M_{1}) \varphi (\alpha), \quad C_{d}^{0} = \frac{24}{\text{Re}_{1}} + \frac{4}{\text{Re}_{1}^{0.5}} + 0.4, \quad \psi (M_{1}) = 1 + \exp \left(-\frac{0.427}{M_{1}^{0.63}}\right),$$

$$\varphi (\alpha) = (1-\alpha)^{-2.5}, \quad \text{Re}_{1} = r |u-u_{1}| 2r / m, \quad M_{1} = |u-u_{1}| / c, \quad \text{Pr}_{1} = \gamma c_{2} \mu / \lambda,$$

$$\text{Nu}_{1} = 2 \exp(-M_{1}) + 0.459 \,\text{Re}_{1}^{0.55} \,\text{Pr}_{1}^{0.33}, \quad 0 \le M_{1} \le 2, \quad 0 \le \text{Re}_{1} < 2 \cdot 10^{5},$$

где температура несущей среды равна  $T = (e - 0.5 \rho u^2) / (\rho_a R_a + \rho_b R_b).$ 

В уравнение энергии для несущей фазы входит тепловой поток за счет теплообмена между газом и частицей:  $Q = 6\alpha \operatorname{Nu}_1 \lambda (T - T_1)/(2r)^2$ , где  $\operatorname{Nu}_1 = 2r\alpha^T/\lambda$  — число Нуссельта, n — концентрация частиц, r — радиус частиц,  $\alpha^T$  — коэффициент теплообмена. В качестве дисперсной фазы использовался кварцевый песок с истинной (физической) плотностью  $\rho_2^0 = 2500 \text{ кг/m}^3$ .

Система уравнений (1)-(2) может быть записана в матричном виде:

$$\boldsymbol{q}_t + \boldsymbol{E}_x = \boldsymbol{H},\tag{3}$$

$$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} \rho_a \\ \rho_b \\ \rho_u \\ \rho_u \\ e \\ \rho_1 \\ \rho_1 u_1 \\ e_1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} \rho_a u \\ \rho_b u \\ \rho_b u \\ \rho_u^2 + p - \tau \\ (e + p - \tau)u + \lambda \partial T / \partial x \\ \rho_1 u_1 \\ \rho_1 u_1^2 \\ e_1 u_1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -F + \alpha \partial p / \partial x \\ -Q - |F|(u - u_1) + \alpha \partial (pu) / \partial x \\ 0 \\ F - \alpha \partial p / \partial x \\ Q \end{bmatrix}.$$

Алгоритм явной схемы Мак-Кормака [Fletcher, 1988] для системы уравнений (3) включает в себя последовательно выполняемые шаги — предиктор (4) и корректор (5):

$$\mathbf{q}_{j}^{*} = \mathbf{q}_{j}^{n} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \mathbf{E}_{j+1}^{n} - \mathbf{E}_{j}^{n} \right) + \Delta t \mathbf{H}_{j}^{n}, \tag{4}$$

$$\mathbf{q}_{j}^{n+1} = 0.5(\mathbf{q}_{j}^{n} + \mathbf{q}_{j}^{n}) - 0.5\frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\mathbf{E}_{j}^{n} - \mathbf{E}_{j}^{n}\right) + 0.5\Delta t \mathbf{H}_{j}^{n}.$$
(5)

\_2020, T. 12, № 1, C. 141–154 \_\_\_\_\_

На границах расчетной области задавались граничные условия Дирихле для составляющих скорости несущей и дисперсной фазы и граничные условия Неймана для остальных функций:

$$u(1)=0, \ u_1(1)=0, \ u(N)=0, \ u_1(N)=0,$$
  

$$\rho_a(1)=\rho_a(2), \ \rho_b(1)=\rho_b(2), \ \rho_1(1)=\rho_1(2), \ e(1)=e(2), \ e_1(1)=e_1(2),$$
  

$$\rho_a(N)=\rho_a(N-1), \ \rho_b(N)=\rho_b(N-1), \ \rho_1(N)=\rho_1(N-1), \ e(N)=e(N-1), \ e_1(N)=e_1(N-1).$$

Расчеты проводились на равномерной сетке с количеством узлов N = 1000. Шаг по времени вычислялся из условия Куранта [Fletcher, 1988].

Программный код, реализующий численный алгоритм, был тестирован на задачах динамики идеального газа, имеющих аналитическое решение, и на физическом эксперименте по колебательным процессам в акустическом резонаторе, заполненном чистым газом [Губайдуллин, Тукмаков, 2012].

Монотонность решения достигалась с помощью применения схемы коррекции [Музафаров, Утюжников, 1993]. Алгоритм коррекции выполнялся последовательно вдоль всех узлов каждого семейства координатных линий для каждой координаты Z вектора  $\boldsymbol{q} = (\rho_a, \rho_b, u, e, \rho_1, u_1, e_1)^{\mathrm{T}}$ .

В случае если выполняются условия  $(\delta Z_{j-l/2} \cdot \delta Z_{j+l/2}) < 0$  или  $(\delta Z_{j+l/2} \cdot \delta Z_{j+3/2}) < 0$ , то к функции *Z* в *j*-м узле применяется алгоритм схемы коррекции:

$$\tilde{Z}_{j} = Z_{j} + \kappa \Big(\delta Z_{j+1/2} - \delta Z_{j-1/2}\Big).$$

Нижний индекс обозначает номер узла сетки. Здесь использованы следующие обозначения:

$$\delta Z_{j-1/2} = Z_j - Z_{j-1}, \quad \delta Z_{j+1/2} = Z_{j+1} - Z_j, \quad \delta Z_{j+3/2} = Z_{j+2} - Z_{j+1},$$

 $\tilde{Z}_{j}$  — значение функции после осуществления вычислений по схеме Мак-Кормака,  $\kappa$  — коэффициент коррекции.

Сопоставление результатов численных расчетов ударно-волновой динамики запыленных сред, проведенных с помощью численного решения методом Мак-Кормака систем уравнений модели двухскоростной двухтемпературной газовзвеси [Нигматулин и др., 2016], с результатами физического эксперимента [Гельфанд и др., 1985] показало, с одной стороны, удовлетворительное соответствие результатов численного моделирования и физических экспериментов. С другой стороны, показало качественное отличие динамических процессов в ударной трубе, заполненной гетерогенной смесью, от известных из литературы аналитических результатов [Лойцянский, 2003].

#### 3. Результаты расчетов

На рис. 1 представлено схематичное изображение ударной трубы, включающей в себя камеру высокого давления с давлением газа  $p_2$  (КВД) и камеру низкого давления с давлением газа  $p_1$  (КНД). В камере низкого давления расположена неоднородная среда — взвешенные в газе твердые частицы. Математическая модель предполагает возможность исследования процесса, в котором в камерах высокого и низкого давления расположены газы с различными удельными газовыми постоянными R и постоянными адиабаты  $\gamma$ . В расчетах предполагалось, что в области высокого давления давление газа составляет  $p_2 = 1078$  кПа, в то время как в камере низкого давления давление газа составляет  $p_1 = 98$  кПа.

На рис. 2 изображено распределение «средней плотности» дисперсной фазы в различные моменты времени при прохождении прямого скачка уплотнения из чистого газа в газовзвесь. Можно наблюдать, как в последовательные моменты времени происходит увеличение «средней плотности» дисперсной фазы в направлении движения ударной волны. Формирование областей с повышенной «средней плотностью» дисперсной фазы можно объяснить переносом частиц дисперсной фазы потоком газа [Кутушев, 2003].

| КВД                    | КНД                    |
|------------------------|------------------------|
| $p_2 R_2 T_2 \gamma_2$ | $p_1 R_1 T_1 \gamma_1$ |

Рис. 1. Схематичное изображение ударной трубы. Предполагается, что газы в левой и правой частях трубы имеют не только различные давления —  $p_1$  и  $p_2$ ; разные температуры  $T_1$  и  $T_2$ , но могут иметь различные удельные газовые постоянные —  $R_1$  и  $R_2$ ; а также постоянные адиабаты —  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ 



Рис. 2. Пространственное распределение «средней плотности» дисперсной фазы  $\rho_1$  (кг/м<sup>3</sup>) в различные моменты времени при распространении ударной волны из чистого газа в газовзвесь

Рассмотрим процессы движения прямого скачка уплотнения из чистого газа в запыленную среду в случае, когда камеры высокого и низкого давления заполнены только воздухом.

На рис. 3, а-е представлены результаты численных расчетов параметров газа при движении волны сжатия (прямого скачка уплотнения) по камере низкого давления, заполненной запыленными средами с диаметрами частиц d = 20 мкм и d = 2 мкм (кривые 2 и 3 соответственно), а также однородным газом (кривая 1). В процессе распада разрыва давления в газовзвеси и в однородном газе формируются волна сжатия, движущаяся от поверхности разрыва в область меньшего давления, и волна разряжения, распространяющаяся в противоположном направлении. Численное моделирование показывает, что скорость движения ударной волны в чистом газе выше (рис. 3, в). При этом скорость движения волн разряжения во всех трех случаях близка, так как дисперсная фаза находится в камере низкого давления (рис. 3,  $\delta$ ). Также из рис. 3, а следует, что уменьшение линейного размера дисперсных частиц приводит как к замедлению скорости движения ударной волны, так и к увеличению давления на переднем крае волны сжатия. Также следует отметить, что, в отличие от однородного газа, при движении ударной волны по запыленной среде наблюдаются большие температура (рис. 3, г) и плотность газа (рис. 3,  $\partial$ ) на переднем крае волны сжатия и уменьшается скорость спутного потока (рис. 3, e). С уменьшением дисперсности твердой фазы запыленной среды происходит рост плотности газа и температуры в волне сжатия. При этом уменьшается скорость спутного потока газа. Увеличение давления, плотности и температуры, уменьшение скорости спутного потока газа при движении прямого скачка уплотнения в газовзвесях можно объяснить переходом кинетической энергии несущей среды в потенциальную вследствие замедления движения прямого скачка уплотнения, вызванного межфазным взаимодействием. При этом в процессе движения ударной волны из камеры высокого давления в камеру низкого давления наибольшая «средняя плотность» дисперсной фазы наблюдается вблизи переднего края ударной волны (рис. 3, е). По этой причине в движущейся к противоположной стенке канала волне сжатия наблюдается повышение давления и температуры газа вблизи переднего края ударной волны (рис. 3, б, г, е).



Рис. 3. Пространственное распределение физических параметров газа и запыленных сред в движущейся ударной волне: давление — p, кПа, в волнах разряжения и сжатия: рис. 3, a, b; скорость газа — u, м/с: рис. 3, e; температура газа — T, К: рис. 3, e; плотность газа  $\rho$ , кг/м<sup>3</sup>: рис 3, d; «средняя плотность» дисперсной фазы —  $\rho_1$ , кг/м<sup>3</sup>: рис. 3, e. Момент времени t = 0.7 мс. Численное решение для однородного вязкого газа — кривая 1; численные решения для газовзвесей с дисперсностью частиц d = 20 мкм и d = 2 мкм соответственно — кривые 2, 3

На рис. 4, a-e изображены распределения параметров газа при отражении ударной волны от твердой поверхности в чистом газе и в монодисперсных газовзвесях с различной дисперсностью твердых частиц. Аналитическое решение [Овсянников, 2003] для отраженной ударной волны — кривая 1, численные решения для однородного газа, газовзвеси с дисперсностью частиц d = 20 мкм, газовзвеси с дисперсностью частиц d = 2 мкм — соответственно кривые 2, 3 и 4 (рис. 4, *a*). На рис. 4, 6-e показаны пространственные распределения физических параметров газа в отраженной ударной волне, полученные численным решением для однородного вязкого газа (кривая 1), и газовзвесей с дисперсностью частиц d = 20 мкм и d = 2 мкм (соответственно кривые 2, 3). Для отраженной ударной волны в запыленных средах наблюдаются закономерности, аналогичные закономерностям движения прямого скачка уплотнения по запыленной среде.

КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЕ

В таблице 1 приведены значения давления газа в отраженной волне для аналитического решения задачи динамики невязкого газа [Овсянников, 2003] и в численных решениях для различных сред. Выявленные особенности движения и отражения ударной волны в запыленных средах можно объяснить тем, что наличие дисперсной фазы приводит к замедлению течения газа, следствием чего является переход кинетической энергии несущей среды в потенциальную энергию, т. е. рост температуры и давления газа. Также замедление скорости движения газа в запыленной среде приводит к повышению плотности газа в отраженной ударной волне. В данной математической модели частицы имеют сферическую форму, то есть при одинаковом объемном содержании уменьшение линейного размера частиц приводит к уменьшению площади соприкосновения одиночной частицы с газом в квадратичной пропорции и к увеличению количества частиц в кубической пропорции. Таким образом, уменьшение размера частиц приводит к кратному увеличению площади соприкосновения несущей и дисперсной фазы и, следовательно, к интенсификации межфазного взаимодействия и замедлению скорости движения газа.

| Давление в отраженной ударной волне, полученное аналитически        | <i>p</i> = 1400 кПа |
|---|---------------------|
| Давление в отраженной ударной волне, полученное в численном решении | <i>p</i> = 1090 кПа |
| для вязкого газа  |                     |
| Давление в отраженной ударной волне, полученное для газовзвеси      | <i>p</i> = 1101 кПа |
| с диаметром частиц $d = 20$ мкм                                     |                     |
| Давление в отраженной ударной волне, полученное для газовзвеси      | <i>p</i> = 1104 кПа |
| с диаметром частиц $d = 2$ мкм                                      |                     |

Таблина 1



Рис. 4. Пространственное распределение физических параметров газа в отраженной ударной волне: давление — p, кПа: рис. 4, a; скорость газа — u, м/с: рис. 4,  $\delta$ ; температура газа — T, К: рис. 4, s; плотность газа —  $\rho$ , кг/м<sup>3</sup>: рис. 4, z. Момент времени t = 3 мс. Рис. 4, a: аналитическое решение [Овсянников, 2003] — кривая 1; численные решения для однородного газа, газовзвеси с дисперсностью частиц d = 20 мкм — соответственно кривые 2, 3 и 4. Рис. 4 ( $\delta$ -z) — кривая 1; численные решения для однородного газа, численные решения для сдисперсностью частиц d = 20 мкм — соответственно кривые 2, 3 и 4. Рис. 4 ( $\delta$ -z) — кривая 1; численные решения для однородного газа, численные решения для газовзвесей с дисперсностью частиц d = 20 мкм и d = 20 мкм — соответственно кривые 2, 3



Рис. 5. Пространственное распределение давления — p, кПа, в движущейся волне: рис. 5, a; отраженной волне: рис. 5,  $\delta$ ; в газовзвесях с объемным содержанием дисперсной фазы  $\alpha = 0.0005$  и  $\alpha = 0.001$  — кривые 2, 3 соответственно, в чистом газе — кривая 1. Моменты времени: t = 0.7 мс (рис. 5, a), t = 3 мс (рис. 5,  $\delta$ )

На рис. 5, *a*, *б* представлены численные решения для распространения ударной волны в камеру низкого давления (рис. 5, *a*) и для отражения ударной волны от стенки (рис. 5, *б*) при различных объемных содержаниях дисперсной фазы. Численное решение для однородного газа — кривая 1, численное решение для запыленной среды с объемным содержанием дисперсной фазы  $\alpha = 0.0005$  — кривая 2, численное решение для запыленной среды с объемным содержанием содержанием  $\alpha = 0.001$  — кривая 3. При уменьшении объемного содержания дисперсной фазы количественное отличие волн давления в процессах движения и отражения ударной волны в чистом газе и в запыленной среде уменьшается.

Рассмотрим процесс движения ударной волны из газа в запыленную среду для случая заполнения камер высокого и низкого давления различными газами. Предполагалось, что в КВД находится водород, давление которого составляет  $p_2 = 1078$  кПа, а камера низкого давления заполнена воздухом с давлением  $p_1 = 98$  кПа.

На рис. 6, *а*, *б* представлены распределения скорости и давления несущей среды при распространении ударной волны из камеры высокого давления, заполненной чистым газом (водородом), в камеру низкого давления, заполненную чистым (кривая 1) и запыленным (кривая 2) воздухом. Как и в случае с несущей средой (однородным газом), в процессе распада разрыва давления в смеси газов формируется волна сжатия, движущаяся в камеру низкого давления, и волна разряжения, распространяющаяся от поверхности разрыва давлений в камеру высокого давления.

Объемное содержание дисперсной фазы в запыленной среде составляло  $\alpha = 0.001$ , диаметр твердых частиц — d = 2 мкм. Сравнение расчетов показывает, что волна сжатия, движущаяся из водорода в запыленный воздух, имеет меньшую скорость и большую интенсивность давления на переднем крае (рис. 6, *a*). При этом в обоих случаях волны разряжения движутся с одинаковой скоростью. Наличие дисперсной компоненты в воздухе приводит к существенному уменьшению скорости спутного потока в гомогенной смеси (рис. 6, б). Различие давлений в отраженной ударной волне между гомогенной водородно-воздушной смесью газов с дисперсной примесью и без дисперсной примеси составляет  $\Delta p = 580$  кПа (рис. 7, *a*). При одинаковых массовых долях дисперсной фазы различие скоростей спутных потоков в отраженной ударной волне (рис. 7, б и рис. 4, б) для запыленной и «чистой» водородно-воздушных смесей существенно выше, чем отличие скоростей в однородной и запыленной средах с несущей газовой компонентой — однородным воздухом, имеющим существенно большую плотность, чем водород. В целом результаты расчетов показывают, что, как и для случая с несущей средой — однородным газом, усиление давления в отраженной ударной волне связано с переходом кинетической энергии газа в потенциальную вследствие замедления течения газа, вызванного межфазным взаимодействием несущей среды и дисперсной фазы.



Рис. 6. Движение ударной волны из КВД, заполненной водородом, в КНД, заполненную воздухом с дисперсными частицами. Пространственное распределение давления — *p*, кПа: рис. 6, *a*; пространственное распределение скорости — *u*, м/с: рис. 6, б. Момент времени *t* = 0.25 мс. Кривая 1 — гомогенная смесь без дисперсной фазы; кривая 2 — гомогенная смесь с дисперсной фазой



Рис. 7. Пространственное распределение давления (*p*, кПа, рис. 7, *a*), а также скорость несущей среды (*u*, м/с, рис. 7, *б*) в отраженной ударной волне при распространении ударной волны из КВД, заполненной водородом, в КНД, заполненную воздухом. Момент времени *t* = 1.6 мс. Кривая 1 — гомогенная смесь без дисперсной фазы; кривая 2 — гомогенная смесь с дисперсной фазой



Рис. 8. Пространственное распределение давления *p*, кПа, в отраженной ударной волне для различных сред. Кривая 1 — численное решение для отраженной ударной волны в воздухе, 2 — численное решение для отраженной ударной волны в газовзвеси, в случае несущей среды — воздуха, кривая 3 — численное решение для отраженной ударной волны при распространении ударной волны из водорода в воздух, кривая 4 — численное решение для отраженной ударной волны при распространении ударной волны из водорода в камеру низкого давления, содержащую запыленный воздух

На рис. 8 приведено сопоставление численных расчетов отраженных ударных волн в различных средах. В том числе кривая 1 — численное решение для отраженной ударной волны в воздухе, кривая 2 — численное решение для отраженной ударной волны в газовзвеси с воздушной несущей средой, кривая 3 — численное решение для отраженной ударной волны при распространении ударной волны из водорода в воздух, кривая 4 — численное решение для отраженной ударной волны при распространении ударной волны из водорода в камеру низкого давления, содержащую запыленный воздух. Численное моделирование показывает, что при одинаковой начальной интенсивности разрыва давлений при распространении ударной волны из водорода в воздух наличие взвешенных в воздухе частиц приводит к отраженной волне большей интенсивности, чем в случае, когда ударная волна распространяется из воздуха.

#### Заключение

В результате расчетов был выявлен ряд закономерностей влияния параметров дисперсной компоненты запыленной среды на динамику ударной волны в запыленной среде.

1. Наличие дисперсной фазы в камере низкого давления приводит к формированию ударной волны с большей интенсивностью давления на переднем крае и меньшей скоростью распространения.

2. Интенсивность давления на переднем крае ударной волны возрастает, а скорость движения волны сжатия замедляется с уменьшением дисперсности твердой фазы запыленной среды.

3. Интенсивность отраженной ударной волны в запыленной среде выше, чем в однородном газе. При этом уменьшение линейного размера частиц газовзвеси приводит к росту давления в отраженной ударной волне.

4. При уменьшении объемного содержания дисперсной фазы уменьшается количественное отличие процессов движения и отражения ударной волны в газовзвеси от аналогичных процессов в чистом газе.

### Список литературы (References)

*Тукмаков А. Л., Тонконог В. Г., Арсланова С. Н.* Волновая коагуляция полидисперсной газовзвеси в технологии газификации и криостатирования сжиженного природного газа // Акустический журнал. — 2016. — Т. 62, № 1. — С. 125–131.

*Tukmakov A. L., Tonkonog V. G., Arslanova S. N.* Wave coagulation of a polydisperse gas suspension in the technology of gasification and Cryostatting of liquefied natural gas // Acoustical Physics. — 2016. — Vol. 62, No. 1. — P. 125–131. (Original Russian paper: *Tukmakov A. L., Tonkonog V. G., Arslanova S. N.* Volnovaya koagulyaciya polidispersnoj gazovzvesi v tekhnologii gazifikacii i kriostatirovaniya szhizhennogo prirodnogo gaza // Akusticheskij zhurnal. — 2016. — Vol. 62, No. 1. — P. 125–131.)

Баженова Т. В., Брагин М. В., Голуб В. В., Иванов М. Ф. Ударно-волновой механизм самовоспламенения водорода при внезапном истечении из резервуара под высоким давлением // Теплофизика высоких температур. — 2007. — № 5. — С. 733–740.

*Bazhenova T. V., Bragin M. V., Golub V. V., Ivanov M. F.* The shock-wave mechanism of spontaneous ignition of hydrogen under conditions of sudden efflux from reservoir at high pressure // High Temperature. — 2007. — No. 5. — P. 665–672. (Original Russian paper: *Bazhenova T. V., Bragin M. V., Golub V. V., Ivanov M. F.* Udarno-volnovoj mekhanizm samovosplameneniya vodoroda pri vnezapnom istechenii iz rezervuara pod vysokim davleniem // Teplofizika vysokih temperature. — 2007. — No. 5. — P. 733–740.)

Борисов А. А., Трошин К. Я., Скачков Г. И., Колбановский Ю. А., Билера И. В. Влияние добавок водорода на самовоспламенение богатых кислородных метан-пропановых смесей // Химическая физика. — 2014. — № 12. — С. 45–48.

Borisov Â. A., Troshin K. Ya., Skachkov G. I., Kolbanovskij Yu. A., Bilera I. V. Vliyanie dobavok vodoroda na samovosplamenenie bogatyh kislorodnyh metan-propanovyh smesej [The effect of hydrogen additives on the self-ignition of oxygen-rich methane-propane mixtures] // Himicheskaya fizika [Chemical Physics]. — 2014. — No. 12. — P. 45–48 (in Russian).

- Вараксин Ю. А., Протасов М. В., Яценко В. П. Анализ механизмов осаждения твердых частиц на стенки каналов // Теплофизика высоких температур. 2013. № 5. С. 738–746. Varaksin Yu. A., Protasov M. V., Yatsenko V. P. Analysis of the deposited processes of solid particles in the channel walls // High Temperature. — 2013. — Vol. 51, No. 5. — Р. 665–672. (Original Russian paper: Varaksin Yu. A., Protasov M. V., Yacenko V. P. Analiz mekhanizmov osazhdeniya tverdyh chastic na stenki kanalov // Teplofizika vysokih temperature. — 2013. — No. 5. — Р. 738–746.)
- Гельфанд Б. Е., Губанов А. В., Медведев Е. И., Цыганов С. А. Ударные волны при разлете сжатого объема газовзвеси твердых частиц // ДАН СССР. 1985. Т. 281, № 5. С. 1113–1116. Gel'fand B. E., Gubanov A. V., Medvedev E. I., Cyganov S. A. Udarnye volny pri razlete szhatogo ob'jema gazovzvesi tvyordyh chastic [Shock waves when expanding the compressed volume of a suspension of solid particles] // DAN SSSR [Reports of the Academy of Sciences of the USSR]. — 1985. — Vol. 281, No. 5. — P. 1113–1116 (in Russian).
- Глазинов А. А., Дьяченко Н. Н., Дьяченко Л. И. Численное исследование течения ультрадисперсных частиц оксида алюминия в сопле ракетного двигателя твердого топлива // Теплофизика и аэромеханика. — 2013. — № 1. — С. 81–88. *Glazunov A. A., Dyachenko N. N., Dyachenko L. I.* Solid-fuel analysis of the particles in the solid-fuel rocket engine // Thermophysics and Aeromechanics. — 2013. — Vol. 20. — No. 1. — Р. 79–86. (Original Russian paper: *Glazinov A. A., D'yachenko N. N., D'yachenko L. I.* Chislennoe issledovanie techeniya ul'tradispersnyh chastic oksida alyuminiya v sople raketnogo dvigatelya tverdogo topliva // Teplofizika i aeromekhanika. — 2013. — No. 1. — Р. 81–88.)
- Голуб В. В., Баженова Т. В., Бакланов Д. И., Иванов К. В., Кривокорытов М. С. Применение детонации водородовоздушной смеси в устройствах для безыгольной инъекции // ТВТ. — 2013. — Т. 51, вып. 1. — С. 147–150. Golub V. V., Bazhenova T. V., Baklanov D. I., Ivanov K. V., Krivokorytov M. S. Using of hydrogen–air mixture detona-

tion in needle-free injection devices // High Temperature. — 2013. — Vol. 51, No. 1. — P. 138–140. (Original Russian paper: *Golub V. V., Bazhenova T. V., Baklanov D. I., Ivanov K. V., Krivokorytov M. S.* Primenenie detonacii vodorodovozdushnoj smesi v ustrojstvah dlya bezygol'noj in'jekcii // TVT. — 2013. — No. 1. — P. 147–150.)

- Губайдуллин Д. А., Тукмаков Д. А. Численное моделирование динамики волновых систем на основе явной схемы Мак-Кормака // Проблемы энергетики. — 2012. — № 5-6. — С. 3-10. *Gubajdullin D. A., Tukmakov D. A.* Chislennoe modelirovanie dinamiki volnovyh sistem na osnove yavnoj skhemy Mak-Kormaka [Numerical modeling of the dynamics of wave systems based on the explicit McCormack scheme] // Problemy energetiki [Problems of Energy]. — 2012. — No. 5-6. — P. 3-10 (in Russian).
- Губайдуллин Д. А., Тукмаков Д. А. Исследование динамики двухкомпонентного газа с пространственно разделенными в начальный момент компонентами // Проблемы энергетики. — 2014. — № 3-4. — С. 38–43.

*Gubajdullin D. A., Tukmakov D. A.* Issledovanie dinamiki dvuhkomponentnogo gaza s prostranstvenno razdelennymi v nachal'nyj moment komponentami [Study of the dynamics of a two-component gas with components spatially separated at the initial moment] // Problemy energetiki [Problems of Energy]. — 2014. — No. 3–4. — P. 38–43 (in Russian).

Дикалюк А. С., Суржиков С. Т. Численное моделирование разреженной пылевой плазмы в нормальном тлеющем разряде // Теплофизика высоких температур. — 2012. — Т. 50, № 5. — С. 611–619.

*Dikalyuk A. S., Surzhikov S. T.* Numerical simulation of a normal glow discharge // High Temperature. — 2012. — Vol. 50, No. 5. — P. 571–578. (Original Russian paper: *Dikalyuk A. S., Surzhikov S. T.* Chislennoe modelirovanie razrezhennoj pylevoj plazmy v normal'nom tleyushchem razryade // Teplofizika vysokih temperature. — 2012. — Vol. 50, No. 5. — P. 611–619.)

Зинченко С. П., Толмачёв Г. Н. О накоплении продуктов распыления сегнетоэлектрической мишени в плазме тлеющего высокочастотного разряда // Прикладная физика. — 2012. — № 5. — С. 53–56.

*Zinchenko S. P., Tolmachev G. N.* On the accumulation of the sputtering products of a ferroelectric target in a plasma of a glowing high-frequency discharge // Applied Physics. — 2012. — No. 5. — P. 53–56. (Original Russian paper: *Zinchenko S. P., Tolmachyov G. N.* O nakoplenii produktov raspyleniya segnetoelektricheskoj misheni v plazme tleyushchego vysokochastotnogo razryada // Prikladnaya fizika. — 2012. — No. 5. — P. 53–56.)

Козлов В. Е., Лебедев А. Б., Секундов А. Н., Якубовский К. Я. Моделирование скорости турбулентного гомогенного горения на основе «квазиламинарного» подхода // Теплофизика высоких температур. — 2009. — № 6. — С. 946–953.

*Kozlov V. E., Lebedev A. B., Sekundov A. N., Yakubovskii K. Ya.* Simulation of turbulent homogeneous combustion using the "quasi-laminar" approach // High Temperature. — 2009. — Vol. 47, No. 6. — P. 912–919. (Original Russian paper: *Kozlov V. E., Lebedev A. B., Sekundov A. N., Yakubovskij K. Ya.* Modelirovanie skorosti turbulentnogo gomogennogo goreniya na osnove "kvazilaminarnogo" podhoda // TVT. — 2009. — No. 6. — P. 946–953.

Кутушев А. Г. Математическое моделирование волновых процессов в аэродисперсных и порошкообразных средах. — СПб.: Недра, 2003. — 284 с. *Kutushev A. G.* Matematicheskoe modelirovanie volnovyh processov v aerodispersnyh i poroshkoobraznyh sredah [Mathematical modeling of wave processes in aero-dispersed and powdered media]. — Saint-Petersburg: Nedra,

2003. — 284 р. (in Russian). *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. — М.: Дрофа, 2003. — 784 с.

- Lojcyanskij L. G. Mekhanika zhidkosti i gaza [Fluid and gas mechanics]. Moscow: Drofa, 2003. 784 p. (in Russian).
- *Музафаров И. Ф., Утюжников С. В.* Применение компактных разностных схем к исследованию нестационарных течений сжимаемого газа // Математическое моделирование. 1993. Т. 5, № 3. С. 74–83.

*Muzafarov I. F., Utyuzhnikov S. V.* Primenenie kompaktnyh raznostnyh skhem k issledovaniyu nestacionarnyh techenij szhimaemogo gaza [The use of compact difference schemes for the study of non-stationary flows of compressible gas] // Matematicheskoe modelirovanie [Mathematical modeling]. — 1993. — Vol. 5, No. 3. — P. 74–83 (in Russian).

- Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред. Т. 1, 2. М.: Наука, 1987. *Nigmatulin R. I.* Dynamics of Multiphase Media. — Vol. 1, 2. — N.Y.: Hemisphere, 1990. (Original Russian book: *Nigmatulin R. I.* Dinamika mnogofaznyh sred. — Vol. 1, 2. — Moscow: Nauka, 1987.)
- Нигматулин Р. И., Губайдуллин Д. А., Тукмаков Д. А. Ударно-волновой разлет газовзвесей // Доклады академии наук. — 2016. — Т. 466, № 4. — С. 418–421. Nigmatulin R. I., Gubaidullin D. A., Tukmakov D. A. Shock wave dispersion of gas – particle mixtures // Doklady Physics. — 2016. — Vol. 61, No. 2. — Р. 70–73. (Original Russian paper: Nigmatulin R. I., Gubajdullin D. A., Tukmakov D. A. Udarno-volnovoj razlet gazovzvesej // Doklady akademii nauk. — 2016. — Vol. 466, No. 4. — P. 418–421.)
- *Овсянников Л. В.* Лекции по основам газовой динамики. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. — 336 с.

*Ovsyannikov L. V.* Lekcii po osnovam gazovoj dinamiki [Lectures on the basics of gas dynamics]. — Moscow-Izhevsk: Institut komp'yuternyh issledovanij, 2003. — 336 p. (in Russian).

Рыжков И. И., Степанова И. В. Групповые свойства и точные решения модели вибрационной конвекции бинарной смеси // Прикладная механика и техническая физика. — 2011. — № 4. — С. 72–83.

*Ryzhkov I. I., Stepanova I. V.* Group of mixture/law of vibrational mixture // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. — 2011. — Vol. 52, No. 4. — P. 560–570. (Original Russian paper: *Ryzhkov I. I., Stepanova I. V.* Gruppovye svojstva i tochnye resheniya modeli vibracionnoj konvekcii binarnoj smesi // Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika. — 2011. — No. 4. — P. 72–83.)

Садин Д. В. TVD-схема для жестких задач волновой динамики гетерогенных сред негиперболического неконсервативного типа // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2016. — Т. 56, № 12. — С. 2098–2109.

*Sadin D. V.* TVD scheme for nonhyperbolic non-conservative type // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2016. — Vol. 56, No. 12. — P. 2068–2078. (Original Russian paper: *Sadin D. V.* TVD-skhema dlya zhestkih zadach volnovoj dinamiki geterogennyh sred negiperbolicheskogo nekonservativnogo tipa // Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki. — 2016. — Vol. 56, No. 12. — P. 2098–2109.)

- *Fletcher C. A.* Computation Techniques for Fluid Dynamics. Berlin et al.: Springer-Verlang, 1988. 502 p.
- Hishida M., Fujiwara T., Wolanski P. Fundamentals of rotating detonations // Shock Waves. 2009. Vol. 19, Issue 1. P. 1–10.
- *Zhang Y., Lei F., Wang S., Xu X., Xiao Y.* A numerical study of gas-solid flow hydrodynamics in a riser under dense suspension upflow regime // Powder Technology. 2015. Vol. 280. P. 227–238.
- Zabelinskii I. E., Ibraguimova L. B., Shatalov O. P., Tunik U. V. Experimental study and numerical modeling of vibrational oxygen temperature profiles behind a strong shock wave front // Progress in Flight Physics Cep. "EUCASS book series advances in aerospace sciences". Moscow, 2011. P. 231–242.
- *Zhuoqing A., Jesse Z.* Correlating the apparent viscosity with gas–solid suspension flow in straight pipelines // Powder Technology. 2019. Vol. 345. P. 346–351.