

УДК 550.388.2

Численный метод решения двумерного уравнения переноса при моделировании ионосферы Земли на основе монотонизированной Z-схемы

Н. М. Кащенко^a, С. А. Ишанов^b, Л. В. Зинин^c, С. В. Мацевский^d

Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта,
Россия, 236016, г. Калининград, ул. А. Невского, д. 14

E-mail: ^a kaschtschenko@mail.ru, ^b sergey.ishanov@ya.ru, ^c leonid.zinin@gmail.com, ^d sergei.matsievsky@ya.ru

Получено 02.06.2019, после доработки — 25.09.2019.

Принято к публикации 19.11.2019.

Целью работы является исследование конечно-разностной схемы второго порядка точности, которая создана на основе Z-схемы. Это исследование состоит в численном решении нескольких двумерных дифференциальных уравнений, моделирующих перенос несжимаемой среды.

Одна из реальных задач, при решении которых возникают подобные уравнения, — это численное моделирование сильно нестационарных среднемасштабных процессов в земной ионосфере. Вследствие того, что процессы переноса в ионосферной плазме контролируются магнитным полем, в поперечном к магнитному полю направлении предполагается выполнение условия несжимаемости плазмы. По той же причине в продольном к магнитному полю направлении могут возникать достаточно высокие скорости тепло- и массопереноса.

Актуальной задачей при ионосферном моделировании является исследование плазменных неустойчивостей различных масштабов, которые возникают прежде всего в полярной и экваториальной областях. При этом среднемасштабные неоднородности, имеющие характерные размеры 1–50 км, создают условия для развития мелкомасштабных неустойчивостей. Последние приводят к явлению F-рассеяния, которое существенно влияет на точность работы спутниковых систем позиционирования, а также других космических и наземных радиоэлектронных систем.

Используемые для одновременного моделирования таких разномасштабных процессов разностные схемы должны иметь высокое разрешение. Кроме того, эти разностные схемы должны быть, с одной стороны, достаточно точными, а с другой стороны — монотонными. Причиной таких противоречивых требований является то, что неустойчивости усиливают погрешности разностных схем, особенно погрешности дисперсионного типа. Подобная раскачка погрешностей при численном решении обычно приводит к нефизическим результатам.

При численном решении трехмерных математических моделей ионосферной плазмы используется следующая схема расщепления по физическим процессам: первый шаг расщепления осуществляет продольный перенос, второй шаг расщепления осуществляет поперечный перенос. Исследуемая в работе конечно-разностная схема второго порядка точности приближенно решает уравнения поперечного переноса. Эта схема строится с помощью нелинейной процедуры монотонизации Z-схемы, которая является одной из схем второго порядка точности. При этой монотонизации используется нелинейная коррекция по так называемым «косым разностям». «Косые разности» содержат узлы расчетной сетки, относящиеся к разным слоям времени.

Исследования проводились для двух случаев. В первом случае компоненты вектора переноса были знакопостоянны, во втором — знакопеременны в области моделирования. Численно получены диссипативные и дисперсионные характеристики схемы для различных видов ограничивающих функций.

Результаты численных экспериментов позволяют сделать следующие выводы.

1. Для разрывного начального профиля лучшие свойства показал ограничитель *SuperBee*.
2. Для непрерывного начального профиля при больших пространственных шагах лучше ограничитель *SuperBee*, а при малых шагах лучше ограничитель *Koren*.
3. Для гладкого начального профиля лучшие результаты показал ограничитель *Koren*.
4. Гладкий ограничитель F показал результаты, аналогичные *Koren*.
5. Ограничители разного типа оставляют дисперсионные ошибки, при этом зависимости дисперсионных ошибок от параметров схемы имеют большую вариабельность и сложным образом зависят от параметров этой схемы.
6. Во всех расчетах численно подтверждена монотонность рассматриваемой разностной схемы. Для одномерного уравнения численно подтверждено свойство неувеличения вариации для всех указанных функций-ограничителей.
7. Построенная разностная схема при шагах по времени, не превышающих шаг Куранта, является монотонной и показывает хорошие характеристики точности для решений разных типов. При превышении шага Куранта схема остается устойчивой, но становится непригодной для задач неустойчивости, поскольку условия монотонности перестают в этом случае выполняться.

Ключевые слова: нелинейная конечно-разностная схема, Z-схема, математическое моделирование, численное моделирование, дифференциальное уравнение, уравнение переноса, ионосфера, неустойчивость Рэля–Тейлора, несжимаемая плазма, неоднородность плазмы, неустойчивость плазмы

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 19-11-00032).

© 2020 Николай Михайлович Кащенко, Сергей Александрович Ишанов,
Леонид Викторович Зинин, Сергей Валентинович Мацевский

Статья доступна по лицензии Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Unported License.
Чтобы получить текст лицензии, посетите веб-сайт <http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/>
или отправьте письмо в Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

UDC 550.388.2

A numerical method for solving two-dimensional convection equation based on the monotonized Z-scheme for Earth ionosphere simulation

N. M. Kashchenko^a, S. A. Ishanov^b, L. V. Zinin^c, S. V. Matsievsky^d

Immanuel Kant Baltic Federal University,
14 A. Nevskogo st., Kaliningrad, 236016, Russia

E-mail: ^a kaschtschenko@mail.ru, ^b sergey.ishanov@ya.ru, ^c leonid.zinin@gmail.com, ^d sergei.matsievsky@ya.ru

Received 02.06.2019, after completion — 25.09.2019.

Accepted for publication 19.11.2019.

The purpose of the paper is a research of a 2nd order finite difference scheme based on the Z-scheme. This research is the numerical solution of several two-dimensional differential equations simulated the incompressible medium convection.

One of real tasks for similar equations solution is the numerical simulating of strongly non-stationary mid-scale processes in the Earth ionosphere. Because convection processes in ionospheric plasma are controlled by magnetic field, the plasma incompressibility condition is supposed across the magnetic field. For the same reason, there can be rather high velocities of heat and mass convection along the magnetic field.

Ionospheric simulation relevant task is the research of plasma instability of various scales which started in polar and equatorial regions first of all. At the same time the mid-scale irregularities having characteristic sizes 1–50 km create conditions for development of the small-scale instabilities. The last lead to the F-spread phenomenon which significantly influences the accuracy of positioning satellite systems work and also other space and ground-based radio-electronic systems.

The difference schemes used for simultaneous simulating of such multi-scale processes must to have high resolution. Besides, these difference schemes must to be high resolution on the one hand and monotonic on the other hand. The fact that instabilities strengthen errors of difference schemes, especially they strengthen errors of dispersion type is the reason of such contradictory requirements. The similar swing of errors usually results to nonphysical results at the numerical solution.

At the numerical solution of three-dimensional mathematical models of ionospheric plasma are used the following scheme of splitting on physical processes: the first step of splitting carries out convection along, the second step of splitting carries out convection across. The 2nd order finite difference scheme investigated in the paper solves approximately convection across equations. This scheme is constructed by a monotonized nonlinear procedure on base of the Z-scheme which is one of 2nd order schemes. At this monotonized procedure a nonlinear correction with so-called “oblique differences” is used. “Oblique differences” contain the grid nodes relating to different layers of time.

The researches were conducted for two cases. In the simulating field components of the convection vector had: 1) the constant sign; 2) the variable sign. Dissipative and dispersive characteristics of the scheme for different types of the limiting functions are in number received.

The results of the numerical experiments allow to draw the following conclusions.

1. For the discontinuous initial profile the best properties were shown by the *SuperBee* limiter.
2. For the continuous initial profile with the big spatial steps the *SuperBee* limiter is better, and at the small steps the *Koren* limiter is better.
3. For the smooth initial profile the best results were shown by the *Koren* limiter.

4. The smooth F limiter showed the results similar to *Koren* limiter.

5. Limiters of different type leave dispersive errors, at the same time dependences of dispersive errors on the scheme parameters have big variability and depend on the scheme parameters difficulty.

6. The monotony of the considered differential scheme is in number confirmed in all calculations. The property of variation non-increase for all specified functions limiters is in number confirmed for the one-dimensional equation.

7. The constructed differential scheme at the steps on time which are not exceeding the Courant's step is monotonous and shows good exactness characteristics for different types solutions. At excess of the Courant's step the scheme remains steady, but becomes unsuitable for instability problems as monotony conditions not satisfied in this case.

Keywords: nonlinear finite difference scheme, Z-scheme, mathematical modeling, numerical simulating, differential equation, convection equation, ionosphere, Rayleigh–Taylor instability, incompressible plasma, plasma irregularity, plasma instability

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2020, vol. 12, no. 1, pp. 43–58 (Russian).

This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 19-11-00032).

© 2020 Nikolay M. Kashchenko, Sergey A. Ishanov, Leonid V. Zinin, Sergey V. Matsievsky
This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Unported License.
To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/>
or send a letter to Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

1. Введение

1. Общая цель работы. Целью работы является исследование численного метода решения уравнений поперечного переноса ионосферной плазмы в низкоширотных моделях среднemasштабных нестационарных процессов. Такие процессы в ионосферной плазме возникают при развитии различных неустойчивостей.

Одним из сценариев является процесс развития экваториальных плазменных пузырей (ЭПП) в ионосфере Земли из начальных неоднородностей в результате неустойчивости Рэлей–Тейлора (НРТ). В результате развития ЭПП одновременно растут вертикально вверх и удлиняются вдоль линий магнитного поля Земли [Кашенко, Мациевский, 2003]. Подобные особенности являются характерными для ЭПП на магнитном экваторе. Такие процессы относятся к среднemasштабным и развиваются в ионосфере на геомагнитном экваторе Земли при наличии положительных значений инкремента нарастания НРТ.

При этом генерируются большие градиенты концентраций и скоростей, что может приводить в этих зонах к следующим эффектам [Гершман, 1974]: развитие мелкомасштабных неоднородностей; проявление эффектов экваториального F-рассеяния; существенное влияние на точность работы спутниковых систем позиционирования и других космических и наземных радиоэлектронных систем. Поэтому исследование этих процессов актуально как с практической точки зрения, так и для развития теории неустойчивостей.

Так, в теоретической работе [Sazonov, 1991] показано, что величина вертикального канала развитого рэлей-тейлоровского пузыря может сузиться до 1 км. Отсюда следует, что при концентрациях электронов в максимуме F-области $n_e \approx 10^{12} \text{ м}^{-3}$ и в вертикальном канале пузыря $n_e \approx 3 \cdot 10^9 \text{ м}^{-3}$ градиент электронной концентрации составит

$$\nabla \ln n_e \approx \frac{\ln(10^{12} \text{ м}^{-3} / 3 \cdot 10^9 \text{ м}^{-3})}{10^3 \text{ м}} \approx 6 \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-1}.$$

В этом контексте отметим проблему исследования высокоградиентных плазменных неоднородностей, развивающихся главным образом в результате рэлей-тейлоровской неустойчивости. Такого рода процессы достаточно подробно исследовались в связи с ядерным взрывом в ионосфере и магнитосфере, а также моделировались лазерной плазмой в лаборатории [Ступицкий, Холодов, 2019]. Результаты этих исследований могут использоваться в качестве начальных данных для задач моделирования мелкомасштабных неустойчивостей разных типов.

Вследствие контроля процессов переноса плазмы магнитным полем Земли в поперечном к магнитному полю направлении предположительно выполнено условие несжимаемости плазмы, а вдоль магнитного поля могут возникать высокие скорости тепло- и массопереноса.

Используемые для моделирования таких процессов разностные схемы должны не только иметь высокое разрешение, но и быть, с одной стороны, достаточно точными, а с другой стороны — монотонными, поскольку неустойчивости могут усиливать погрешности разностных схем, особенно погрешности дисперсионного типа, что приводит к нефизическим результатам. В рассматриваемых моделях одним из подходов к решению уравнений является использование схем расщепления по физическим процессам:

- 1) один шаг расщепления просчитывает продольный перенос;
- 2) второй шаг — поперечный перенос.

2. Конкретная цель работы. Более конкретной целью работы является исследование диссипативных и дисперсионных свойств одной из разностных схем решения уравнений поперечного переноса, полученной нелинейной коррекцией «косых разностей». Такая коррекция была предложена в работе [Кашенко и др., 2017]. В данной работе исследование направлено на зависимости погрешностей от вида функций-ограничителей, гладкости решения и дисперсионных свойств предложенной схемы.

Многие авторы исследовали экспериментально и численно процессы развития как одиночных, так и множественных ЭПП, например, это работы [Kil et al., 2009; Zalesak et al., 1982; Bernhardt, 2007; Kherani et al., 2009; Кащенко и др., 2018; Tulasi Ram et al., 2017; Yokoyama et al., 2014]. В работах некоторых авторов, в частности в одной из последних работ [Yokoyama et al., 2014], в которой представлена диффузионная модель развития ЭПП, учитывающая ионы O^+ и NO^+ , получены выводы о стохастизации ЭПП после его выхода во внешнюю ионосферу в результате каскада бифуркаций. На наш взгляд, это может быть связано не только со свойствами самого процесса, но и с постановкой задачи, в частности с такими факторами, как:

- 1) неучет ионов H^+ ,
- 2) некорректные свойства применяемых разностных схем.

В любом случае причины такой стохастизации требуют отдельного исследования.

2. Математические модели

1. Трехмерная модель МІЗ. Запишем уравнения трехмерной модели среднемасштабных ионосферных процессов, позволяющей моделировать развитие НРТ в экваториальной ионосфере. В соответствии с [Гершман, 1974; Грэд, 1952] математическая модель ионосферных процессов в квазигидродинамическом приближении содержит следующие уравнения, которые более подробно описаны в работе [Кащенко и др., 2019]:

(МІЗ₁) уравнения непрерывности ионов (концентрация электронов выражается через концентрации ионов из условия квазинейтральности ионосферной плазмы):

$$\frac{\partial n_j}{\partial t} + \nabla(n_j \vec{V}_j) = Q_j - L_j;$$

(МІЗ₂) уравнения движения ионов и электронов:

$$\frac{d\vec{V}_j}{dt} = -\frac{\nabla \hat{p}_j}{n_j m_j} + \frac{e_j}{m_j} (\vec{E} + \vec{V}_j \times \vec{B}) - \nu_{jn} (\vec{V}_j - \vec{V}_n) - \sum_{l \neq j} \nu_{jl} (\vec{V}_j - \vec{V}_l) + \vec{g};$$

(МІЗ₃) уравнения теплопроводности ионов и электронов:

$$\frac{3}{2} n_j k \left(\frac{\partial T_j}{\partial t} + (\vec{V}_j \nabla) T_j \right) + p_j \nabla \vec{V}_j + \nabla q_j = G_j - P_j;$$

(МІЗ₄) уравнение потенциальности электрического поля:

$$\nabla \times \vec{E} = 0;$$

(МІЗ₅) уравнение непрерывности электрического тока:

$$\nabla \vec{J} \equiv \nabla \sum e_j n_j \vec{V}_j = 0,$$

где j — сорт заряженных частиц, ионы и электроны; \vec{V}_j — дрейфовая скорость заряженных частиц; Q_j — скорость образования ионов; L_j — скорость потерь ионов; n_j — концентрация заряженных частиц; m_j — масса заряженных частиц; e_j — заряд частиц; \hat{p}_j — тензор давления газа заряженных частиц; ν_{jn} — частоты соударений заряженных частиц с нейтралами; ν_{jl} — частоты столкновений между заряженными частицами; T_j — температура заряженных частиц; q_j — плотность теплового потока; G_j, P_j — скорость нагрева и скорость охлаждения заряженных частиц; индексы указывают на типы частиц; k — постоянная Больцмана; \vec{E} — напряженность электрического поля; \vec{J} — плотность тока.

Следует объяснить причину, по которой в данной работе уравнения математической модели приведены не в полном детальном виде. Полная правая часть уравнений непрерывности (МІЗ₁) имеет следующий вид:

$$Q_j - L_j = q_i + \sum_k \alpha_{jk}(n_j - n_k) - \alpha_j n_j n_e.$$

Оценим все три компоненты, входящие в эту формулу:

- функции ионизации малы в условиях развития неустойчивости: $q_i < 10^8 \text{ м}^{-3}\text{с}^{-1}$;
- характерное время скоростей перезарядки α_{jk} в области моделирования более 100 с;
- наконец, скорости рекомбинации электронов и молекулярных ионов с константами $\alpha_j \approx 3 \cdot 10^{-13} \text{ м}^3\text{с}^{-1}$ приводят к характерным временам порядка 1000 с.

В итоге получаем суммарное характерное время этих процессов порядка 100 с. Именно поэтому эти составляющие не влияют на жесткость системы уравнений и в данной работе не рассматриваются.

Кроме того, различие в скоростях частиц разных типов приводит, в частности, к взаимному трению компонент и, как следствие, к достаточно сильному нагреву плазмы. Члены, вызывающие такой нагрев, входят в уравнение (МІЗ₃) как аддитивная составляющая G , а теплообмен между компонентами плазмы описывается параметрами, входящими аддитивно в G_j и P_j .

Поскольку цель работы — исследование численных методов для решения уравнения переноса, то эти слагаемые в данной работе не были выписаны явно.

Вследствие сильной замагниченности ионосферной плазмы F-области процессы переноса вдоль магнитного поля будут определяться столкновениями и инерцией, а поперек поля — дрейфовым движением плазмы. Благодаря условию электростатики электрическое поле потенциально (МІЗ₆):

$$\vec{E} = -\nabla\Phi,$$

где Φ — потенциал электрического поля.

Плазма на высотах экваториальных E- и F-областей является высокопроводящей вдоль геомагнитного поля средой, поэтому будем считать, что силовые линии геомагнитного поля эквипотенциальны. Магнитное поле Земли будем считать постоянным по времени и дипольным в соответствии с дипольной математической моделью [Фаткуллин, Ситнов, 1972], поэтому уравнение непрерывности электрического тока (МІЗ₅) путем интегрирования вдоль силовых линий магнитного поля запишем в виде двумерного уравнения для потенциала Φ электрического поля (МІЗ₇):

$$\nabla_{\perp}(\hat{\sigma}\nabla_{\perp}\Phi) = \nabla_{\perp}\vec{A},$$

где $\hat{\sigma}$ — тензор интегральных проводимостей поперек магнитного поля, ∇_{\perp} — поперечная часть оператора ∇ .

Далее, в соответствии с уже ставшей классической монографией Б. Н. Гершмана [Гершман, 1974] математическая модель (МІЗ₁₋₇) может быть упрощена различными способами для решения конкретных задач моделирования. В частности, на высотах F-области ионосферы может быть использовано диффузионное приближение, для которого $\frac{d\vec{V}_j}{dt} = 0$ [Кашенко, Мациевский, 2003; Мациевский и др., 2013]. Получаем вариант трехмерной модели МІЗ, позволяющий исследовать ЭПП, возникающие в процессе развития НРТ [Кашенко и др., 2018; Кашенко, Мациевский, 2003].

2. Двумерная модель МІ2. Другое приближение использует сильную вытянутость неоднородностей плазмы вдоль геомагнитного поля, что позволяет использовать двумерные при-

ближения уравнений (МІЗ₁₋₃), записываемые в экваториальной плоскости [Кащенко, Мациевский, 2003] (двумерная модель МІ2).

Аналогичные подходы использованы и в стандартных моделях США SAMІ3/SAMІ2 [Huba et al., 2008; Huba et al., 2009a; Huba et al., 2009b; Huba et al., 2011].

Во всех обсуждаемых моделях поперечный к магнитному полю перенос почти полностью определяется дрейфовым движением со скоростью $\vec{V}_\perp = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}$. При этом для потенциального электрического поля выполняется приближенное равенство $\nabla_\perp(\vec{V}_\perp) \approx 0$. Таким образом, в двумерных моделях и в качестве шага расщепления в трехмерных моделях необходимо решать уравнения поперечного переноса с выполнением условия $\nabla_\perp(\vec{V}_\perp) \approx 0$.

Далее в статье в координатной форме записи через y обозначена горизонтальная координата, направленная на восток, через z — вертикальная координата, направленная вверх.

3. Численный алгоритм решения уравнения переноса

1. Z-схема. Конечно-разностные схемы, предназначенные для решения уравнений переноса в задачах моделирования НРТ, должны обладать достаточной точностью при моделировании на сравнительно грубых сетках. Основная проблема для таких задач — экспоненциальное усиление неоднородностей механизмом НРТ. При этом могут усиливаться и погрешности аппроксимации, что приводит к нефизическим результатам. Поэтому выбор метода решения уравнений переноса в задачах моделирования НРТ является ключевой проблемой.

В данной работе исследуется возможность применения в рассмотренных задачах метода решения уравнений переноса, построенного на основе рассматриваемой в работе Э. М. Кольцова, Н. А. Федосова, Ю. А. Балашкина [Кольцова и др., 2014] разностной схемы для решения одномерного уравнения конвективного переноса. Эта схема, названная *Z-схемой*, имеет второй порядок аппроксимации по времени и координате, кроме того, она абсолютно устойчива. Однако в силу теоремы Годунова эта схема немонотонна.

На рис. 1 показан шаблон конечно-разностной Z-схемы.

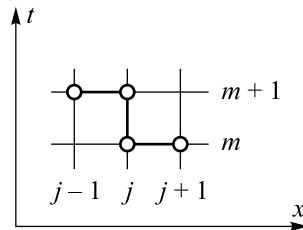


Рис. 1. Шаблон конечно-разностной Z-схемы

2. Немонотонная схема. Для первого этапа тестирования рассматривается простейшее одномерное уравнение переноса вида

$$\frac{\partial n}{\partial t} + V \frac{\partial n}{\partial x} = 0,$$

где n — концентрация, V — скорость переноса, t — время, x — единственная координата. На этом этапе тестирования будем считать, что $V = \text{const}$ и $V > 0$. Рассмотрим решение этого уравнения в виде $n = e^{-i\omega t + ikx}$, получим дисперсионное соотношение для простейшего уравнения переноса:

$$\omega = kV.$$

Получим теперь линейную разностную Z-схему для этого уравнения, соответствующую шаблону на рис. 1 [Кольцова и др., 2014], шаги равномерной сетки по переменным t и x обозначим соответственно через τ и h :

$$\frac{n_j^{m+1} - n_j^m}{\tau} + \frac{V}{2} \left(\frac{n_j^{m+1} - n_{j-1}^{m+1}}{h} + \frac{n_{j+1}^m - n_j^m}{h} \right) = 0,$$

где верхний индекс — номер узлов вычислительной сетки по времени, нижний индекс — номер узлов сетки по пространственной переменной.

Найдем дисперсионное соотношение для этой Z-схемы, представив ее решение в виде $n_j^m = e^{-i\omega t_m + ikx_j}$. Считая, что $t_m = m\tau$, $x_j = jh$, получаем дисперсионное уравнение для линейной разностной схемы Z:

$$\frac{e^{-i\omega\tau} - 1}{\tau} + \frac{V}{2} \left(\frac{e^{-i\omega\tau} - e^{-i\omega\tau - ikh}}{h} + \frac{e^{ikh} - 1}{h} \right) = 0.$$

Отсюда

$$e^{-i\omega\tau} = \frac{2 - K(e^{ikh} - 1)}{2 + K(1 - e^{-ikh})},$$

где $K = \frac{V\tau}{h}$ — число Куранта.

Если $\omega\tau \ll 1$, $kh \ll 1$, то получаем

$$\omega = \omega(k) = kV \left(1 - (kh)^2 \frac{(1+K)(2+K)}{12} + \frac{(1+K)(2+K)(1+6K+3K^2)}{240} (kh)^4 \right) + O((kh)^7).$$

Поскольку уравнение

$$e^{-i\omega\tau} = \frac{2 - K(e^{ikh} - 1)}{2 + K(1 - e^{-ikh})}$$

для величины $i\omega\tau$ дает нечетное относительно ikh выражение, то дисперсионное соотношение получается действительным, что означает бездиссипативность нашей разностной схемы

$$\frac{n_j^{m+1} - n_j^m}{\tau} + \frac{V}{2} \left(\frac{n_j^{m+1} - n_{j-1}^{m+1}}{h} + \frac{n_{j+1}^m - n_j^m}{h} \right) = 0.$$

А появление нелинейной зависимости $\omega(k)$ означает наличие численной дисперсионной погрешности этой схемы, имеющей место для всех значений числа Куранта.

3. Монотонная схема. Для получения монотонной схемы используется подход, описанный в работах [Ладонкина и др., 2009; Сафронов, 2010; Van Leer, 2006], а для коррекции схемы используются аналоги потоков («косые потоки»).

Перепишем нашу разностную схему, полученную в п. 2, добавив корректирующие множители [Кащенко и др., 2017]:

$$\frac{n_j^{m+1} - n_j^m}{\tau} + V \frac{n_j^{m+1} - n_{j-1}^{m+1}}{h} + f_{j+1/2} V \frac{n_{j+1}^m - n_j^{m+1}}{2h} - f_{j-1/2} V \frac{n_j^m - n_{j-1}^{m+1}}{2h} = 0,$$

где f с индексами — корректирующие множители.

Если $f_s = 1$, то получаем обычную Z-схему [Кольцова и др., 2014].
Если же величины f_s задать функциями

$$f_{j+1/2} = f\left(\frac{n_j^m - n_{j-1}^{m+1}}{n_{j+1}^m - n_j^{m+1}}\right) = f(r), \quad (17)$$

то при надлежащем выборе $f(r)$ получим монотонную схему. Так как можно построить формальное соответствие между схемами в [Ладонкина и др., 2009; Сафронов, 2010; Van Leer, 2006] и предлагаемой схемой, то для обеспечения монотонности выбор корректирующих функций может быть сделан таким же образом, как в этих работах. Формальное соответствие вполне может быть построено, поскольку для нашей разностной схемы

$$\frac{n_j^{m+1} - n_j^m}{\tau} + \frac{V}{2} \left(\frac{n_j^{m+1} - n_{j-1}^{m+1}}{h} + \frac{n_{j+1}^m - n_j^m}{h} \right) = 0$$

исходной базовой схемой является неявная монотонная схема:

$$\frac{n_j^{m+1} - n_j^m}{\tau} + V \left(\frac{n_j^{m+1} - n_{j-1}^{m+1}}{h} \right) = 0.$$

Для приводимых ниже экспериментов выбраны следующие виды функций:

(1) с кусочно-линейными ограничителями:

A) $f(r) = \max(0, \min(r, 1))$ (ограничитель minmod [Сафронов, 2010]),

B) $f(r) = \max(0, \min(2r, 1), \min(r, 2))$ (ограничитель SuperBee [Сафронов, 2010]),

C) $f(r) = \max(0, \min(2r, 2, kr + 1 - k))$, $k = \frac{2}{3}$ (ограничитель Koren [Сафронов, 2010]);

(2) с гладкими ограничителями:

D) $f(r) = \max\left(0, \frac{2r}{1+r}\right)$,

E) $f(r) = \max\left(0, r\sqrt{\frac{2}{1+r^2}}\right)$,

F) $f(r) = \max\left(0, r\sqrt{\frac{3}{2+r^2}}\right)$.

При этом функции-ограничители C и F в точке $r = 1$ имеют наклон $\frac{2}{3}$.

4. Результаты численных экспериментов

1. Погрешности приближенного решения. Погрешности приближенного решения определялись по формулам, соответствующим норме L_2 для функции n и ее разностей:

$$p_n = \sqrt{\frac{\sum_j (n_j - n_{0j})^2}{\sum_j n_{0j}^2}}, \quad p_{dn} = \sqrt{\frac{\sum_j (\Delta n_j - \Delta n_{0j})^2}{\sum_j (\Delta n_{0j})^2}},$$

где p_n — погрешность концентрации, p_{dn} — погрешность разностей, n_0 — точное решение, Δn — разности, Δn_0 — разности точного решения, суммирование проводится по всем узлам сетки.

Для численных экспериментов с одномерным уравнением было выбрано $V = 1$.
Область решения: $x \in [0, 200]$, $t \in [0, 80]$.

Шаг по времени выбирался так, что число Куранта $K = 0.667$.

Тестирование проведено для начальных профилей, показанных на рис. 2:

I) прямоугольный профиль, разрывное решение;

II) трапеция, непрерывный профиль;

III) колоколообразный гладкий профиль, задаваемый зависимостью вида

$$n = a((x - x_0)(x_1 - x))^2,$$

где a , x_0 , x_1 — параметры зависимости.

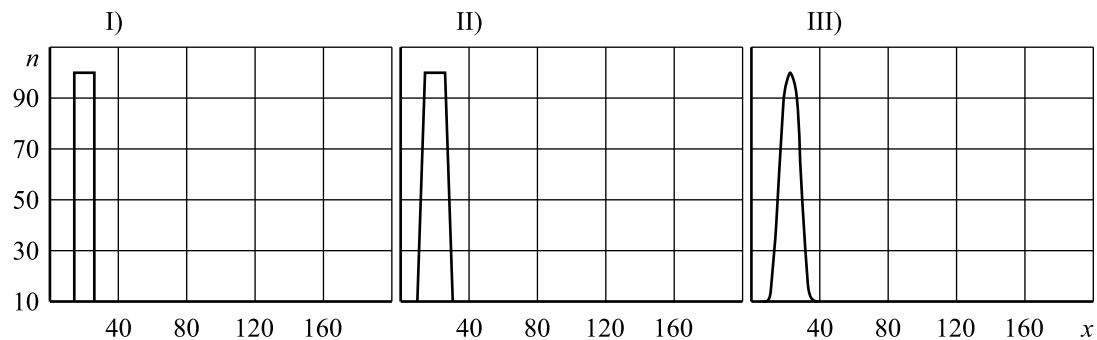


Рис. 2. Начальные профили для n : I) прямоугольник; II) трапеция; III) гладкий колоколообразный профиль

Расчеты проведены до того момента времени, когда центр профиля переместится до отметки $x = 180$. Обобщенные результаты расчетов приведены в таблице 1. Здесь показаны зависимости погрешности от пространственного шага h , типа начального профиля и типа функции-ограничителя. В последней строке таблицы 1 приведен показатель степени при аппроксимации погрешности в виде $O(h^k)$.

Таблица 1. Зависимость погрешности от пространственного шага h , типа начального профиля и типа функции-ограничителя

Шаг h	Тип расчета (вид профиля – вид ограничителя)								
	I-A	I-B	I-C	II-A	II-B	II-C	III-A	III-B	III-C
0.096	0.205	0.073	0.172	0.0366	0.0133	0.0220	0.0198	0.0137	0.0080
0.048	0.160	0.045	0.135	0.0214	0.0116	0.0108	0.0062	0.0045	0.0025
0.024	0.129	0.038	0.110	0.0107	0.0095	0.0056	0.0020	0.0016	0.0008
0.012	0.102	0.022	0.086	0.0054	0.0082	0.0029	0.0006	0.0006	0.0003
Показатель степени	0.34	0.58	0.33	0.92	0.23	0.97	1.68	1.50	1.57

Анализируя эти результаты расчета погрешностей, можно сделать следующие выводы:

- для разрывного профиля I) лучшие свойства показал ограничитель *SuperBee*;
- для непрерывного профиля II) при большом шаге h лучше ограничитель *SuperBee*, а при малых шагах лучше ограничитель *Koren*;
- для гладкого профиля III) лучшие результаты показал ограничитель *Koren*;
- гладкий ограничитель F показал свойства, аналогичные ограничителю *Koren*.

2. Дисперсионные свойства. При исследовании дисперсионных свойств для полученных решений было выполнено преобразование Фурье.

На рис. 3 показаны зависимости разностной производной по времени для фазы гармоник при преобразовании Фурье: тонкая линия (1) — погрешность, толстая линия (2) — зависимость разностной производной фазы по времени от номера гармоники для профиля типа I) с ограничителем А для $h = 0.012$.

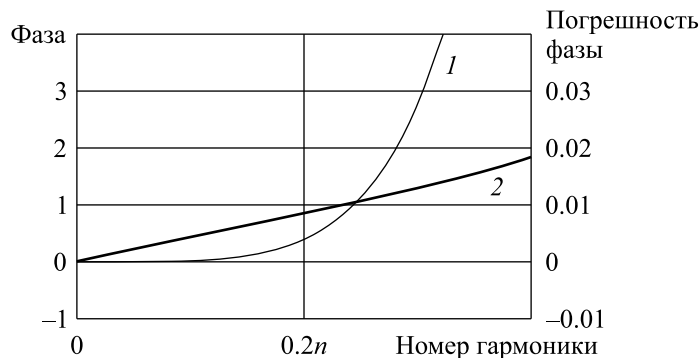


Рис. 3. Зависимости разностной производной по времени для фазы гармоник: 1) погрешность; 2) зависимость разностной производной фазы по времени от номера гармоники для профиля типа I) с ограничителем А для $h = 0.012$

Для разных вариантов расчетов эти зависимости имеют большую вариабельность для погрешности (линия 1 на рис. 3), что не позволило выявить простые закономерности.

Общий вывод: дисперсионные погрешности схемы

$$\frac{n_j^{m+1} - n_j^m}{\tau} + \frac{V}{2} \left(\frac{n_j^{m+1} - n_{j-1}^{m+1}}{h} + \frac{n_{j+1}^m - n_j^m}{h} \right) = 0$$

переносятся на скорректированную схему

$$\frac{n_j^{m+1} - n_j^m}{\tau} + V \frac{n_j^{m+1} - n_{j-1}^{m+1}}{h} + f_{j+1/2} V \frac{n_{j+1}^m - n_j^{m+1}}{2h} - f_{j-1/2} V \frac{n_j^m - n_{j-1}^{m+1}}{2h} = 0$$

и сложным образом зависят от параметров этой схемы.

3. Погрешности разностной производной. Для задач неустойчивости важным параметром является также погрешность разностной производной. Обобщенные результаты погрешности разностных производных приведены для гладкого профиля типа III) в таблице 2. Здесь показаны зависимости погрешности от пространственного шага h и типа функции-ограничителя. В последней строке таблицы 2 приведен показатель степени при аппроксимации погрешности в виде $O(h^k)$.

Таблица 2. Зависимость погрешности разностной производной от пространственного шага h и типа функции-ограничителя

Шаг h	Тип ограничителя			
	А	В	С	Ф
0.096	0.125	0.159	0.085	0.088
0.048	0.060	0.082	0.044	0.045
0.024	0.031	0.049	0.024	0.024
0.012	0.015	0.035	0.012	0.012
Показатель степени	1.02	0.73	0.94	0.96

Анализируя эти результаты, можно сделать следующие выводы:

- худший результат получен для ограничителя SuperBee;
- лучший результат получен для ограничителя Koen, такие же погрешности получены для гладкого ограничителя F.

4. Двумерная задача. Для решения двумерной задачи использовалась аддитивно симметризованная схема расщепления. При тестировании взято двумерное уравнение переноса, записанное в виде

$$\frac{\partial n}{\partial t} + V_y \frac{\partial n}{\partial y} + V_z \frac{\partial n}{\partial z} = 0.$$

Область интегрирования задавалась в виде $-500 \leq y \leq 500$, $100 \leq z \leq 1100$.

Профиль скоростей задавался модельно в виде $V_y = 2.0$, $V_z = 1.0$.

Начальный профиль концентрации был задан с помощью функции вида $f(y, z)$:

$$n(y, z) = 100 \left(\max \left(1 - \left(\frac{y - y_0}{a} \right)^2 - \left(\frac{z - z_0}{b} \right)^2 - \left(\frac{y - y_0}{a} \right) \left(\frac{z - z_0}{b} \right), 0 \right) \right)^2,$$

где y_0 , a , z_0 , b — параметры профиля.

На рис. 4 показано распределение начального значения. В этой серии расчетов число Куранта также равно 0.667.

Для этой задачи была проведена серия расчетов с разными шагами по пространственным переменным и разными видами ограничителей «косых потоков». Обобщенные результаты приведены в таблице 3, в последней строке приведен показатель степени при аппроксимации погрешности в виде $O(h^k)$.

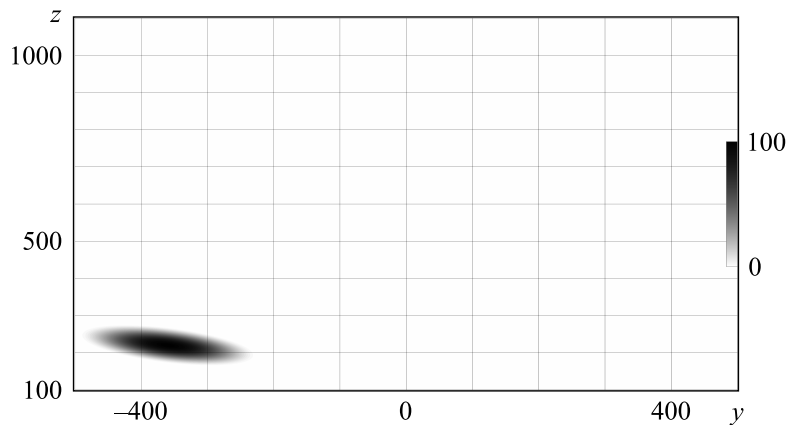


Рис. 4. Распределение начального значения для двумерного уравнения. Уровни значения указаны в правой части рисунка

Таблица 3. Зависимость погрешности двумерной задачи от числа точек разностной сетки и типа функции-ограничителя

№	Число ячеек разностной сетки по y и z	Ограничитель А	Ограничитель В	Ограничитель С
1	101; 151	0.380	0.081	0.215
2	201; 301	0.160	0.046	0.084
3	401; 601	0.060	0.031	0.036
4	801; 1201	0.024	0.016	0.013
Показатель степени		1.33	0.78	1.35

Эти результаты показывают, что:

- худший результат получен для ограничителя *minmod*,
- лучший результат получен для ограничителя *Koren*,
- погрешности для гладкого ограничителя F аналогичны погрешностям ограничителя *Koren*.

5. Знакопеременные скорости. Для тестирования задачи со знакопеременными скоростями был выбран тест, представляющий из себя вращение. Поле скоростей задавалось в следующем виде: $V_y = \alpha(z - z_c)$, $V_z = -\alpha(y - y_c)$, где α — некоторый параметр, при тестировании использовалось значение $\alpha = 1$; y_c, z_c — координаты центра области решения.

Для этого поля скоростей справедливо свойство $\text{div}(\vec{V}) = 0$.

Начальные значения в этих расчетах были выбраны по формуле

$$n(y, z) = 100 \left(\max \left(1 - \left(\frac{y - y_0}{a} \right)^2 - \left(\frac{z - z_0}{b} \right)^2 - \left(\frac{y - y_0}{a} \right) \left(\frac{z - z_0}{b} \right), 0 \right) \right)^2$$

так, что расстояние от точки (y_0, z_0) до центра области (y_c, z_c) равно 450.

Для этой задачи были получены результаты, аналогичные описанным для поля постоянных скоростей.

5. Заключение

Представленные выше результаты численных экспериментов, которые описаны в § 4, а также их краткое обсуждение позволяют сделать следующие выводы.

1. Для разрывного начального профиля лучшие свойства показал ограничитель *SuperBee*.
2. Для непрерывного начального профиля при больших пространственных шагах лучше ограничитель *SuperBee*, а при малых шагах лучше ограничитель *Koren*.
3. Для гладкого начального профиля лучшие результаты показал ограничитель *Koren*.
4. Гладкий ограничитель F показал результаты, аналогичные *Koren*.
5. Ограничители разного типа оставляют дисперсионные ошибки, при этом зависимости дисперсионных ошибок от параметров схемы имеют большую вариабельность и сложным образом зависят от параметров этой схемы.
6. Во всех расчетах численно подтверждена монотонность рассматриваемой разностной схемы. Для одномерного уравнения численно подтверждено свойство неувеличения вариации для всех указанных функций-ограничителей.
7. Таким образом, построенная разностная схема при шагах по времени, не превышающих шаг Куранта, является монотонной и показывает хорошие характеристики точности для решений разных типов. При превышении шага Куранта схема остается устойчивой, но становится непригодной для задач неустойчивости, поскольку условия монотонности перестают в этом случае выполняться.

Список литературы (References)

- Гайдуков В. Ю., Кащенко Н. М., Мациевский С. В. и др. Запуск экваториальных пузырей путем модификации E-слоя // Геомагнетизм и аэрономия. — 1991. — Т. 31 (6). — С. 1042–1048.
 Gaydukov V. Yu., Kashchenko N. M., Matsievsky S. V. et al. Zapusk ekvatorialnykh puzyrei putem modifikatsii E-sloia [Start of equatorial bubbles by modification of the E-layer] // Geomagnetizm i aeronomiia. — 1991. — Vol. 31 (6). — P. 1042–1048 (in Russian).
- Гершман Б. Н. Динамика ионосферной плазмы. — М.: Наука, 1974.
 Gershman B. N. Dinamika ionosfernoi plazmy [Dynamics of ionospheric plasma]. — Moscow: Nauka, 1974 (in Russian).

- Грэд Г. О кинетической теории разреженных газов // *Механика*. — 1952. — Вып. 4. — С. 71–79; Вып. 5. — С. 61–96.
Grad H. On the kinetic theory of rarefied gases // *Comm. Pure Appl. Math.* — 1949. — Vol. 2. — P. 331–407. (Russ. ed.: *Gred G.* O kineticheskoi teorii razrezhennykh gazov // *Mekhanika*. — 1952. — Вып. 4. — С. 71–79; Вып. 5. — С. 61–96.)
- Кащенко Н. М., Ишанов С. А., Мацневский С. В. Эффективные алгоритмы численного моделирования среднемасштабных неоднородностей низкоширотной ионосферы // *Математическое моделирование*. — 2017. — Т. 29 (4). — С. 113–120.
Kashchenko N. M., Ishanov S. A., Matsievsky S. V. Efficient algorithms of the numerical simulation of medium-scale irregularities in a low-latitude ionosphere // *Mathematical Models and Computer Simulations*. — 2017. — Vol. 9 (6). — P. 742–748. (Original Russian paper: *Kashchenko N. M., Ishanov S. A., Matsievsky S. V.* Effektivnye algoritmy chislennogo modelirovaniia srednemashtabnykh neodnorodnostei nizkoshirotnoi ionosfery // *Matematicheskoe modelirovanie*. — 2017. — Vol. 29 (4). — P. 113–120.)
- Кащенко Н. М., Ишанов С. А., Мацневский С. В. Развитие неустойчивости Рэлея–Тейлора в экваториальной ионосфере и геометрия начальной неоднородности // *Математическое моделирование*. — 2018. — Т. 30 (9). — С. 21–32.
Kashchenko N. M., Ishanov S. A., Matsievsky S. V. The Rayleigh-Taylor instability development in the equatorial ionosphere and an initial irregularities geometry // *Mathematical Models and Computer Simulations*. — 2019. — Vol. 11 (3). — In print. (Original Russian paper: *Kashchenko N. M., Ishanov S. A., Matsievsky S. V.* Razvitie neustoi-chivosti Releia–Teilora v ekvatorialnoi ionosfere i geometriia nachalnoi neodnorodnosti // *Matematicheskoe modelirovanie*. — 2018. — Vol. 30 (3). — P. 21–32.)
- Кащенко Н. М., Ишанов С. А., Мацневский С. В. Моделирование развития экваториальных плазменных пузырей из плазменных облаков // *Компьютерные исследования и моделирование*. — 2019. — Т. 11 (3). — С. 463–476.
Kashchenko N. M., Ishanov S. A., Matsievsky S. V. Modelirovanie razvitiya ekvatorial'nykh plazmennyykh puzyrej iz plazmennyykh oblakov [Simulation equatorial plasma bubbles started from plasma clouds] // *Computer Research and Modeling*. — 2019. — Vol. 11 (3). — P. 463–476 (in Russian).
- Кащенко Н. М., Мацневский С. В. Математическое моделирование неустойчивостей экваториального F-слоя ионосферы // *Вестник Калининградского государственного университета*. — 2003. — Вып. 3. — С. 59–68.
Kashchenko N. M., Matsievsky S. V. Matematicheskoe modelirovanie neustoichivostei ekvatorialnogo F-sloia ionosfery [Mathematical modeling of instabilities of the equatorial F-layer of the ionosphere] // *Vestnik Kaliningradskogo gosudarstvennogo universiteta*. — 2003. — Vol. 3. — P. 59–68 (in Russian).
- Кольцова Э. М., Федосова Н. А., Балашкина Ю. А. Новый метод разностной аппроксимации решения для задач механики сплошных сред // *Успехи в химии и химической технологии*. — 2014. — Т. 28 (1). — С. 64–66.
Koltsova E. M., Fedosova N. A., Balashkina Yu. A. Novyi metod raznostnoi approksimatsii resheniya dlya zadach mekhaniki sploshnykh sred [New method finite difference approximation of mechanics continuous media equations] // *Uspekhi v khimii i khimicheskoi tekhnologii* [Advances in Chemistry and Chemical Technology Journal]. — 2014. — Vol. 28 (1). — P. 64–66 (in Russian).
- Ладонкина М. Е., Неклюдова О. А., Тишкин В. Ф., Чеванин В. С. Об одном варианте существенно неосциллирующих разностных схем высокого порядка точности для систем законов сохранения // *Математическое моделирование*. — 2009. — Т. 21 (11). — С. 19–32.
Ladonkina M. E., Neklyudova O. A., Tishkin V. F., Chevanin V. S. A version of essentially nonoscillatory high-order accurate difference schemes for systems of conservation laws // *Mathematical Models and Computer Simulations*. — 2010. — Vol. 2 (3). — P. 304–316. (Original Russian paper: *Ladonkina M. E., Neklyudova O. A., Tishkin V. F., Chevanin V. S.* Ob odnom variante sushchestvenno neostsilliruiushchikh paznostnykh skhem vysokogo poriadka tochnosti dlia sistem zakonov sokhraniia // *Matematicheskoe modelirovanie*. — 2009. — Vol. 21 (11). — P. 19–32.)
- Мацневский С. В., Кащенко Н. М., Ишанов С. А., Зинин Л. В. 3D-моделирование экваториального F-рассеяния: сравнение моделей MI3 и SAMI3 // *Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта*. — 2013. — Вып. 4. — С. 102–105.
Matsievsky S. V., Kashchenko N. M., Ishanov S. A., Zinin L. V. 3D-modelirovanie ekvatorialnogo F-rasseianiia: sravnenie modelei MI3 i SAMI3 [3D-simulation of the equatorial F-spread: a comparing MI3 with SAMI3] // *Vestnik Baltiiskogo federalnogo universiteta im. I. Kanta*. — 2013. — Vol. 4. — P. 102–105 (in Russian).

- Сафронов А. В.* Оценка точности и сравнительный анализ разностных схем сквозного счета повышенного порядка // Вычислительные методы и программирование. — 2010. — Т. 11 (1). — С. 137–143.
Safronov A. V. Otsenka tochnosti i sravnitelnyi analiz paznostnykh skhem skvoznogo scheta povyshennogo poriadka [Accuracy estimation and comparative analysis of difference schemes of high-order approximation] // Vychislitelnye metody i programmirovaniye. — 2010. — Vol. 11 (1). — P. 137–143 (in Russian).
- Ступицкий Е. Л., Холодов А. С.* Физические исследования и математическое моделирование крупномасштабных геофизических экспериментов. — Долгопрудный, 2018.
Stupitsky E. L., Kholodov A. S. Fizicheskie issledovaniia i matematicheskoe modelirovaniye krupnomasshtabnykh geofizicheskikh eksperimentov [Physical research and mathematical modeling of large-scale geophysical experiments]. — Dolgoprudnyi, 2018 (in Russian).
- Фаткуллин М. Н., Ситнов Ю. С.* Дипольная система координат и ее некоторые особенности // Геоматетизм и аэрномия. — 1972. — Т. 12 (2). — С. 333–335.
Fatkullin M. N., Sitnov Yu. S. Dipoliarnaiia sistema koordinat i ee nekotorye osobennosti [Dipolar coordinates and its some features] // Geomagnetizm i aeronomiia. — 1972. — Vol. 12 (2). — P. 333–335 (in Russian).
- Bernhardt P. A.* Quasi-analytic models for density bubbles and plasma clouds in the equatorial ionosphere: 2. A simple Lagrangian transport model // J. Geophys. Res. — 2007. — Vol. 112. — A11310.
- Huba J. D., Joyce G., Krall J.* Three-dimensional equatorial spread F modeling // Geophys. Res. Lett. — 2008. — Vol. 35. — P. L10102.
- Huba J. D., Joyce G., Krall J.* Three-dimensional modeling of equatorial spread F // Aeronomy of the Earth's atmosphere and ionosphere. IAGA Special Sopron Book Series. — 2011. — Vol. 2. — P. 211–218.
- Huba J. D., Krall J., Joyce G.* Atomic and molecular ion dynamics during equatorial spread F // Ibid. — 2009a. — Vol. 36. — P. L10106.
- Huba J. D., Krall J., Joyce G.* Ion and electron temperature evolution during equatorial spread F // Ibid. — 2009b. — P. L15102.
- Kherani E. A., Abdu M. A., de Paula E. R. et al.* The impact of gravity waves rising from convection in the lower atmosphere on the generation and nonlinear evolution of equatorial bubble // Ann. Geophys. — 2009. — Vol. 27. — P. 1657–1668.
- Kil H., Heelis R. A., Paxton L. J., Oh S.-J.* Formation of a plasma depletion shell in the equatorial ionosphere // J. Geophys. Res. — November 2009. — Vol. 114 (11). — A11302.
- Sazonov S. V.* Dissipative structures in the F-region of the equatorial ionosphere generated by Rayleigh–Taylor instability // Planet. Space Sci. — 1991. — Vol. 39 (12). — P. 1667–1671.
- Tulasi Ram S., Ajith K. K., Yokoyama T. et al.* Vertical rise velocity of equatorial plasma bubbles estimated from Equatorial Atmosphere Radar (EAR) observations and HIRB model simulations // J. Geophys. Res. — June 2017. — Vol. 122 (6). — P. 6584–6594.
- Van Leer B.* Upwind and high-resolution methods for compressible flow: from donor cell to residual-distribution schemes // Commun. Comput. Phys. — 2006. — Vol. 1 (2). — P. 192–206.
- Yokoyama T., Shinagawa H., Jin H.* Nonlinear growth, bifurcation, and pinching of equatorial plasma bubble simulated by three-dimensional high-resolution bubble model // J. Geophys. Res. — 2014. — Vol. 119 (12). — P. 10,474–10,482.
- Zalesak S. T., Ossakow S. L., Chaturvedi P. K.* Nonlinear equatorial spread F: the effect of neutral winds and background Pedersen conductivity // Ibid. — 1982. — Vol. 87 (1). — P. 151–166.