**КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2020 Т. 12 № 1 С. 33–42**
DOI: 10.20537/2076-7633-2020-12-1-33-42

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

УДК: 517.952

Нахождение особых решений многомерных дифференциальных уравнений типа Клеро в частных производных с тригонометрическими функциями

Л. Л. Рыскина

Кафедра математического анализа Томского государственного педагогического университета,
Россия, 634061, г. Томск, ул. Киевская, д. 60

E-mail: ryskina@tspu.edu.ru

Получено 21.04.2019, после доработки — 04.05.2019.
Принято к публикации 18.10.2019.

В работе изучается класс дифференциальных уравнений типа Клеро в частных производных первого порядка, которые представляют собой многомерное обобщение обыкновенного дифференциального уравнения Клеро на случай, когда искомая функция зависит от многих переменных. Известно, что общее решение дифференциального уравнения типа Клеро в частных производных представляет собой семейство интегральных (гипер-) плоскостей. Помимо общего решения, могут существовать частные решения, а в некоторых частных случаях удается найти особое (сингулярное) решение.

Целью работы является нахождение особых решений многомерных дифференциальных уравнений типа Клеро в частных производных первого порядка со специальной правой частью. В работе сформулирован критерий существования особого решения дифференциального уравнения типа Клеро в частных производных для случая, когда функция от производных представляет собой функцию от линейной комбинации частных производных. Получены сингулярные решения для данного типа дифференциальных уравнений с тригонометрическими функциями от линейной комбинации n-независимых переменных с произвольными коэффициентами. Показано, что задача нахождения особого решения сводится к решению системы трансцендентных уравнений, содержащих исходные тригонометрические функции. В статье описана процедура нахождения сингулярного решения уравнения типа Клеро, основная идея которой заключается в нахождении не частных производных искомой функции, как функций независимых переменных, а линейных комбинаций частных производных с некоторыми коэффициентами. Данный метод может быть применен для нахождения особых решений уравнений типа Клеро, для которых данная структура сохраняется.

Работа организована следующим образом. Введение содержит краткий обзор некоторых современных результатов, имеющих отношение к теме исследования уравнений типа Клеро. Вторая часть является основной, в ней сформулирована задача работы и описан метод поиска сингулярных решений дифференциальных уравнениях типа Клеро в частных производных со специальной правой частью. Основным результатом работы является нахождение сингулярных решений уравнений, содержащих тригонометрические функции, приведенные в основной части работы в качестве примеров, иллюстрирующих описанный ранее метод. В заключении сформулированы результаты работы и обсуждается направление дальнейших исследований.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения в частных производных, дифференциальные уравнения типа Клеро, сингулярные (особые) решения, тригонометрические функции

COMPUTER RESEARCH AND MODELING
2020 VOL. 12 NO. 1 P. 33–42
DOI: 10.20537/2076-7633-2020-12-1-33-42

MATHEMATICAL MODELING AND NUMERICAL SIMULATION

UDC: 517.952

Singular solutions of the multidimensional differential Clairaut-type equations in partial derivatives with trigonometric functions

L. L. Ryskina

Department of Mathematical Analysis Tomsk State Pedagogical University,
60 Kievskaya st., Tomsk, 634061, Russia

E-mail: ryskina@tspu.edu.ru

Received 21.04.2019, after completion — 04.05.2019.
Accepted for publication 18.10.2019.

We study the class of first order differential equations in partial derivatives of the Clairaut-type, which are a multidimensional generalization of the ordinary differential Clairaut equation to the case when the unknown function depends on many variables. It is known that the general solution of the Clairaut-type partial differential equation is a family of integral (hyper-) planes. In addition to the general solution, there can be particular solutions, and in some cases a special (singular) solution can be found.

The aim of the paper is to find a singular solution of the Clairaut-type equation in partial derivatives of the first order with a special right-hand side. In the paper, we formulate a criterion for the existence of a special solution of a differential equation of Clairaut type in partial derivatives for the case, when the function of the derivatives is a function of a linear combination of partial derivatives of unknown function. We obtain the singular solution for this type of differential equations with trigonometric functions of a linear combination of n-independent variables with arbitrary coefficients. It is shown that the task of finding a special solution is reduced to solving a system of transcendental equations containing initial trigonometric functions. The article describes the procedure for evaluation of a singular solution of Clairaut-type equation; the main idea is to find not partial derivatives of the unknown function, as functions of independent variables, but linear combinations of partial derivatives with some coefficients. This method can be used to find special solutions of Clairaut-type equations, for which this structure is preserved.

The work is organized as follows. The Introduction contains a brief review of some modern results related to the topic of the study of Clairaut-type equations. The Second part is the main one and it includes a formulation of the main task of the work and describes a method of evaluation of singular solutions for the Clairaut-type equations in partial derivatives with a special right-hand side. The main result of the work is to find singular solutions of the Clairaut-type equations containing trigonometric functions. These solutions are given in the main part of the work as an illustrating example for the method described earlier. In Conclusion, we formulate the results of the work and describe future directions of the research.

Keywords: partial differential equations, Clairaut-type differential equations, singular solutions, trigonometric functions

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2020, vol. 12, no. 1, pp. 33–42 (Russian).

1. Введение

В представленной статье изучается вопрос нахождения особого решения дифференциального уравнения типа Клеро в частных производных первого порядка. Уравнение Клеро хорошо известно из курса обыкновенных дифференциальных уравнений [Зайцев, Полянин, 2002; Степанов, 1965; Эльсгольц, 1969], однако изучение его многомерного обобщения уже выходит за рамки стандартного рассмотрения. Тем не менее дифференциальное уравнение типа Клеро в частных производных [Полянин и др., 2005; Камке, 1966; Курант, 1964] хорошо известно специалистам, особенно при изучении различных преобразований нелинейных уравнений математической физики, таких как, например, уравнение Лежандра [Lavrov, Merzlikin, 2016].

Общее решение уравнения типа Клеро в частных производных хорошо известно и представляет собой многомерное обобщение решения обыкновенного уравнения Клеро. Однако процедура нахождения особого решения для уравнения в частных производных уже не так проста и, более того, в общем случае не определена. Сложность в изучении особого решения сопряжена с необходимостью нахождения решения системы трансцендентных уравнений для определения производных искомой функции как функций своих аргументов. Только в некоторых частных случаях удается найти такие решения.

Особые решения уравнений типа Клеро в частных производных представляют определенный интерес в прикладных задачах [Duplij, 2011, 2009a, 2009b; Lavrov, Merzlikin, 2015a, 2016, 2015b; Walker, Duplij, 2015; Zyryanova, Kolesnikov, 2017; Zyryanova, Mudruk, 2018; Жидова и др., 2017a, 2017b; Рахмелевич, 2017; 2016, 2014]. В работе [Lavrov, Merzlikin, 2016] было показано, что особое решение уравнения типа Клеро в частных производных представляет значительный интерес в квантовой теории поля с составными полями. В данной статье изучался случай, когда функция от производных, входящая в уравнение, была логарифмической, а в работах [Рыскина, Жидова, 2019a, 2019b; Рыскина, 2019] были рассмотрены степенная, логарифмическая и показательная функции. Успех в нахождении особого решения уравнения типа Клеро в частных производных в работах [Lavrov, Merzlikin, 2016; Рыскина, Жидова, 2019a, 2019b; Рыскина, 2019] был связан со специальным видом зависимости этой функции от частных производных. В этих работах удалось свести задачу нахождения частных производных искомой функции к задаче нахождения сверток частных производных искомой функции с фиксированными параметрами.

В настоящей статье было проведено обобщение некоторых результатов, полученных в [Lavrov, Merzlikin, 2016, 2015b; Zyryanova, Mudruk, 2018; Жидова и др., 2017a, 2017b; Рыскина, Жидова, 2019a, 2019b; Рыскина, 2019], в которых авторы исследовали проблему поиска особых решений, в настоящей статье предложен новый вид функций от производных в уравнении, для которых удается найти особые решения. В частности, были найдены особые решения для некоторых тригонометрических функций.

2. Постановка задачи. Описание метода поиска сингулярного решения

Рассмотрим класс дифференциальных уравнений в частных производных, содержащих искомую функцию y, зависящую от n независимых переменных $y = y(x_1, x_2, ..., x_n)$, и некоторую заданную функцию ψ от частных производных искомой функции y следующего вида:

$$y = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i} x_i + \psi\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial y}{\partial x_n}\right), \tag{1}$$

здесь ψ — заданная n раз непрерывно дифференцируемая функция своих переменных. Уравнения вида (1) называется дифференциальным уравнением в частных производных типа Клеро. Уравнения вида (1) встречаются, например, в контексте квантовой теории поля с составными операторами [Lavrov, Merzlikin, 2016].

С геометрической точки зрения общее решение одномерного уравнения Клеро представимо в виде семейства прямых. Наряду с общим решением существует особое или сингулярное решение, которое нельзя получить из общего решения, и оно представляет собой огибающую этих прямых. Задача нахождения общего решения уравнения вида (1) является учебной и подробно описана в литературе. В то время как процедура нахождения особого решения для уравнения в частных производных уже не так проста и, более того, в общем случае не определена.

Далее будем предполагать, что функция ψ имеет следующую структуру:

$$\psi = \psi\left(a_1 \cdot \frac{\partial y}{\partial x_1}, a_2 \cdot \frac{\partial y}{\partial x_2}, \ldots, a_n \cdot \frac{\partial y}{\partial x_n}\right) = \psi\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial y}{\partial x_i}\right). \tag{2}$$

Введем замену $\frac{\partial y}{\partial x_i} = z_i$, тогда уравнение (1), с учетом (2), перепишем в краткой форме:

$$y = \sum_{i=1}^{n} x_i z_i + \psi\left(\sum_{i=1}^{n} a_i z_i\right). \tag{3}$$

Продифференцируем выражение (3) по x_i:

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n}\left(x_j \cdot \frac{\partial z_j}{\partial x_i}\right) + \sum_{j=1}^{n} z_j \cdot \frac{\partial x_j}{\partial x_i} + \psi' \cdot \sum_{j=1}^{n}\left(a_j \cdot \frac{\partial z_j}{\partial x_i}\right). \tag{4}$$

Учтем, что $\frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \delta_{ji}$ и $\sum_{j=1}^{n} z_j \delta_{ji} = z_i$, где δ_i^j — дельта символ Кронекера, тогда

$$z_i = \sum_{j=1}^{n}\left(x_j \cdot \frac{\partial z_j}{\partial x_i}\right) + z_i + \psi' \cdot \sum_{j=1}^{n}\left(a_j \cdot \frac{\partial z_j}{\partial x_i}\right), \tag{5}$$

после простых преобразований получаем уравнение

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial z_j}{\partial x_i}\left(x^j + \psi' \cdot a_j\right) = 0. \tag{6}$$

Предполагаем, что матрица $\left\| \frac{\partial z_j}{\partial x_i} \right\|$ невырожденная, тогда в ноль обращается выражение в скобках, то есть необходимо решить следующую систему:

$$x_j + \psi' \cdot a_j = 0, \quad \text{где} \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{7}$$

Для нахождения сингулярного решения в статье [Lavrov, Merzlikin, 2016] была предложена процедура нахождения особого решения уравнения типа Клеро для случая, когда функция имеет вид логарифмической функции: $\psi(z) = \alpha \ln\left(1 - \beta(z_i a^i\right)$. Основная идея метода заключается в нахождении не самих функций z_i, а выражений $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i z_i\right)$ и $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i z_i\right)$. И после получения данных выражений как функций, зависящих только от x_i, сингулярное решение получается подстановкой этих выражений в уравнение (3).

Сложность в изучении особого решения сопряжена с необходимостью нахождения решения системы трансцендентных уравнений для определения производных искомой функции как функций своих аргументов. В настоящей статье было проведено обобщение некоторых результатов, полученных в [Lavrov, Merzlikin, 2016; Рыскина, Жидова, 2019a, 2019b; Рыскина, 2019], и предложен новый вид функций от производных в уравнении, для которых удается найти особые решения. В частности, были найдены особые решения для некоторых тригонометрических функций.

2.1. Поиск сингулярного решения уравнения в частных производных от функции косинус

Рассмотрим уравнение типа Клеро в частных производных первого порядка для функции $\psi = \psi(z)$ в следующем виде:

$$\psi(z) = \cos\left(\sum_{i=1}^{n} a_i z_i\right). \tag{8}$$

Здесь в качестве искомой функции от производных рассматриваем функцию косинус.

Система уравнений (7) для функции специального вида (8) имеет вид

$$x_j - \sin\left(\sum_{i=1}^{n} a_i z_i\right) \cdot a_j = 0. \tag{9}$$

Уравнение вида (9) будем использовать для нахождения выражений $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i z_i\right)$ и $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i z_i\right)$.

Введем параметр b_i таким образом, что выполняется следующее тождество: $b_i a^i = 1$. Домножая выражение (9) на b_j, получим

$$x_j b_j - \sin\left(\sum_{i=1}^{n} a_i z_i\right) = 0. \tag{10}$$

Выразим $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i z_i\right)$:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i z_i\right) = \arcsin\left(\sum_{i=1}^{n} x_i b_i\right); \tag{11}$$

теперь для нахождения выражения $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i z_i\right)$ подставим найденное значение $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i z_i\right)$ в уравнение (10),

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i z_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i b_i\right) \cdot \arcsin\left(\sum_{i=1}^{n} x_i b_i\right). \tag{12}$$

В соответствии с процедурой, описанной в [Lavrov, Merzlikin, 2016; Рыскина, Жидова, 2019a, 2019b; Рыскина, 2019], подставим найденные выражения (11) и (12) в уравнение (3), получим

$$y(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i b_i\right) \cdot \arcsin\left(\sum_{i=1}^{n} x_i b_i\right) + \cos\left(\arcsin\left(\sum_{i=1}^{n} x_i b_i\right)\right). \tag{13}$$

Получили сингулярное решение для дифференциального уравнения типа Клеро со специальной функцией от косинуса.

2.2. Поиск сингулярного решения уравнения в частных производных от функции синус

Рассмотрим в качестве искомой функции в уравнении типа Клеро в частных производных функцию синус:

$$\psi(z) = \sin\left(\sum_{i=1}^{n} a_i z_i\right). \tag{14}$$

В данном случае уравнение вида (7) для функции специального вида (14) имеет вид

$$x_j + \cos\left(\sum_{i=1}^{n} a_i z_i\right) \cdot a_j = 0. \tag{15}$$

По аналогии с первым примером уравнение вида (15) будем использовать для нахождения выражений $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i z_i\right)$ и $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i z_i\right)$. Введем параметр b_j и получим

$$x_j b_j + \cos\left(\sum_{i=1}^{n} a_i z_i\right) = 0. \tag{16}$$

Выражаем из (16) $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i z_i\right)$:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i z_i\right) = \arccos\left(-\sum_{i=1}^{n} x_i b_i\right) = \pi - \arccos\left(\sum_{i=1}^{n} x_i b_i\right), \tag{17}$$

теперь находим из (16) выражение $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i z_i\right)$:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i z_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i b_i\right) \cdot \left[\pi - \arccos\left(\sum_{i=1}^{n} x_i b_i\right)\right]. \tag{18}$$

Подставим найденные выражения (17) и (18) в уравнение (3), получим

$$y(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i b_i\right)\left[\pi - \arccos\left(\sum_{i=1}^{n} x_i b_i\right)\right] + \sin\left(\pi - \arccos\left(\sum_{i=1}^{n} x_i b_i\right)\right)$$

или

$$y(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i b_i\right)\left[\pi - \arccos\left(\sum_{i=1}^{n} x_i b_i\right)\right] + \sin\left(\arccos\left(\sum_{i=1}^{n} x_i b_i\right)\right). \tag{19}$$

Получили сингулярное решение для дифференциального уравнения типа Клеро со специальной функцией от синуса.

2.3. Поиск сингулярного решения уравнения в частных производных от функции тангенс

Рассмотрим в качестве искомой функции в уравнении типа Клеро в частных производных функцию тангенс:

$$\psi(z) = -\mathrm{tg}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i z_i\right). \tag{20}$$

В данном случае уравнение вида (7) для функции специального вида (20) имеет вид

$$-\frac{a_j}{\cos^2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i z_i\right)} + x_j = 0. \qquad (21)$$

Вводим параметр b_j и находим выражения $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i z_i\right)$ и $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i z_i\right)$:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i z_i\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i b_i}}\right); \qquad (22)$$

теперь находим из (16) выражение $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i z_i\right)$:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i z_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i b_i\right) \cdot \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i b_i}}\right). \qquad (23)$$

Подставим найденные выражения (22) и (23) в уравнение (3), получим

$$y(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i b_i\right) \cdot \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i b_i}}\right) - tg\left(\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i b_i}}\right)\right) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i b_i\right) \cdot \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i b_i}}\right) - \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i b_i - 1}. \qquad (24)$$

Получили сингулярное решение для дифференциального уравнения типа Клеро со специальной функцией от тангенса.

3. Заключение

Работа посвящена нахождению сингулярного решения уравнений типа Клеро в частных производных для тригонометрических функций. Показано, что задачу отыскания частных производных искомой функции можно свести к задаче нахождения линейной комбинации частных производных искомой функции с некоторыми фиксированными параметрами. Основными результатами настоящей работы являются полученные особые решения (13), (19) и (24) уравнения (1) для произвольного количества переменных.

Нахождение особых решений дифференциальных уравнений типа Клеро для конкретных функций инициировано прикладными задачами физики [Duplij, 2011, 2009a, 2009b; Lavrov, Merzlikin, 2015a, 2016, 2015b; Walker, Duplij, 2015; Zyryanova, Kolesnikov, 2017; Zyryanova, Mudruk, 2018; Жидова и др., 2017a, 2017b; Рыскина, Жидова, 2019a, 2019b; Рыскина, 2019; Рахмелевич, 2017, 2016, 2014], где уравнения данного типа хорошо известны специалистам, особенно при изучении различных преобразований нелинейных уравнений математической физики, таких как, например, преобразования Лежандра [Lavrov, Merzlikin, 2016]. Описанный в настоящей работе метод позволяет находить особые решения дифференциальных уравнений в частных производных типа Клеро, однако его функционал ограничен подбором функций специального вида. Нахождение особого решения уравнения типа Клеро в частных производных для конкретных функций остается недостаточно изученным и представляет собой перспективное направление для дальнейших исследований.

Список литературы (References)

Жидова Л. А., Зырянова О. В., Холмухаммад Ф. Дифференциальные уравнения в профессиональной подготовке учителя математики // Вестник ТГПУ. — 2017. — № 1 (178). — С. 75–78.
Zhidova L. A., Zyryanova O. V., Kholmukhammad F. Differentsial'nyye uravneniya v professional'noy podgotovke uchitelya matematiki [Differential equations in the vocational training of a teacher of mathematics] // Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta — TSPU Bulletin. — 2017. — Vol. 1 (178). — P. 75–78 (in Russian).

Жидова Л. А., Мудрук В. И., Холмухаммад Ф. О проблеме формирования профессиональных компетенций будущих учителей математики и физики // Вестник ТГПУ. — 2017. — № 4 (181). — С. 84–88.
Zhidova L. A., Mudruk V. I., Kholmukhammad F. O probleme formirovaniya professional'nykh kompetentsiy budushchikh uchiteley matematiki i fiziki [On the problem of the formation of professional competences of future teachers of mathematics and physics] // Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta — TSPU Bulletin. — 2017. — Vol. 4 (181). — P. 84–88 (in Russian).

Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. — М.: Физматлит, 2003. — 416 с.
Zaytsev V. F., Polyanin A. D. Spravochnik po differentsial'nym uravneniyam v chastnykh proizvodnykh pervogo poryadka [Handbook of differential equations in partial derivatives of the first order]. — Moscow: Fizmatlit Publ., 2003. — 416 p. (in Russian).

Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Физматлит, 2002. — 256 с.
Zaytsev V. F., Polyanin A. D. Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravneniyam [Handbook of ordinary differential equations]. — Moscow: Fizmatlit, 2002. — 256 p. (in Russian).

Камке Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. — М.: Наука, 1966. — 258 с.
Kamke E. Differentialgleichungen reeller Funktionen. Band 2: Partielle Differentialgleichungen. — Leipzig: Akademishe Verlagsgaesellschaft, 1930. (Russ. ed.: *Kamke E.* Spravochnik po differentsial'nym uravneniyam v chastnykh proizvodnykh pervogo poryadka. — Moscow: Nauka, 1966. — 258 p.)

Курант Р. Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1964. — 830 с.
Courant R., Hilbert D. Methods of mathematical physics, II. — New York, N.Y.: Interscience Publishers, Inc., 1962 or *Courant R.* Partial differential equations. — New York, 1962. (Russ. ed.: *Kurant R.* Uravneniya s chastnymi proizvodnymi. — Moscow: Mir, 1964. — 830 p.)

Полянин А. Д., Зайцев В. Ф., Журов А. И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. — М.: Физматлит, 2005.
Polyanin A. D., Zaytsev V. F., Zhurov A. I. Metody resheniya nelineynykh uravneniy matematicheskoy fiziki i mekhaniki [Methods for solving non-linear equations of mathematical physics and mechanics]. — Moscow: Fizmatlit, 2005 (in Russian).

Рахмелевич И. В. О решениях многомерного уравнения Клеро с мультиоднородной функцией от производных // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2014. — Т. 14, вып. 4, ч. 1. — С. 374–381.

Rakhmelevich I. V. O resheniyakh mnogomernogo uravneniya Klero s mul'tiodnorodnoy funktsiyey ot proizvodnykh [On the Solutions of Multi-dimensional Clairaut Equation with Multi-homogeneous Function of the Derivatives] // Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya, Seriya Matematika, mekhanika, informatika. — 2014. — Vol. 14, No. 4-1. — P. 374–381 (in Russian).

Рахмелевич И. В. О решениях многомерного дифференциального уравнения произвольного порядка со смешанной старшей частной производной и степенными нелинейностями // Владикавказский математический журнал. — 2016. — Т. 18, вып. 4. — С. 41–49.

Rakhmelevich I. V. O resheniyakh mnogomernogo differentsial'nogo uravneniya proizvol'nogo poryadka so smeshannoy starshey chastnoy proizvodnoy i stepennymi nelineynostyami [On solutions of a multi-dimensional arbitrary order differential equation with a mixed senior partial derivative and power-low non-linearities] // Vladikavkazskiy matematicheskiy zhurnal. — 2016. — Vol. 18, No. 4. — P. 41–49 (in Russian).

Рахмелевич И. В. О многомерных уравнениях в частных производных со степенными нелинейностями по первым производным // Уфимск. матем. журн. — 2017. — Т. 9, № 1. — С. 98–108.

Rakhmelevich I. V. O mnogomernykh uravneniyakh v chastnykh proizvodnykh so stepennymi nelineynostyami po pervym proizvodnym [On multidimensional partial differential equations with power nonlinearities with respect to first derivatives] // Ufimskiy matematicheskiy zhurnal — Ufa Math. J. — 2017. — Vol. 9, No. 1. — P. 98–108 (in Russian).

Рыскина Л. Л. О сингулярных решениях многомерного дифференциального уравнения типа Клеро со степенной и показательной функциями // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. — 2019. — Вып. 23:2. — С. 394–401.

Ryskina L. L. O singulyarnykh resheniyakh mnogomernogo differentsial'nogo uravneniya tipa Klero so stepennoi i pokazatel'noi funktsiyami [On singular solutions of a multidimensional differential equation of Clairaut-type with power and exponential functions] // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]. — 2019. — Vol. 23, No. 2. — P. 394–401 (in Russian).

Рыскина Л. Л., Жидова Л. А. Дифференциальное уравнение типа Клеро в частных производных со степенной функцией // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. — 2019a. — № 1. — С. 41–48.

Ryskina L. L., Zhidova L. A. Differentsial'noye uravneniye tipa Klero v chastnykh proizvodnykh so stepennoy funktsiyey [Clairaut-type differential equation in partial derivatives with a power function] // BSU bulletin. Mathematics, Informatics. — 2019. — No. 1. — P. 41–48 (in Russian).

Рыскина Л. Л., Жидова Л. А. Решение дифференциальных уравнений Клеро в частных производных с логарифмической функцией // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. — 2019b. — Вып. 2. — С. 28–35.

Ryskina L. L., Zhidova L. A. Reshenie differentsial'nykh uravnenii Klero v chastnykh proizvodnykh s logarifmicheskoi funktsiei [Solution of Clairaut differential equations in partial derivatives with logarifmic function] // Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Povolzhskii region. Fiziko-matematicheskie nauki [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. — 2019. — Vol. 2. — P. 28–35 (in Russian).

Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. — М.: Физматлит, 1965. — 512 с.

Stepanov V. V. Kurs differentsial'nykh uravneniy [The course of differential equations]. — Moscow: Fizmatlit, 1965. — 512 p. (in Russian).

Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М.: Наука, 1969. — 424 с.

El'sgolts L. E. Differentsial'nyye uravneniya i variatsionnoye ischisleniye [Differential equations and calculus of variations]. — Moscow: Nauka, 1969. — 424 p. (in Russian).

Duplij S. Analysis of constraint systems using the Clairaut equation. Proceedings. Edited by B. Dragovich, Z. Rakic. — Belgrade, Institute of Physics, 2009a. — 513 p.

Duplij S. Constrained systems and the Clairaut equation. In Proceedings of 5th Mathematical Physics Meeting: “Summer School in Modern Mathematical Physics”. — Belgrade, Institute of Physics, 2009b. — P. 217–225.

Duplij S. A new Hamiltonian formalism for singular Lagrangian theories // Journal of Kharkov National University. Ser. Nuclei, Particles and Fields. — 2011. — Issue 3 (51). — P. 34–39.

Lavrov P. M., Merzlikin B. S. Effective action with composite fields and Clairaut-type equations // Phys. Rev. — 2015a. — Vol. 92 (D). — P. 085038.

Lavrov P. M., Merzlikin B. S. Loop expansion of the average effective action in the functional renormalization group approach // Phys. Rev. — 2015b. — Vol. 8 (D92). — P. 085038.

Lavrov P. M., Merzlikin B. S. Legendre transformations and Clairaut-type equations // Physics Letters. — 2016. — Vol. 756 (B). — P. 188–193.

Walker M. L., Duplij S. Cho-Duan-Ge decomposition of QCD in the constraintless Clairaut-type formalism // Phys. Rev. — 2015. — Vol. 92 (D). — P. 064022.

Zyryanova O. V., Kolesnikov O. V. One-Loop Effective Action with Composite Fields in Gauge Theories // Russian Physics Journal. — 2017. — Vol. 10 (61). — P. 126–131.

Zyryanova O. V., Mudruk V. I. Singular solution of Clairaut equations // Russian Physics Journal. — 2018. — Vol. 4 (61). — P. 635–642.