

УДК: 519.8

Математическая модель дифференциации общества с социальной напряженностью

В. Г. Цибулин^{1,a}, З. Х. Хосаева^{2,b}

¹Южный федеральный университет,
Россия, 344006, г. Ростов-на-Дону, ул. Большая Садовая, д. 105/42

²Владикавказский научный центр РАН,
Россия, 362027, РСО-Алания, г. Владикавказ, ул. Маркуса, д. 22

E-mail: ^a vgcibulin@sfnu.ru, ^b hzaiac83@mail.ru

Получено 04.09.2018, после доработки — 27.08.2019.

Принято к публикации 30.08.2019.

В статье моделируется развитие во времени многопартийной политической системы с учетом социальной напряженности. Предлагается система нелинейных дифференциальных уравнений относительно долей приверженцев партий и дополнительной скалярной переменной, характеризующей величину напряженности в обществе. Изменение доли каждой партии пропорционально текущему значению, умноженному на коэффициент, который состоит из притока беспартийных, перетоков членов из конкурирующих партий и убыли вследствие роста социальной напряженности. Напряженность прирастает пропорционально долям партий и снижается при их отсутствии. Число партий фиксировано, в модели отсутствуют механизмы объединения существующих или рождения новых партий.

Для исследования модели использован подход, основанный на выделении условий, при которых данная задача относится к классу косимметричных систем. Это позволяет проанализировать мультистабильность возможных динамических процессов и их разрушение при нарушении косимметрии. Существование косимметрии для системы дифференциальных уравнений обеспечивается наличием дополнительных связей на параметры, и при этом возможно возникновение непрерывных семейств стационарных и нестационарных решений. Для анализа сценариев нарушения косимметрии применяется подход на основе селективной функции. В случае с одной политической партией мультистабильности нет, каждому набору параметров соответствует только одно устойчивое решение. Для системы из двух партий показано, что возможны два семейства равновесий, а также семейство предельных циклов. Представлены результаты численных экспериментов, демонстрирующие разрушение семейств и реализацию различных сценариев, приводящих к стабилизации политической системы с сосуществованием обеих партий или к исчезновению одной из партий, когда часть населения перестает поддерживать одну из партий и становится безразличной.

Рассматриваемая модель может быть использована для прогнозирования межпартийной борьбы во время предвыборной кампании. В этом случае необходимо учитывать зависимость коэффициентов системы от времени.

Ключевые слова: моделирование социума, напряженность, дифференциальные уравнения, косимметрия, семейства равновесий, предельные циклы, мультистабильность

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ №№ 17-31-50050, 18-01-00453.

Авторы благодарны Е. С. Каменецкому и рецензентам за полезные замечания и стимулирующие предложения.

UDC: 519.8

Mathematical model of political differentiation under social tension

V. G. Tsybulin^{1,a}, Z. H. Khosaeva^{2,b}

¹Southern Federal University,

105/142 Bolshaya Sadovaya st., Rostov-on-Don, 344006, Russia

²Vladikavkaz Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences,
22 Markusa st., Vladikavkaz, 362027, Russia

E-mail: ^a vgcibulin@sfedu.ru, ^b hzaiac83@mail.ru

Received 04.09.2018, after completion — 27.08.2019.

Accepted for publication 30.08.2019.

We consider a model of the dynamics a political system of several parties, accompanied and controlled by the growth of social tension. A system of nonlinear ordinary differential equations is proposed with respect to fractions and an additional scalar variable characterizing the magnitude of tension in society the change of each party is proportional to the current value multiplied by a coefficient that consists of an influx of novice, a flow from competing parties, and a loss due to the growth of social tension. The change in tension is made up of party contributions and own relaxation. The number of parties is fixed, there are no mechanisms in the model for combining existing or the birth of new parties.

To study of possible scenarios of the dynamic processes of the model we derive an approach based on the selection of conditions under which this problem belongs to the class of cosymmetric systems. For the case of two parties, it is shown that in the system under consideration may have two families of equilibria, as well as a family of limit cycles. The existence of cosymmetry for a system of differential equations is ensured by the presence of additional constraints on the parameters, and in this case, the emergence of continuous families of stationary and nonstationary solutions is possible. To analyze the scenarios of cosymmetry breaking, an approach based on the selective function is applied. In the case of one political party, there is no multistability, one stable solution corresponds to each set of parameters. For the case of two parties, it is shown that in the system under consideration may have two families of equilibria, as well as a family of limit cycles. The results of numerical experiments demonstrating the destruction of the families and the implementation of various scenarios leading to the stabilization of the political system with the coexistence of both parties or to the disappearance of one of the parties, when part of the population ceases to support one of the parties and becomes indifferent are presented.

This model can be used to predict the inter-party struggle during the election campaign. In this case necessary to take into account the dependence of the coefficients of the system on time.

Keywords: modeling of society, tensivity, differential equations, cosymmetry, families of equilibria, limit cycles, multistability

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2019, vol. 11, no. 5, pp. 999–1012 (Russian).

This work was supported by Russian Foundation for Basic Research. Grants Nos. 17-31-50050, 18-01-00453.

The authors are grateful to E. S. Kamenetsky and unknown referees for helpful comments and stimulative suggestions.

Введение

Прогнозирование политической динамики и возможных сценариев развития общества является актуальной, но трудной задачей. Глобализация и открытость современного общества делают его достаточно нестабильным и, в силу этого, малопредсказуемым. С другой стороны, появляются новые инструменты воздействия на различные социальные группы. В этих условиях математическое моделирование может внести существенный вклад в понимание социальных процессов и выбор реализуемых стратегий.

Моделирование общественных процессов требует учета многих факторов и содержит большое число параметров, определение которых априори не точно [Comissiong, Sooknanan, 2018]. Это связано с малой предсказуемостью человеческого фактора, сложностью получения достоверных данных, трудностью верификации полученных результатов. Для анализа современного состояния общества и прогнозирования его динамики естественно использовать различные математические методы [Самарский, Михайлов, 2001]. Используемые при этом модели обычно бывают динамическими, имитационными и теоретико-игровыми [Шведовский, Петрова, 2001; Александров, Ахременко, 2011; Малинецкий, Потапов, 1998; Карадже, 2012].

Построение математических моделей требует выдвижения гипотез о функциональной зависимости между интересующей исследователя величиной и факторами, которые влияют на ее изменение. Исследование полученных математических структур может позволить предсказать возможный характер поведения социальной системы. Это обуславливает применение динамических моделей для анализа возможного поведения социальной системы и проведения вычислительных экспериментов для уточнения положенных в основу модели гипотез.

В последнее время при прогнозировании социальных явлений активно применяются модели, получившие распространение при описании экологических сценариев [Misra, 2012; Bosse et al., 2013; Reding et al., 2016; Nyabadza et al., 2016; Михайлов и др., 2017; Dominioni et al., 2018; Berestycki et al., 2019; Comissiong, Sooknanan, 2018]. Так, в [Misra, 2012] анализ динамики двухпартийной системы проводится на основе трех обыкновенных дифференциальных уравнений. На основе близкой модели в [Nyabadza et al., 2016] исследуются процессы «переключения», описывающие изменение партийных представительств путем введения функций для переходов. Модель информационного противоборства в социуме рассматривается на основе системы двух нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с периодической разрывной правой частью [Михайлов и др., 2017]. Неавтономная модель Лотки – Вольтерры используется в [Dominioni et al., 2018] для изучения и прогнозирования взаимодействия расовых групп. В [Berestycki et al., 2019] исследуется система дифференциальных уравнений с запаздыванием для моделирования динамики социальных возмущений, в которой анализируется уровень активности и социального напряжения. В [Вайдлих, 2005] обсуждаются подходы к моделированию социальных групп с учетом групповых целей и идеологий. Отмечается, что имеется большое число факторов, которые трудно оценить количественно, и это затрудняет интерпретацию решений.

Интерес представляет построение и анализ моделей, допускающих некоторые «идеальные» сценарии при определенных соотношениях на параметры с последующим изучением «реальных» сценариев при возмущениях параметров (отклонениях от идеальных ситуаций). По мнению авторов, для исследования таких моделей эффективным является использование теории косимметрии [Юдович, 1991; Yudovich, 1995], которая была построена В. И. Юдовичем для объяснения одновременного существования бесконечного числа стационарных режимов в задаче фильтрационной конвекции. Согласно [Юдович, 1991] косимметрией дифференциального уравнения $\dot{u} = F(u)$, $u \in R^n$ называется вектор, ортогональный F , т.е. $(L, F) = 0$. Если система дифференциальных уравнений имеет равновесие u_* и $L(u_*) \neq 0$, то при отсутствии дополнительных вырождений равновесие u_* принадлежит семейству равновесий. В отличие от задачи с непрерывной симметрией, в которой стационарные решения из семейства обладают одинаковым спектром

устойчивости, в случае косимметрии возникают семейства решений с индивидуальным спектром устойчивости.

Существование косимметрии для системы дифференциальных уравнений обеспечивается обычно наличием дополнительных связей на параметры системы, и при этом возможно возникновение непрерывных семейств стационарных или нестационарных решений. Системы с косимметрией демонстрируют мультистабильность с сосуществованием равновесий и колебательных режимов. Такие сценарии возникают, например, в задачах динамики популяций [Frischmuth et al., 2011; Епифанов, Цибулин, 2017; Budyansky et al., 2019]. Далее для анализа сценариев нарушения косимметрии и распада семейства решений применяется подход на основе селективной функции [Юдович, 2004].

Математическая модель стратификации общества

Рассмотрим модель развития во времени t политической системы, состоящей из n групп или партий. Пусть $u_i(t)$ — доля i -й партии (группы), $u_0(t)$ — доля «безразличных» (партийно неопределившихся) граждан, так что

$$\sum_{i=0}^n u_i = 1,$$

Считается, что изменение каждой партии пропорционально произведению ее текущего значения (доли населения) и множителя, учитывающего сопутствующие факторы:

$$\frac{du_i}{dt} = u_i \left[\alpha_i f(u_0) + \sum_{j \neq i}^n \mu_{ij} u_j - \beta_i v \right]. \quad (1)$$

Функция $f(u_0)$ характеризует прирост за счет людей, не вовлеченных в партии, α_i — соответствующий параметр роста. Слагаемые с коэффициентами μ_{ij} позволяют учесть межпартийные перетоки. Последнее слагаемое характеризует изменение доли партии за счет социальной напряженности $v(t)$.

В качестве $f(u_0)$ могут быть использованы различные функциональные зависимости, далее в основном рассматривается квадратичный закон

$$f(u_0) = u_0(1 - u_0), \quad u_0 = 1 - \sum_{i=1}^n u_i, \quad (2)$$

описывающий прекращение поступления новых членов при отсутствии беспартийных ($u_0 = 0$) и трудное начало организации партий ($u_0 = 1$).

Для коэффициентов μ_{ij} , используемых при описании межпартийных перетоков, принимаются следующие условия:

$$\mu_{ij} = -\mu_{ji}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (3)$$

Это условие означает, что при нулевой напряженности ($v = 0$) и нулевом числе «безразличных» ($u_0 = 0$) сумма партийных долей равна единице в каждый момент времени. Предполагается, что доля переходящих из одной партии в другую пропорциональна численностям партий. Аналогичный член встречается в модели Лотки–Вольтерры, и его вид связан с контактами между «хищником» и «жертвой».

Слагаемые с коэффициентами β_i учитывают снижение или увеличение численности партии при росте напряженности. Модель допускает, что в результате роста напряженности (например, усиление межпартийной борьбы) часть населения перестает поддерживать соответствующую партию и становится безразличной.

Изменение напряженности регулируется множителем, включающим коэффициент релаксации γ , и слагаемыми прироста, который пропорционален весу партий с параметрами δ_i :

$$\frac{dv}{dt} = v \left[-\gamma + \sum_{j=1}^n \delta_j u_j \right]. \quad (4)$$

Рассматривается модель, в которой учитывается, что партии по-разному влияют на рост напряженности. Принято, что напряженности нет при индифферентности населения, ее спад возможен, если большинство общества входит в партию, слабо подпитывающую социальное напряжение.

В общем случае параметры роста, релаксации и другие могут быть функциями времени, тогда система (1)–(4) будет состоять из $n + 1$ дифференциального уравнения первого порядка с переменными коэффициентами.

1. Система для одной партии

При $n = 1$ заменой переменных ($\tau = t\alpha_1$) и $z = v\beta_1/\alpha_1$ модель (1), (4) приводится к системе второго порядка относительно доли единственной партии $x = u_1$, напряженности z с двумя параметрами c, d :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= x[f(1-x) - z], \\ \frac{dz}{d\tau} &= z[-c + dx], \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$c = \frac{\gamma}{\alpha_1}, \quad d = \frac{\delta_1}{\alpha_1}.$$

Система (5) при $f(1-x) = 1$ сводится к модели Лотки–Вольтерры, с периодическими колебаниями численности партии («жертва») и напряженности («хищник»). Имеется семейство заполняющих фазовое пространство интегральных кривых; амплитуда колебаний зависит от начального уровня напряженности и численности партии.

В случае $f(1-x) = 1-x$ получается система, для которой в диапазоне $c > d$ устойчиво стационарное решение $x = 1, z = 0$ (все население в одной партии, полная мобилизованность, напряженности нет). При $c \leq d$ устойчиво стационарное решение $x = c/d, z = 1 - c/d$, что соответствует постоянным уровням партийной вовлеченности и напряженности («застой»). Других равновесий или периодических решений нет.

Для $f(1-x) = x(1-x)$ получается модель, для которой в диапазоне $c \geq d$ устойчиво стационарное решение $x = 1, z = 0$ (все население в одной партии, полная мобилизованность, напряженности нет). В диапазоне $d/2 < c < d$ устойчиво стационарное решение $x = c, z = a(1-c)$, что соответствует большому партийному представительству и постоянному уровню напряженности. При $c < d/2$ реализуются периодические колебания.

Таким образом, модель с одной партией не допускает мультистабильности, каждому набору параметров соответствует только одно устойчивое решение.

2. Система для двух партий

При $n = 2$ заменой времени ($\tau = t\alpha_1$) и напряженности $z = v\beta_1/\alpha_1$ можно уменьшить число параметров. В результате получается система трех уравнений относительно долей партий $x = u_1,$

$y = u_2$ и z :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\tau} &= x[f(1-x-y) + my - z], & f(w) &= w(1-w), \\ \frac{dy}{d\tau} &= y[af(1-x-y) - mx - bz], \\ \frac{dz}{d\tau} &= z[-c + d_1x + d_2y],\end{aligned}\tag{6}$$

где

$$m = \frac{\mu_1}{\alpha_1}, \quad a = \frac{\alpha_1}{\alpha_1}, \quad b = \frac{\beta_1}{\beta_1}, \quad c = \frac{\gamma}{\alpha_1}, \quad d_1 = \frac{\delta_1}{\alpha_1}, \quad d_2 = \frac{\delta_2}{\alpha_1}.$$

Система (6) имеет равновесие, отвечающее отсутствию партий и нулевой напряженности:

$$x = y = z = 0.\tag{7}$$

Анализ показывает, что это равновесие неустойчиво и при ненулевых начальных данных для x и/или y формируется политическая партийная структура.

Мультистабильность — сосуществование решений — получается при отсутствии перетоков ($m = 0$), когда имеется континуальное семейство равновесий:

$$x + y = 1, \quad z = 0,\tag{8}$$

связанное с наличием косимметрии на инвариантном подпространстве $z = 0$:

$$L = (ay, -x, 0).\tag{9}$$

Это семейство содержит решения

$$x = 1, \quad y = 0, \quad z = 0\tag{10}$$

и

$$x = 0, \quad y = 1, \quad z = 0,\tag{11}$$

которые являются равновесиями и при ненулевых значениях параметра интенсивности перетока m . Этому соответствует ситуация, когда все население состоит в одной партии и напряженность равна нулю.

Устойчивость равновесий в семействе равновесий (8) (нулевой уровень напряженности) определяется собственными числами матрицы линеаризации:

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = -a(1-x) - x, \quad \sigma_3 = -c + d_1x + d_2(1-x).$$

Нулевое значение σ_1 соответствует направлению вдоль непрерывного семейства равновесий. Остальные два собственных числа зависят от континуального номера равновесия на семействе $x \in [0,1]$, при этом $\sigma_2 < 0$. Если коэффициенты удовлетворяют неравенствам $c < d_2 - a$, $d_2 < c < 1 + d_1$, то при любых допустимых значениях $0 \leq x \leq 1$ все равновесия семейства будут устойчивы. При $a = 1$ и $d_1 = d_2$ спектр устойчивости членов семейства одинаков. Это соответствует одинаковому воздействию обеих партий на власть.

Если перетоков нет ($m = 0$) и выполнено условие $a = b$, то у системы (6) также имеется семейство равновесий

$$d_1x + d_2y = c, \quad z = f(1-x-y),\tag{12}$$

вызванное существованием косимметрии (9).

В случае ненулевых m семейство (12) разрушается, но остаются равновесия, отвечающие ситуации выживания только одной партии при стационарном уровне напряженности.

$$x = \frac{c}{d_1}, \quad z = f\left(1 - \frac{c}{d_1}\right) \tag{13}$$

и

$$y = \frac{c}{d_3}, \quad z = \frac{a}{b}f\left(1 - \frac{c}{d_2}\right). \tag{14}$$

Поскольку при $m = 0$ и $\delta = 0$ ($b = a$) система является косимметричной, то в зависимости от начальных данных могут реализоваться различные сценарии дифференциации партий. На рис. 1, 2 представлены графики зависимости от времени долей партий x , y и напряженности z при следующих значениях параметров: $a = 1.5$, $c = 0.6$, $d_1 = 0.5$, $d_2 = 1.4$. Начальные значения для y и z были фиксированы, менялась начальная величина x .

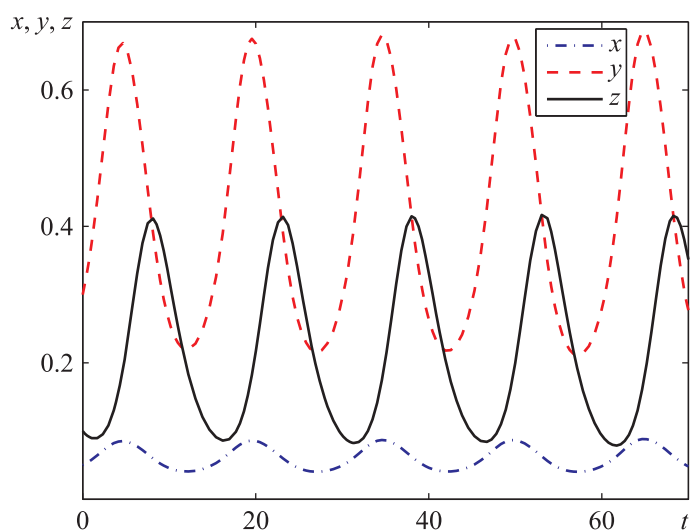


Рис. 1. Графики зависимости от времени долей партий x , y и напряженности z для решения из семейства предельных циклов; начальные данные: $x(0) = 0.05$, $y(0) = 0.3$, $z(0) = 0.1$; параметры: $a = 1.5$, $c = 0.6$, $d_1 = 0.5$, $d_2 = 1.4$

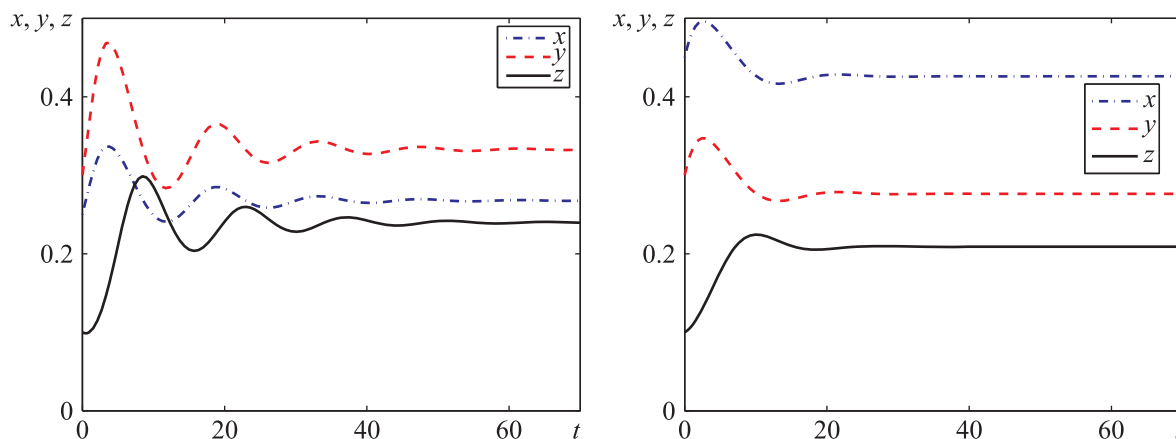


Рис. 2. Установление к равновесиям из семейства (12) для различных значений $x(0)$, $y(0)$, $z(0)$

При малых стартовых долях партии x формируются предельные циклы (см., например, рис. 1), когда периодически меняются доли партий и уровень напряженности. Видно, что изменение долей партий x и y синхронизированы, а рост напряженности следует за достижением партийных максимумов. За этим происходит снижение партийных долей и увеличение числа беспартийных.

Для начальных значений x и y из некоторого бассейна также в результате установления происходит колебательный выход на стационарные режимы, принадлежащие семейству (12).

При малых начальных y , z и больших значениях x происходит снижение напряженности до нуля и происходит формирование стационарного состояния с преобладанием партии x , то есть реализуется одно из равновесий семейства (8).

Фазовые портреты трех циклов из семейства колебательных режимов приведены на рис. 3. Увеличение амплитуды колебаний отвечает уменьшению доли партии x .

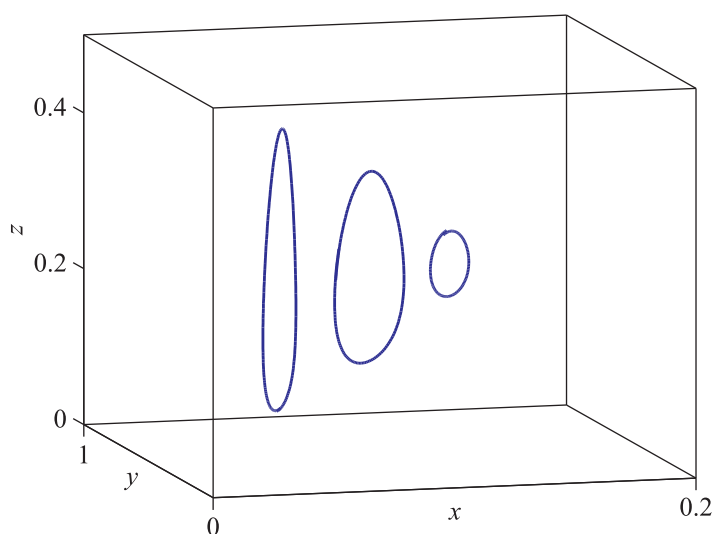


Рис. 3. Три предельных цикла из семейства; $a = 1.5$, $c = 0.6$, $d_1 = 0.5$, $d_2 = 1.4$

3. Решения при возможности партийных перетоков

Для исследования разрушения семейств равновесий используем построение косимметричного дефекта и селективной функции [Юдович, 2004]. При ненулевых перетоках ($m \neq 0$) получаем косимметричный дефект (произведение векторов правой части системы и косимметрии):

$$D = xy [m(ay + x) + (a - b)z]. \quad (15)$$

Для семейства (8) в качестве параметра выбирался x : тогда $y = 1 - x$, и из (15) получаем селективную функцию

$$S(x) = mx(1 - x)(a - ax + x). \quad (16)$$

Наличие перетоков приводит к тому, что при $a \neq 1$ селективная функция имеет три корня: два совпадают с равновесиями (10) и (11), соответствующими победе одной из партий при нулевой напряженности. Третье решение —

$$x = \frac{a}{a-1}, \quad y = -\frac{1}{a-1}, \quad z = 0,$$

— не имеет смысла, так как дает численности партий разных знаков. Таким образом, при наличии партийных перетоков, независимо от их направления ($m \neq 0$), косимметрия разрушается.

Подстановкой параметрического представления семейства (12) —

$$y = \frac{c - d_1 x}{d_2}, \quad z = f(1 - x - y), \quad x \in \left[0, \frac{c}{d_1}\right],$$

— в косимметричный дефект (15) получается селективное уравнение относительно x . Его решениями являются $x = 0$ и $x = c/d_1$, а кроме того, возможно решение с ненулевыми x, y, z .

При фиксированных параметрах $a = 1.5, c = 0.6, d_1 = 0.5, d_2 = 1.4$ динамика системы анализировалась в зависимости от параметров m и $\delta = b - a$. На рис. 4 дана карта для параметров $m, \delta = b - a$. Цифрами отмечены некоторые значения, при которых реализуются различные режимы. Пунктирные линии соответствуют значениям параметров, при которых система является косимметричной: $m = 0$ и $\delta = 0$ ($b = a$). Между сплошной кривой и прямой $m = 0$ находится область значений параметров, при которых существуют равновесия с ненулевыми координатами x, y, z , т.е. имеется стационарное состояние с ненулевыми численностями обеих партий и напряженностью. Эти равновесия устойчивы при $m < 0$ и неустойчивы при $m > 0$. Например, цифре 2 ($m = -0.06, \delta = 0.3$) отвечает равновесие с координатами $(0.4936, 0.2523, 0.1744)$ и спектром устойчивости $(-0.0248, -0.2020 \pm i0.3189)$, а цифре 5 ($m = 0.08, \delta = -0.3$) отвечает равновесие $(0.4426, 0.2705, 0.2262)$ со спектром $(0.0290, [-0.1953 \pm i0.3590])$.

Для значений параметров из области, помеченной цифрой 5, наблюдается мультистабильность — в зависимости от начальных данных происходит установление либо к предельному циклу (см. рис. 5, слева), либо к устойчивому равновесию (рис. 5, справа). В эксперименте менялось начальное значение доли партии x добавлением ε : положительное ε отвечало единовременному увеличению партии x , а отрицательное — снижению. Это можно интерпретировать как возможность управления сценариями развития политической системы.

В том случае, когда значения параметров $m, \delta = b - a$ брались вне области 5, устойчивым оказывался один режим. Для значений параметров из области 6 (справа от 5) получалось равновесие $x = 1, y = z = 0$ — монополия одной партии. При отрицательных m реализовывался предельный цикл на плоскости $x = 0$ (колебания численности партии y и напряженности z).

При выходе параметров за область, помеченную цифрой 2, происходит трансформация устойчивого равновесия, отвечающего сосуществованию обеих партий с ненулевой напряженностью. Для параметров из области 1 получается предельный цикл на плоскости $x = 0$. На рис. 6 показано, что вне зависимости от начального возмущения численности партии x происходит

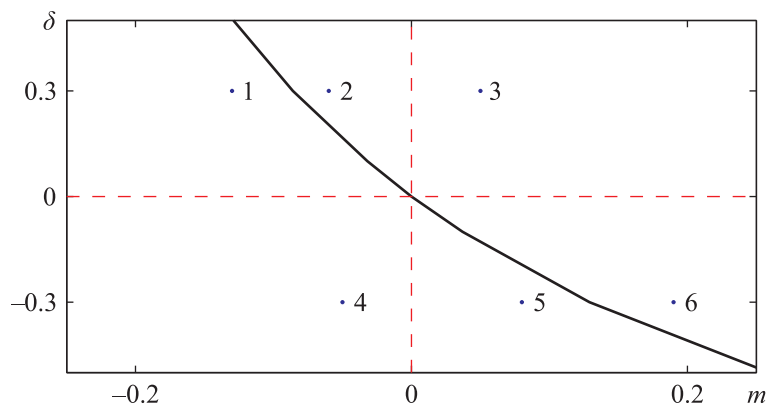


Рис. 4. Области реализации различных решений системы в зависимости от коэффициента интенсивности перетоков m и и разности параметров роста $\delta = b - a$, линии косимметрии (пунктир); 1, 4 — предельный цикл при отсутствии партии x ; 3, 6 — стационарное решение $x = 1$; 2 — равновесие с ненулевыми напряженностью и долями партий; 5 — реализация предельного цикла или равновесия в зависимости от начальных данных

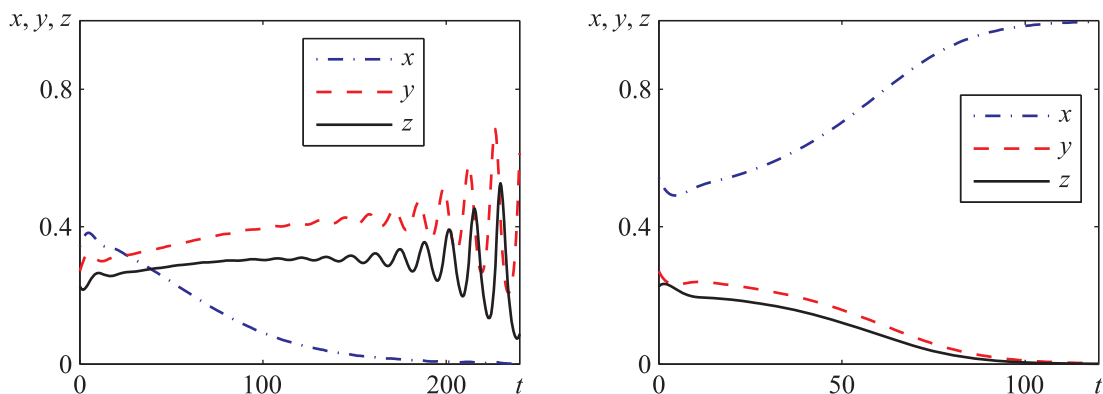


Рис. 5. Установление к предельному циклу системы в области мультистабильности (слева, $\varepsilon = -0.1$) и равновесию в этой же области (справа, $\varepsilon = 0.1$); в зависимости от начальных данных $m = 0.08$, $\delta = -0.3$, $x(0) = 0.4426 + \varepsilon$, $y(0) = 0.2705$, $z(0) = 0.2262$

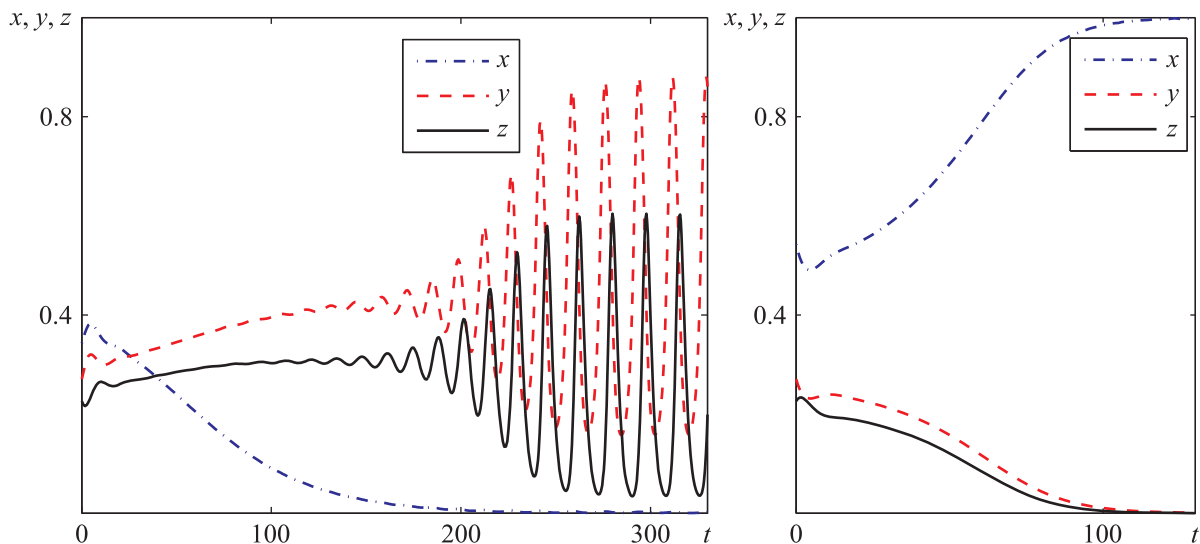


Рис. 6. Установление к предельному циклу системы вне области мультистабильности: $\varepsilon = -0.1$ (слева) и $\varepsilon = 0.1$ (справа); $m = -0.16$, $\delta = 0.3$, $x(0) = 0.4936 + \varepsilon$, $y(0) = 0.2523$, $z(0) = 0.1744$

установление, приводящее к колебаниям численности партии y и напряженности z . Одновременное увеличение доли партии x только отодвигает время ее гибели. Для других начальных данных установление может завершиться достаточно быстро. Из рис. 6 видно, что вначале траектория приближается к неустойчивому равновесию (фокусу), а затем уже происходит выход на периодические колебания доли партии $y(t)$ и напряженности $z(t)$. Здесь имеет место нестационарный процесс противоборства — одновременного существования двух партий, которое завершается исчезновением партии, из которой идет отток членов.

При положительных перетоках в m (область 3) реализуется равновесие, отвечающее монополии партии x . Так как $d_2 > d_1$, то переток из второй партии приводит к уменьшению основной базы напряженности, что в результате приводит к ликвидации самой партии y .

На рис. 7 представлены траектории, реализующиеся при разрушении семейства предельных циклов в случае ненулевых m . В зависимости от направления перетока (знак m) реализуется либо стремление к предельному циклу с угасанием партии x , либо выход на стационарное решение $x = 1$ с нулевой напряженностью ($z = 0$). Из рис. 7 видно, что колебательный процесс проходит возле оболочки, которая может быть получена объединением траекторий циклов из семей-

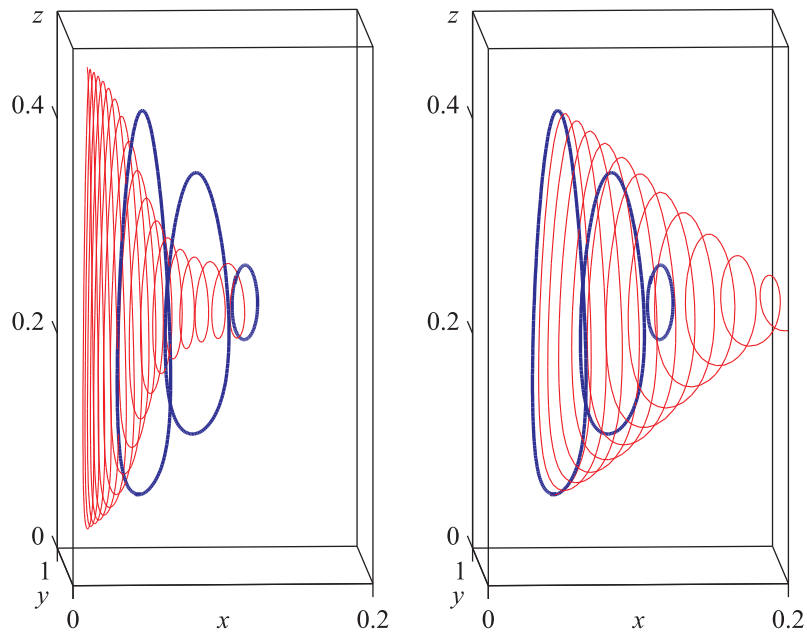


Рис. 7. Разрушение семейства предельных циклов при $m = 0.02$ (слева) и $m = 0.02$ (справа); $a = 1.5$, $c = 0.6$, $d_1 = 0.5$, $d_2 = 1.4$

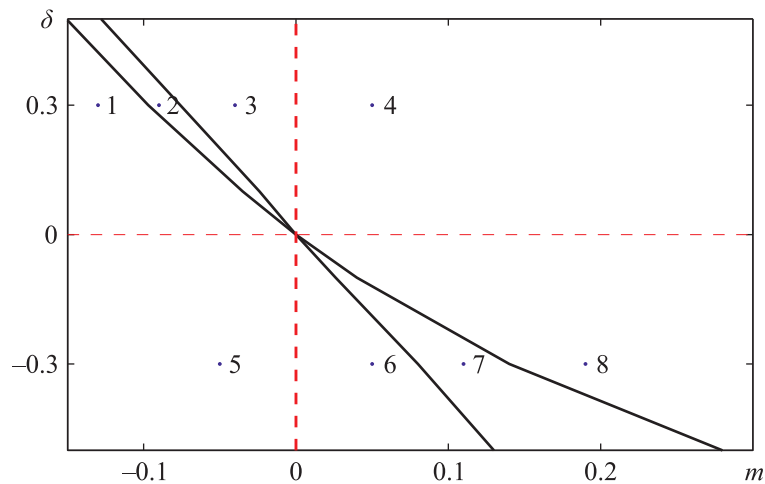


Рис. 8. Области реализации различных решений системы в зависимости от параметров m и $\delta = b - a$, линии косимметрии (пунктир) при $d_1 = 0.8$

ства. При раскрутке к предельному циклу имеет место запаздывание по амплитуде, а при установлении к равновесию траектория реализуется поверх оболочки семейства предельных циклов.

Если увеличить значение параметра d_1 , чтобы $c < d_1 < 2c$, то в случае косимметрии ($m = 0$, $a = b$) среди сценариев не будет решений с одной ненулевой компонентой партии x (невозможна тотальная монополия и отсутствие напряженности). На рис. 8 приведена карта режимов, рассчитанная при $d_1 = 0.8$. Начальные данные были одинаковы (0.5, 0.2, 0.3) (преимущество одной партии над другой и заметная социальная напряженность).

Для значений параметров m и $\delta = b - a$ из областей 1, 5, 6 реализуется колебательный сценарий гибели партии x . Для областей 3, 4 характерно исчезновение партии y . Стационарное решение с сосуществующими партиями x , y и ненулевой напряженностью z получается для параметров из области 2.

Заключение

Получившие распространение при анализе экологических сценариев модели Лотки, Вольтерры, Колмогорова и др. естественно применить для описания процессов конкуренции и взаимодействия различных социальных групп. На функционирование политической системы влияют разные факторы, и это побуждает партии к изменению их конкурентных стратегий. В данной работе сделана попытка моделирования изменения партийных долей при помощи одной переменной величины («хищника») — социальной напряженности. При этом использованы простые предположения о росте или спаде социальной напряженности, характере влияния напряженности на изменение партийных пропорций. В известных нам работах не изучались совместно эволюции относительных численностей партий и социальной напряженности в обществе.

Новизна подхода состоит в определении параметров, при которых задача становится косимметричной и в ней появляются семейства решений, а затем можно изучать рассматриваемую модель как возмущенную по отношению к задаче с косимметрией. При этом появляются возможности анализа диапазонов изменения параметров системы, характеризующих различные сценарии. Исследование показало, что даже при существенном отклонении параметров от косимметричной ситуации динамический процесс представляет собой последовательную реализацию состояний, близких к членам семейства решений системы с косимметрией.

Представленные результаты получены при параметрах, не зависящих от времени. Понятно, что конкурирующие политические силы могут в некоторой степени корректировать развитие неблагоприятного сценария. В частности, для сокращающейся партии можно предпринять усилия для изменения величины перетока (параметр m) или коэффициента убыли за счет напряженности (параметр b). Для оценки корректировки могут быть использованы диаграммы, подобные приведенным на рис. 4 и рис. 8. Это означает, что с помощью данной системы можно моделировать межпартийную борьбу во время предвыборной кампании, анализировать равновесия и динамические режимы. При этом конкуренция не сводится к статическим сценариям, характерным для задач, возникающих при описании электоральных сценариев на основе модели Хотеллинга – Даунса [Brusco et al., 2012].

Данная модель может быть применена также для описания противоборства правительства и одной или нескольких экстремистских групп, например для описания событий в Германии в 20-х годах (борьба коммунистов и фашистов) и в Египте во время арабской весны (борьба прозападных групп и фундаменталистов против правительства) [Хосаева, 2015].

Список литературы (References)

Александров П. Н., Ахременко А. С. Математическое моделирование политических процессов // Вестник Московского университета. Сер. 12. Политические науки. — 2011. — № 3. — С. 24–31.

Aleksandrov P. N., Ahrimenko A. S. Matematicheskoe modelirovanie politicheskikh protsessov [Mathematical modeling of political processes] // Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. 12. Politicheskie nauki [Vestnik MSU. Ser. 12. Political processes]. — 2011. — No. 3. — P. 24–31 (in Russian).

Вайдлих В. Социодинамика: системный подход к математическому моделированию в социальных науках. — М.: Едиториал, УРСС, 2005. — 480 с.

Weidlich W. Sociodynamics — a systematic approach to mathematical modelling in the social sciences. — Harwood Academic Publishers: Amsterdam, 2000. (Russ. ed.: Vaidlikh V. Sotsiodinamika: sistemnyi podkhod k matematicheskomu modelirovaniyu v sotsial'nykh naukakh. — Moscow: Editorial, URSS, 2005. — 480 p.)

- Епифанов А. В., Цибулин В. Г.* О динамике косимметричных систем хищников и жертв // Компьютерные исследования и моделирование. — 2017. — Т. 9, № 5. — С. 799–813.
Epifanov A. V., Tsybulin V. G. O dinamike kosimmetrichnykh sistem khishchnikov i zhertv [Regarding the dynamics of cosymmetric predator–prey systems] // Computer research and modeling. — 2017. — Vol. 9, No. 5. — P. 799–813 (in Russian).
- Малинецкий Г. Г., Потанов А. Б.* Русла и джокеры: нейросетевой взгляд на сложную динамику // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. — 1998. — Т. 6, № 4. — С. 18–30.
Malinetsky G. G. Rusla i dzhokery: neirossetevoi vzglyad na slozhnuyu dinamiku [Rusla and Jokers: A Neuroet Network Look At A Complex Dynamics] // Izv. vuzov. Prikladnaya nelineinaya dinamika [Izvestiya vuz. Applied Nonlinear Dynamics.] — 1998. — Vol. 6, No. 4. — P. 18–30 (in Russian).
- Методология моделирования и прогнозирования современного мира / под ред. Т. В. Карадже. — М.: Прометей, 2012. — 280 с.
Metodologiya modelirovaniya i prognozirovaniya sovremennogo mira [Methodology of modeling and forecasting of the modern world] / edited by T. V. Karadje. — Moscow: Prometei, 2012. — 280 p. (in Russian).
- Михайлов А. П.* Моделирование системы «власть – общество». — М.: Физматлит, 2006. — 144 с.
Mikhailov A. P. Modelirovanie sistemy “vlast’–obshchestvo» [Modeling of the system «rule–society»]. — Moscow: Fizmatlit, 2006. — 144 p. (in Russian).
- Михайлов А. П., Петров А. П., Прончева О. Г., Маревцева Н. А.* Модель информационного противоборства в социуме при периодическом дестабилизирующем воздействии // Математическое моделирование. — 2017. — Т. 29, № 2. — С. 23–32.
Mikhailov A. P., Petrov A. P., Proncheva O. G., Marevtseva N. A. A Model of Information Warfare in a Society Under a Periodic Destabilizing Effect // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2017. — Vol. 9 (5). — P. 580–586. (Original Russian paper: *Mikhailov A. P., Petrov A. P., Proncheva O. G., Marevtseva N. A.* Model’ informatsionnogo protivoborstva v sotsiуме pri periodicheskom destabiliziruyushchem vozdeistvii // Matematicheskoe modelirovanie. — 2017. — Vol. 29, No 2. — P. 23–32.)
- Самарский А. А., Михайлов А. П.* Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры. — М.: Физматлит, 2001. — 320 с.
Samarskii A. A., Mikhailov A. P. Matematicheskoe modelirovanie. Idei. Metody. Primery [Principles of Mathematical Modelling. Ideas, Methods, Examples]. — Moscow: Fizmatlit, 2001. — 320 p. (in Russian).
- Хосаева З. Х.* Математическая модель протестных акций // Компьютерные исследования и моделирование. — 2015. — Т. 7, № 6. — С. 1333–1343.
Khosaeva Z. H. Matematicheskaya model’ protestnykh aksii [Mathematical model of protest actions] // Computer research and modeling. — 2015. — Vol. 7, No. 6. — P. 1333–1343 (in Russian).
- Юдович В. И.* Косимметрия, вырождение решений операторных уравнений, возникновение фильтрационной конвекции // Мат. заметки. — 1991. — Т. 49, № 5. — С. 142–148.
Yudovich V. I. Cosymmetry, degeneracy of the solutions of operator equations and the onset of filtrational convection // Math. Notes. — 1991. — Vol. 49. — P. 540–545. (Original Russian paper: *Yudovich V. I.* Kosimmetriya, vyrozhdenie reshenii operatornykh uravnenii, vzniknovenie fil’tratsionnoi konveksii // Mat. zametki. — 1991. — Vol. 49, No. 5. — P. 142–148.)
- Юдович В. И.* О бифуркациях при возмущениях, нарушающих косимметрию // Докл. РАН. — 2004. — Т. 398, № 1. — С. 57–61.
Yudovich V. I. Bifurcations under perturbations violating cosymmetry // Physics-Doklady. — 2004. — Vol. 49. — P. 522–526. (Original Russian paper: *Yudovich V. I.* O bifurkatsiyakh pri vozmushcheniyakh, narushayushchikh kosimmetriyu // Dokl. RAN. — 2004. — Vol. 398, No. 1. — P. 57–61.)
- Шведовский В. А., Петрова М. А.* Математическое моделирование динамики напряженности этно-политического конфликта // Социология: 4М. — 2001. — № 14. — С. 151–175.
Shvedovskii V. A. Matematicheskoe modelirovanie dinamiki napryazhennosti etno-politicheskogo konflikta [Mathematical modeling of the dynamics of the stress of the ethno-political conflict] // Sotsiologiya: 4M [Sociology: 4M]. — 2001. — No. 14. — P. 151–175 (in Russian).
- Berestycki H., Rossi L., Rodriguez N.* Periodic cycles of social outbursts of activity // J. Differential Equations. — 2018. — Vol. 264. — P. 163–196.
- Bosse T., Hoogendoorn M., Klein M. C. A., Treur J., van der Wal C. N., van Wissen A.* Modelling collective decision making in groups and crowds: Integrating social contagion and interacting emotions, beliefs and intentions // Autonomous Agents and Multi-Agent Syst. — 2013. — Vol. 27. — P. 52–84. — DOI: 10.1007/s10458-012-9201-1

- Brusco S., Dziubinski M., Roy J.* The Hotelling-Downs model with runoff voting // *Games and Economic Behavior*. — 2012. — Vol. 74. — P. 447–469. — DOI: 10.1016/j.geb.2011.08.004
- Budyansky A. V., Frischmuth K., Tsybulin V. G.* Cosymmetry approach and mathematical modeling of species coexistence in a heterogeneous habitat // *Discrete & Continuous Dynamical Systems — B*. — 2019. — Vol. 24. — P. 547–561.
- Comissiong D. M. G., Sooknanan J.* A review of the use of optimal control in social models // *Internat. J. of Dynamics and Control*. — 2018. — Vol. 6 (4). — P. 1841–1846.
- Dominioni G., Marasco A., Romano A.* A mathematical approach to study and forecast racial groups interactions: deterministic modeling and scenario method // *Qual. Quant.* — 2018. — Vol. 52. — P. 1929–1956. — doi.org/10.1007/s11135-017-0581-9
- Frischmuth K., Kovaleva E. S., Tsybulin V. G.* Family of equilibria in a population kinetics model and its collapse // *Nonlinear Analysis: Real World Applications*. — 2011. — Vol. 12. — P. 145–155.
- Misra A. K.* A simple mathematical model for the spread of two political parties // *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*. — 2012. — Vol. 17, No. 3. — P. 343–354.
- Nyabadza F., Alasse T. Y., Muchatibaya G.* Modelling the dynamics of two political parties in the presence of switching // *SpringerPlus*. — 2016. — 5:1018. — doi.org/10.1186/s40064-016-2483-z
- Reding I., Kelley M., Rowell J. T., Rychtar J.* A continuous ideal free distribution approach to the dynamics of selfish, cooperative and kleptoparasitic populations // *R. Soc. opensci.* — 2016. — 3:160788. — dx.doi.org/10.1098/rsos.160788
- Rinaldi S., Della Rossa F.* Conflicts among N armed groups: scenarios from a new descriptive model // *Nonlinear Dynamics*. — 2018. — Vol. 92, No. 3. — P. 3–12. — doi.org/10.1007/s11071-017-3446-9
- Yudovich V. I.* Secondary cycle of equilibria in a system with cosymmetry, its creation by bifurcation and impossibility of symmetric treatment of it // *Chaos*. — 1995. — Vol. 5. — P. 402–411.