**КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2019 Т. 11 № 5 С. 949–963**
DOI: 10.20537/2076-7633-2019-11-5-949-963

УДК: 330.4.51-77

Техника проведения расчетов динамики показателей олигополистических рынков на основе операционного исчисления

Л. Е. Варшавский

Центральный экономико-математический институт РАН,
Россия, 117418, г. Москва, Нахимовский пр., д. 47

E-mail: hodvar@yandex.ru

Получено 19.06.2019, после доработки — 05.09.2019.
Принято к публикации 09.09.2019.

В настоящее время наиболее распространенный подход к расчету оптимальных по Нэшу–Курно стратегий участников олигополистических рынков, а следовательно и показателей таких рынков, связан с использованием линейных динамических игр с квадратичными критериями и решением обобщенных матричных уравнений Риккати.

Другой подход к исследованию оптимальных разомкнутых (open-loop) стратегий участников олигополистических рынков, развиваемый автором, основан на использовании операционного исчисления (в частности, Z-преобразования). Этот подход позволяет получить экономически приемлемые решения для более широкого диапазона изменения параметров используемых моделей, чем при применении методов, основанных на решении обобщенных матричных уравнений Риккати. Метод отличается относительной простотой вычислений и необходимой для экономического анализа наглядностью. Одним из его достоинств является то, что во многих важных для экономической практики случаях он, в отличие от традиционного подхода, обеспечивает возможность проведения расчетов с использованием широко распространенных электронных таблиц, что позволяет проводить исследование перспектив развития олигополистических рынков широкому кругу специалистов и потребителей.

В статье рассматриваются практические аспекты определения оптимальных по Нэшу–Курно стратегий участников олигополистических рынков на основе операционного исчисления, в частности техника проведения расчетов оптимальных по Нэшу–Курно стратегий в среде Excel. В качестве иллюстрации возможностей предлагаемых методов расчета исследуются примеры, близкие к практическим задачам прогнозирования показателей рынков высокотехнологичной продукции.

Полученные автором для многочисленных примеров и реальных экономических систем результаты расчетов, как с использованием полученных соотношений на основе электронных таблиц, так и с использованием расширенных уравнений Риккати, оказываются весьма близкими. В большинстве рассмотренных практических задач отклонение рассчитанных в соответствии с двумя подходами показателей, как правило, не превышает 1.5–2 %. Наибольшая величина относительных отклонений (до 3–5 %) наблюдается в начале периода прогнозирования. В типичных случаях период сравнительно заметных отклонений составляет 3–5 моментов времени. После переходного периода наблюдается практически полное совпадение значений искомых показателей при использовании обоих подходов.

Ключевые слова: олигополистические рынки, операционное исчисление, обобщенные матричные уравнения Риккати, электронные таблицы, факторизация

COMPUTER RESEARCH AND MODELING
2019 VOL. 11 NO. 5 P. 949–963
DOI: 10.20537/2076-7633-2019-11-5-949-963

Ки&М

MODELS OF ECONOMIC AND SOCIAL SYSTEMS

UDC: 330.4.51-77

Studying indicators of development of oligopolistic markets on the basis of operational calculus

L. E. Varshavsky

Central Economics and Mathematics Institute RAS,
47 Nahimovskii ave., Moscow, 117418, Russia

E-mail: hodvar@yandex.ru

Received 19.06.2019, after completion — 05.09.2019.
Accepted for publication 09.09.2019.

The traditional approach to computing optimal game strategies of firms on oligopolistic markets and of indicators of such markets consists in studying linear dynamical games with quadratic criteria and solving generalized matrix Riccati equations.

The other approach proposed by the author is based on methods of operational calculus (in particular, Z-transform). This approach makes it possible to achieve economic meaningful decisions under wider field of parameter values. It characterizes by simplicity of computations and by necessary for economic analysis visibility. One of its advantages is that in many cases important for economic practice, it, in contrast to the traditional approach, provides the ability to make calculations using widespread spreadsheets, which allows to study the prospects for the development of oligopolistic markets to a wide range of professionals and consumers.

The article deals with the practical aspects of determining the optimal Nash–Cournot strategies of participants in oligopolistic markets on the basis of operational calculus, in particular the technique of computing the optimal Nash–Cournot strategies in Excel. As an illustration of the opportinities of the proposed methods of calculation, examples close to the practical problems of forecasting indicators of the markets of high-tech products are studied.

The results of calculations obtained by the author for numerous examples and real economic systems, both using the obtained relations on the basis of spreadsheets and using extended Riccati equations, are very close. In most of the considered practical problems, the deviation of the indicators calculated in accordance with the two approaches, as a rule, does not exceed 1.5–2%. The highest value of relative deviations (up to 3–5%) is observed at the beginning of the forecasting period. In typical cases, the period of relatively noticeable deviations is 3–5 moments of time. After the transition period, there is almost complete agreement of the values of the required indicators using both approaches.

Keywords: oligopolistic markets, operational calculus, generalized matrix Riccati equations, spreadsheets, factorization

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2019, vol. 11, no. 5, pp. 949–963 (Russian).

1. Введение

В настоящее время значительная часть рынков функционирует в условиях *олигополии*. Особенно это характерно для рынков высокотехнологичной продукции. Так, олигополистическими рынками являются, например, рынки авиационной техники, аппаратных средств информационно-коммуникационных технологий (ИКТ, включая микроэлектронную продукцию), продукции энергетического машиностроения и др.

В связи с тем, что динамика показателей олигополистических рынков тесно связана со стратегиями участников рынка, важное практическое значение представляют анализ, моделирование и прогнозирование рыночных стратегий высокотехнологичных фирм. В настоящее время наиболее распространенный подход к расчету оптимальных по Нэшу–Курно стратегий участников олигополистических рынков связан с использованием линейных динамических игр с квадратичными критериями и решением обобщенных (generalized, в англоязычной литературе используется также термин coupled) матричных уравнений Риккати (см., например, [Starr, Ho, 1969; Basar, Olsder, 1995; Dockner, Jorgenson, 2000; Engwerda, 2006]). Однако получаемые при этом подходе решения не обладают достаточной наглядностью, требуемой при анализе влияния тех или иных параметров и показателей моделей на исследуемые экономические переменные. При некоторых значениях параметров моделей решения уравнений Риккати, имеющие экономический смысл, вообще могут отсутствовать, в то время как оптимальные игровые стратегии существуют [Engwerda, 2006]. Кроме того, в ряде задач использование решений уравнений Риккати приводит к неустойчивым расчетам [Варшавский, 2012, с. 226].

Другой подход к исследованию оптимальных по Нэшу–Курно разомкнутых (open-loop) стратегий участников олигополистических рынков основан на использовании операционного исчисления (в частности, Z-преобразования). Этот подход позволяет получить экономически приемлемые решения для более широкого диапазона изменения параметров используемых моделей, чем при применении методов, основанных на решении обобщенных матричных уравнений Риккати [Варшавский, 2012, 2014]. Он отличается относительной простотой вычислений и необходимой для экономического анализа наглядностью. Одним из его достоинств является то, что во многих важных для экономической практики случаях он, в отличие от традиционного подхода, обеспечивает возможность проведения расчетов с использованием широко распространенных электронных таблиц (например, типа Excel и др.). Целесообразность использования электронных таблиц для нахождения оптимальных стратегий в динамических играх обусловлена и тем, что с их помощью очень удобно решать разностные уравнения, соответствующие получаемым операторным зависимостям. Всё это, в сочетании с прозрачностью проводимых расчетов, позволяет облегчить работу аналитиков и увеличить число потенциальных пользователей метода, начиная от студентов и до высококлассных профессионалов.

Вместе с тем оба подхода взаимно дополняют друг друга. Здесь также имеет место двойственность, характерная для теории линейных систем управления, в рамках которой используются соотношения между исследуемыми переменными как в пространстве состояний (т. е. непосредственно в форме дифференциальных и разностных уравнений), так и в частотной области (т. е. в форме преобразований Лапласа, Фурье, Z-преобразовании и др.); см., например, [Kwakernaak, Sivan, 1972].

В настоящей статье, являющейся продолжением работ автора [Варшавский, 2012, 2014], рассматриваются ***практические аспекты*** определения оптимальных по Нэшу–Курно стратегий участников олигополистических рынков на основе операционного исчисления (в частности, Z-преобразования).

В качестве иллюстрации возможностей предлагаемых методов расчета исследуются примеры, близкие к практическим задачам прогнозирования рынков высокотехнологичной продукции.

2. Модель поведения участников олигополистических рынков

В настоящей статье техника проведения расчетов иллюстрируется применительно к линейной динамической игре с квадратичными критериями, представленной в форме, использовавшейся, в частности, в статьях [Варшавский, 2012, 2014, 2017]. Центральным блоком используемой модели является следующая зависимость, связывающая объемы производства Q_{it} со входной переменной u_{it} (производственными инвестициями или вводом мощностей), i — индекс фирмы, $i = 1, 2, \ldots, N$:

$$Q_{it} = W_i(z)\, u_{it} + Q_{0it} \; = \frac{A_i(z)}{B_i(z)} u_{it} + Q_{0it}, \tag{1}$$

где $W_i(z) = B_i(z) / A_i(z)$ — передаточная функция, причем $A_i(z)$, $B_i(z)$ — полиномы относительно переменной z, представляющей собой оператор сдвига, $zx_t = x_{t+1}$:

$$A_i(z) = \sum_{i=0}^{m} a_{ik} z^k, \quad B_i(z) = \sum_{j=0}^{n} b_{ij} z^j, \quad m \le n, \tag{2}$$

Q_{0t} — объем производства при отсутствии инвестиций.

Другой блок модели — обратная функция (оператор) спроса. В модели предполагается баланс суммарного спроса D_t и предложения Q_t, т. е. $D_t = Q_t = \sum_{i=1}^{N} Q_{it}$ и линейная зависимость цены на рынке p_t от объема спроса:

$$p_t = a_t - bD_t = a_t - b\sum_{i=1}^{N} Q_{it} = a_t - b\sum_{i=1}^{N} [W_i\ (z)\ u_{it} + Q_{0it}]. \tag{3}$$

Предполагается, что олигополисты максимизируют чистую текущую стоимость (NPV) в режиме скользящего планирования (receding horizon):

$$J_{it} = \sum_{\tau=t}^{t+Tp} \beta^{\tau-t} \left[(p_\tau - c_i) Q_{i\tau} - q_i u_{i\tau} - \frac{1}{2} \rho_i u_{i\tau}^2 \right] \to \max_{u_{i\tau}}, \tag{4}$$

где $\beta = 1/(1+r)$ — дисконтирующий множитель, соответствующий ставке дисконтирования r; p_t — цена продукции; c_i — средние производственные издержки (без амортизации); q_i — стоимость единицы мощностей; $\frac{1}{2}\rho_i u_{i\tau}^2$ — затраты регулирования (adjustment costs) (см., например, [Варшавский, 2003]), причем ρ_i — коэффициент, характеризующий инвестиционные возможности олигополистов, $i = 1, 2, \ldots, N$; T_p — период скользящего планирования (для упрощения расчетов ставки налогов приняты равными нулю). Управляющими переменными в модели являются объемы ввода мощностей (или инвестиции в основной капитал) $u_{i\tau}$, $i = 1, 2, \ldots, N$.

Эквивалентная форма модели (1)–(4) в пространстве состояний, ориентированная на использование обобщенных уравнений Риккати, имеет следующий вид [Варшавский, 2012]:

$$X_t = AX_{t-1} + \sum_{i=1}^{N} B_i u_{it} + D\xi_t, \tag{1a}$$

$$J_{it} = \sum_{t=\tau}^{\tau+Tp} \beta_i^{\tau-t} \left(\frac{1}{2} X'_\tau H_i X_\tau - C'_{0i} X_\tau - q'_{i\tau} u_{i\tau} - \frac{1}{2} \rho_i {u_{i\tau}}^2 \right) \to \max_{u_{i\tau}}, \tag{4a}$$

где матрицы и векторы A, B_i, D, H_i, C_{0i}, q_{it}, X_t, ξ_t, $i = 1, 2, \ldots, N$, связаны с параметрами и переменными исходной модели (1)–(4).

3. Определение оптимальных по Нэшу–Курно разомкнутых стратегий участников рынка с использованием операционного исчисления

Наиболее распространенный метод определения стратегий олигополистов в случае линейных систем с квадратичным критерием оптимальности (1a), (4a) включает в себя в качестве одного из этапов нахождение решений матричных уравнений, в том числе N обобщенных уравнений типа Риккати (подробнее см. в [Basar, Olsder, 1995]). В результате разомкнутые стратегии u_{it}^{NOL} (отыскиваемые в классе функций времени, исходя из принципа максимума) оказываются линейно связанными с вектором состояния системы (1a):

$$u_{it}^{NOL} = K_{it}^{NOL} X_{t-1} + \eta_{it}^{NOL}, \tag{*}$$

где K_{it}^{NOL} и η_{it}^{NOL} — векторы, зависящие от решений обобщенных уравнений Риккати и параметров системы (см. [Basar, Olsder, 1995]).

Однако, как показали результаты компьютерных экспериментов, при использовании олигополистами скользящего планирования реализация оптимальных по Нэшу–Курно стратегий (*) может приводить к неустойчивости систем (1a) [Варшавский, 2012]. В связи с этим возникает необходимость разработки и использования альтернативных подходов и методов.

Наглядный и удобный для экономического анализа подход для определения оптимальных разомкнутых игровых стратегий олигополистов в игровой задаче (1)–(4) основан на использовании операционного исчисления. Правомерность его использования в данной задаче обусловлена тем, что во многих практических случаях значения расчетных показателей при достаточно большом конечном ($T_P \approx 15 \div 20$) и бесконечном ($T_P \to \infty$) периодах скользящего планирования совпадают [Варшавский, 2012, 2014].

Если ввести скалярное произведение элементов (функций) x_t и y_t:

$$\left\langle y_t\,,\; x_t \right\rangle \;=\; \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t y_t x_t, \tag{5}$$

то критерий оптимальности i-го олигополиста (4) можно переписать в виде

$$J_i^{'} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [(p_t - c_i)Q_{it} - q_i u_{it} - \frac{1}{2}\rho_i u_{it}^2] = \left\langle (p_t - c_i), Q_{it} \right\rangle - \left\langle q_i, u_{it} \right\rangle - \frac{1}{2}\rho_i \left\langle u_{it}, u_{it} \right\rangle. \tag{4b}$$

Из необходимого условия экстремума функционала (4b) можно получить формулы для расчета оптимальных по Нэшу–Курно управления u_{it} (производственных инвестиций и др.) и объемов производства Q_{it} i-го олигополиста, максимизирующих критерий NPV с учетом затрат регулирования [Варшавский, 2012, 2014]:

$$u_{it} = \frac{W_i((\beta z)^{-1})}{\rho_i \;\; + bW_i(z)W_i((\beta z)^{-1})}(p_t - PL_i - bQ_{0it}), \tag{6a}$$

$$Q_{it} = \frac{\Gamma_i(z,(\beta z)^{-1})}{b}(p_t - PL_i) + \left\{1 - \Gamma_i\,[z,(\beta z)^{-1}]\right\} Q_{0it}, \tag{6b}$$

где $PL_i = c_i + q_i / W(1 + r_i)$ — лимитирующие затраты i-й фирмы;

$$\Gamma_i\,[z,(\beta z)^{-1}] = \frac{bW_i(z)W_i((\beta z)^{-1})}{\rho_i \;\; + bW_i(z)W_i((\beta z)^{-1})},\;\; i = 1, 2, \ldots, N, \tag{7}$$

$$p_t = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{N} \Gamma_i \, [z, (\beta z)^{-1}]} \left\{ a_t^* + \sum_{i=1}^{N} \Gamma_i \, [z, (\beta z)^{-1}] PL_i \right\}, \tag{8}$$

где $a_t^* = a_t - N_i \left\{ 1 - \Gamma_i \, [z, (\beta z)^{-1}] \right\} Q_{0it}$.

На практике значительный интерес представляет случай, когда на рынке присутствуют фирмы двух типов (в количестве N_1 и N_2), использующие соответственно традиционную и передовую технологии (характеризующиеся передаточными функциями $W_1(z)$ и $W_2(z)$ невысокого порядка и индикаторами $\Gamma_1[z,(\beta z)^{-1}]$ и $\Gamma_2[z,(\beta z)^{-1}]$), и имеющие постоянные лимитирующие затраты PL_1 и PL_2 ($N = N_1 + N_2$). Такая задача возникает, например, при формировании требований к технико-экономическим показателям вводимой на рынок новой техники, которая может считаться «прорывной» [Варшавский, 2010]. В этом случае можно найти операторные выражения для определения суммарных объемов производства для двух групп фирм:

$$\begin{aligned} Q_t^{iNash} &= \frac{1}{b} N_i \Gamma_i \, [z, (\beta z)^{-1}] * (p_t - PL_i) + N_i \left\{ 1 - \Gamma_i \, [z, (\beta z)^{-1}] \right\} Q_{0it} = \\ &= \frac{N_i \Gamma_i \, [z, (\beta z)^{-1}]}{b \, \Pi_1} \{ a_t^* - PL_i + N_j \Gamma_j \, [z, (\beta z)^{-1}] (PL_j - PL_i) \} + N_i \left\{ 1 - \Gamma_i \, [z, (\beta z)^{-1}] \right\} Q_{0it}, \end{aligned} \tag{9}$$

где

$$\Pi_1 = 1 + N_1 \Gamma_1 \, [z, (\beta z)^{-1}] + N_2 \Gamma_2 \, [z, (\beta z)^{-1}], \tag{9a}$$

$j \neq i, \;\; i, j = 1, 2.$

Приведенные выше соотношения могут использоваться как при одноразовом прогнозировании, так и в режиме скользящего планирования. Очевидно, в последнем случае должен происходить регулярный пересчет прогнозируемых показателей в соответствии с (6)–(9), но при новых начальных условиях и с учетом возможных изменений значений параметров модели (в том числе параметров функций спроса).

4. Расчет оптимальных по Нэшу–Курно стратегий участников рынка с использованием электронных таблиц

Для проведения расчетов стратегий фирм и показателей рынка необходимо конкретизировать операторные выражения (9), (9а). С целью упрощения записи примем $Q_{0it} = 0$, $Q_{0jt} = 0$, $i = 1, 2, \ldots, N_1$; $j = 1, 2, \ldots, N_2$. Тогда с учетом (1) и (7) соотношения (9) можно представить в следующем виде:

$$Q_t^{iNash} = \frac{N_i \, | A_i |_\beta^2}{\Phi(z, (\beta z)^{-1})} \{ \rho_j \, | B_j |_\beta^2 \, (a_t - PL_j) + b \, | A_j |_\beta^2 \, [a_t - (1 + N_j) PL_i + N_j PL_j] \}, \tag{10}$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} &| W_i |_\beta^2 = W_i(z) W_i((\beta z)^{-1}), \quad | A_i |_\beta^2 = A_i(z) A_i((\beta z)^{-1}), \quad | B_i |_\beta^2 = B_i(z) B_i((\beta z)^{-1}), \\ &\Phi(z, (\beta z)^{-1}) = \rho_1 \rho_2 \, | B_1 |_\beta^2 | B_2 |_\beta^2 + \rho_2 (1 + N_1) b^2 \, | A_1 |_\beta^2 | B_2 |_\beta^2 + \\ &+ \rho_1 (1 + N_2) b^2 \, | A_2 |_\beta^2 | B_1 |_\beta^2 + (1 + N_1 + N_2) b^2 \, | A_1 |_\beta^2 | A_2 |_\beta^2, \quad i, j = 1, 2. \end{aligned} \tag{11}$$

Основная проблема при проведении **устойчивых** вычислений оптимальных стратегий олигополистов (u_{jt}, Q_{jt}) состоит ***в факторизации знаменателей выражений*** (10). Учитывая симметричную зависимость знаменателей этих соотношений относительно переменных z и $(\beta z)^{-1}$, можно представить $\Phi(z,(\beta z)^{-1})$ и $F(z,(\beta z)^{-1})$ в виде

$$\Phi(z,(\beta z)^{-1}) = C(z) * C((\beta z)^{-1}), \;\; F(z,(\beta z)^{-1}) = \phi(z) * \phi((\beta z)^{-1}), \tag{12}$$

где корни многочленов $C(z)$ и $\phi(z)$ локализованы внутри круга с радиусом $\beta^{-1/2} = \sqrt{1+r}$ на комплексной плоскости, а корни многочленов $C((\beta z)^{-1})$, $\phi((\beta z)^{-1})$ — вне этого круга (см., например, [Варшавский, 2014]). Устойчивость вычислений имеет место при локализации всех корней многочленов $C(z)$ и $\phi(z)$ внутри единичного круга комплексной плоскости [1].

Факторизация многочленов может быть проведена, например, в среде MATLAB с использованием процедур поиска корней полиномов, а также ряда процедур формирования соединений систем, реализованных в Control Systems Toolbox (таких, в частности, как series(.), parallel(.), feedback(.) и др.). При невысоком порядке передаточных функций $W_i(z)$ факторизация может быть также проведена с использованием нашедших широкое распространение электронных таблиц. Ниже рассматриваются техника проведения расчетов и условные примеры расчетов оптимальных по Нэшу–Курно стратегий, которые могут быть реализованы не только в MATLAB, но и в электронных таблицах (например, в среде Excel), в случае когда $\Phi(z,(\beta z)^{-1})$ и в (13) представляют собой многочлены степени 2 относительно z и $(\beta z)^{-1}$.

4a. Случай 1 $(\rho_i = \rho_j = \rho, \; W_i(z) = W_j(z) = W(z))$

Когда $\rho_i = \rho_j = \rho$ или $W_i(z) = W_j(z) = W(z)$, $i, j = 1, 2$, вычисления упрощаются. В этом случае $\Gamma_i[z,(\beta z)^{-1}] = \Gamma_j[z,(\beta z)^{-1}]$, $i, j = 1, 2$, и справедливо

$$Q_t^{iNash} = \frac{N_i \,|\, A_i \,|_\beta^2}{\Phi(z,(\beta z)^{-1})}\{(a_t - PL_j) + \frac{N_j b \,|\, A_j \,|_\beta^2}{F(z,(\beta z)^{-1})}(PL_j - PL_i)\}, \tag{10a}$$

где

$$\Phi(z,(\beta z)^{-1}) = \rho \,|\, B \,|_\beta^2 + (1 + N_1 + N_2) b \,|\, A \,|_\beta^2, \;\; F(z,(\beta z)^{-1}) = \rho \,|\, B \,|_\beta^2 + b \,|\, A \,|_\beta^2 \,. \tag{13}$$

Учитывая (12), можно преобразовать (10a) к виду

$$Q_t^{iNash} = \left(\frac{N_i A_i(z)}{C(z)}\right) * \left(\frac{A_i((\beta z)^{-1})}{C((\beta z)^{-1})}\right)\left\{(a_t - PL_j) + \left(\frac{bN_j A_j(z)}{\phi(z)}\right) * \left(\frac{A_j((\beta z)^{-1})}{\phi((\beta z)^{-1})}\right)(PL_j - PL_i)\right\}. \tag{10b}$$

Таким образом, при проведении ***устойчивых*** вычислений вначале следует делать расчеты в обратном времени (в соответствии с сомножителями в (10b), содержащими в качестве аргумента $(\beta z)^{-1}$, при нулевых значениях промежуточных переменных в конце достаточно длительного расчетного периода, существенно превышающего период планирования), а затем в прямом времени (в соответствии с сомножителями в (10b), содержащими в качестве аргумента z). При постоянных значениях параметров и показателей $a_t = a, PL_i$, $i = 1, 2$, выражение (10b) несколько упрощается:

$$Q_t^{iNash} = \left(\frac{N_i A_i(z)}{C(z)}\right) \cdot \left(\frac{A_i((\beta z)^{-1})}{C((\beta z)^{-1})}\right)\left\{(a - PL_j) + \left(\frac{bN_j A_j(z)}{\phi(z)}\right) \cdot \left(\frac{A_j((\beta)^{-1})}{\phi((\beta)^{-1})}\right)(PL_j - PL_i)\right\}. \tag{10c}$$

[1] В крайне редких, но все же возможных аномальных случаях, когда модули некоторых корней многочленов $C(z)$ и $\phi(z)$ в (12) находятся в интервале $[1, \sqrt{1+r}\,]$, вычисления становятся неустойчивыми.

В важном для практики случае, когда порядок знаменателя $B_i(z) = B(z)$ передаточной функции $W_i(z) = W(z)$ в (2) равен $n = 2$ (этот случай будет рассматриваться в дальнейших примерах), можно представить многочлены $\Phi(z,(\beta z)^{-1})$ и $F(z,(\beta z)^{-1})$ в (13) в виде

$$\Phi(z,(\beta z)^{-1}) = \Phi_2 z^2 + \Phi_1 z + \Phi_0 + \Phi_1(\beta z)^{-1} + \Phi_2(\beta z)^{-2} = C(z) * C((\beta z)^{-1}) = \\ = (C_2 z^2 + C_1 z + C_0)(C_2(\beta z)^{-2} + C_1(\beta z)^{-1} + C_0), \tag{14a}$$

$$F(z,(\beta z)^{-1}) = F_2 z^2 + F_1 z + F_0 + F_1(\beta z)^{-1} + F_2(\beta z)^{-2} = \phi(z) * \phi((\beta z)^{-1}) = \\ = (\phi_2 z^2 + \phi_1 z + \phi_0)(\phi_2(\beta z)^{-2} + \phi_1(\beta z)^{-1} + \phi_0). \tag{14b}$$

Нетрудно показать, что коэффициенты C_i многочлена $C(z)$ могут быть определены из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} &C_2{}^2(\beta)^{-2} + C_1{}^2(\beta)^{-1} + C_0{}^2 = \Phi_0, \\ &C_1(C_2\beta^{-1} + C_0) = \Phi_1, \\ &C_2 C_0 = \Phi_2. \end{aligned} \tag{15}$$

Формулы для вычисления коэффициентов Φ_i, i = 0, 1, 2, для некоторых часто используемых при эконометрическом анализе передаточных функций, характеризующих распределенные запаздывания, приведены в таблице 1.

Таблица 1. Формулы для вычисления коэффициентов в (15) для типовых передаточных функций, описывающих инвестиционные процессы

1. Передаточная функция $W_i(z) = W(z) = \dfrac{\gamma z}{(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)}$, $\rho_i = \rho$, $i = 1,2$
$\Phi_0 = \rho\beta[\beta^{-2} + (\lambda_1+\lambda_2)^2\beta^{-1} + (\lambda_1\lambda_2)^2] + (1+N_1+N_2)b^2\gamma^2$
$\Phi_1 = -\rho\beta(\lambda_1+\lambda_2)(\beta^{-1} + \lambda_1\lambda_2)$
$\Phi_2 = \rho\beta\lambda_1\lambda_2$
2. Передаточная функция $W_i(z) = W(z) = \dfrac{k_0 z^2 + (k_1-k_0)z + 1 - k_1}{z(z-1)}$, $\rho_i = \rho$, $i = 1,2$
$\Phi_0 = (1+N_1+N_2)b(R_0\beta^{-2} + R_1\beta^{-1} + R_2) + \rho\beta^{-1}(\beta^{-1}+1)$
$\Phi_1 = (1+N_1+N_2)bR_1(R_0\beta^{-1} + R_2) - \rho\beta^{-1}$
$\Phi_2 = (1+N_1+N_2)bR_0R_2$, где $R_0 = k_0, R_1 = (k_1-k_0), R_2 = (1-k_1)$

Из вышеприведенных соотношений можно получить следующие выражения:

$$\begin{aligned} &C_2\beta^{-1} + C_1\beta^{-1/2} + C_0 = +(\Phi_{30})^{1/2}, \\ &C_2\beta^{-1} - C_1\beta^{-1/2} + C_0 = +(\Phi_{31})^{1/2}, \end{aligned} \tag{16}$$

где

$$\begin{aligned} &\Phi_{30} = \Phi_0 + 2(\Phi_1\beta^{-1/2} + \Phi_2\beta^{-1}), \\ &\Phi_{31} = \Phi_0 - 2(\Phi_1\beta^{-1/2} - \Phi_2\beta^{-1}) \end{aligned} \tag{17}$$

(знак «+» перед $(\Phi_{30})^{1/2}$ и $(\Phi_{31})^{1/2}$ связан с необходимостью удовлетворения критерия устойчивости [Jury, 1964]). Таким образом, из (16) следует, что

$$C_1 = \frac{1}{2}\beta^{1/2}((\Phi_{30})^{1/2} - (\Phi_{31})^{1/2}). \tag{18}$$

С учетом (18) можно преобразовать (15) к виду

$$C_2\beta^{-1} + C_0 = \frac{1}{2}((\Phi_{30})^{1/2} + (\Phi_{31})^{1/2}) = \Phi_4, \quad C_2\beta^{-1} \cdot C_0 = \Phi_2\beta^{-1}. \tag{19}$$

Так как ввиду (17) $\Phi_4^2 / 4 > \Phi_2\beta^{-1}$, то из (19) следует, что $C_2\beta^{-1}$ и C_0 являются действительными корнями квадратичного уравнения и могут быть вычислены по формулам

$$C_0 = \frac{1}{2}\Phi_4 - \sqrt{\Phi_4^2 / 4 - \Phi_2\beta^{-1}}, \quad C_2\beta^{-1} = \frac{1}{2}\Phi_4 + \sqrt{\Phi_4^2 / 4 - \Phi_2\beta^{-1}} \tag{20}$$

(в силу условия устойчивости должно соблюдаться неравенство $C_2\beta^{-1} > C_0$).

Аналогичным способом может быть проведена факторизация многочлена $F(z,(\beta z)^{-1})$.

Пример 1

В данном примере предполагается, что рынок представляет собой дуополию, участниками которой являются 2 фирмы $(N_1 = N_2 = 1)$. Объемы производства фирм связаны с инвестициями в основной капитал u_{it} передаточной функцией 2-го порядка:

$$W_i(z) = \frac{\gamma z}{(z-\lambda)^2}, \quad \gamma = 0.0027, \quad \rho_1 = \rho_2 = 0.0003, \quad \lambda = 0.85, \quad i = 1, 2.$$

Обратная функция спроса представляет собой линейную функцию от объемов спроса (предложения):

$$p_t = 120 - 0.015(Q_{1t} + Q_{2t}).$$

Экономические показатели фирм приведены в таблице 2.

Таблица 2. Показатели фирм в примере 1

$c_1 =$	95
$c_2 =$	75
$r =$	0.05

Оптимальные стратегии участников рынка, определенные в соответствии с формулой (10а), имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} Q_{it} &= \frac{0.0076}{C(z)}\left(A_i - \frac{0.0028}{\phi(z)}\right), \quad i = 1, 2, \\ C(z) &= 0.0173z^2 - 0.0286z + 0.0119, \quad A_1 = 10.9, \\ \phi(z) &= 0.0170z^2 - 0.0287z + 0.0121, \quad A_2 = 30.9. \end{aligned} \tag{21}$$

Сравнительный анализ результатов расчетов оптимальных по Нэшу–Курно стратегий на основе соотношений (21) (Q_{it} (ET)), а также на основе обобщенных уравнений Риккати (Q_{it} (Riccati)) показывает практическое совпадение траекторий этих показателей (таблица 3).

4b. Случай 2 $(\rho_i \neq \rho_j, \; W_i(z) = \gamma_i W(z), \; W(z), \; W_j(z) = \gamma_j W(z), \; \gamma_i \neq \gamma_j)$

Приведенные выше формулы (18)–(20) могут быть использованы и в случае, когда передаточные функции участников рынка одинаковы, т. е. $W_i(z) = W(z)$, со знаменателем $B(z)$, имеющим второй порядок, но коэффициенты ρ_i и γ_i разные, т. е. $\rho_i \neq \rho_j$, $\gamma_i \neq \gamma_j$.

Таблица 3. Сопоставление результатов расчетов оптимальных по Нэшу–Курно стратегий на основе соотношений (21) (Q_{it} (ET)) и с использованием расширенных уравнений Риккати Q_{it} (Riccati) в примере 1

Годы	Q_{1t} (ET)	Q_{1t} (Riccati)	Q_{2t} (ET)	Q_{2t} (Riccati)
1	3.771	3.753	14.708	14.690
2	9.871	9.822	39.210	39.162
3	17.219	17.134	69.758	69.673
4	25.033	24.907	103.538	103.413
5	32.761	32.593	138.485	138.318
6	40.035	39.826	173.118	172.910
7	46.625	46.378	206.416	206.168
8	52.409	52.124	237.708	237.424
9	57.337	57.020	266.595	266.277
10	61.418	61.071	292.873	292.526

В этом случае

$$\Gamma_i[z,(\beta z)^{-1}] = \frac{b\gamma_i^2 W(z)W((\beta z)^{-1})}{\rho_i + b\gamma_i^2 W(z)W((\beta z)^{-1})} = \frac{bW(z)W((\beta z)^{-1})}{R_i + bW(z)W((\beta z)^{-1})}, \quad i = 1,2,\ldots,N, \tag{7a}$$

где $R_i = \rho_i / \gamma_i^2$.

С учетом (7а) формула (9) может быть преобразована к виду

$$Q_t^{iNash} = \frac{N_i |W|_\beta^2}{\Pi(|W|_\beta^2)}\{[R_j + b|W_i|_\beta^2](a - PL_i) + N_j b|W|_\beta^2 (PL_j - PL_i)\}, \tag{22}$$

i, j = 1, 2, где

$$\Pi(|W|_\beta^2) = b^2(1 + N_1 + N_2)|W|_\beta^4 + b[R_1(1+N_2) + R_2(1 + N_1)]|W|_\beta^2 + R_1R_2. \tag{23}$$

Нетрудно показать, что корни μ_i, i = 1, 2, двучлена $\Pi(|W|_\beta^2)$ действительны и отрицательны, т. е. $\mu_i < 0$, i =1, 2. Действительно, в силу того, что все коэффициенты двучлена $\Pi(|W|_\beta^2)$ положительны, его корни имеют отрицательную действительную часть. С другой стороны, дискриминант двучлена положителен, так как

$$\begin{aligned} &b^2[R_1(1+N_2) + R_2(1 + N_1)]^2 - 4R_1R_2b^2(1 + N_1 + N_2) = \\ &= b^2\{[R_1(1+N_2)]^2 + [R_2(1 + N_1)]^2 + 2R_1R_2(1+N_2)(1+N_2)\} = \\ &= b^2[R_1(1+N_2) - R_2(1 + N_1)]^2 + 4R_1R_2b^2N_1N_2 > 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Таким образом,

$$\Pi(|W|_\beta^2) = \chi(|W|_\beta^2 - \mu_1)(|W|_\beta^2 - \mu_2), \tag{25}$$

где $\mu_i < 0$, $i = 1, 2$, — корни двучлена (23), $\chi = b^2(1 + N_1 + N_2)$.

Подставляя (25) в (22), нетрудно получить, что

$$\begin{aligned} Q_t^{iNash} &= \frac{N_i |W|_\beta^2}{\Pi(|W|_\beta^2)}\{[R_j + b|W|_\beta^2](a - PL_i) + N_j b|W|_\beta^2 (PL_j - PL_i)\} = \\ &= \frac{N_i |A|_\beta^2}{\chi(|A|_\beta^2 - \mu_1|B|_\beta^2)(|A|_\beta^2 - \mu_2|B|_\beta^2)}\{R_j|B|_\beta^2 (a - PL_j) + b|A|_\beta^2 [a - (1+N_j)PL_i + N_j PL_j]\}. \end{aligned} \tag{26}$$

В случае когда порядок знаменателя $B_i(z) = B(z)$ передаточной функции $W_i(z) = W(z)$ равен $n = 2$, для проведения вычислений в соответствии с предлагаемой методикой остается только, используя формулы (18)–(20), провести факторизацию двух членов в знаменателе выражения (26):

$$(|A|_\beta^2 - \mu_i |B|_\beta^2) = \Omega_i(z)\Omega_i((\beta z)^{-1}) = (\Omega_{i2}z^2 + \Omega_{i1}z + \Omega_{i0})(\Omega_{i2}(\beta z)^{-2} + \Omega_{i1}(\beta z)^{-1} + \Omega_{i0}),\ i = 1, 2. \quad (27)$$

Ниже рассматривается пример проведения расчетов с использованием полученных в данном подразделе соотношений.

Пример 2

В данном примере рассматривается рынок с показателями, близкими к рынку микропроцессоров для серверов, который представляет собой дуополию, участниками которой являются 2 фирмы $(N_1 = N_2 = 1)$. Предполагалось, что технологический уровень оборудования компаний, выпускающих микропроцессоры, одинаков, причем операторная зависимость между объемами производства микропроцессоров Q_{it} (в млн ед.) и инвестиций в основной капитал I_t (в млн долл.) имеет следующий вид (Варшавский, 2017):

$$Q_{it} = \frac{0.0156z}{(z - 0.494)^2} I_t. \quad (28)$$

Экономические показатели компаний приведены в таблице 4.

Таблица 4. Показатели компаний в примере 2

Показатель	Фирма 1	Фирма 2
c_i (долл./ед.)	393	314
ρ_i	0.03625	0.0036

В качестве обратной функции спроса использовалась следующая зависимость:

$$p_t = 697.684 + 24.087R\,\&\,D_t - 16.351Q_{\Sigma t}, \quad (29)$$

где $Q_{\Sigma t}$ — суммарный объем поставок микропроцессоров для серверов в млн. ед., p_t — средняя цена этих микропроцессоров в долл./ед., $R\,\&\,D_t$ — объем исследований и разработок в компании-лидере (фирма 2) в млрд долл. Принято, что компанией-лидером является компания с показателями, близкими к компании Intel. Прогнозный уровень исследований и разработок в компании Intel рассчитывался на основе экономико-статистической зависимости, связывающей $R\,\&\,D_t$ в млн долл. с минимальным топологическим размером интегральных схем $hp_{\min t}$ (см. [Варшавский, 2017]).

Результаты условных расчетов оптимальных по Нэшу–Курно стратегий фирм (т. е. объемов производства микропроцессоров для серверов) на основе соотношений (26) (Q_{it} (ET)), а также на основе обобщенных уравнений Риккати (Q_{it} (Riccati)) при нулевых начальных условиях и при значении дисконт-фактора $r = 0.05$ представлены в таблице 5.

Пример 3

В данном примере предполагается, что на рынок с 7 участниками, имеющими одинаковые показатели и использующими традиционную технологию, входит новый участник с более совершенной технологией (при этом $N_1 = 7$, $N_2 = 1$).

Объемы производства фирм связаны с инвестициями в основной капитал u_{2t} передаточной функцией 2-го порядка:

$$W_i(z) = \frac{\gamma_1 z}{(z - \lambda_1)(z - \lambda_2)},\ i = 1,2,\ldots,7,\ W_8(z) = \frac{\gamma_2 z}{(z - \lambda_1)(z - \lambda_2)}, \quad (30)$$

Таблица 5. Сопоставление результатов расчетов оптимальных по Нэшу–Курно стратегий на основе соотношений (26) (Q_{it} (ET)) и с использованием расширенных уравнений Риккати (Q_{it} (Riccati)) в примере 2

Годы	Q_{1t} (ET)	Q_{1t} (Riccati)	Q_{2t} (ET)	Q_{2t} (Riccati)
1	4.21	3.88	14.66	14.96
2	7.07	6.70	19.26	19.37
3	8.68	8.34	20.04	19.89
4	9.63	9.34	20.52	20.21
5	10.30	10.01	21.16	20.78
6	10.86	10.57	21.96	21.56
7	11.38	11.08	22.76	22.35
8	11.89	11.61	23.60	23.22
9	12.40	12.12	24.42	24.06
10	12.88	12.62	25.18	24.85

Таблица 6. Показатели фирм в примере 3

Показатель	7 фирм	Фирма 8
γ_i	0.018	0.025
c_i	95	75
ρ_i	9.259	10.400

причем $\lambda_1 = 0.75$, $\lambda_1 = 0.55$. Обратная функция спроса представляет собой линейную функцию от объемов спроса (предложения):

$$p_t = 120 - 0.015\sum_{i=1}^{8} Q_{it}. \tag{31}$$

Экономические показатели фирм приведены в таблице 6.

Результаты расчетов оптимальных по Нэшу–Курно игровых стратегий фирм (объемов производства условной продукции) для 7 старых фирм $Q_{\Sigma 7t}$ (ET) и для одной новой Q_{8t} (ET) на основе полученных соотношений (ET), а также на основе обобщенных уравнений Риккати (Riccati) представлены в таблице 7. В расчетах использованы начальные значения объемов производства 7 фирм ($Q_{\Sigma 700} = 300$, $Q_{\Sigma 700} = 500$) и новой фирмы ($Q_{800} = 70$, $Q_{80} = 80$), а также дисконт-фактора ($r = 0.05$).

Таблица 7. Сопоставление результатов расчетов оптимальных по Нэшу–Курно стратегий на основе соотношений (26) (Q_{it} (ET)) и с использованием расширенных уравнений Риккати (Q_{it} (Riccati)) в примере 3

Годы	$Q_{\Sigma 7t}$ (ET)	$Q_{\Sigma 7t}$ (Riccati)	Q_{8t} (ET)	Q_{8t} (Riccati)
1	554.432	561.326	92.814	93.957
2	552.577	559.641	106.740	108.000
3	527.070	533.525	119.334	120.569
4	495.995	501.541	130.056	131.193
5	467.190	471.777	138.876	139.882
6	443.376	447.072	145.978	146.843
7	424.891	427.817	151.612	152.341
8	411.103	413.388	156.033	156.639
9	401.093	402.859	159.473	159.970
10	393.963	395.317	162.132	162.536

4c. Случай 3. Рынок с дифференцированным продуктом $(\rho_i \neq \rho_j,\ W_i(z) = \gamma_i W(z),\ W(z),\ W_j(z) = \gamma_j W(z),\ \gamma_i \neq \gamma_j)$

Если фирмы являются участниками рынка с дифференцированным продуктом, с обратными функциями спроса:

$$\begin{aligned} p_{1t} &= a_{1t} - b_1 N_1 Q_{1t} - d_1 N_2 Q_{2t}, \\ p_{2t} &= a_{2t} - d_2 N_1 Q_{1t} - b_2 N_2 Q_{2tt}, \end{aligned} \tag{32}$$

то после алгебраических преобразований можно получить следующие операторные выражения для определения суммарных объемов производства двух групп фирм:

$$Q_t^{iNash} = \frac{1}{b_i} N_i \Gamma_i [z, (\beta z)^{-1}] \cdot (p_{it} - PL_i) = \frac{N_i \Gamma_i [z, (\beta z)^{-1}]}{b_i \Pi_2 [z, (\beta z)^{-1}]} \{a_{it} - PL_i + N_j \Gamma_j\ \Lambda_i\}, \tag{9b}$$

где $\Gamma_i[z, (\beta z)^{-1}]$ имеют вид (7),

$$\Pi_2[z, (\beta z)^{-1}] = 1\ + N_1 \Gamma_1 [z, (\beta z)^{-1}] + N_2 \Gamma_2 [z, (\beta z)^{-1}] + \Lambda_0 N_1 N_2 \Gamma_1 [z, (\beta z)^{-1}] \Gamma_2 [z, (\beta z)^{-1}], \tag{9c}$$

$$\Lambda_0 = 1 - \frac{d_1 d_2}{b_1 b_2}, \quad \Lambda_i = a_{it} - PL_i - \frac{d_i}{b_j}(a_{jt} - PL_j), \tag{33}$$
$$i, j = 1, 2.$$

Расчеты в этом случае проводятся в той же последовательности, что и в п. 4b. (см. (26)), но с добавлением параметров Λ_0, Λ_i $i = 1, 2$. Ниже приводятся результаты расчета для примера 4.

Пример 4

В данном примере, как и в примере 2, рассматривается дуополия, участники которой производят 2 разных продукта. Предполагается, что технологический уровень оборудования компаний, выпускающих подукцию, одинаков, причем операторная зависимость между объемами производства продукции Q_{it} и инвестиций в основной капитал I_t имеет вид (28).

Экономические показатели компаний и коэффициенты обратных функций спроса (32) приведены в таблицах 8, 9.

Результаты условных расчетов оптимальных по Нэшу–Курно стратегий фирм (т. е. объемов производства продукции — Q_{it} (ET)) на основе полученных соотношений типа (26) с учетом (9c), (33), а также на основе обобщенных уравнений Риккати (Q_{it} (Riccati)) при нулевых начальных условиях и значении дисконт-фактора $r = 0.05$ представлены в таблице 10. Данные таблицы 10 свидетельствуют о практическом совпадении результатов расчетов в соответствии с двумя подходами.

Таблица 8. Показатели компаний в примере 4

Показатель	Фирма 1	Фирма 2
c_i	75	45
ρ_i	0.06639	0.00589

Таблица 9. Коэффициенты обратных функций спроса (32)

i	a_i	b_i	d_i
1	120.0	2.500	0.500
2	159.5	3.769	1.000

Таблица 10. Сопоставление результатов расчетов оптимальных по Нэшу–Курно стратегий на основе соотношений типа (26) (Q_{it} (ET)) и с использованием расширенных уравнений Риккати (Q_{it} (Riccati)) в примере 4

Годы	Q_{1t} (ET)	Q_{1t} (Riccati)	Q_{2t} (ET)	Q_{2t} (Riccati)
1	0.253	0.244	4.785	4.854
2	0.480	0.467	8.051	8.142
3	0.632	0.620	9.533	9.610
4	0.721	0.713	10.038	10.090
5	0.770	0.766	10.153	10.184
6	0.797	0.794	10.155	10.172
7	0.810	0.809	10.140	10.149
8	0.817	0.817	10.130	10.134
9	0.821	0.821	10.126	10.128
10	0.823	0.822	10.125	10.126

Таким образом, во многих случаях результаты расчетов с использованием полученных соотношений на основе электронных таблиц и с использованием расширенных уравнений Риккати оказываются весьма близкими (конечно тогда, когда использование решений уравнений Риккати приводит к устойчивым расчетам). В большинстве рассмотренных практических задач отклонение рассчитанных в соответствии с двумя подходами показателей, как правило, не превышает 1.5–2 %. Наибольшая величина относительных отклонений (до 3–5 %) наблюдается в начале периода прогнозирования. В типичных случаях период сравнительно заметных отклонений составляет 3–5 моментов времени. После переходного периода наблюдается практически полное совпадение значений искомых показателей при использовании обоих подходов.

Вместе с тем следует отметить, что на величину отклонений показателей в рассмотренных подходах могут влиять как начальные условия, так и значения параметров модели (параметров λ_i в соотношениях, характеризующих инерционность отдачи от инвестиций, дисконт-фактора r, параметра обратной функции спроса b, длительнсти расчетного периода и др.).

5. Заключение

Для рассмотренного класса динамических игр подход к расчету оптимальных по Нэшу–Курно разомкнутых игровых стратегий, основанный на использовании операторных методов и электронных таблиц, во многих практически важных случаях обеспечивает устойчивость вычислений при широком диапазоне изменения параметров моделей. Расчеты игровых стратегий олигополистов для систем невысокого порядка на основе электронных таблиц и с использованием расширенных матричных уравнений Риккати приводят к близким результатам.

Использование методов операционного исчисления и популярных электронных таблиц упрощает проведение расчетов, что позволяет проводить исследование перспектив развития олигополистических рынков широкому кругу специалистов и потребителей.

Эффективная реализация предлагаемого подхода для систем более высокого порядка (4-го и выше) сдерживается отсутствием в электронных таблицах (в частности, в Excel) удобных и надежных процедур, необходимых для проведения факторизации многочленов.

Список литературы (References)

Варшавский Л. Е. Исследование инвестиционных стратегий фирм на рынках капитало- и наукоемкой продукции (производственные мощности, цены, технологические изменения). — М.: ЦЭМИ РАН, 2003. — 354 с.

Varshavsky L. E. Issledovanie investitsionnykh strategii firm na rynkakh kapitalo- i naukoemkoi produktsii (proizvodstvennye moshchnosti, tseny, tekhnologicheskie izmeneniya) [The Study of investment strategies of firms on the markets of capital and R&D intensive products]. — Moscow: CEMI RAS, 2003. — 354 p. (in Russian).

Варшавский Л. Е. Методологические основы моделирования развития олигополистических рынков продукции с длительным жизненным циклом (на примере рынка гражданской авиационной техники) // Прикладная эконометрика. — 2010. — № 4. — С. 53–74.

Varshavsky L. E. Metodologicheskie osnovy modelirovanija razvitija oligopolisticheskih rynkov produkcii s dlitel'nym zhiznennym ciklom (na primere rynka grazhdanskoj aviacionnoj tehniki) [Methodological foundations of modeling evolution of markets of products with long lifecycle: A study of the market of civil aircraft] // Prikladnaja jekonometrika [Applied Econometrics]. — 2010. — Vol. 4. — P. 53–74 (in Russian).

Варшавский Л. Е. Приближенные методы исследования динамики показателей рыночной структуры // Компьютерные исследования и моделирование. — 2012. — Т. 4, № 1. — С. 219–229.

Varshavsky L. E. Priblizhennye metody issledovanija dinamiki pokazatelej rynochnoj struktury [Approximate methods of studying dynamics of market structure] // Computer Research and Modeling. — 2012. — Vol. 4, No. 1. — P. 219–229 (in Russian).

Варшавский Л. Е. Использование методов теории управления для формирования рыночных структур // Компьютерные исследования и моделирование. — 2014. — Т. 6, № 5. — С. 839–859.

Varshavsky L. E. Ispol'zovanie metodov teorii upravlenija dlja formirovanija rynochnyh struktur [Control theory methods for creating market structures] // Computer Research and Modeling. — 2014. — Vol. 6, No. 5. — P. 839–859 (in Russian).

Варшавский Л. Е. Моделирование динамики ключевых показателей рынков компонентов высокопроизводительных вычислительных систем // Труды Института системного анализа Российской академии наук. — 2017. — Т. 67, № 1. — С. 12–27.

Varshavsky L. E. Modelirovanie dinamiki klyuchevykh pokazatelej rynkov komponentov vysokoproizvoditel'nykh vychislitel'nykh system [Modeling dynamics of key market indicators of components of hpc systems] // Trudy Instituta sistemnogo analiza Rossijskoj akademii nauk [Proceeding of the ISA RAS]. — 2017. — Vol. 67, No. 1. — P. 12–27 (in Russian).

Basar T., Olsder G. J. Dynamic Noncooperative Game Theory. — London / New York: Academic Press, 1995.

Dockner E. J., Jorgenson S. et al. Differential Games in Economics and Management Science. — Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

Engwerda J. C. Linear Quadratic Games: An Overwiew. — Discussion Paper 2006-110. — Tilburg University, Center for Economic Research, 2006.

Jury E. I. Theory and Applications of the Z-Transform Method. — NY: John Wiley, 1964.

Kwakernaak H., Sivan R. Linear Optimal Control Systems. — New York: Wiley, 1972.

Starr A. W., Ho Y. C. Nonzero-sum differential games // Journal of Optimization Theory and Applications. — March 1969. — Vol. 3. — P. 184–206.