КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2019 Т. 11 № 5 С. 777–814
DOI: 10.20537/2076-7633-2019-11-5-777-814

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

УДК: 519.633.6

Разработка сетевых вычислительных моделей для исследования нелинейных волновых процессов на графах

Я. А. Холодов[1,2]

[1] Университет Иннополис,
Россия, 420500, г. Иннополис, ул. Университетская, д. 1

[2] Институт автоматизации проектирования РАН,
Россия, 123056, г. Москва, ул. 2-я Брестская, д. 19/18

E-mail: kholodov@crec.mipt.ru

Получено 02.08.2019, после доработки — 10.09.2019.
Принято к публикации 10.09.2019.

В различных приложениях возникают задачи, моделируемые уравнениями в частных производных на графах (сетях, деревьях). Для исследования данных проблем и возникающих различных экстремальных ситуаций, для задач проектирования и оптимизации сетей различных типов в данной работе построена вычислительная модель, основанная на решении соответствующих краевых задач для нелинейных уравнений в частных производных гиперболического типа на графах (сетях, деревьях). В качестве приложений были выбраны три различные задачи, решаемые в рамках общего подхода сетевых вычислительных моделей. Первая — это моделирование движения транспортных потоков. При решении данной задачи использовался макроскопический подход, при котором транспортный поток описывается нелинейной системой гиперболических уравнений второго порядка. Проведенные расчеты и полученные результаты показали, что разработанная в рамках предложенного подхода модель хорошо воспроизводит реальную ситуацию на различных участках транспортной сети г. Москвы на значительных временных интервалах, а также может быть использована для выбора наиболее оптимальной стратегии организации дорожного движения в городе. Вторая — моделирование потоков данных в компьютерных сетях. В этой задаче потоки данных различных соединений в пакетной сети передачи данных моделировались в виде несмешивающихся потоков сплошной среды. Предложены концептуальная и математическая модели сети. Проведено численное моделирование в сравнении с системой имитационного моделирования сети NS-2. Полученные результаты показали, что в сравнении с пакетной моделью NS-2 разработанная нами потоковая модель демонстрирует значительную экономию вычислительных ресурсов, обеспечивая при этом хорошую степень подобия, и позволяет моделировать поведение сложных глобально распределенных IP-сетей передачи данных. Третья — моделирование распространения газовых примесей в вентиляционных сетях. Была разработана вычислительная математическая модель распространения мелкодисперсных или газовых примесей в вентиляционных сетях с использованием уравнений газовой динамики путем численного сопряжения областей разной размерности. Проведенные расчеты показали, что модель с хорошей точностью позволяет определять распределение газодинамических параметров в трубопроводной сети и решать задачи динамического управления вентиляцией.

Ключевые слова: уравнения в частных производных, графы, вычислительные модели, уравнения гиперболического типа, численное моделирование, граничные условия

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант № 14-11-00877.

© 2019 Ярослав Александрович Холодов
Статья доступна по лицензии Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Unported License.
Чтобы получить текст лицензии, посетите веб-сайт http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/
или отправьте письмо в Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

COMPUTER RESEARCH AND MODELING
2019 VOL. 11 NO. 5 P. 777–814
DOI: 10.20537/2076-7633-2019-11-5-777-814

MATHEMATICAL MODELING AND NUMERICAL SIMULATION

UDC: 519.633.6

Development of network computational models for the study of nonlinear wave processes on graphs

Ya. A. Kholodov[1,2]

[1] Innopolis University,
1 Universitetskaya st., Innopolis, 420500, Russia
[2] Institute of Computer Aided Design of the Russian Academy of Sciences (ICAD RAS),
19/18 2-nd Brestskaya st., Moscow, 123056, Russia

E-mail: kholodov@crec.mipt.ru

Received 02.08.2019, after completion — 10.09.2019.
Accepted for publication 10.09.2019.

In various applications arise problems modeled by nonlinear partial differential equations on graphs (networks, trees). In order to study such problems and various extreme situations arose in the problems of designing and optimizing networks developed the computational model based on solving the corresponding boundary problems for partial differential equations of hyperbolic type on graphs (networks, trees). As applications, three different problems were chosen solved in the framework of the general approach of network computational models. The first was modeling of traffic flow. In solving this problem, a macroscopic approach was used in which the transport flow is described by a nonlinear system of second-order hyperbolic equations. The results of numerical simulations showed that the model developed as part of the proposed approach well reproduces the real situation various sections of the Moscow transport network on significant time intervals and can also be used to select the most optimal traffic management strategy in the city. The second was modeling of data flows in computer networks. In this problem data flows of various connections in packet data network were simulated as some continuous medium flows. Conceptual and mathematical network models are proposed. The numerical simulation was carried out in comparison with the NS-2 network simulation system. The results showed that in comparison with the NS-2 packet model the developed streaming model demonstrates significant savings in computing resources while ensuring a good level of similarity and allows us to simulate the behavior of complex globally distributed IP networks. The third was simulation of the distribution of gas impurities in ventilation networks. It was developed the computational mathematical model for the propagation of finely dispersed or gas impurities in ventilation networks using the gas dynamics equations by numerical linking of regions of different sizes. The calculations shown that the model with good accuracy allows to determine the distribution of gas-dynamic parameters in the pipeline network and solve the problems of dynamic ventilation management.

Keywords: partial differential equations, graphs, computational models, hyperbolic type equations, numerical simulation, boundary conditions

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2019, vol. 11, no. 5, pp. 777–814 (Russian).

The work was supported by the Russian Science Foundation, grant No. 14-11-00877.

© 2019 Yaroslav A. Kholodov
This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Unported License.
To view a copy of this license, visit http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/
or send a letter to Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

Введение

В различных приложениях возникают задачи, моделируемые уравнениями в частных производных на графах (сетях, деревьях). В качестве примера можно указать глобальные модели дыхательной и кровеносной систем человека [Kholodov et al., 2005; Simakov et al., 2005, 2006a, 2006b; Simakov, 2018; Carson, 2018; Gognieva et al., 2018, 2019], интенсивного уличного движения в мегаполисе [Kholodov, Kholodov, 2004; Kholodov et al., 2006; Холодов и др., 2010; Morozov et al., 2011; Kholodov et al., 2014; Alekseenko et al., 2015; Kholodov et al., 2015; Alekseenko et al., 2017; Prokoptsev et al., 2018], динамики стержневых конструкций и каркасных сооружений [Kholodov et al., 2006], переходных процессов в электроэнергетических системах [Морозов, Холодов, 2008; Bordonos et al., 2009; Морозов и др., 2010], интенсивных информационных потоков в компьютерных и телекоммуникационных сетях [Северов и др., 2008; Трифонов и др., 2008; Severov et al., 2012; Trifonov, Kholodov, 2012], распространения мелкодисперсных примесей в вентиляционных сетях [Geller et al., 2010; Kholodov et al., 2017] и др.

Сетевые вычислительные модели (уравнения в частных производных) на графах используют различные численные методы и оригинальные математические алгоритмы, в том числе алгоритм построения систем уравнений в узлах графа. Особенность этих алгоритмов заключается в том, что они должны обеспечивать непрерывную связь моделируемых величин вдоль всего графа путем задания корректных граничных условий для всех его ветвей, входящих и выходящих в каждый из его узлов. Проблема задания корректных граничных условий при численном моделировании гиперболических систем уравнений возникла довольно давно, практически одновременно с появлением первых ЭВМ и численных методов. С тех пор много что изменилось, на порядки выросло быстродействие вычислительных систем, появились весьма сложные и высокоточные методы численного расчета и вычислительные пакеты, их использующие, но эта проблема никуда не ушла. И дело здесь не в том, что ее в принципе невозможно решить, а в том, что каждый раз ее приходится решать снова, как только возникает новая постановка задачи или усложняется сделанная ранее.

Именно эта проблема является первостепенной в данной работе. Принципиальная новизна заключается в том, что нам приходится ее решать в узле графа. В типичный узел входит и выходит несколько ветвей, вдоль каждой из которых используется своя одномерная система уравнений, при этом сам узел, как правило, имеет сложную геометрию, со своей собственной двух- или трехмерной системой уравнений, заданной внутри него. Поэтому задача корректного сопряжения граничных условий для одномерных и многомерных систем уравнений внутри и снаружи узла выходит на первый план.

Задача корректного сопряжения граничных условий для систем уравнений различной размерности весьма интересна и перспективна для вычислительной науки. В первую очередь потому, что понижение размерности моделируемой задачи приводит к уменьшению вычислительных операций и упрощению численных алгоритмов, используемых при ее решении, что в свою очередь повышает их надежность. И не стоит надеяться, что повышение производительности ЭВМ автоматически решит эти проблемы, поскольку вместе с ростом количества операций, производимых в единицу времени, возрастает и сложность решаемых задач.

Хорошей аналогией для сравнения здесь может быть использование адаптивных иерархических сеток в численном моделировании. Это научное направление давно и плодотворно развивается, и рост производительности ЭВМ не уменьшает его актуальности.

С этой точки зрения использование разной размерности задачи в различных частях одной области интегрирования по своей сути близко к идее использования адаптивных сеток и является в некотором смысле дальнейшим ее развитием. Но для ее реализации необходимо научиться корректно решать задачу сопряжения граничных условий для систем уравнений различной размерности.

1. Сетевые вычислительные модели для нелинейных систем уравнений гиперболического типа

Пусть на каждом ребре k направленного графа (сети, дерева, рис. 1.1) необходимо найти решение одномерной системы уравнений гиперболического типа:

$$v_t + Av_{x_k} = 0,\ t \ge 0,\ 0 \le x_k \le X_k,\ k = 1,\ldots,K. \tag{1.1}$$

Здесь $v = \{v_1,\ldots,v_I\}$ — вектор искомых параметров, $A = \{a_{ij}\}$, $i, j = 1,\ldots,I$, — матрица, которая может быть разной на каждой из ветвей, I — размерность системы уравнений (1.1), K — число ветвей (ребер) графа. Эта система может быть линейной или нелинейной, дивергентной или нет, иметь ненулевую правую часть и т. д., что не принципиально для последующего изложения.

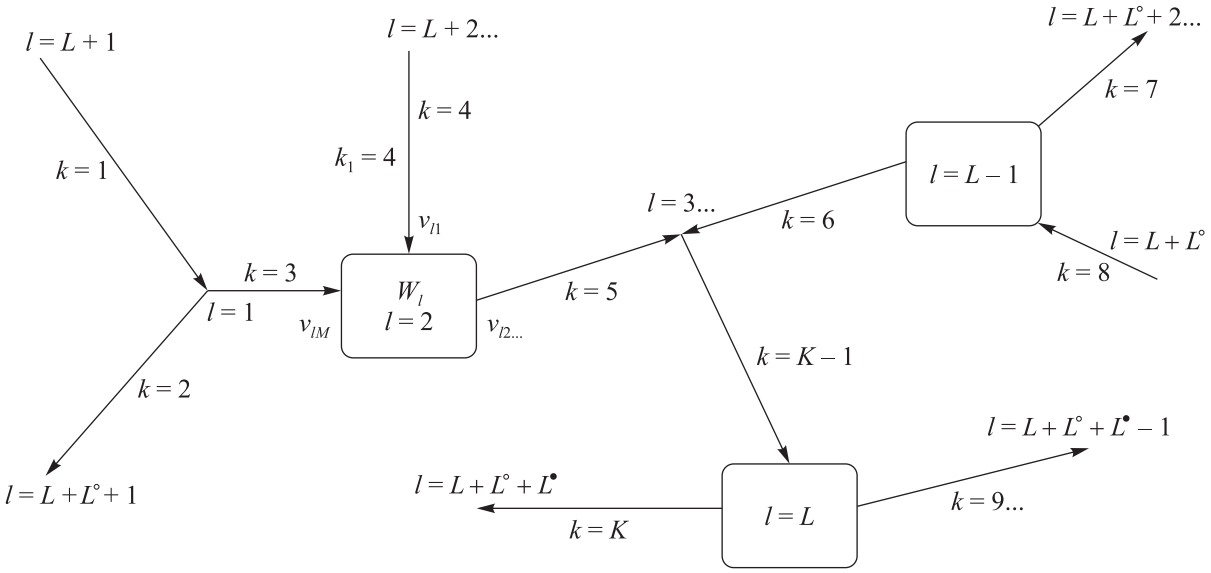


Рис. 1.1. Пример направленного графа, k — номера направленных (по стрелке) ребер. Чтобы подчеркнуть тот факт, что для определения искомых параметров W_l во внутренних узлах графа $l = 1,\ldots,L$ могут привлекаться самые разные математические модели, часть узлов обозначена точками (например, $l = 1,3$), а остальные — прямоугольниками $(l = 2, L-1, L)$

Из предположения о гиперболичности (1.1) следует, что матрица A имеет только действительные собственные значения (возможно и кратные) $\Lambda = \{\lambda_i\}$, $i = 1,...,I$, определяемые как корни уравнения

$$P_I(\lambda) = \mathrm{Det}\,(A - \lambda E) = 0 \tag{1.2}$$

(E — единичная матрица) и базис

$$\Omega = \{\omega_i\}, \quad \mathrm{Det}\,\Omega \ne 0 \tag{1.3}$$

из левых собственных векторов ω_i, $i = 1,...,I$ (являющихся строками матрицы Ω), для каждого λ_i с точностью до длины определяемых из однородных линейных систем уравнений

$$\omega_i(A - \lambda_i E) = 0, \quad i = 1,...,I. \tag{1.4}$$

Тогда $A \equiv \Omega^{-1}\Lambda\Omega$ (где Ω^{-1} — обратная к Ω матрица) и систему (1.1) можно привести к эквивалентному виду:

$$\Omega v_t + \Omega A v_{x_k} = \Omega v_t + \Lambda\Omega v_{x_k} = 0 \tag{1.5}$$

(взяв I соответствующих линейных комбинаций исходных уравнений (1.1)).

Каждое из условий совместности (1.5):

$$\omega_i \frac{dv}{dt_i} = 0, \ \frac{d}{dt_i} = \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad i = 1,\ldots,I, \tag{1.6}$$

является по сути обыкновенным дифференциальным уравнением вдоль i-й характеристики системы (1.1).

$$dx = \lambda_i dt, \quad i = 1,\ldots,I. \tag{1.7}$$

Такая характеристическая форма уравнений (1.1) (или ее модификации с использованием инвариантов Римана, если удается найти соответствующее точное решение (1.6)) часто используется для построения эффективных разностных схем для решения (1.1), а в граничных точках она необходима для замыкания граничных условий.

По крайней мере, в линейном случае с $a_{ij} = \text{const}$ (тогда $\lambda_i = \text{const}$, $\omega_i = \{\omega_{i1},...,\omega_{iI}\}$, $\omega_{ij} = \text{const}$) каждое из условий совместности (1.6) после введения новых искомых параметров (инвариантов Римана) $q_i = \omega_i v = \sum_{j=1}^{I} \omega_{ij} v_j$, $i = 1,\ldots,I$, содержит только $dq_i / dt_i = 0$, и его решением является $q_i = \text{const}$ вдоль соответствующей характеристики (1.7).

Как известно, корректная постановка краевых условий для (1.1) заключается в задании начальных условий

$$v(0,x_k) = v^0(x_k), \quad k = 1,\ldots,K, \tag{1.8}$$

и граничных условий при $x_k = 0$ и $x_k = X_k$ в узлах графа $l = 1,...,L,L+1,...,L+L^\circ$, $L+L^\circ+1,\ldots,L+L^\circ+L^\bullet$. Здесь L — число внутренних узлов графа (с которыми связано более одной ветви), L° — число узлов — входов графа (из которых исходит только одна ветвь графа), $L^\bullet$ — число узлов — выходов графа (в которые входит только одна ветвь графа). На рис. 1.1 приведены примеры нумерации ветвей $(k = 1,...,K)$ и узлов $\left(l = 1,...,L,L+1,...,L+L^\circ,\right.$ $\left.L+L^\circ+1,...,L+L^\circ+L^\bullet\right)$ направленного графа. Эта нумерация может быть и любой другой.

Чтобы подчеркнуть, что для определения искомых параметров w_l во внутренних узлах графа $l = 1,\ldots,L$ могут привлекаться самые разные математические модели (алгебраические или обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения в частных производных и т. д.), часть таких узлов обозначена точками (например, на рис. 1.1 $l = 1,3$), а остальные — прямоугольниками ($l = 2, L-1, L$ на рис. 1.1).

На свободных концах ветвей (ребер) графа (в узлах $l = L+1,...,L+L^\circ$ — входах графа, для которых $x_k = 0$, и в узлах $l = L+L^\circ+1,...,L+L^\circ+L^\bullet$ — выходах графа, для которых $x_k = X_k$) постановка краевых условий ничем не отличается от обычной постановки краевых условий одномерной гиперболической системы, а именно: в каждый момент времени число граничных условий (r_k° — для входов, $r_k^\bullet$ — для выходов) должно быть равно числу уходящих за область интегрирования характеристик (1.7), и вместе с условиями совместности (1.6) вдоль идущих

внутрь области интегрирования характеристик они должны составлять линейно-независимую дифференциально-алгебраическую систему. Например, для входов:

$$\varphi_{ki}^{\circ}(t, v(t,0)) = 0, \quad i = 1,...,r_k^{\circ}; \tag{1.9}$$

для выходов:

$$\varphi_{ki}^{\bullet}(t, v(t, X_k)) = 0, \; i = I - r_k^{\bullet} + 1,...,I. \tag{1.10}$$

Тогда при расчете таких граничных точек можно использовать r_k° граничных условий (1.9) или $r_k^{\bullet}$ условий (1.10) вместе с $I - r^{\circ}$ (для $i = r_k^{\circ} + 1,...,I$) или $I - r_k^{\bullet}$ (для $i = 1,...,I - r_k^{\bullet}$) условий совместности (1.6), причем матрицы

$$\Omega^{\circ} = \begin{pmatrix} \omega_1^{\circ} \\ \vdots \\ \omega_{r_k^{\circ}}^{\circ} \\ \omega_{r_k^{\circ}+1} \\ \vdots \\ \omega_I \end{pmatrix}, \quad \Omega^{\bullet} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_{I-r_k^{\bullet}} \\ \omega_{I-r_k^{\bullet}+1}^{\bullet} \\ \vdots \\ \omega_I^{\bullet} \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

(соответственно для входов и выходов) должны быть неособенными: $\operatorname{Det}\Omega^{\circ} \neq 0, \; \operatorname{Det}\Omega^{\bullet} \neq 0.$ Здесь ω_i — левые собственные векторы матрицы A из (1.4), векторы ω_i°, $\omega_i^{\bullet}$ получаем, дифференцируя (1.9) и (1.10):

$$\frac{d\varphi_{ki}^{\circ}}{dt} = \frac{\partial\varphi_{ki}^{\circ}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{I} \frac{\partial\varphi_{ki}^{\circ}}{\partial v_j}\frac{dv_j}{dt} = \frac{\partial\varphi_{ki}^{\circ}}{\partial t} + \omega_i^{\circ}\frac{dv}{dt} = 0, \quad \omega_i^{\circ} = \left\{\frac{\partial\varphi_{ki}^{\circ}}{\partial v_1},...,\frac{\partial\varphi_{ki}^{\circ}}{\partial v_I}\right\}, \tag{1.12}$$

$$\frac{d\varphi_{ki}^{\circ}}{dt} = \frac{\partial\varphi_{ki}^{\bullet}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{I} \frac{\partial\varphi_{ki}^{\bullet}}{\partial v_j}\frac{dv_j}{dt} = \frac{\partial\varphi_{ki}^{\bullet}}{\partial t} + \omega_i^{\bullet}\frac{dv}{dt} = 0, \quad \omega_i^{\bullet} = \left\{\frac{\partial\varphi_{ki}^{\bullet}}{\partial v_1},...,\frac{\partial\varphi_{ki}^{\bullet}}{\partial v_I}\right\}. \tag{1.13}$$

В точках ветвления графа $l = 1,...,L,$ обозначая через M число входящих в узел l и выходящих из него ветвей, а через $m = k_1,\ldots,k_M$ — их номера (рис. 1.2), будем считать искомыми величинами (помимо значений векторов $v_{l1},\ldots,v_{lM}$ в окончаниях входящих в узел l и выходящих из него ветвей) также вектор $w_l(t) = \{w_{l1},...,w_{lJ_l}\}$ с размерностью J_l, для определения которых пусть имеется некоторое количество дифференциальных или алгебраических уравнений, например:

$$\psi_{lr}\left(t, w_l, v_{l1},...,v_{lM}\right) = 0, \; r = 1,...,r_l. \tag{1.14}$$

Для расчета таких узлов графа помимо граничных условий (1.14) необходимо использовать условия совместности (1.6), выбирая их аналогично (1.9)–(1.13).

Если в некоторый момент времени t число положительных собственных чисел $\lambda_i(t,0)$ матрицы A в прилегающей к узлу l точке выходящей из этого узла ветви m° равно $r_{lm^{\circ}}^{\circ}$, а число отрицательных собственных чисел $\lambda_i(t, X_m)$ матрицы A в прилегающей к узлу l точке входящей в этот узел ветви $m^{\bullet}$ равно $r_{lm^{\bullet}}^{\bullet}$, то необходимо выполнение условия

$$r_l = IM + J_l - \sum_{m^{\circ}} r_{lm^{\circ}}^{\circ} - \sum_{m^{\bullet}} r_{lm^{\bullet}}^{\bullet}. \tag{1.15}$$

Кроме того, для обеспечения линейной независимости используемых уравнений (1.14), (1.6) необходимо, чтобы

$$\operatorname{Det}\tilde{\Omega}=\begin{Bmatrix} \omega_{a1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_{b1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{am} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{bm} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_{aM} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_{bM} & 0 \\ \tilde{\omega}_{l11} & \cdots & \tilde{\omega}_{l1m} & \cdots & \tilde{\omega}_{l1M} & \tilde{\omega}_{l1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{\omega}_{lr_l1} & \cdots & \tilde{\omega}_{lr_lm} & \cdots & \tilde{\omega}_{lr_lM} & \tilde{\omega}_{lr_l} \end{Bmatrix}\neq 0, \tag{1.16}$$

$$\tilde{\omega}_{lr}=\left\{\frac{\partial\psi_{lr}}{\partial w_{l1}},\ldots,\frac{\partial\psi_{lr}}{\partial w_{lJ_l}}\right\},\ \tilde{\omega}_{lrm}=\left\{\frac{\partial\psi_{lr}}{\partial v_{lm1}},\ldots,\frac{\partial\psi_{lr}}{\partial v_{lmI}}\right\}. \tag{1.17}$$

$\omega_{am},\ldots,\omega_{bm}$ — собственные векторы матрицы A для каждой из ветвей $m=1,\ldots,M$, соответствующие привлекаемым для расчета узла l условиям совместности (1.6). Для выходящей из узла ветви с номером m°: $a=1$, $b=r^{\circ}_{lm^{\circ}}$; для входящей в узел ветви с номером $m^{\bullet}$: $a=I-r^{\bullet}_{lm^{\bullet}}+1$, $b=I$. В соответствии с (1.15) размерность матрицы $\tilde{\Omega}$ должна быть равна $IM+J_l=r_l+\sum\limits_{m^{\circ}}r^{\circ}_{lm^{\circ}}+\sum\limits_{m^{\bullet}}r^{\bullet}_{lm^{\bullet}}$.

2. Алгоритм численного решения

Составляющая основу вычислительной модели система уравнений в частных производных (1.1) имеет гиперболический тип, и для численного решения таких уравнений существует достаточно много разнообразных по своим качествам разностных методов (см., например, [Kulikovskii et al., 2000]).

Для системы уравнений (1.1), все возможное семейство разностных схем с использованием диагонального разложения матрицы $A\equiv\Omega^{-1}\Lambda\Omega$ и равномерной разностной сетки: $t^n=n\Delta t$, $n=0,1,2,\ldots$, $x_m=m\Delta x$, $m=0,\pm1,\pm2,\ldots$, с пространственным шагом Δx и временным шагом Δt, можно представить в следующем общем виде:

$$v_m^{n+1}=\sum_{\mu,\nu}\Omega^{-1}\mathrm{A}^{\nu}_{\mu}\Omega v^{n+\nu}_{m+\mu}, \tag{2.1}$$

где $\mathrm{A}^{\nu}_{\mu}=\operatorname{diag}\left\{\alpha^{\nu}_{i,\mu}(\sigma_i)\right\}$ — диагональные матрицы $\left(\sum\limits_{\mu,\nu}\mathrm{A}^{\nu}_{\mu}=E\right)$, на главной диагонали которых находятся схемные коэффициенты: $\alpha^{\nu}_{i,\mu}(\sigma_i)$, $\sigma_i=\lambda_i\Delta t/\Delta x$, $i=1,2,\ldots,I$.

Вид разностной схемы (2.1) определяется заданием схемных коэффициентов, выбор которых является определяющим для получения требуемых свойств схемы (2.1); более подробно алгоритм выбора схемных коэффициентов $\alpha_{i,\mu}^{\nu}(\sigma_i)$ изложен в статье [Kholodov et al., 2018].

Для замыкания разностной системы уравнений (2.1) в граничных точках необходимо численно интегрировать условия совместности $\left\{\omega_i \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\}$, $i = 1, 2, ..., I$, вдоль идущих из области интегрирования на границу характеристик.

В случае наличия вектора правой части в системе уравнений (1.1):

$$v_t + Av_x = f\left(v, t, x\right) \tag{2.2}$$

учет его влияния на решение (2.2) может быть реализован посредством численного интегрирования: $\int_0^{\Delta t} f\left(v_m, x_m, t^n\right) dt$ в (2.2), при этом выбор точности метода можно соотнести с точностью разностной схемы (2.1):

$$\begin{cases} \tilde{v}_m = \sum_{\mu,\nu} \Omega^{-1} \mathrm{A}_{\mu}^{\nu} \Omega v_{m+\mu}^{n+\nu}, \\ v_m^{n+1} = \tilde{v}_m + \int_0^{\Delta t} f\left(\tilde{v}_m, x_m, t^n\right) dt. \end{cases} \tag{2.3}$$

В точках ветвления графа для вектора искомых величин $w(t) = \{w_1, ..., w_J\}$ с размерностью J, для определения которых, например, может использоваться трехмерная система гиперболических уравнений в частных производных:

$$w_t + A_1 w_{x_1} + A_2 w_{x_2} + A_3 w_{x_3} = f\left(w, t, x_k\right), \quad t \ge 0, \ 0 \le x_k \le X_k, \ k = 1, 2, 3. \tag{2.4}$$

Расщепление по пространственным переменным x_1, x_2, x_3 можно выполнить в соответствии с построениями, предложенными в работе [Kholodov, 1990]. Для этого многомерная нелинейная система уравнений гиперболического типа в левой части (2.4) представляется в виде суммы трех одномерных операторов (заключены в скобки):

$$\begin{cases} \gamma_1\left(w_t + \frac{A_1}{\gamma_1} w_{x_1}\right) + \gamma_2\left(w_t + \frac{A_2}{\gamma_2} w_{x_2}\right) + \gamma_3\left(w_t + \frac{A_3}{\gamma_3} w_{x_3}\right) = \left(\sum_{k=1}^{3} \gamma_k\right) f\left(w, t, x_k\right), \\ 0 < \gamma_k < 1, \quad \sum_{k=1}^{3} \gamma_k = 1. \end{cases} \tag{2.5}$$

Каждое из слагаемых в скобках системы (2.5):

$$w_t + \frac{A_k}{\gamma_k} w_{x_k} = f\left(w, t, x_k\right), \quad k = 1, 2, 3, \tag{2.6}$$

является одномерной системой уравнений в векторной форме вида (2.2), поэтому при численном решении любой из систем уравнений в (2.6) мы можем использовать любую из разностных схем (2.3).

Стандартный алгоритм расчета многомерных систем типа (2.5) на каждом временном шаге состоит либо в последовательном решении одномерных уравнений при $\gamma_k \equiv 1$, при этом общий шаг интегрирования по времени Δt выбирается из условия $\max_{j,k} \left|\Delta t \, \lambda_j^k / \Delta x_k\right| < 1, \quad j = 1, ..., J,$

$k=1,2,3,$ либо в их параллельном решении с нахождением свободных параметров γ_k, $k=1,2,3,$ и временного шага Δt из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{3}\gamma_k=1, \quad \lambda^k=\max_j\{|\lambda_j^k|\}, \quad j=1,...,J, \\ \dfrac{\Delta t\lambda^1}{\gamma_1\Delta x_1}=\dfrac{\Delta t\lambda^2}{\gamma_2\Delta x_2}=\dfrac{\Delta t\lambda^3}{\gamma_3\Delta x_3}=\sigma. \end{cases} \tag{2.7}$$

Решая (2.7), получаем, что

$$\begin{cases} \Delta t=\dfrac{\sigma\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3}{\left(\lambda^1\Delta x_2\Delta x_3+\lambda^2\Delta x_1\Delta x_3+\lambda^3\Delta x_1\Delta x_2\right)}, \quad \gamma_1=\dfrac{\lambda^1\Delta x_2\Delta x_3}{\left(\lambda^1\Delta x_2\Delta x_3+\lambda^2\Delta x_1\Delta x_3+\lambda^3\Delta x_1\Delta x_2\right)}, \\ \gamma_2=\dfrac{\lambda^2\Delta x_1\Delta x_3}{\left(\lambda^1\Delta x_2\Delta x_3+\lambda^2\Delta x_1\Delta x_3+\lambda^3\Delta x_1\Delta x_2\right)}, \quad \gamma_3=\dfrac{\lambda^3\Delta x_1\Delta x_2}{\left(\lambda^1\Delta x_2\Delta x_3+\lambda^2\Delta x_1\Delta x_3+\lambda^3\Delta x_1\Delta x_2\right)}. \end{cases}$$

Окончательные значения вектора w_m^{n+1} на следующем временном слое $n+1$ в каждой рассчитываемой точке получаем следующим образом:

$$w_m^{n+1}=\sum_{k=1}^{3}\gamma_k w_{m,k}^{n+1}.$$

Стоит также обратить внимание, что, когда мы используем выражения (2.7) при выборе свободных параметров γ_k и Δt, это приводит к тому, что при численном интегрировании каждого из уравнений (2.6) у нас уменьшается общий шаг по времени, но при этом выполняются соотношения $\dfrac{\lambda^1}{\gamma_1\Delta x_1}=\dfrac{\lambda^2}{\gamma_2\Delta x_2}=\dfrac{\lambda^3}{\gamma_3\Delta x_3}$, $\lambda^k=\max_j|\lambda_j^k|$, $k=1,2,3$. Это особенно важно при расчете возмущений, распространяющихся под различными углами к осям координат: x_1, x_2, x_3.

Как правило, элементы узлов графа имеют прямоугольные формы, что позволяет использовать декартову систему координат и ортогональные сетки; если же при численном интегрировании в узле графа возникает область с неправильной геометрией, то внутри нее можно использовать разностную аппроксимацию системы уравнений (2.4) с многомерной реконструкцией значений вектора $w(t,x_k)$ на гранях ячеек Дирихле, имеющих центры в узлах w_m^n (см. [Kulikovskii et al., 2001]).

3. Моделирование трафика в городской транспортной сети

В современных макроскопических моделях второго порядка транспортный поток описывается нелинейной системой гиперболических уравнений в различных постановках [Payne, 1971; Daganzo, 1995; Papageorgiou, 1998; Aw, Rascle, 2000; Zhang, 2002; Zhang, 2003; Siebel, Mauser, 2006; Siebel, Mauser, 2006], в которых по-разному учитывается зависимость интенсивности или скорости потока от его плотности. В статье [Alekseenko et al., 2015] нами была получена новая макроскопическая модель второго порядка для плотности и скорости транспортного потока:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+v\dfrac{\partial\rho}{\partial x}+\rho\dfrac{\partial v}{\partial x}=f_0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}+\left(v+\rho\dfrac{\partial v}{\partial\rho}\right)\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial\rho}f_0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Здесь $\rho(t,x)$ обозначает число АТС (*автотранспортных средств*) на единицу длины дороги в момент времени t в окрестности точки трассы с координатой *x*. Аналогично: $v(t,x)$ — скорость АТС в момент времени t в окрестности точки трассы с координатой *x*; $Q=\rho v$ — интенсивность потока АТС (количество АТС, проходящих в единицу времени через заданное сечение). Если у нас есть въезжающие или съезжающие с дороги или полосы машины, то правая часть f_0 первого уравнения в (3.1) будет представлять собой количество машин, прибывающих (знак плюс) или убывающих (знак минус) в единицу времени. И глядя на правую часть второго уравнения в (3.1), мы видим, как учитывается этот вклад в изменение скорости транспортного потока.

Было показано, что в соответствии с теоремой, доказанной в работе [Zhang, 2003], полученная математическая модель обеспечивает анизотропию транспортного потока на решениях системы уравнений (3.1), поскольку для ее собственных значений $\lambda_1=v,\ \ \lambda_2=v+\rho\dfrac{\partial v}{\partial\rho}$ на всем диапазоне значений плотности транспортного потока выполняется условие $\lambda_{1,2}\le v(\rho)$.

Число граничных условий на въездах-выездах автодороги зависит от знака собственных чисел системы (3.1): $\lambda_1=v,\ \ \lambda_2=v+\rho\dfrac{\partial v}{\partial\rho}$. Поскольку $\lambda_1=v$ всегда ≥0, нам необходимо учитывать знак второго собственного значения $\lambda_2=v+\rho\dfrac{\partial v}{\partial\rho}$. Поэтому на въезде их количество равно либо двум при положительном $\lambda_2>0$, либо одному при $\lambda_2\le 0$. На выездах — наоборот: ноль при $\lambda_2>0$ или также одно при $\lambda_2\le 0$. В соответствии с этим на въездах-выездах в качестве граничных условий могут быть заданы как функции времени — значения интенсивности потока автомобилей $Q(t)$ и величина скорости потока $v(t)$. Помимо граничных условий, для системы (3.1) необходимо задать также некоторые начальные условия:

$$\rho(x,0)=\rho_0(x),\quad v(x,0)=v_0(x). \tag{3.2}$$

Принципиальное отличие предложенной нами модели (3.1) от известных ранее макроскопических моделей второго порядка [Aw, Rascle, 2000; Zhang, 2002; Zhang, 2003; Siebel, Mauser, 2006a; Siebel, Mauser, 2006b] заключается в том, что в нашей модели не обязательно требуется построение и использование фундаментальной диаграммы в виде зависимости $Q(\rho)=\rho V(\rho)$ или желаемой (равновесной) скорости $V(\rho)=Q(\rho)/\rho$, которая в других моделях обычно входит в выражение относительной скорости распространения возмущений $c(\rho)=\rho\dfrac{\partial V(\rho)}{\partial\rho}$ в уравнение изменения импульса. Для получения эмпирической зависимости $V(\rho)$ необходимы статистические данные наблюдений значений плотности и скорости трафика за длительный момент времени с детекторов транспорта, которые не всегда доступны. Вместо производной эмпирической функции $V(\rho)$ мы аппроксимируем значение относительной скорости распространения возмущений $c(\rho)=\rho\dfrac{\partial v}{\partial\rho}$, используя данные наблюдений для плотности и скорости трафика в текущий момент времени с детекторов транспорта, установленных на заданном участке дороги:

$$c(\rho)=\frac{\rho_{\text{in}}+\rho_{\text{out}}}{2}\left(\frac{v_{\text{out}}-v_{\text{in}}}{\rho_{\text{out}}-\rho_{\text{in}}}\right). \tag{3.3}$$

В (3.3) $\rho_{\text{in}},v_{\text{in}}$ и $\rho_{\text{out}},v_{\text{out}}$ — измеренные значения плотностей и скоростей транспортного потока в текущий момент времени на въезде и выезде заданного участка дороги. Если в один из мо-

ментов времени окажется, что $\rho_{\text{out}} = \rho_{\text{in}}$, мы можем использовать значение относительной скорости распространения возмущений в предыдущий момент времени, чтобы избежать деления на ноль в (3.3).

Автомобильное движение на регулируемом перекрестке произвольной конфигурации, в отличие от системы уравнений (3.1), в силу использования двух направлений движения, следует рассматривать в двумерной постановке:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \dfrac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial v_x}{\partial t} + \left(v_x + \rho \dfrac{\partial v_x}{\partial \rho} \right) \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \dfrac{\partial v_x}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \dfrac{\partial v_y}{\partial x} + \left(v_y + \rho \dfrac{\partial v_y}{\partial \rho} \right) \dfrac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

В этой системе v_x и v_y теперь уже компоненты скорости транспортного потока в рассчитываемой точке на перекрестке по координатам x и y, правые части в системе (3.4) берем нулевыми, поскольку считаем, что все АТС, въезжающие на перекресток, должны с него выехать в силу выполнения закона сохранения потока. Систему уравнений (3.4) можно переписать в упрощенном виде с учетом того, что $Q_x = \rho v_x$, $Q_y = \rho v_y$ есть компоненты интенсивности транспортного потока и $\dfrac{\partial v_x}{\partial y} = \dfrac{\partial v_y}{\partial x} = 0$, поскольку водители, как правило, не меняют полосу движения при пересечении перекрестка:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial Q_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Q_y}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial v_x}{\partial t} + \left(v_x + \rho \dfrac{\partial v_x}{\partial \rho} \right) \dfrac{\partial v_x}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial v_y}{\partial t} + \left(v_y + \rho \dfrac{\partial v_y}{\partial \rho} \right) \dfrac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

Прежде чем перейти к построению модели расчета движения транспорта для перекрестка произвольной конфигурации, рассмотрим в качестве примера сектор перекрестка, представленный на рис. 3.1.

Вначале для наглядности ограничимся двумя светофорными фазами, а именно, когда для одной дороги, например идущей вдоль оси x на рис. 3.1, горит зеленый свет, а для другой, идущей вдоль оси y, горит красный, и наоборот. Считаем, что значения скоростей и интенсивностей транспортных потоков на въездах и выездах сектора в точках (1, 2, 3, 4) в любой момент времени нам известны из показаний датчиков, обозначенных на рис. 3.1 треугольниками. Пропорции АТС, поворачивающих внутри сектора, легко определяются из показаний датчиков: направо — $\alpha_{1,4} = Q_4 / Q_1$, налево — $\alpha_{2,3} = Q_3 / Q_2$.

Запишем разностную аппроксимацию системы уравнений (3.5), решаемой в секторе перекрестка, с учетом разрешенных направлений движения транспорта в секторе. Будем использовать следующие обозначения: Δt — шаг численного интегрирования по времени, Δx и Δy — пространственные размеры сектора. Учтем также перераспределение транспортных потоков внутри сектора, вызванное поворотами водителей при движении на перекрестке. Сделаем это при помощи известных нам коэффициентов $\alpha_{1,4}$ и $\alpha_{2,3}$, при этом надо не забывать, что

потоки сохраняют свой знак, и закон сохранения потока должен по-прежнему выполняться внутри заданного сектора. В соответствии с этими правилами на ребро 5, 4 переносим часть потока $\alpha_{1,4}Q_{1,5}$, повернувшего с ребра 1, 5 направо, и забираем часть потока $\alpha_{2,3}Q_{2,5}$, повернувшего с ребра 2, 5 налево, в результате получаем значение потока: $Q_{5,4}+\alpha_{1,4}Q_{1,5}-\alpha_{2,3}Q_{2,5}$. То же самое делаем на ребре 5, 3 — переносим часть потока $\alpha_{2,3}Q_{2,5}$, повернувшего с ребра 2, 5 налево, и забираем часть потока $\alpha_{1,4}Q_{1,5}$, повернувшего с ребра 1, 5 направо, в результате получаем новое значение потока: $Q_{5,3}+\alpha_{2,3}Q_{2,5}-\alpha_{1,4}Q_{1,5}$. Значения скоростей $v_{5,4}$ и $v_{5,3}$ на границах сектора оставляем прежними. Полученные значения потоков подставляем в разностную аппроксимацию (3.5):

$$\begin{cases} \dfrac{\rho_5^{n+1}-\rho_5^n}{\Delta t}+\dfrac{\left(Q_{5,3}^n+\alpha_{2,3}Q_{2,5}^n-\alpha_{1,4}Q_{1,5}^n\right)-Q_{1,5}^n}{\Delta x}+\dfrac{\left(Q_{5,4}^n+\alpha_{1,4}Q_{1,5}^n-\alpha_{2,3}Q_{2,5}^n\right)-Q_{2,5}^n}{\Delta y}=0, \\ \dfrac{v_{x,5}^{n+1}-v_{x,5}^n}{\Delta t}+\left(v_{x,5}^n+\rho_5^n\dfrac{v_3^n-v_1^v}{\rho_3^n-\rho_1^n}\right)\dfrac{v_{5,3}^n-v_{1,5}^n}{\Delta x}=0, \\ \dfrac{v_{y,5}^{n+1}-v_{y,5}^n}{\Delta t}+\left(v_{y,5}^n+\rho_5^n\dfrac{v_4^n-v_2^v}{\rho_4^n-\rho_2^n}\right)\dfrac{v_{5,4}^n-v_{2,5}^n}{\Delta y}=0. \end{cases} \tag{3.6}$$

Осталось теперь только определить, как будут вычисляться промежуточные значения переменных $v_{i,j}^n, Q_{i,j}^n$, которые находятся на границах сектора между точками: 1, 5; 2, 5; 5, 3 и 5, 4. Начнем их вычисление с очевидных оценок, а именно: если у нас горит красный сигнал светофора для дороги, идущей вдоль оси *y*, то значения $v_{2,5}^n, Q_{2,5}^n$ будут равны нулю. Если светофор красный для дороги, идущей вдоль оси *x*, то равны нулю будут значения $v_{1,5}^n, Q_{1,5}^n$.

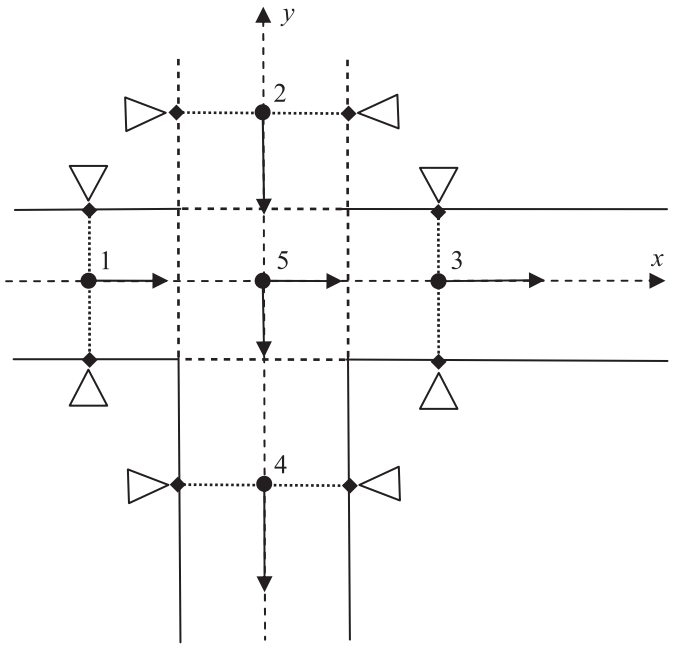


Рис. 3.1. Пример одного из составных элементов регулируемого перекрестка-сектора. Разрешенные направления движения показаны стрелками, 1–5 — номера узлов расчетной сетки, треугольниками показано возможное расположение детекторов транспорта

Для того чтобы вычислить значения $v_{i,j}^n, Q_{i,j}^n$ на границах сектора, не перекрытых красным сигналом светофора, мы воспользуемся интерполяционными выражениями для $v_{m+1/2}^n$ и $Q_{m+1/2}^n = \rho_{m+1/2}^n v_{m+1/2}^n$ сеточно-характеристического метода первого порядка аппроксимации [Magomedov, Kholodov, 1969]:

$$\begin{cases} \rho_{m+1/2}^n = \dfrac{1}{2}\left(\rho_m^n + \rho_{m+1}^n\right) + \dfrac{1}{2}\operatorname{sign}\left(\dfrac{Q_m^n - Q_{m+1}^n}{\rho_m^n - \rho_{m+1}^n}\right)\left(\rho_m^n - \rho_{m+1}^n\right), \\ v_{m+1/2}^n = \dfrac{1}{2}\left(v_m^n + v_{m+1}^n\right) + \dfrac{1}{2}\operatorname{sign}\left(\dfrac{v_m^n + v_{m+1}^n}{2} + \dfrac{\rho_m^n + \rho_{m+1}^n}{2}\dfrac{v_m^n - v_{m+1}^n}{\rho_m^n - \rho_{m+1}^n}\right)\left(v_m^n - v_{m+1}^n\right). \end{cases} \tag{3.7}$$

Эту же разностную аппроксимацию уравнений (3.5) можно одновременно применить ко всем секторам перекрестка с учетом разрешенных направлений движения транспорта в секторе. Стоит отдельно отметить, что значения переменных на границах между сектором перекрестка и примыкающими к нему дорогами следует использовать в разностной аппроксимации системы уравнений (3.1) в точках (1, 2, 3, 4), примыкающих к перекрестку дорог. Эти точки являются граничными, и значения переменных в них, найденные нами, представляют собой граничные условия для системы уравнений (3.1), которые обеспечивают нам связь моделируемых величин на всем графе транспортной сети.

Определяющими для функционирования описанной выше модели движения транспорта являются схема организация движения и выбор временных интервалов работы фаз светофорной сигнализации на перекрестке. Для оценки их влияния (по имеющимся экспериментальным данным) были проведены тестовые расчеты автомобильного движения с использованием описанных выше макроскопических моделей гидродинамического типа (3.1), (3.5).

Тестируемым объектом стало пересечение Ленинского проспекта с улицами Лобачевского и 26 Бакинских комиссаров (рис. 3.2). Эта часть транспортной сети г. Москвы была выбрана исходя из того, что между этими перекрестками практически нет прилегающих съездов и выездов на Ленинский проспект, а также все их въезды и выезды оборудованы детекторами, измеряющими интенсивность и скорость транспортных потоков по дорожным полосам. Данные с детекторов транспорта по всем полосам, прилегающим к перекресткам, были получены из системы сбора данных Navigator центра организации дорожного движения Правительства Москвы за период в 264 дня.

Рис. 3.2. Перекрестки на пересечении Ленинского проспекта с улицами Лобачевского и 26 Бакинских комиссаров г. Москвы. Расположение датчиков, измеряющих интенсивность и скорость транспортных потоков по дорожным полосам, показано цифровыми маркерами № 1–8

Усредненные по всем полосам движения расчетные значения транспортных потоков на Ленинском проспекте в зависимости от времени суток, за период с 16:00 одного рабочего дня по 16:00 следующего рабочего дня, в сравнении с данными экспериментальных наблюдений, полученными с датчиков, представлены на рис. 3.3.

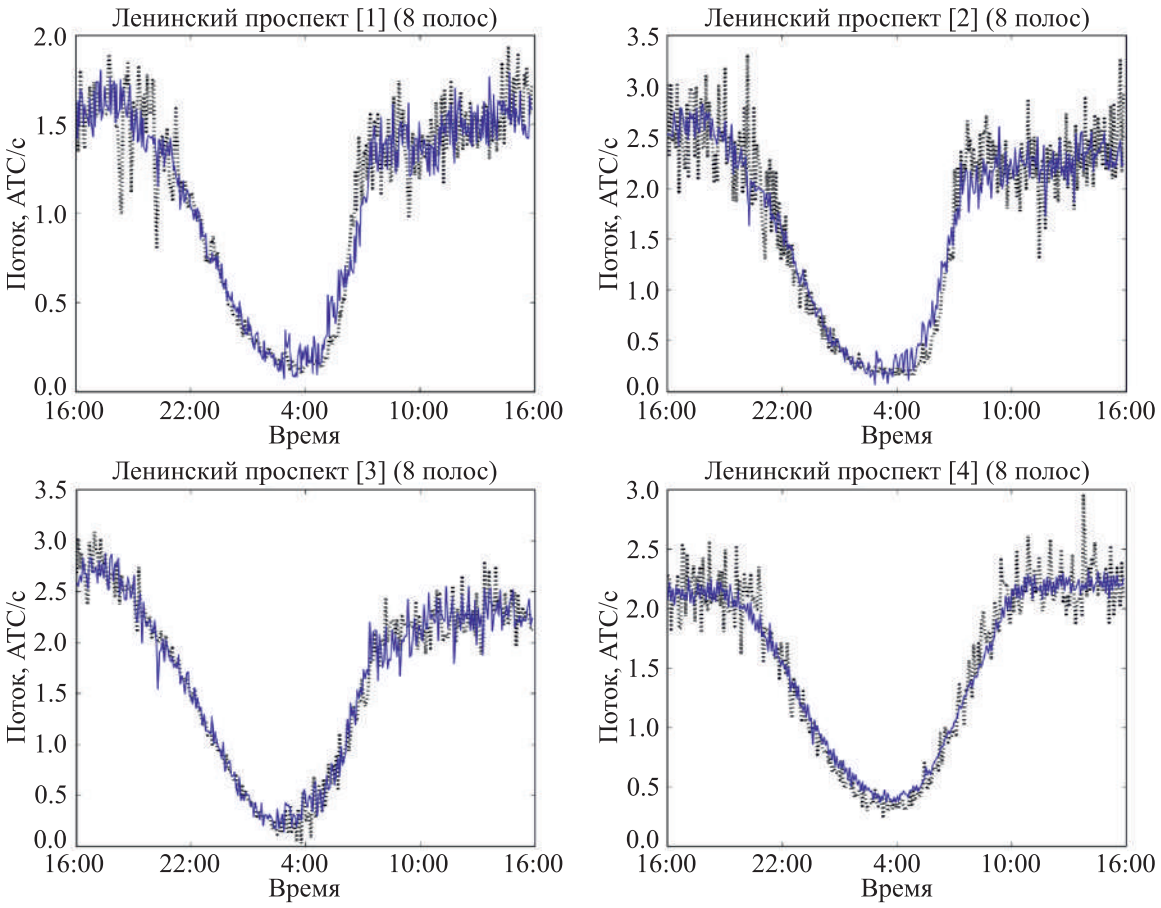


Рис. 3.3. Сравнение усредненных по всем полосам движения расчетных значений транспортных потоков на Ленинском проспекте (синий цвет) в зависимости от времени суток, за период с 16:00 одного рабочего дня по 16:00 следующего рабочего дня, в сравнении с данными экспериментальных наблюдений (серые маркеры), полученными с датчиков (№ 1–4 на рис. 3.2) с 5-минутным временным интервалом

Проведенные расчеты и полученные результаты показали, что разработанная модель хорошо воспроизводит реальную ситуацию на всех моделируемых участках транспортной сети г. Москвы на значительных временных интервалах.

Рассмотрим теперь, как работает в самом простом случае алгоритм управления дорожным движением. Для этого достаточно посмотреть на модельную фундаментальную диаграмму, представленную на рис. 3.4. На ней хорошо видно, что одному значению интенсивности $Q(\rho)$ соответствуют два различных состояния трафика, № 1 и № 2, с разными скоростями и плотностями транспортного потока, $Q(\rho) = \rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$. При этом первое значение является более предпочтительным в силу того, что его скорость выше $(v_1 > v_2)$, а плотность ниже второго $(\rho_1 < \rho_2)$. В простейшем случае задача адаптивного управления свидится к тому, чтобы удерживать транспортный поток в докритическом состоянии с плотностью меньше критической, $\rho < \rho_{\text{crt}}$ (точка перегиба на фундаментальной диаграмме), и не позволять ему уйти в заторное состояние. Для отдельной дороги эта задача решается аналитически, для всей городской транспортной сети она может вовсе не иметь решения или оно не будет единственным.

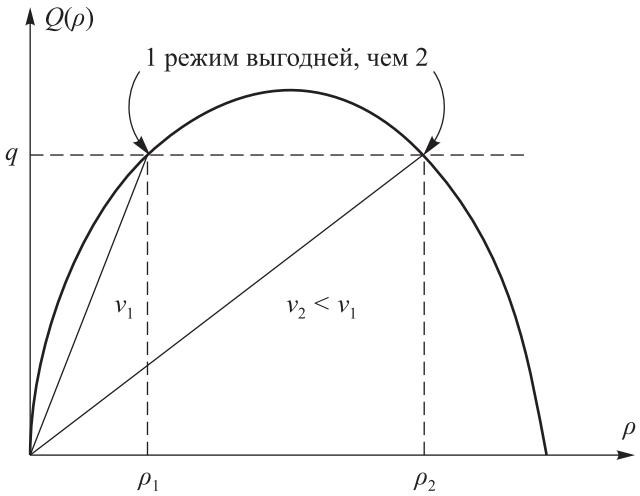


Рис. 3.4. Модельная фундаментальная диаграмма, в которой одному значению интенсивности транспортного потока $Q(\rho)$ соответствуют два различных состояния трафика, № 1 и № 2, с разными скоростями и плотностями: $Q(\rho) = \rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$. При этом первое значение является более предпочтительным в силу того, что его скорость выше $(v_1 > v_2)$, а плотность ниже второго $(\rho_1 < \rho_2)$

Начнем с алгоритма решения для отдельной дороги. Посмотрим еще раз на используемую нами макроскопическую модель транспортного потока:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial Q}{\partial \rho}\dfrac{\partial \rho}{\partial x} = f_0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + \left(v + \rho \dfrac{\partial v}{\partial \rho} \right) \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial \rho} f_0. \end{cases} \tag{3.8}$$

Нам нужно контролировать значение плотности транспортного потока так, чтобы оно не превышало критическое, $\rho < \rho_{\text{crt}}$. Соответственно, нам нужно использовать первое уравнение в системе (3.8) для решения этой задачи.

Сформулируем задачу Коши для этого уравнения, считая дорогу бесконечной (что справедливо в случае использования прозрачных граничных условий или кольцевой формы дороги) и задавая в правой части изменение плотности в местах въезда и выезда с дороги с координатами $x = x_k$ в виде локальных источников или стоков транспортного потока $f_0(x_k, t)$:

$$\begin{cases} \rho_t + Q_\rho \rho_x = f_0(x,t) = \sum\limits_k f_0(x_k, t), \\ \rho(x,0) = \rho_0(x). \end{cases} \tag{3.9}$$

Аналитическое решение уравнения (3.9) известно и имеет следующий вид:

$$\rho(x,t) = \rho_0(x - Q_\rho t) + \sum_k \int_0^t f_0(x_k, \tau) d\tau.$$

Его вид означает, что плотность транспортного потока сохраняется вдоль характеристики $\xi = x - Q_\rho t$ и меняется только в точках въезда или выезда с дороги на величину $\int\limits_0^t f_0(x_k, \tau) d\tau$, которая берется с положительным знаком в случае въезда и с отрицательным в случае выезда.

Таким образом, зная решение (3.9), мы можем контролировать плотность транспортного потока на дороге, перекрывая его в точках въезда x_k на заданные интервалы времени τ_k так, чтобы в любой момент времени в каждой точке дороги его плотность не превышала критическое значение: $\rho(x,t) = \rho_0\left(x - Q_\rho t\right) + \sum_k \tau_k f_k(x_k) < \rho_{\text{crt}}$ (см. рис. 3.5).

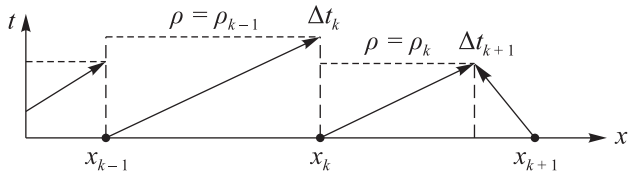


Рис. 3.5. Схематическое представление характеристик, используемых для адаптивного управления на участке дороги с номерами въездов $k - 1$, k, $k + 1$. Считается, что значения плотностей транспортных потоков $\rho_{k-1}, \rho_k, \rho_{k+1}$ сохраняются вдоль характеристик до момента пересечения характеристикой либо следующего узла, либо встречной характеристики

В итоге алгоритм адаптивного управления въездами работает следующим образом.

Делается текущий краткосрочный прогноз на время $\Delta t = \min \dfrac{x_{k+1} - x_k}{2\left|Q_\rho\left(\rho_{k+1/2}\right)\right|}$, поскольку в течение этого времени мы можем исключить взаимное влияние транспортных потоков, поступающих с соседних въездов.

Если прогноз показывает, что в какой-либо из точек дороги плотность транспортного потока начинает превышать критическую: $\rho_{\text{crt}} < \rho_k\left(t + \Delta t\right)$, то мы, опуская характеристику из этой точки дороги на текущий временной слой, определяем ближайший въезд, вызвавший затор, и с помощью светофорного регулирования ограничиваем количество въезжающих АТС на нем до значения $f_{0,k}^{\text{control}} = f_{0,k} + \dfrac{\rho_{\text{crt}} - \rho_k\left(t + \Delta t\right)}{\Delta t}$.

На практике невозможно непрерывным образом регулировать количество въезжающих АТС, поэтому для ограничения въезда используется изменение соотношения t_{on} разрешающей (зеленой) и t_{off} запрещающей (красной) фаз светофора, установленного на данном въезде, с учетом заданной минимальной длительности разрешающей фазы $t_{\min}$:

$$\frac{t_{\min}}{t_{\text{on}} + t_{\text{off}}} \le \frac{t_{\text{on}}}{t_{\text{on}} + t_{\text{off}}} = \frac{f_{0,k}^{\text{control}}}{f_{0,k}} \le 1. \tag{3.10}$$

Для проверки работы алгоритма адаптивного светофорного регулирования АТС на автомобильной многополосной дороге был поставлен вычислительный эксперимент на суточных данных внешнего кольца МКАД за сутки, 3 февраля 2012 года. Всего при моделировании учитывалось 36 крупных развязок на МКАД. Информация об интенсивности въездных и выездных потоков АТС на развязках была получена из системы Navigator центра организации дорожного движения Москвы. В силу того, что для большинства развязок отсутствовала информация о потоках АТС по каждому из въездов и выездов, было решено пренебречь точной топологией каждой развязки и использовать агрегированную информацию о входящих и выходящих потоках, представляя каждую развязку одним въездом и одним выездом.

Для оценки эффекта от применения адаптивного светофорного регулирования на въездах МКАД мы провели моделирование дорожной ситуации без регулирования, а также с тремя различными режимами адаптивного управления с максимальной длительностью красной фазы t_{off}:

10, 20 и 30 секунд для 60-секундного полного цикла $(t_{\text{on}} + t_{\text{off}})$. При запрещающем сигнале светофора прибывающие АТС образовывали очередь, которая разгружалась в зеленой фазе.

На рис. 3.6 представлены полученные в результате численного моделирования пространственно-временные диаграммы для плотности и скорости транспортного потока как при отсутствии ограничений на въезд автомобилей на МКАД (ситуация с отсутствующей или нефункционирующей системой адаптивного управления (вверху слева)), так и для ситуации, когда система адаптивного управления работала на всех 36 въездах с длительностью запрещающей (красной) фазы регулирования, не превышающей 10 (вверху справа), 20 (внизу слева) и 30 (внизу справа) секунд. По оси абсцисс отмечены километры в соответствии с их нумерацией на внешнем кольце МКАД.

В отсутствие светофорного регулирования въездов на МКАД образуются достаточно существенные пробки в районе 80–105 километров. Использование слабого регулирования (красная фаза до 10 секунд) не позволяет избежать возникновения пробок, но ускоряет их рассасывание, при этом незначительно увеличивая очереди на въездах до не более 19 АТС. Увеличение длительности запрещающего сигнала до 20 секунд практически убирает заторы на МКАД при увеличении длин очередей до 37 АТС максимум. Дальнейшее увеличение длительности запрещающей фазы приводит к полному исчезновению пробок на МКАД, однако ценой этого является заметное увеличение очередей на въездах — до 50 АТС.

Таким образом, численное моделирование с использованием разработанной нами модели не только демонстрирует эффективность предлагаемого алгоритма адаптивного управления, но и позволяет количественно оценить эффект от его применения для выбора наиболее оптимальной стратегии организации дорожного движения в городе.

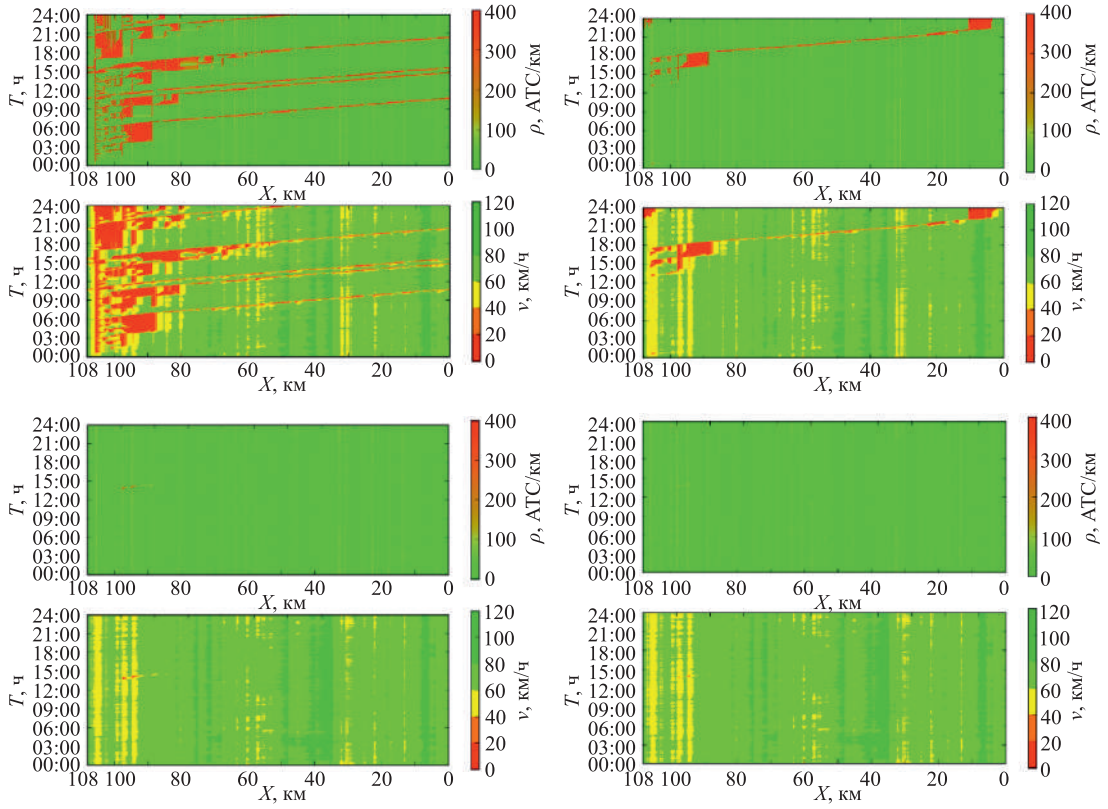


Рис. 3.6. Пространственно-временные диаграммы плотности АТС/км и средней скорости км/ч транспортного потока на МКАД за суточный период по результатам моделирования. Вверху слева: без светофорного регулирования. Вверху справа: с использованием адаптивного светофорного управления, при ограничении длительности красной фазы до 10 секунд на цикл. Внизу слева: при ограничении длительности красной фазы до 20 секунд на цикл. Внизу справа: до 30 секунд на цикл

4. Моделирование потоков данных в пакетных сетях

Сеть передачи данных (см. рис. 4.1) рассматривается как набор узлов, соединенных каналами связи. Функциональная специализация позволяет выделить два типа узлов. Узлы типа *A* перенаправляют потоки данных, создаваемые и/или терминируемые узлами другого типа *B*. Топология сети позволяет предложить представление сети в виде направленного графа. Каждая вершина типа *Pa*, соотнесенная с узлом типа *A*, реализует правила маршрутизации. Каждая вершина типа *Pb*, соотнесенная с узлом типа *B*, реализует оконечные сетевые протоколы. Каждое ребро графа соотносится с очередью и следующим за ней однонаправленным сетевым каналом.

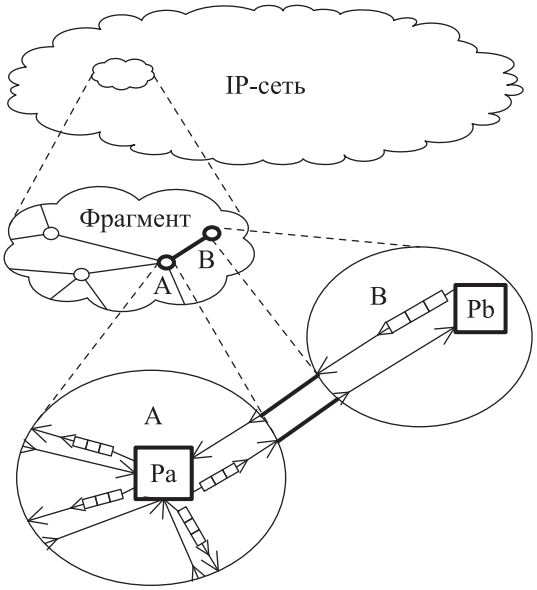


Рис. 4.1. Концептуальная модель IP-сети: *A*, *B* — узлы IP-сети, соединенные двунаправленным каналом; *A* — узел-маршрутизатор с вершиной типа *Pa* и выходными очередями ▭▭▭; *B* — оконечный узел с вершиной типа *Pb*

Необходимость передать через сеть данные от одной вершины типа *Pb* к другой вершине такого же типа создает один или более потоков данных. Каждый такой поток данных назовем сессией и будем рассматривать как перенос некоторого модельного «вещества» или «жидкости», специфичной для данной сессии.

В своем движении модельная жидкость последовательно минует все очереди на пути своей сессии. Часть ее может быть утрачена при сбросе части данных в результате активного управления очередями в IP-сетях. Размер пакетов моделируемой IP-сети соотносится с плотностью вещества ρ (количеством бит в пакете), а темп продвижения этих пакетов в очереди — со скоростью вещества u (количеством пакетов, проходящих в единицу времени; см. рис. 4.2).

Факты потери данных некоторой сессии и особенно моменты этих потерь в значительной мере могут определять последующее поведение протоколов данной сессии. Поскольку потоковая модель не отслеживает движение каждого пакета в отдельности, то, чтобы обеспечить модель, например, протокола TCP необходимой информацией, предлагается сопровождать движение по сети модельной жидкости сопутствующим сохранением информации о потерях этой жидкости. Последняя характеризуется своей плотностью распределения вдоль очереди — d. Утрата модельного вещества в результате управления определенной очередью отражается плотностью распределения этой утраты вдоль очереди — ψ (см. рис. 4.2).

Введенные переменные могут быть соотнесены с дискретным наполнением очереди q пакетами различных сессий следующим образом. Предположим, что единичный интервал $[x^q, x^q + 1]$

очереди взаимно однозначно соответствует пакету сессии s. Тогда $\int_{x^q}^{x^q+1} \rho_s^q dx = \rho_s$ есть количество бит в этом пакете, $\int_{x^q}^{x^q+1} d_s^q dx$ — количество пакетов сессии s, потеря которых должна быть учтена после приема данного пакета, а $\int_{x^q}^{x^q+1} \psi_s^q dx$ — вероятность сброса данного пакета.

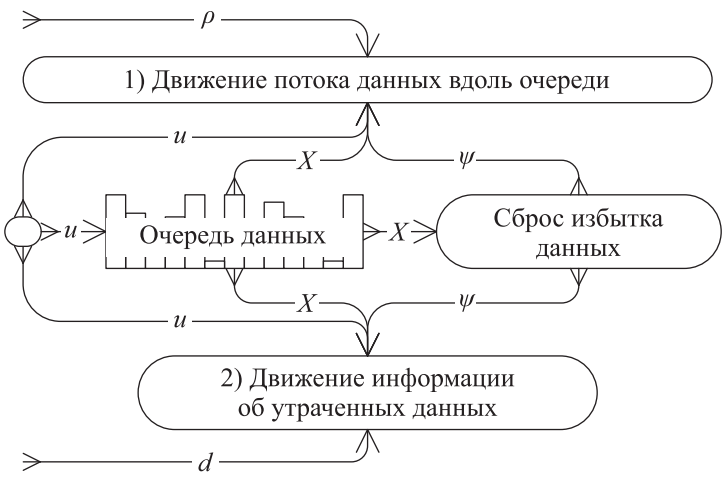


Рис. 4.2. Потоковая модель очереди: ρ — плотность «вещества» данных, d — плотность информации об утраченных данных, ψ — плотность сброса данных, u — скорость продвижения данных в очереди, X — длина очереди, x — координата вдоль очереди

В данной работе потоковая модель для ребер графа сети предусматривает набор соотношений, описывающих перенос и утрату модельных веществ. В вершинах типа *Pa* моделируются порождение и преобразование модельного вещества в соответствии с протоколом TCP. В вершинах типа *Pb* несмешивающиеся потоки модельных веществ подвергаются единственной операции — перенаправлению. Не рассматриваются такие действия с потоками данных, как тиражирование, расщепление и слияние.

Таким образом, задача состоит в том, чтобы собрать и построить полную вычислительную модель, состоящую из вышеописанных модельных элементов. Модель протокола TCP также предполагает определенные соотношения для размера TCP окна и скоростей входящего и исходящего потоков для различных режимов работы протокола.

Основу потоковой модели составляют уравнения переноса условных веществ и информации о потере этого вещества:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\rho_s^q + \dfrac{\partial}{\partial x^q}\left(\rho_s^q u^q\right) = -\rho_s^q u^q \psi_s^q, \\ \dfrac{\partial}{\partial t} d_s^q + \dfrac{\partial}{\partial x^q}\left(d_s^q u^q\right) = u^q \psi_s^q. \end{cases} \tag{4.1}$$

Здесь $q \in \{q = 1,\ldots,Q\}$ — индекс очереди в совокупности всех очередей модели, а $s \in \{s = 1,\ldots,S\}$ — индекс сессии в совокупности всех сессий модели. Пространственная координата x^q имеет смысл положения пакета в очереди, измеренного в единицах пакетов от го-

ловы очереди, примыкающей к исходящему каналу. Скорость движения вещества u^q считается одинаковой для всех сессий, проходящих через очередь q.

$$u^q = \frac{C^q}{\rho^q} + \sum_s \int_{x^q}^{X^q} \psi_s^q dx^q, \quad u^q \geq 0, \tag{4.2}$$

где C^q — номинальная пропускная способность интерфейса на выходе очереди q, $\rho^q = \sum_s \rho_s^q \Big|_{x^q = X^q}$, X^q — длина очереди q, измеренная в единицах пакетов. В предлагаемой модели скорость изменения длины очереди представляется в виде производной:

$$\frac{dX^q}{dt} = \sum_s u_s^q - u_0^q, \; X^q \geq 0, \tag{4.3}$$

где $u_0^q = u^q \Big|_{x^q = 0}$, а u_s^q — скорость продвижения данных сессии s, поступающей на вход очереди q.

Сходным образом определяются граничные условия для уравнений (4.1) на входной границе $x^q = 0$:

$$\rho_s^q \Big|_{x^q=0} = \rho_{s,0}^q, \quad d_s^q \Big|_{x^q=0} = d_{s,0}^q. \tag{4.4}$$

Здесь $\rho_{s,0}^q$ и $d_{s,0}^q$ относятся к сессии s, поступающей на вход очереди q. На выходной границе $x^q = X^q$ граничные условия не требуются, а значения $\rho_s^q(t, X^q)$, $d_s^q(t, X^q)$ однозначно определяются из уравнений (4.1) благодаря условию (4.2).

В данной работе в качестве политики активного управления очередью (AQM — active queue management) был выбран алгоритм случайного раннего обнаружения (RED — Random Early Detection) [Floyd, Jacobson, 1993], при этом сброс происходит из хвоста очереди.

$$\sum_s \int_{X^q - 1}^{X^q} \psi_s^q dx^q = \begin{cases} 0, & \xi \geq P^q(t), \\ 1, & \xi < P^q(t). \end{cases} \tag{4.5}$$

Здесь ξ — случайная величина с равномерным распределением на отрезке [0, 1], а $P^q(t)$ — вероятность сброса пакета, которая в терминах RED AQM определяется следующим образом:

$$P^q(t) = \begin{cases} 0, & D^q(t)\tilde{P}^q(t) < 1, \\ \min\left[1, \dfrac{\tilde{P}^q(t)}{2 - D^q(t)\tilde{P}^q(t)}\right], & 1 \leq D^q(t)\tilde{P}^q(t) \leq 2, \\ 1, & 2 \leq D^q(t)\tilde{P}^q(t), \end{cases} \quad D^q(t) = \int_{t_{\text{drop}}^q}^{t} \tilde{u}^q(\tau) d\tau. \tag{4.6}$$

Здесь t_{drop}^q — момент последнего сброса данных в очереди q.

$$\tilde{P}^q(t) = \begin{cases} 0, & \tilde{X}^q < X_{\min}^q, \\ \dfrac{\tilde{X}^q - X_{\min}^q}{X_{\max}^q - X_{\min}^q} P_{\max}^q, & X_{\min}^q \leq \tilde{X}^q \leq X_{\max}^q, \\ 1, & \tilde{X}^q > X_{\max}^q. \end{cases} \tag{4.7}$$

Здесь $\tilde{X}^q(t)$ — переменная ожидаемая (прогнозируемая) длина очереди, а $X^q_{\min}$, $X^q_{\max}$, $P^q_{\max}$ постоянные параметры RED AQM.

$$\frac{d\tilde{X}^q}{dt} = \frac{\ln \alpha^q}{\delta^q}\left(\tilde{X}^q(t) - X^q(t)\right). \tag{4.8}$$

Последнее уравнение интерпретирует дискретное выражение скользящего среднего $\tilde{X}^q(t+\delta^q) = (1-\alpha^q)\tilde{X}^q(t) + \alpha^q X^q(t)$. Безразмерный постоянный параметр $\alpha^q \in [1,10]$ определяет степень зависимости ожидаемой длины очереди от кратковременных колебаний длины реальной очереди. Параметр δ^q равен интервалу времени между замерами реальной длины очереди.

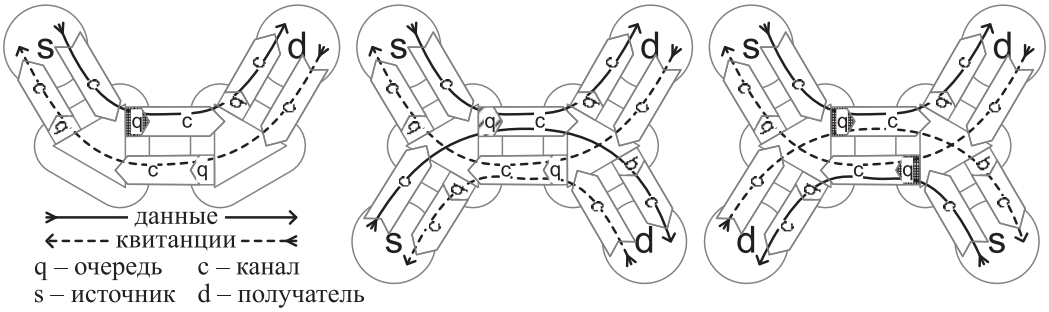
В данной работе мы пренебрегаем задержками и потерями в каналах связи в сравнении с задержками и потерями в очередях, предшествующих этим каналам. Также считаем несущественным время перенаправления данных при маршрутизации. В таком приближении модель маршрутизации сводится к присвоению необходимых значений с выходов очередей и оконечных протоколов на входы каналов и, наоборот, с выходов каналов на входы очередей и оконечных протоколов. Напомним, что рассматриваемые модели каналов и сессий являются однонаправленными. Поэтому для представления двунаправленного канала моделируемой сети, с парой очередей на его входах, потребуются два ребра сетевого графа.

Аналогично: для представления одной сессии в терминах протокола TCP потребуются две моделирующие сессии: одна — прямая, передающая данные от источника к получателю, и другая — возвратная, возвращающая квитанции от получателя к источнику (см. рис. 4.3). Отметим также зависимости потока данных на выходе TCP-источника от потока квитанций на его входе, а также потока квитанций на выходе TCP-получателя от потока данных на его входе.

Для исследования протокола TCP ограничимся случаем, когда друг другу попарно взаимно однозначно соответствуют источник, получатель, прямая и возвратная сессии. Постулируется, что каждой сессии соответствует один и только один вход графа, а также один и только один выход графа.

В данной работе моделируется поведение компьютерной сети при использовании версии NewReno протокола TCP, использующего понятие окна — последовательности пакетов, которые могут быть отправлены без получения квитанции. В данной версии TCP размер окна увеличивается до тех пор, пока не произойдет потеря пакетов в сессии. Соответственно, протокол TCP-Reno имеет несколько режимов изменения размера окна: избегания перегрузки, быстрого восстановления и медленного старта

$$u_s = \begin{cases} u_s\left(1 + 1/W_s\right), & \text{Congesion avoidance,} \\ \tilde{W}_s/\tau_s, & \text{Fast Recovery,} \\ W_s/\tau_s, & \text{Slow Start.} \end{cases} \tag{4.9}$$



(а) (б) (в)

Рис. 4.3. Различные конфигурации простейших сетей: (а) одиночная с плотностью 4 Кбит/пакет; (б) сонаправленные с плотностью 8 Кбит/пакет; (в) противонаправленные с плотностью 8 Кбит/пакет

В (4.9) W_s — текущий размер окна данной сессии, $\tilde{W}_s$ — пороговый размер окна данной сессии, $\tau_{\tilde{s}}$ — задержка распространения данных и квитанций в данной сессии. Увеличение размера окна данной сессии W_s определяется решением следующего дифференциального уравнения:

$$\frac{dW_s}{dt} = \begin{cases} u_s / W_s, & \text{Congesion avoidance}, \\ u_s / \tilde{W}_s, & \text{Fast Recovery}, \\ u_s, & \text{Slow Start}. \end{cases} \tag{4.10}$$

После инициализации данных выполняется численное моделирование сети во времени с определенным шагом. На каждом временном шаге в моделях очередей выполняются следующие действия:

- учет притока данных в хвост очереди,
- вычисление действительной и ожидаемой длин очередей,
- определение вероятности сброса очереди,
- учет сброса очереди,
- сохранение значений переменных состояния очереди,
- определение значений выходного потока очереди.

В данной работе в моделях каналов выполняется только перенос информации с входа на выход. В моделях TCP приемников информация передается с входа на выход с учетом преобразования плотности.

В моделях TCP передатчиков выполняются следующие действия:

- изменение переменных состояния протокола TCP в зависимости от режима и количества поступивших квитанций,
- накопление оцениваемого времени задержки сессии (туда и обратно),
- изменение режима в зависимости от поступившей информации о потерях, текущего режима и оценки времени задержки,
- определение значений выходного потока.

Для сравнительной оценки разработанной потоковой модели проводилось моделирование работы как простейших сетей передачи данных (см. рис. 4.3), так и более сложных конфигураций (см. рис. 4.4) в сравнении с пакетной моделью, реализованной в NS-2 — средством пакетного моделирования с открытыми исходным кодом [http://www.isi.edu/nsnam/ns/].

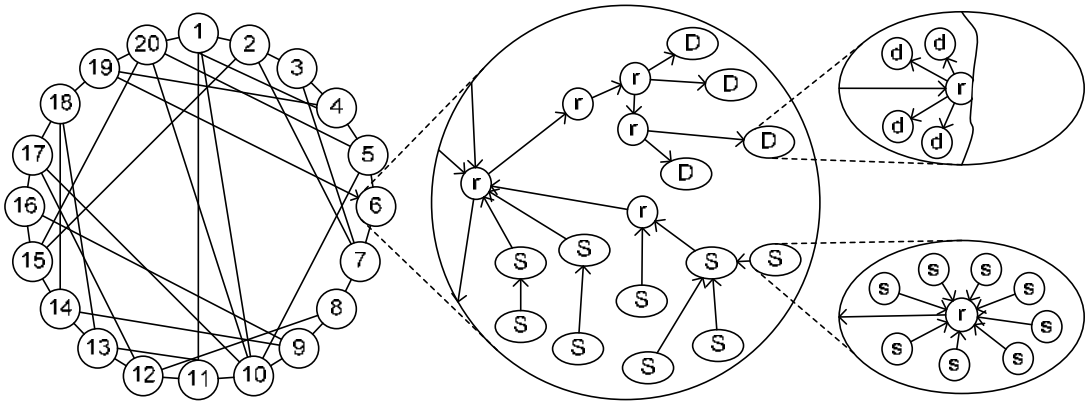


Рис. 4.4. Сложная кольцевая конфигурация сети, моделировалось 1280 сессий, при этом имела место одна загруженная очередь на пути каждой сессии. Использовались следующие характеристики сети: пропускная способность магистрали — 20 Мбит/с, хорды подсети — 5 Мбит/с, размер пакетов — 8 Кбит/пакет. Трафик организован так, чтобы половина пакетов отправлялась по магистрали в соседнюю подсеть, а вторая половина — по хорде подсети. Обозначения: r — узел-маршрутизатор, s — узел-отправитель, d — узел-получатель

Простейшие сети представлялись одиночной TCP-сессией (рис. 4.3, *а*), а также парой сонаправленных (рис. 4.3, *б*) и парой противонаправленных сессий (рис. 4.3, *в*). Эволюция интересующих нас характеристик — размеров очередей и TCP-окон — в течение первых секунд представлена на графиках, позволяющих оценить степень подобия полученных результатов (см. рис. 4.5–4.7). Видно, что модели сходным образом демонстрируют основные явления, характерные для динамики протокола TCP. Однако распределение моментов времени, в которые происходит переключение режимов протокола, существенно различается. Динамика пары противонаправленных сессий в пакетной модели обнаруживает относительно высокочастотные колебания длины очереди, при этом в потоковой модели таких колебаний нет (рис. 4.7). Последнее наблюдение позволяет судить об ожидаемой разнице в разрешающей способности пакетной и потоковой модели. Важно, что указанные различия в деталях поведения оставляют наиболее значимые средние уровни наблюдаемых характеристик близкими друг к другу.

Для сравнения интегрального поведения модельной компьютерной сети в целом, по гистограммам усредненной производительности и усредненного времени оборота соединений, рассмотрен случай относительно сложной кольцевой конфигурация сети (рис. 4.4). Данная конфигурация аналогична топологии, использованной в работе [Yong Liu et al., 2003]. Всего в рассматриваемом случае моделировалось 1280 сессий, при этом имела место одна загруженная

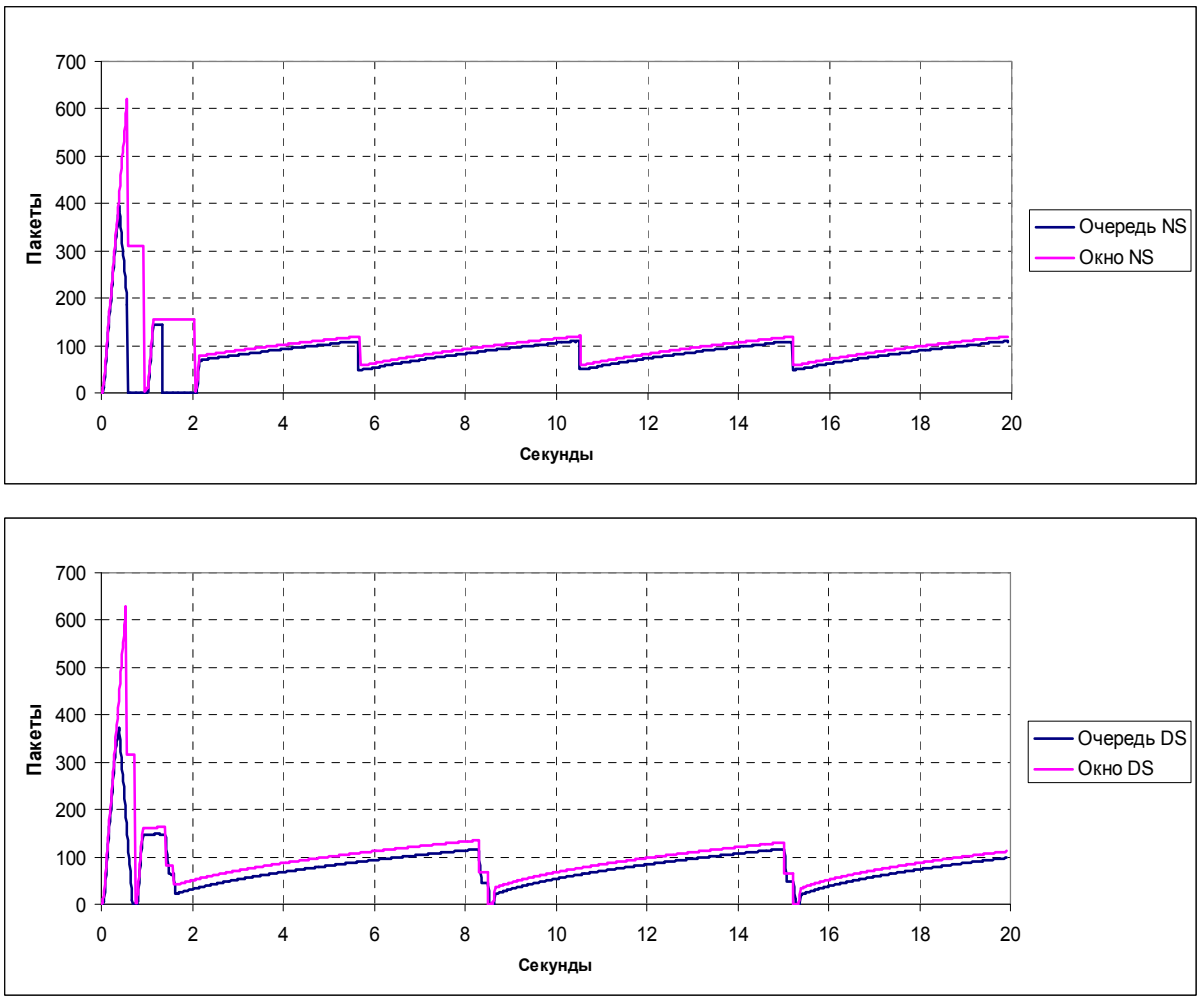


Рис. 4.5. Временная динамика одиночной сессии (рис. 4.3, *а*): вверху — пакетная модель NS-2, внизу — потоковая модель DS; синяя линия — размер общей очереди, красная — размеры TCP-окна

очередь на пути каждой сессии. Использовались следующие характеристики сети: пропускная способность магистрали — 20 Мбит/с, хорды подсети — 5 Мбит/с, размер пакетов — 8 Кбит/пакет. Трафик намеренно был организован так, чтобы половина пакетов отправлялась по магистрали в соседнюю подсеть, а вторая половина — по хорде подсети. Соответствующие усредненные результаты производительности сети и задержки в зависимости от сессии показаны на рис. 4.8 и 4.9. Усреднение результатов выполнялось за период времени в 200 с.

Заметно, что большинство соединений демонстрируют сходные величины. Вместе с этим присутствует больший разброс значений производительности отдельных соединений от значений, характерных для соответствующей группы соединений. Необходимо также отметить группы соединений, у которых заметно отличаются значения задержки (см. рис. 4.9). В части использования вычислительных ресурсов потоковая модель обнаруживает значительную их экономию. В наибольшей степени экономится занимаемая вычислительная память и в меньшей степени — время численного моделирования (см. рис. 4.10).

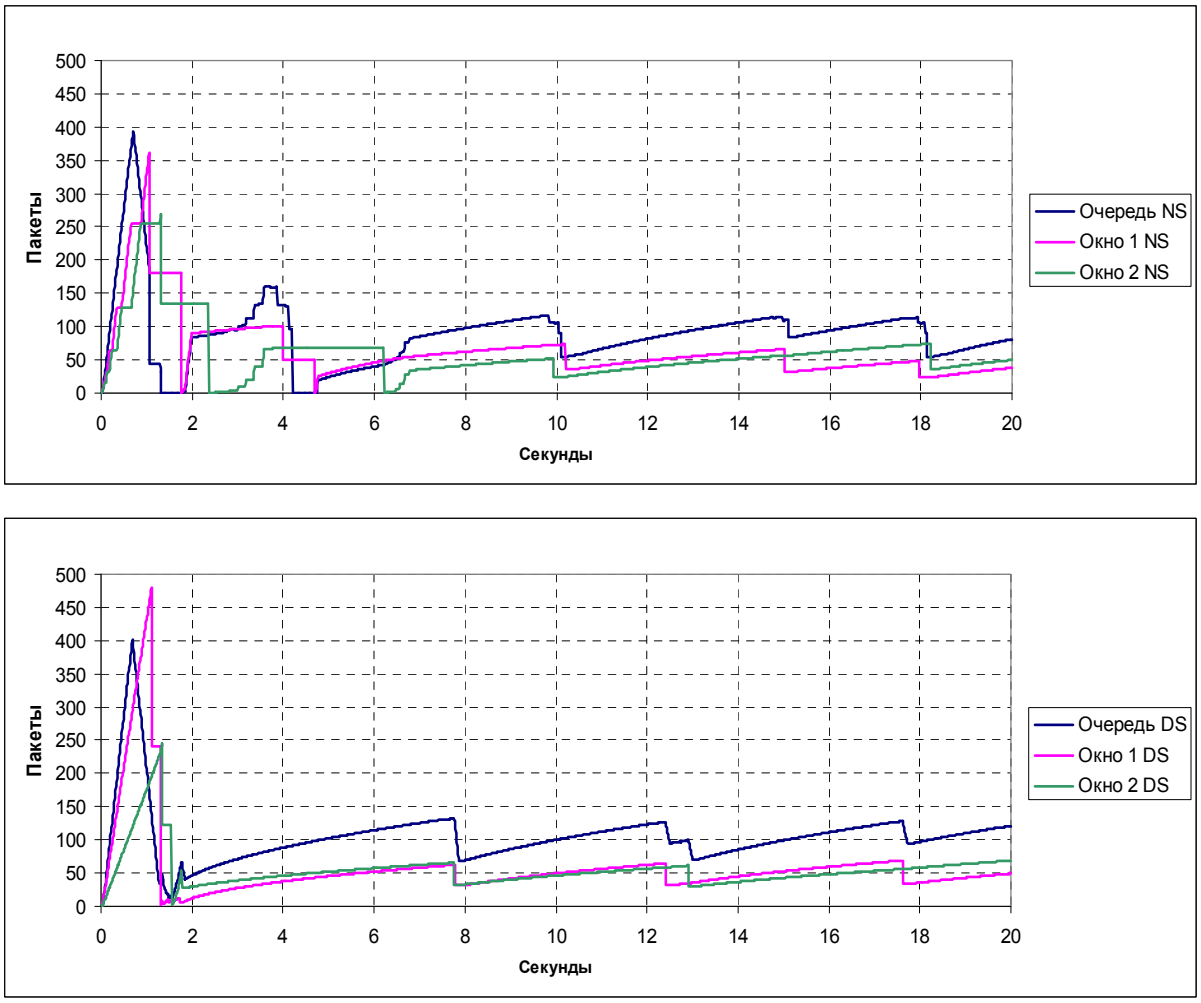


Рис. 4.6. Временная динамика двух сонаправленных сессий (рис. 4.3, *б*): вверху — пакетная модель NS-2, внизу — потоковая модель DS; синяя линия — размер общей очереди, красная и зеленая линии — размеры TCP-окон

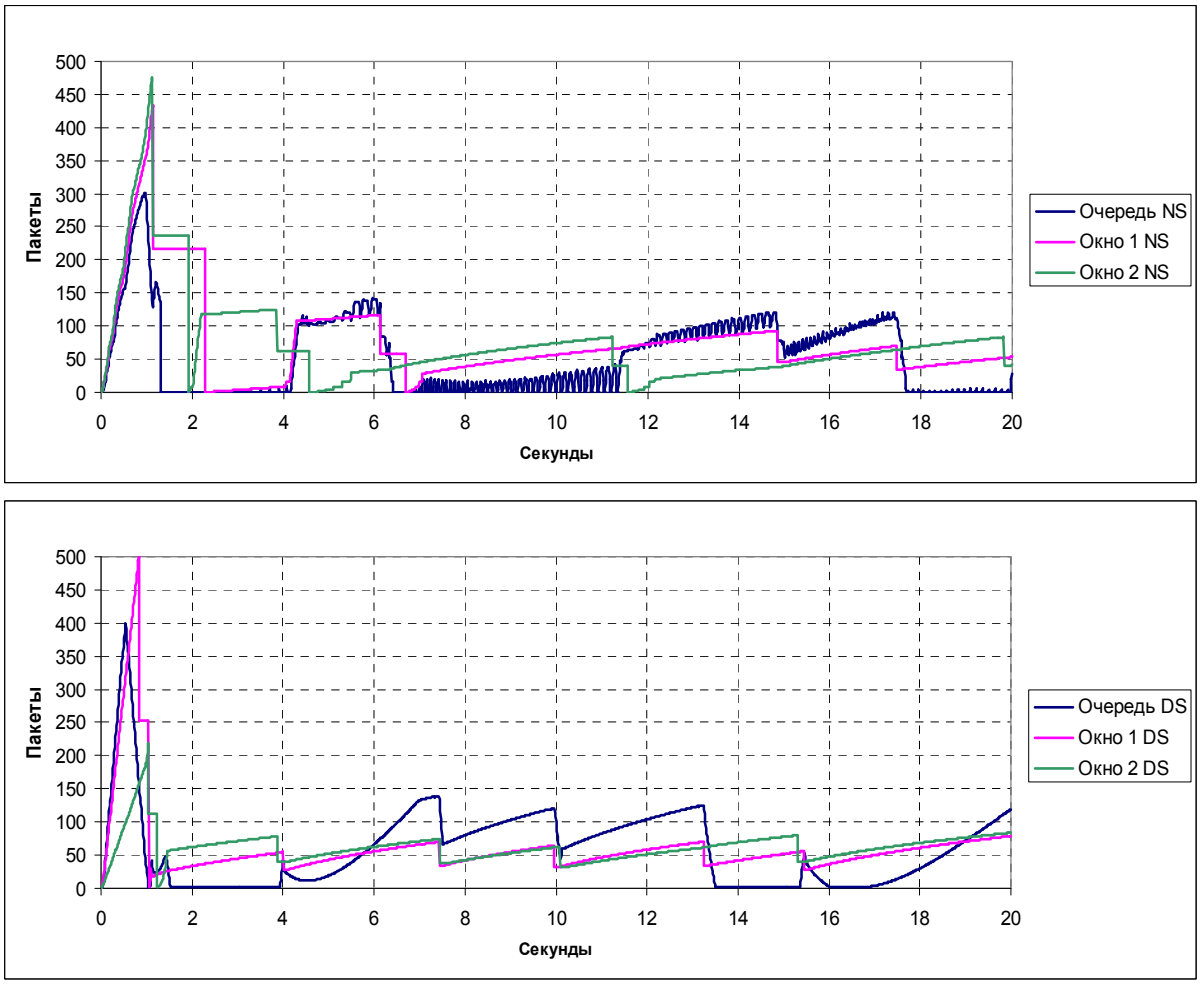


Рис. 4.7. Временная динамика двух противонаправленных сессий (рис. 4.3, *в*): вверху — пакетная модель NS-2, внизу — потоковая модель DS; синяя линия — размер очереди, красная и зеленая линии — размеры TCP-окон

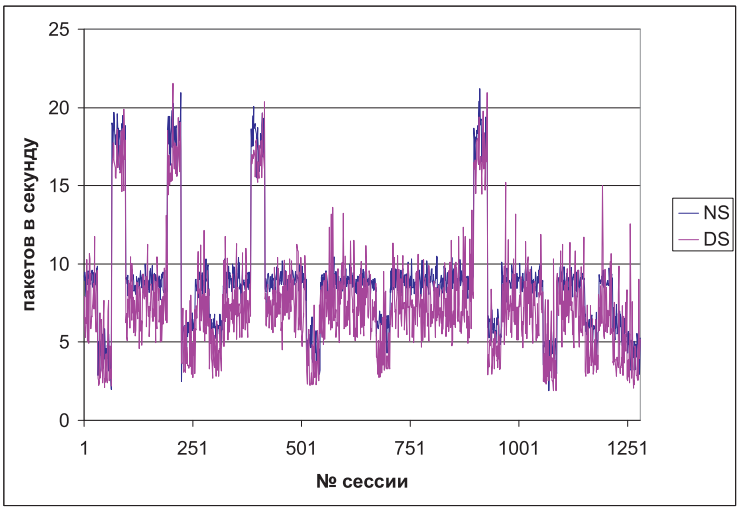


Рис. 4.8. Усредненные результаты производительности сети в зависимости от номера сессии для сложной кольцевой конфигурации сети (рис. 4.4): синяя линия — пакетная модель NS-2, красная линия — потоковая модель DS

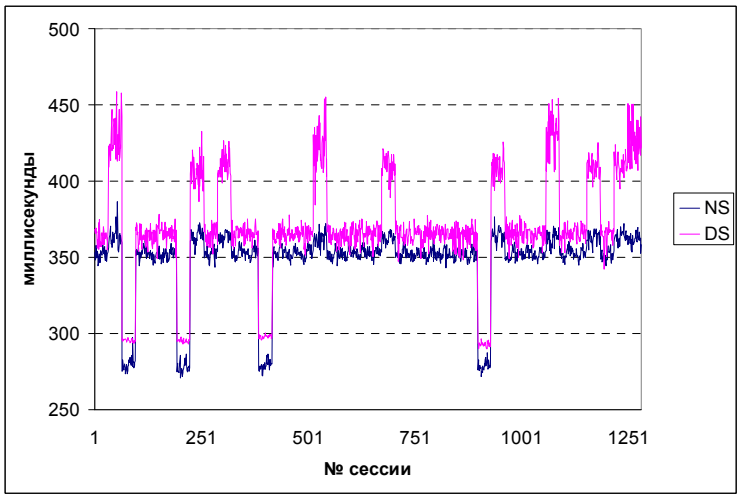


Рис. 4.9. Усредненные результаты временных задержек сети в зависимости от номера сессии для сложной кольцевой конфигурации сети (рис. 4.4): синяя линия — пакетная модель NS-2, красная линия — потоковая модель DS

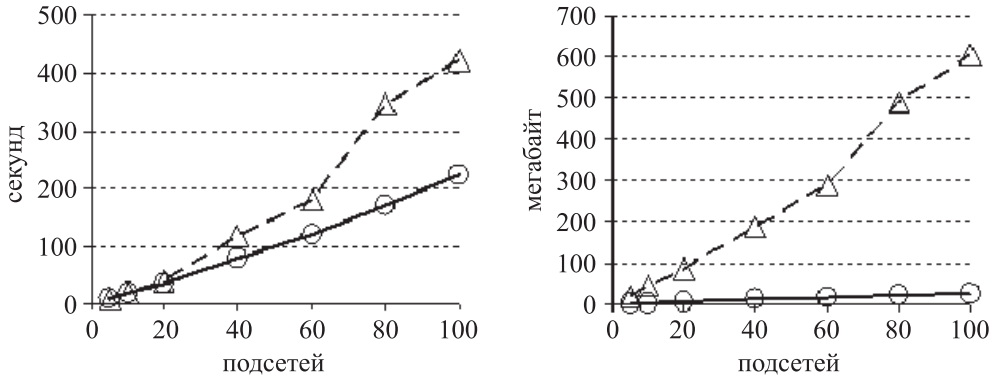


Рис. 4.10. Потребление вычислительных ресурсов в зависимости от количества моделируемых подсетей (5–100, 64 сессии на подсеть, размер пакета — 1 КБ): слева — вычислительное время, справа — количество используемой памяти; треугольники — пакетная модель NS-2; окружности — потоковая модель DS

5. Моделирование распространения примесей в вентиляционных сетях

В вентиляционной трубе использовалась одномерная система уравнений газовой динамики с примесями в односкоростной, однотемпературной постановке с правой частью, учитывающей пристеночное трение и силу тяжести:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho v)}{\partial x} = f^0, \\ \dfrac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \dfrac{\partial\left(p + \rho v^2\right)}{\partial x} = f^1 - \rho g \sin\beta, \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\rho v^2}{2} + \rho e\right) + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(v\left(\dfrac{\rho v^2}{2} + \rho e + p\right)\right) = f^0 H - v\rho g \sin\beta. \end{cases} \tag{5.1}$$

Использовалось следующее замыкание для гиперболической части уравнений (5.1):

$$\rho = \sum_{s=1}^{S} \rho_s, \quad p = (\gamma - 1)\rho e, \quad f^0 = \sum_{s=1}^{S} f_s^0,$$
$$e_1 = c_{V1} T, \quad e = T \sum_{s=1}^{S} \frac{\rho_s}{\rho} c_{Vs}, \quad f^0 H = \sum_{s=1}^{S} f_s^0 H_s. \tag{5.2}$$

В этих уравнениях x — координата, t — время, ρ — плотность газа, ρ_s — плотность s-й компоненты примеси газа (парциальная плотность), $s = 1$ для несущей газовой компоненты, v — скорость газа, p — давление идеального газа, γ — показатель адиабаты газа, T — температура газа, e — внутренняя энергия газа, f_s^0 — возможное изменение массы воздуха или его примесей, $H_s = \gamma_s e_s$ — энтальпия этой массы воздуха или его примесей, $f^1 \approx 4 \times 10^{-4} \rho v^2$ — сила трения о стенки вентиляционной трубы, g — ускорение силы тяжести, β — горизонтальный угол наклона вентиляционной трубы.

Вводя в рассмотрение векторы: $\mathbf{V} = \{\rho, v, e\}^T$, $U(\mathbf{V}) = \left\{\rho, \rho v, \rho v^2/2 + \rho e\right\}^T$, $F(\mathbf{V}) = \left\{\rho v, p + \rho v^2, \rho v\left(v^2/2 + e + p/\rho\right)\right\}^T$, $f = \left\{f^0, f^1 - \rho g \sin\beta, f^0 H - \rho g \sin\beta v\right\}^T$, систему уравнений (5.1) можно записать в векторно-дивергентной форме:

$$\frac{\partial U(\mathbf{V})}{\partial t} + \frac{\partial F(\mathbf{V})}{\partial x} = \frac{\partial U(\mathbf{V})}{\partial t} + \left(\frac{\partial F(\mathbf{V})}{\partial U(\mathbf{V})}\right)\frac{\partial U(\mathbf{V})}{\partial x} = f(\mathbf{V}, x, t) \tag{5.3}$$

с матрицей Якоби $A = \dfrac{\partial F(\mathbf{V})}{\partial U(\mathbf{V})} = \dfrac{\partial F}{\partial V}\left(\dfrac{\partial U}{\partial V}\right)^{-1} = \left(\Omega^{-1}\Lambda\Omega\right)$.

Собственные числа матрицы Якоби: $\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_i\}$, $\lambda_1 = v$, $\lambda_2 = v + c$, $\lambda_3 = v - c$ ($c = \sqrt{\gamma p / \rho}$ — скорость звука) всегда действительны и различны, поэтому система (5.3) строго гиперболического типа и ее левые собственные векторы: $\omega_1 = \left\{\dfrac{v^2}{2} - \dfrac{c^2}{\gamma - 1}, -v, 1\right\}$, $\omega_2 = \left\{\dfrac{1}{2}\left(v^2 - \dfrac{2cv}{\gamma - 1}\right), \dfrac{c}{\gamma - 1} - v, 1\right\}$, $\omega_3 = \left\{\dfrac{1}{2}\left(v^2 + \dfrac{2cv}{\gamma - 1}\right), \dfrac{c}{1 - \gamma} - v, 1\right\}$ линейно независимы.

Число граничных условий, задаваемых на входах-выходах в вентиляционные трубы, зависит от знаков собственных чисел матрицы Якоби $A = \Omega^{-1}\Lambda\Omega$. Их число определяется в зависимости от количества характеристик, идущих из области интегрирования (трубы) на ее границы. В соответствии с этим на входах-выходах в качестве граничных условий могут быть заданы как функции времени значения давления, температуры или скорости газа. Для замыкания системы уравнений на границе в качестве дополнительных уравнений могут использоваться условия совместности: $\left\{\omega_i \cdot \left(\dfrac{\partial U}{\partial t} + \lambda_i \dfrac{\partial U}{\partial x}\right)\right\}$, $i = 1 - 3$, вдоль идущих внутрь области интегрирования (трубы) характеристик.

Помимо граничных условий, для системы (5.1), (5.2) необходимо задавать также начальные условия:

$$p(x,0) = p_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x), \quad \rho_S(x,0) = \rho_{S0}(x). \tag{5.4}$$

В уравнения газовой динамики (5.1) с нулевой правой частью вентилятор можно добавить с помощью локализованного на расстоянии Δx источника импульса и энергии, который создает перепад давления Δp_{fan}:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \dfrac{\partial\left(p + \rho v^2\right)}{\partial x} = \dfrac{\Delta p_{\text{fan}}}{\Delta x}, \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\rho v^2}{2} + \rho e\right) + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(v\left(\dfrac{\rho v^2}{2} + \rho e + p\right)\right) = \dfrac{\Delta p_{\text{fan}} v}{\Delta x}. \end{cases} \tag{5.5}$$

В областях сочленения труб и примыкающих комнатах используется трехмерная система уравнений газовой динамики с примесями в односкоростной и однотемпературной постановке с турбулентной вязкостью в правой части. Учет турбулентной вязкости производится согласно k–ε-модели [Chien, 1982]. При этом нетурбулентной вязкостью мы пренебрегаем. В трехмерных областях уравнения принимают вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = f^0, \\ \dfrac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \dfrac{\partial\left(\delta_{ij} p + \rho v_i v_j\right)}{\partial x_i} = \dfrac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} + \rho g_i + f_i^1, \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\sum\limits_{i=1}^{3} \dfrac{\rho v_i^2}{2} + \rho e\right) + \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(v_i\left(\sum\limits_{i=1}^{3} \dfrac{\rho v_i^2}{2} + \rho e + p\right)\right) = \dfrac{\partial\left(\tau_{ij} v_i\right)}{\partial x_i} + f^0 H, \\ \tau_{ij} = \mu_t\left(\left(\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) - \dfrac{2}{3}\dfrac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right) - \dfrac{2\rho k}{3}\delta_{ij}, \end{cases} \quad i, j = 1,2,3. \tag{5.6}$$

Система уравнений (5.5) аналогична (5.1)? за исключением того, что здесь дополнительно учитывается турбулентная вязкость вместе с пристеночным трением, действующим на газ, что более корректно в трехмерной постановке. Скорость с силой тяжестью имеют три компоненты вдоль трех координатных осей: x_1, x_2, x_3. В системе уравнений (5.5) появляются две новые переменные: k — удельная турбулентная энергия и ε — скорость диссипации турбулентной энергии и используются следующие обозначения: $\mu_t = 0.09\dfrac{\rho k^2}{\varepsilon}$ — коэффициент турбулентной вязкости, τ_{ij} — тензор вязких напряжений. Для величин k и ε записываются два дополнительных уравнения, которые дополняют систему (5.6):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho k v_i)}{\partial x_i} = \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\tau_{ij}\dfrac{\mu_t}{\sigma_k}\dfrac{\partial k}{\partial x_i}\right) + \dfrac{\tau_{ij}}{2}\left(\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) - \rho\varepsilon, \\ \dfrac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho\varepsilon v_i)}{\partial x_i} = \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\tau_{ij}\dfrac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial x_i}\right) + \dfrac{\varepsilon}{k}\left(c_{\varepsilon 1}\dfrac{\tau_{ij}}{2}\left(\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) - c_{\varepsilon 2}\rho\varepsilon\right), \end{cases} \quad i, j = 1,2,3, \tag{5.7}$$

$$\sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3, \quad c_{\varepsilon 1} = 1.45, \quad c_{\varepsilon 2} = 1.92.$$

Граничные условия для этих величин на отражающих границах заданы как $k=0$ и $\varepsilon=0$. Начальные условия для величин k, ε задаются в виде $k=\dfrac{0.038}{\mathrm{Re}^{0.25}}u^2$, $\varepsilon=\dfrac{c_\mu^{0.75}k^{1.5}}{\ell}$, $\ell=0.07L$, где L — длина прямого участка моделируемой вентиляционной трубы.

Вводя в рассмотрение векторы

$$\mathbf{V}=\{\rho, v_1, v_2, v_3, e, k, \varepsilon\}^T,$$

$$U(\mathbf{V})=\left\{\rho, \rho v_1, \rho v_2, \rho v_3, \frac{1}{2}\left(\rho v_1^2+\rho v_2^2+\rho v_3^2\right)+\rho e, \rho k, \rho\varepsilon\right\}^T,$$

$$F_1(\mathbf{V})=\left\{\rho v_1, p+\rho v_1^2+2\rho k/3, \rho v_1 v_2, \rho v_1 v_3, \rho v_1\left(\left(v_1^2+v_3^2+v_2^2\right)/2+e+p/\rho+2k/3\right), \rho k v_1, \rho\varepsilon v_1\right\}^T,$$

$$F_2(\mathbf{V})=\left\{\rho v_2, \rho v_1 v_2, p+\rho v_2^2+2\rho k/3, \rho v_2 v_3, \rho v_2\left(\left(v_1^2+v_3^2+v_2^2\right)\big/2+e+p/\rho+2k/3\right), \rho k v_2, \rho\varepsilon v_2\right\}^T,$$

$$F_3(\mathbf{V})=\left\{\rho v_3, \rho v_1 v_3, \rho v_2 v_3, p+\rho v_3^2+2\rho k/3, \rho v_3\left(\left(v_1^2+v_3^2+v_2^2\right)\big/2+e+p/\rho+2k/3\right), \rho k v_3, \rho\varepsilon v_3\right\}^T,$$

$$\tilde{f}=\left\{f^0, \rho g_1+f_1^1, \rho g_2+f_2^1, \rho g_3+f_3^1, f^0 H, -\rho\varepsilon, -c_{\varepsilon 2}\rho\varepsilon^2/k\right\}^T,$$

$$\hat{f}=\left\{0, \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\tau_{1j}+\frac{2\rho k}{3}\right), \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\tau_{2j}+\frac{2\rho k}{3}\right), \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\tau_{3j}+\frac{2\rho k}{3}\right), \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left(\tau_{ij}+\frac{2\rho k}{3}\delta_{ij}\right)v_i\right),\right.$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\tau_{ij}\frac{\mu_t}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial x_i}\right)+\frac{\tau_{ij}}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right), \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\tau_{ij}\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_i}\right)+c_{\varepsilon 1}\frac{\varepsilon\tau_{ij}}{2k}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\right\}^T,$$

систему уравнений (5.5)–(5.6) также можно записать в векторно-дивергентной форме:

$$\frac{\partial U(\mathbf{V})}{\partial t}+\frac{\partial F_1(\mathbf{V})}{\partial x_1}+\frac{\partial F_2(\mathbf{V})}{\partial x_2}+\frac{\partial F_3(\mathbf{V})}{\partial x_3}=\tilde{f}\left(\mathbf{V}, x_1, x_2, x_3, t\right)+\hat{f}\left(\mathbf{V}, x_1, x_2, x_3, t\right). \tag{5.8}$$

Решение задачи Римана для многокомпонентного газа в одномерной постановке строится с помощью решения задачи Римана о распаде между однокомпонентными газами с различными показателями адиабаты. Примеси в нашей постановке переносятся со скоростью течения газа, поэтому разрыв между ними фактически эволюционирует как контактный разрыв. Таким образом, на границе ячеек задача сводится к решению задачи Римана вдоль нормального направления скорости в трубе.

Рассмотрим вентиляционную трубу в трехмерной постановке. Пусть на стенках трубы стоят отражающие граничные условия. Потоки на границе получаются из решения задачи Римана для одного и того же газа вдоль нормали к стенке трубы, но нормальная скорость газа снаружи стенки берется противоположной нормальной скорости газа внутри: $\{\tilde{\rho}, \tilde{u}_n, \tilde{p}\}=\mathcal{R}_{1D}\left(\{\rho, u_n, p\}_{\text{in}}, \{\rho, -u_n, p\}_{\text{in}}\right)$. При этом очевидно, что $\tilde{u}_n=0$, а $\tilde{\rho}$ и $\tilde{p}$ зависят от параметров газа внутри трубы. Оценим значение $\tilde{p}$ из размерных соображений: $\tilde{p}\approx p\pm\rho u_n^2$, где «+» соответствует $u_n>0$, а «–» — случаю $u_n<0$. Если пренебречь изменением импульса вдоль трубы, то изменение нормальной компоненты импульса будет пропорционально давлению: $\dfrac{\Delta(\rho u_n)}{\Delta t}\approx\dfrac{\Delta p}{\Delta x}\approx\dfrac{\Delta\left(\rho u_n^2\right)}{\Delta x}$. Отсюда мы можем оценить время релаксации нормальной компоненты импульса: $t_{\text{relax}}\approx\dfrac{d}{|u_n|}$, где d — характерный диаметр трубы. Таким образом, идея

перехода к одномерной области состоит в устремлении $t_{\text{relax}} \to 0$. То есть газ, попадая в одномерную трубу, теряет свой поперечный импульс практически мгновенно. Этого же эффекта можно добиться, не добавляя поперечный импульс в одномерные ячейки, то есть обнуляя соответствующие компоненты импульса поперек трубы. Поскольку поперечная скорость газа в трубе теперь всегда будет равна нулю, граничные условия на стенках трубы более не потребуются.

Практически это означает, что между одномерными и трехмерными областями считается тот же самый нормальный поток, что и между трехмерными областями, но поток поперечного импульса из трехмерной ячейки просто не добавляется к поперечному импульсу одномерной ячейки. Таким образом, газ, попадая в одномерную тубу, теряет свой поперечный импульс. Также на границе между трехмерными и одномерными вычислительными узлами со стороны одномерной области поперечные компоненты скорости вместе с удельной турбулентной энергий полагаются равными нулю:

$$\begin{cases} F_n^{1D} = \left\{ \rho v_n,\, p + \rho v_n^2,\, 0,\, 0,\, \rho v_n \left(v_n^2 / 2 + e + p/\rho \right), 0, 0 \right\}^T, \\ F_n^{3D} = \left\{ \rho v_n,\, p + \rho v_n^2 + \dfrac{2\rho k}{3},\, \rho v_n v_{\tau_1},\, \rho v_n v_{\tau_2},\, \rho v_n \left(\dfrac{\left(v_n^2 + v_{\tau_1}^2 + v_{\tau_2}^2 \right)}{2} + e + \dfrac{p}{\rho} + \dfrac{2k}{3} \right), \rho k v_n, \rho \varepsilon v_n \right\}^T. \end{cases}$$

Для проверки корректности работы алгоритма численного сопряжения одномерных и трехмерных областей был поставлен модельный вычислительный эксперимент по расчету распространения примеси в Г-образной вентиляционной трубе, имеющей на одном конце вентилятор, на другом — выход в атмосферу. Длина каждой из двух частей трубы бралась равной 10 м, труба имеет при этом квадратное сечение шириной 1 м. Рассматривалось численное сопряжение двух участков вентиляционной трубы и ее поворотной части и сравнивалось с результатами расчетов, полученными в трехмерной постановке. Моделировалось распространение примеси метана CH_4 в трубе с начальной концентрацией в 0.3 кг/м^3, который находился в середине первой части трубы и занимал 5 м в длину. В начальный момент времени внутри трубы задавались температура 293 К и давление в одну атмосферу, скорость на входе в трубу через вентилятор была равна 5 м/с, на выходе из вертикального участка трубы задавалось атмосферное давление.

Результаты расчетов истечения газа из трубы вместе с примесью метана представлены на рис. 5.1 на момент времени 2 с. Показаны значения распределения плотности метана для 4-х различных сеточных конфигураций расчетной области. Каждый из участков трубы поделен на 100 сеточных узлов вдоль по длине. Горизонтальная часть трубы считалась в одномерной постановке первые 80 сеточных узлов; за 20 узлов до поворотной части задавалась трехмерная сетка с шагом 10 × 10 узлов по сечению. Это делалось для того, чтобы обеспечить ламинарность течения газа на входе в поворот. На рисунке представлены результаты четырех вариантов расчета. В первом варианте (левый сверху) после поворота сразу задавалась одномерная сетка, во втором (правый сверху) одномерная постановка задавалась через десять узлов, в третьем (левый снизу) — через пятьдесят; в последнем (правый снизу) вся область после поворота считалась в трехмерной постановке. Распределения скорости газа в трубе для этих же сеточных конфигураций показаны на рис. 5.2.

Из результатов, представленных на рисунках, хорошо видно, что увеличение трехмерной области в расчете позволяет более детально передать картину течения газа и примесей в трубе. В полностью трехмерном расчете второй части трубы газ убегает вперед примерно на 2.2 м, этот эффект неизбежен, так как в одномерном расчете у нас невозможно формирование профиля Пуазейля, который образуется в трехмерном расчете. Тем не менее мы можем убедиться, что даже при использовании полностью одномерной сетки в трубе после поворота все качественные характеристики течения газов сохраняются. Метан почти полностью перетекает во вторую

часть трубы, за исключением небольшого его количества (~ 0.1 кг), которое остается в углу поворотной части, где скорость газа практически нулевая. Также если мы оценим массу газа, поступившего во вторую часть трубы для всех 4-х вариантов расчета, то увидим, что она практически не меняется в зависимости от варианта сеточной конфигурации расчета, как это показано в таблице 1. При этом, как видно из таблицы, вычислительные затраты в одномерном расчете почти в пять раз меньше, чем в трехмерном, и это только для половины трубы. Если бы мы считали всю трубу в трехмерной постановке и сравнивали с этим вариантом, то получили бы как минимум десятикратное ускорение, и это в простейшем модельном расчете.

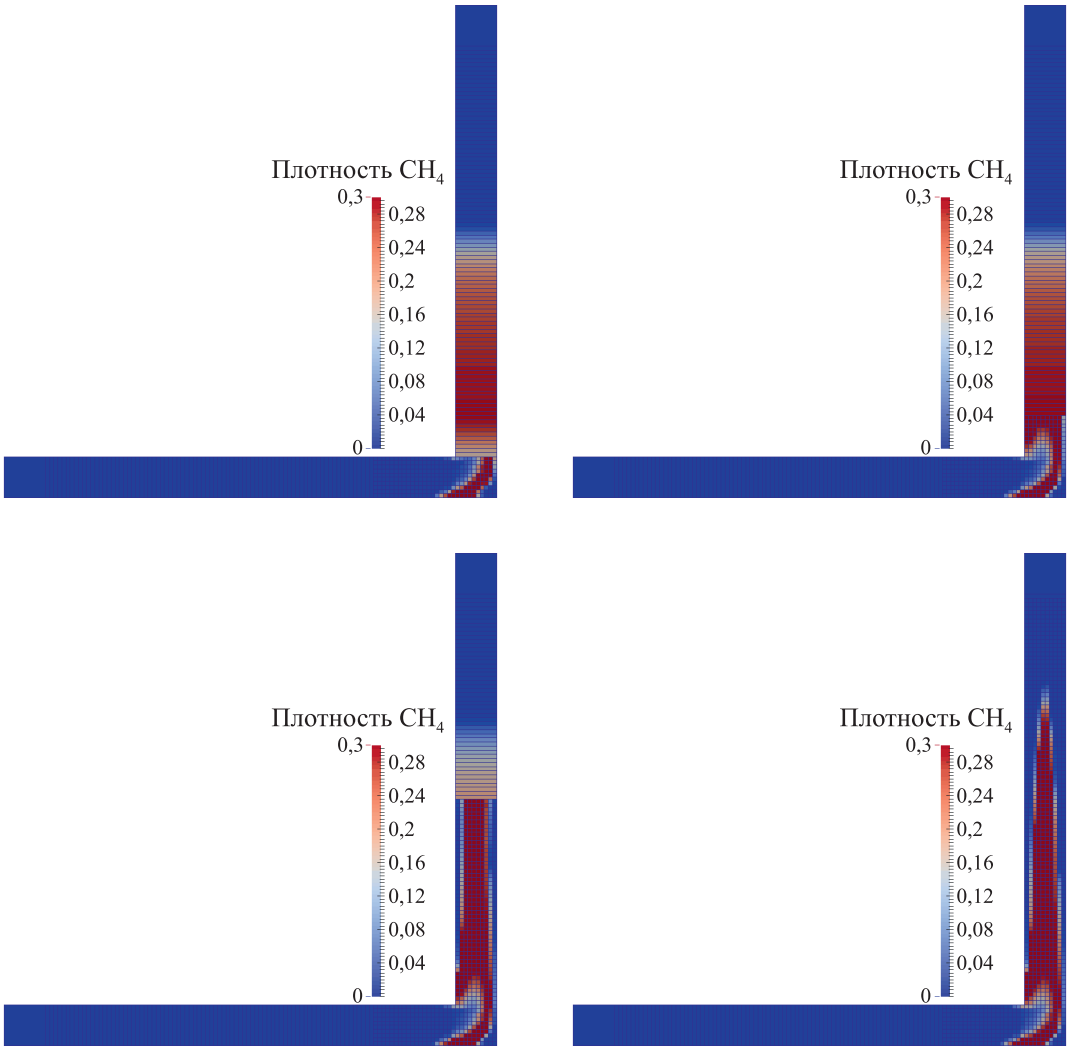


Рис. 5.1. Результаты расчетов распределения плотности примеси метана CH_4 (кг/м^3) с начальной концентрацией в 0.3 кг/м^3, который находился в середине первой части трубы и занимал 5 м в длину в Г-образной вентиляционной трубе на момент времени 2 с. В начальный момент времени внутри трубы задавались температура 293 K и давление в одну атмосферу, скорость на входе в трубу через вентилятор была равна 5 м/с, на выходе из вертикального участка трубы задавалось атмосферное давление. Каждый из участков трубы поделен на 100 сеточных узлов по длине. Горизонтальная туба считалась в одномерной постановке первые 80 сеточных узлов; за 20 узлов до поворотной части задавалась трехмерная сетка с шагом 10 × 10 узлов по сечению. Представлены результаты четырех вариантов расчета. В первом варианте (левый сверху) после поворота сразу задавалась одномерная сетка, во втором (правый сверху) одномерная постановка задавалась через десять узлов, в третьем (левый снизу) — через пятьдесят, в последнем (правый снизу) вся область после поворота считалась в трехмерной постановке

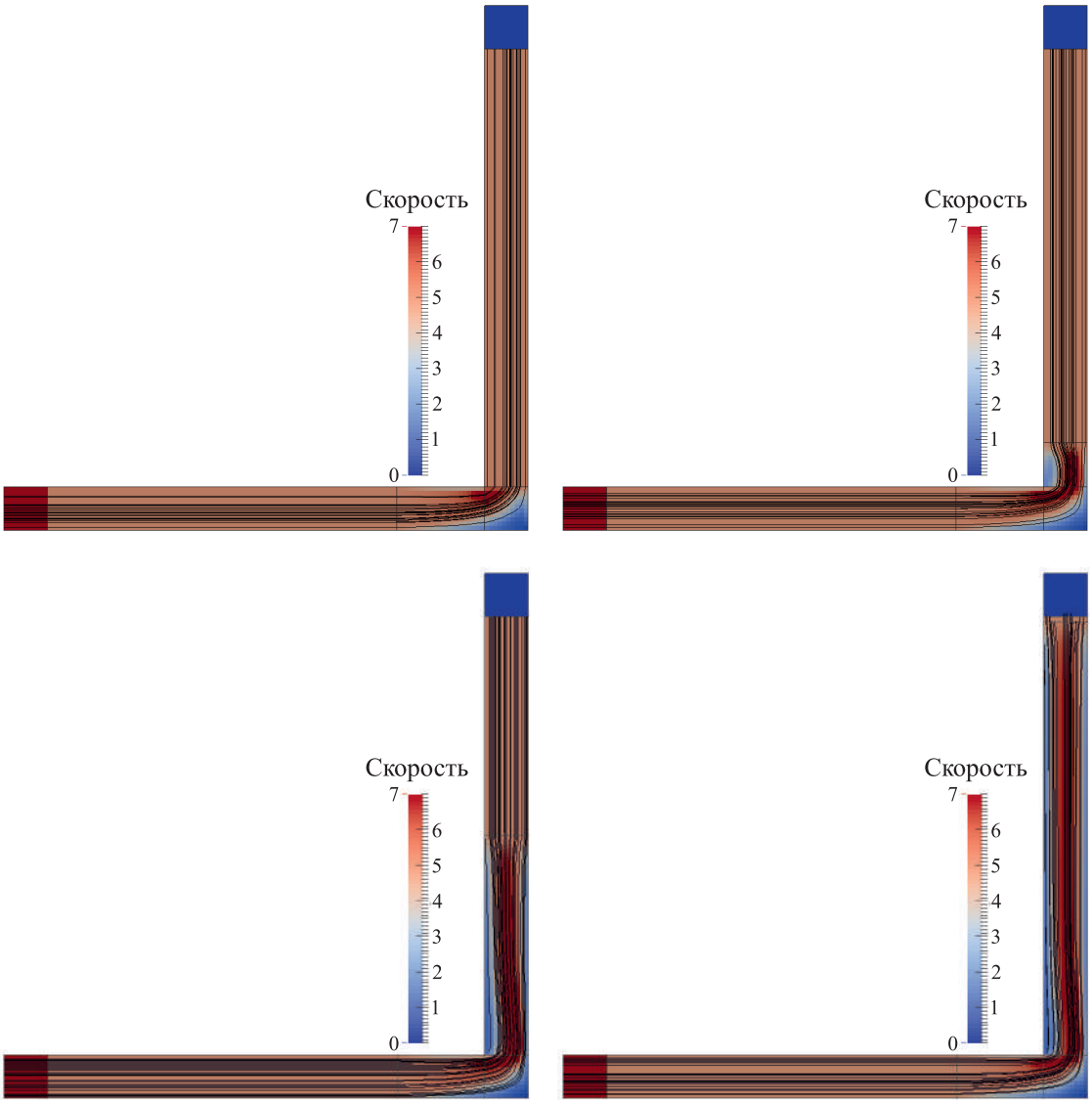


Рис. 5.2. Результаты расчетов распределения скорости (м/с) примеси метана CH_4 с начальной концентрацией в 0.3 кг/м^3, который находился в середине первой части трубы и занимал 5 м в длину в Г-образной вентиляционной трубе на момент времени 2 с. В начальный момент времени внутри трубы задавались температура 293 K и давление в одну атмосферу, скорость на входе в трубу через вентилятор была равна 5 м/с, на выходе из вертикального участка трубы задавалось атмосферное давление. Каждый из участков трубы поделен на 100 сеточных узлов по длине. Горизонтальная туба считалась в одномерной постановке первые 80 сеточных узлов; за 20 узлов до поворотной части задавалась трехмерная сетка с шагом 10 × 10 узлов по сечению. Представлены результаты четырех вариантов расчета. В первом варианте (левый сверху) после поворота сразу задавалась одномерная сетка, во втором (правый сверху) одномерная постановка задавалась через десять узлов, в третьем (левый снизу) — через пятьдесят, в последнем (правый снизу) вся область после поворота считалась в трехмерной постановке

Таблица 1. Вычислительные затраты в зависимости от варианта сеточной конфигурации расчета

Количество одномерных узлов во второй части трубы (0–100)	100	90	50	0
Масса метана в выходной трубе, кг	1.40446	1.40944	1.40694	1.40365
Затраченное вычислительное время, с	120	220	400	560

Также были выполнены расчеты нестационарных процессов вентиляции в модельной сети выработок угольной шахты, рассмотренные ранее в работе [Vasenin et al., 2011]. В частности, был проведен расчет проветривания тупиковой выработки вентилятором местного проветривания. Расчеты проветривания тупика проводились для модельного участка сети, представленного на рис. 5.3 и имеющего следующие размеры: длины вертикальных выработок 1–2, 6–7 — 100 м, длины горизонтальных выработок 2–3, 5–6 — 400 м, длина тупиковой выработки 4–5 — 200 м; площадь сечений выработок была принята 10 м^2. В тупиковой выработке по всей длине задавалась повышенная концентрация метана $\rho_{CH_4} = 0.3$ кг/м^3. Квадратными сечениями на модельной сети выработок показаны границы расчетной зоны с трехмерной сеткой с размером ячейки $0.33 \times 0.33 \times 0.33$ м, на остальных участках сети использовалась одномерная сетка с шагом 0.66 м.

В начальный момент времени на фоне стационарного режима проветривания сети задаваемого основным вентилятором (№ 1 на рис. 5.3, скорость на выходе — 2.1 м/с), в работу включается вентилятор местного проветривания, установленный в выработке на расстоянии 10 м от сопряжения с тупиковой выработкой 4–5 и подающий по специальному вентиляционному трубопроводу 3–4 с сечением 1 м^2 поток воздуха к тупику выработки со скоростью 12 м/с (см. рис. 5.3). После включения вентилятора местного проветривания из тупиковой выработки 4–5 постепенно происходит вытеснение газа с повышенным содержанием метана в выработку 5–6. В зоне сопряжения выработок происходит перемешивание струи газа из тупика с газом, двигающимся к выходу из выработки 5–6, в результате чего метан выдувается из выработки в атмосферу. Результаты расчетов распределения примеси метана в зоне сопряжения выработок в моменты времени 5 с (вверху слева), 40 с (вверху справа), 130 с (внизу слева) и 150 с (внизу справа) представлены на рис. 5.4.

Использование трехмерных сеток в областях сочленения выработок позволяет детально контролировать динамику течения газа и примесей. В своей работе [Vasenin et al., 2011] авторы указывали на возможный эффект обратного перетока метана из тупиковой выработки 4–5 в вентиляционную трубу 3–4 в случае задания высокой скорости потока на вентиляторе местного проветривания. На рис. 7 мы можем частично наблюдать этот эффект, который хорошо заметен в момент времени 130 с. Тем не менее мы видим, что метан в итоге не доходит до вентиляционной трубы и со временем выдувается в атмосферу. Таким образом, разработанная математическая модель позволяет определять распределение газодинамических параметров течения в трубопроводной сети и позволяет решать задачи динамического управления вентиляцией сети.

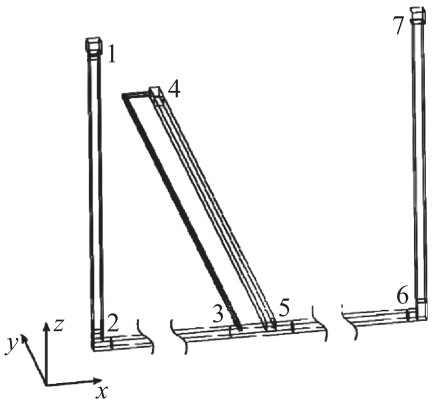


Рис. 5.3. Модельный участок сети, имеющий следующие размеры: длины вертикальных выработок 1–2, 6–7 — 100 м, длина горизонтальных выработок 2–3, 5–6 — 400 м, длина тупиковой выработки 4–5 — 200 м; площадь сечений выработок была принята 10 м^2, вентиляционной трубы 3–4 — 1 м^2. В тупиковой выработке по всей длине задавалась повышенная концентрация метана — 0.3 кг/м^3. Квадратными сечениями показаны границы расчетных зон с трехмерной сеткой с размером ячейки 0.33 × 0.33 × 0.33 м, на остальных участках сети использовалась одномерная сетка с шагом 0.66 м

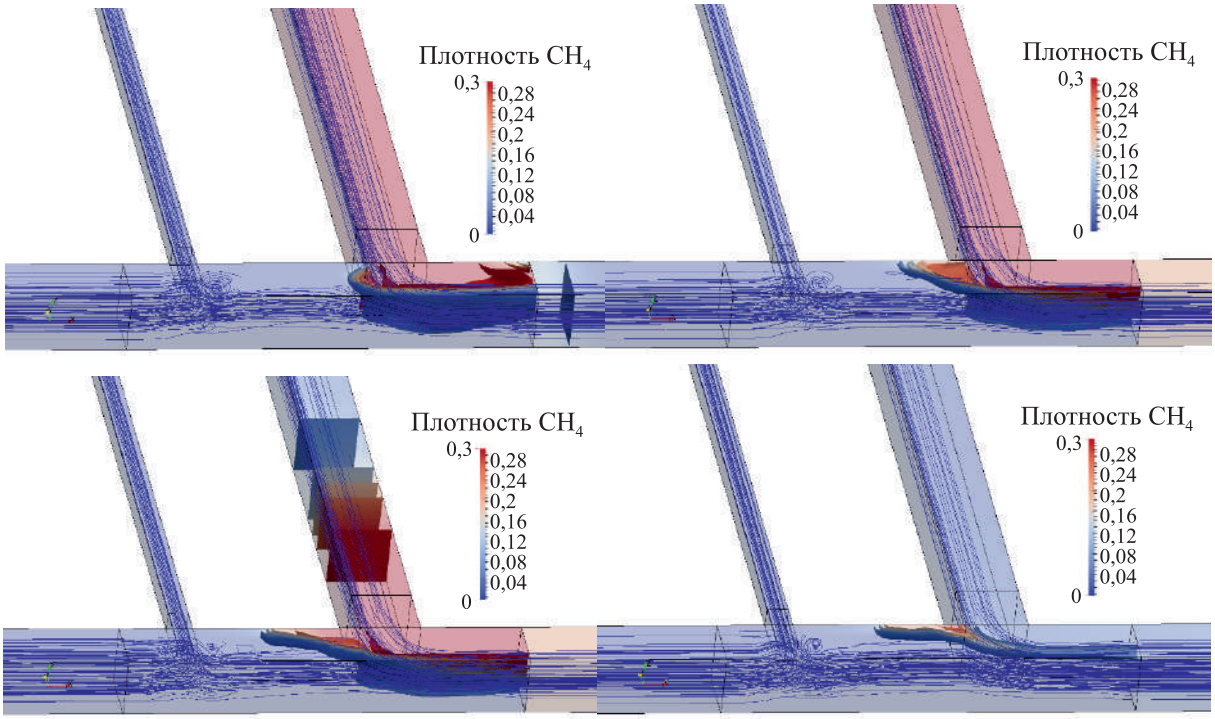


Рис. 5.4. В начальный момент времени на фоне стационарного режима проветривания основным вентилятором (№ 1 на рис. 5.3) со скоростью 2.1 м/с в работу включается вентилятор местного проветривания, установленный на расстоянии 10 м от сопряжения с выработкой 4–5 и подающий по трубопроводу 3–4 поток воздуха к тупику выработки со скоростью 12 м/с. После включения вентилятора проветривания из тупиковой выработки 4–5 постепенно происходит вытеснение газа с повышенным содержанием метана в выработку 5–6 и затем в атмосферу. Результаты расчетов распределения плотности примеси метана в зоне сопряжения выработок в моменты времени 5 с (вверху слева), 40 с (вверху справа), 130 с (внизу слева) и 150 с (внизу справа). Сплошные линии на рисунках показывают изолинии течения газа

Заключение

В данной работе исследовались задачи, моделируемые уравнениями в частных производных на графах (сетях, деревьях). Для исследования данных проблем была построена вычислительная модель, основанная на решении соответствующих краевых задач для нелинейных уравнений в частных производных гиперболического типа. Практически исследовались три различные задачи, решаемые в рамках разработанного подхода сетевых вычислительных моделей.

Первой задачей было моделирование движения транспортных потоков. При решении данной задачи использовался макроскопический подход, при котором транспортный поток описывается нелинейной системой гиперболических уравнений второго порядка для плотности и скорости потока. Система уравнений замыкалась уравнением состояния в виде зависимости относительной скорости распространения возмущений в потоке от плотности, полученным эмпирически для заданного участка транспортной сети. В рамках предлагаемого подхода была разработана новая макроскопическая гидродинамическая модель, описывающая автомобильное движение в городской транспортной сети и учитывающая как распределение светофорных фаз, так и существующую дорожную разметку на перекрестках. Модель реализована в виде комплекса программ, позволяющего проводить расчеты с использованием реальных дорожных данных. Работоспособность комплекса программ проверена с использованием системы сбора реальных дорожных данных. Проведенные расчеты показали, что разработанная модель хорошо воспроизводит реальную ситуацию в городской транспортной сети на значительных временных интервалах.

Второй задачей было моделирование потоков данных в компьютерных сетях. В этой задаче потоки данных различных соединений в пакетной сети передачи данных моделировались в виде несмешивающихся потоков сплошной среды. Предложены концептуальная и математическая модели сети. Важнейшей особенностью разработанной модели сети является представление наиболее вероятного, статистически достоверного поведения потоков данных в целом, без учета поведения каждого отдельного потока данных в какой-либо паре «отправитель–получатель», как это обычно делается в других сетевых моделях. Полученные результаты показали, что в сравнении с пакетной моделью NS-2 разработанная нами потоковая модель за счет использования в качестве базовых элементов потоков данных вместо пакетов демонстрирует значительную экономию вычислительных ресурсов, обеспечивая при этом хорошую степень подобия как пиковых, так и усредненных характеристик, и позволяет моделировать поведение сложных глобально распределенных IP-сетей передачи данных.

Третьей задачей было моделирование распространения газовых примесей в вентиляционных сетях. Целью этой задачи являлось построение вычислительной математической модели распространения мелкодисперсных или газовых примесей в вентиляционных сетях на основе газодинамического подхода. В вентиляционной трубе использовалась одномерная система уравнений газовой динамики. В областях сочленения труб и примыкающих комнатах использовалась эта же система уравнений, но уже в трехмерной постановке. Сопряжение граничных условий на границе областей разной размерности обеспечивалось через решение соответствующей задачи Римана вдоль нормальной компоненты скорости по отношению к этой границе. Предложенная модель была реализована в виде комплекса программ, позволяющего проводить расчеты нестационарных режимов проветривания вентиляционных сетей. Проведенные расчеты и полученные результаты показали, что разработанная модель хорошо учитывает реальную топологию сети и позволяет решать задачи динамического управления вентиляцией, в том числе в сети выработок угольной шахты.

Полученный опыт использования сетевых вычислительных моделей показывает, что разработанный подход при современном уровне развития вычислительной техники и вычислительной математики позволяет эффективно численно решать достаточно сложные, «глобальные» задачи данного класса.

Список литературы (References)

Морозов И. И., Холодов Я. А. Моделирование режимов глобальных электрических сетей // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. — 2008. — № 47. — С. 170–178.

Morozov I. I., Kholodov Ya. A. Modelirovaniye rezhimov global'nykh elektricheskikh setey [Modeling modes of global electrical networks] // Nauchno-tehnicheskii vestnik ITMO. — 2008. — Vol. 47. — P. 170–178 (in Russian).

Морозов И. И., Холодов Я. А., Крылов Д. А., Геллер О. В. Моделирование режимов глобальных электроэнергетических систем // Труды МФТИ. — 2010. — Т. 2, № 3 (7). — С. 46–52.

Morozov I. I., Kholodov Ya. A., Krylov D. A., Geller O. V. Modelirovaniye rezhimov global'nykh elektroenergeticheskikh sistem [Modeling modes of global electrical networks] // Trudy MIPT. — 2010. — Vol. 2, No. 3 (7). — P. 46–52 (in Russian).

Северов Д. С., Трифонов С. В., Миненко М. И., Холодов Я. А. Численное моделирование IP-сетей передачи данных в рамках уравнений сплошной среды // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. — 2008. — № 46. — С. 218–227.

Severov D. S., Trifonov S. V., Minenko M. I., Kholodov Ya. A. Chislennoye modelirovaniye IP-setey peredachi dannykh v ramkakh uravneniy sploshnoy sredy [Numerical modeling of IP-based data networks in the framework of continuum equations] // Nauchno-tehnicheskii vestnik ITMO. — 2008. — Vol. 46. — P. 218–227 (in Russian).

Трифонов С. В., Холодов Я. А., Миненко М. И., Истомин Т. Е., Чечендаев А. В. Алгоритмы оптимизации работы беспроводной сенсорной сети на базе протокола ZigBee // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. — 2008. — № 56 — С. 86–95.

Trifonov S. V., Kholodov Ya. A., Minenko M. I., Istomin T. E., Chechendaev A. V. Algoritmy optimizatsii raboty besprovodnoy sensornoy seti na baze protokola ZigBee [Algorithms for optimizing the wireless sensor network based on the ZigBee protocol] // Nauchno-tehnicheskii vestnik ITMO. — 2008. — Vol. 56. — P. 86–95 (in Russian).

Холодов А. С. Разностные схемы с положительной аппроксимацией для многомерных систем уравнений гиперболического типа на нерегулярных сетках // Рациональное численное моделирование в нелинейной механике. М.: Наука, 1990. — С. 49–62.
Kholodov A. S. Raznostnyye skhemy s polozhitel'noy approksimatsiyey dlya mnogomernykh sistem uravneniy giperbolicheskogo tipa na neregulyarnykh setkakh [Difference schemes with positive approximation for multidimensional systems of hyperbolic equations on irregular grids] // Ratcional'noe chislennoe modelirovanie v nelinejnoj mehanike [Rational numerical modeling in nonlinear mechanics]. — Moscow: Nauka, 1990. — P. 49–62 (in Russian).

Холодов Я. А., Холодов А. С., Гасников А. В., Морозов И. И., Тарасов В. Н. Моделирование транспортных потоков — актуальные проблемы и перспективы их решения // Труды МФТИ. — 2010. — Т. 2, № 4 (8). — С. 152–162.
Kholodov Ya. A., Kholodov A. S., Gasnikov A. V., Morozov I. I., Tarasov V. N., Modelirovaniye transportnykh potokov — aktual'nyye problemy i perspektivy ikh resheniya [Numerical study of traffic flows — actual problems and prospects of their solution] // Trudy MIPT. — 2010. — Vol. 2, No. 4 (8). — P. 152–162 (in Russian).

Alekseenko A. E., Kholodov Ya. A., Kholodov A. S., Goreva A. I., Vasilev M. O., Chekhovich Y. V., Mishin V. D., Starozhilets V. M. Development, calibration and verification of mathematical model for multilane urban road traffic flow. Part I // Computer Research and Modeling. — 2015. — Vol. 7 (6). — P. 1185–1203.

Alekseenko A. E., Kholodov Ya. A., Kholodov A. S., Chekhovich Y. V., Starozhilets V. M. Adaptive traffic light control on highway entrances // 2017 IEEE 20th International Conference on Intelligent Transportation Systems (ITSC). — 2017. — P. 1–6. — DOI: 10.1109/ITSC.2017.8317729

Alekseenko A. E., Kholodov A. S., Kholodov Ya. A. Boundary control problems for quasilinear systems of hyperbolic equations // Comput. Math. and Math. Phys. — 2016. — Vol. 56 (6). — P. 916–931. — DOI: 10.1134/S0965542516060166

Aw A., Rascle M. Resurrection of "second order" models of traffic flow // SIAM Journal of Applied Mathematics. — 2000. —Vol. 60. — P. 916–938. — DOI: 10.1137/S0036139997332099

Bordonos A. K., Kholodov Ya. A., Kholodov A. S., Morozov I. I. Modeling of the global high-voltage grids // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2009. — Vol. 21 (6). — P. 3–16.

Carson J. M., Pant S., Roobottom C., Alcock R., Blanco P. J., Carlos Bulant C. A., Vassilevski Y., Simakov S., Gamilov T., Pryamonosov R., Liang F., Ge X., Liu Y., Nithiarasu P. Non-invasive coronary CT angiography-derived fractional flow reserve: A benchmark study comparing the diagnostic performance of four different computational methodologies // International journal for numerical methods in biomedical engineering. — 2018. — e3235. — https://doi.org/10.1002/cnm.3235

Chien K. Y. Predictions of Channel and Boundary-Layer Flows with a Low-Reynolds-Number Turbulence Model // AIAA Journal. — 1982. — Vol. 20 (1). — P. 33–38.

Daganzo C. F. Requiem for second-order approximations of traffic flow // Transportation Research B. — 1995. — Vol. 29 (4). — P. 277–286. — https://doi.org/10.1016/0191-2615(95)00007-Z

Floyd S., Jacobson V. Random Early Detection gateways for congestion avoidance // IEEE/ACM Transactions on Networking. — 1993. — Vol. 1 (4). — P. 397–413.

Geller O. V., Vasilev M. O., Kholodov Ya. A. Building a high-performance computing system for simulation of gas dynamics // Computer Research and Modeling. — 2010. — Vol. 2 (3). — P. 309–317.

Gognieva D. G., Gamilov T. M., Pryamonosov R. A., Vasilevsky Y. V., Simakov S. S., Liang F., Ternovoy S. K., Serova N. S., Tebenkova E. S., Sinitsyn E. A., Pershina E. S., Abugov S. A., Mardanyan G. V., Zakryan N. V., Kirakosyan V. R., Betelin V. B., Mitina Y. O., Gubina A. Y., Shchekochikhin D. Y., Syrkin A. L., Kopylov F. Y. Noninvasive assessment of the fractional reserve of coronary blood flow with a one-dimensional mathematical model. Preliminary results of the pilot study // Russian Journal of Cardiology. — 2019. — Vol. 3. — P. 60–68. — https://doi.org/10.15829/1560-4071-2019-3-60-68

Gognieva D. G., Syrkin A. L., Vassilevski Y. V., Simakov S. S., Melerzanov A. V., Fuyou L., Lomonosova A. A., Bykova A. A., El Manaa H. E., Kopylov P. Y. Noninvasive Assessment of Fractional Flow Reserve Using Mathematical Modeling of Coronary Flow // Kardiologiia. — 2018. — Vol. 58 (12). — P. 85–92. — https://doi.org/10.18087/cardio.2018.12.10164

Kholodov A. S., Kholodov Ya. A. Computational Models on Graphs for the Nonlinear Hyperbolic System of Equations // ASME Pressure Vessels and Piping Conference. — 2004. — Vol. 476. — P. 161–167. — DOI: 10.1115/PVP2004-2580

Kholodov A. S., Simakov S. S., Kholodov Ya. A. Global matter transport simulation using dynamical models of cardiovascular and respiratory systems // Proceedings of the 2005 Summer Bioengineering Conference. — 2005. — Vol. 2005. — P. 51–52.

Kholodov A. S., Kholodov Ya. A. Monotonicity criteria for difference schemes designed for hyperbolic equations // Comput. Math. and Math. Phys. — 2006a. — Vol. 46 (9). — P. 1560–1588. — https://doi.org/10.1134/S0965542506090089

Kholodov Ya. A., Kholodov A. S. et al. Computational Models on Graphs for Nonlinear Hyperbolic and Parabolic System of Equations // Motasoares C. A. et al. (eds.) III European Conference on Computational Mechanics. — 2006b. — Springer, Dordrecht. — https://doi.org/10.1007/1-4020-5370-3_43

Kholodov Ya., Evseev E., Morozov E., Bapayev A. Simulation Model for the Rod System Graphs Dynamics // ASME Pressure Vessels and Piping Conference. — 2006c. — Vol. 2. — P. 485–496. — DOI: 10.1115/PVP2006-ICPVT-11-93708

Kholodov Ya. A., Alekseenko A. E., Vasilev M. O., Kholodov A. S. Developing the mathematical model of road junction by the hydrodynamic approach // Computer Research and Modeling. — 2014. — Vol. 6 (4). — P. 503–522.

Kholodov Ya. A., Alekseenko A. E., Kholodov A. S., Vasilev M. O., Mishin V. D. Development, calibration and verification of mathematical model for multilane urban road traffic flow. Part II // Computer Research and Modeling. — 2015. — Vol. 7 (6). — P. 1205–1219.

Kholodov Ya. A., Vasiliev M. O., Kholodov A. S., Tsybulin I. V. Developing the mathematical model for fine impurities spreading in ventilation networks // Math. Models Comput. Simul. — 2017. — Vol. 9 (2). — P. 142–154. — https://doi.org/10.1134/S2070048217020077

Kholodov Ya. A., Kholodov A. S., Tsybulin I. V. Construction of Monotone Difference Schemes for Systems of Hyperbolic Equations // Comput. Math. and Math. Phys. — 2018. — Vol. 58 (8). — P. 1226–1246. — https://doi.org/10.1134/S0965542518080110

Kulikovskii A. G., Pogorelov N. V., Semenov A. Yu. Mathematical aspects of numerical solution of hyperbolic systems. — 1st Edition. — Chapman and Hall/CRC, 2000. — 560 p.

Liu Y., Lo Presti F., Misra V., Towsley D., Gu Y. Fluid Models and Solutions for Large-Scale IP Networks // Proceedings of ACM International Conference on Measurement and Modeling of Computer Systems. — San Diego, CA, USA, 2003.

Magomedov K. M., Kholodov A. S. The construction of difference schemes for hyperbolic equations based on characteristic relations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1969. — Vol. 9 (2). — P. 158–176.

Morozov I. I., Gasnikov A. V., Tarasov V. N., Kholodov Ya. A., Kholodov A. S. Numerical study of traffic flows by the hydrodynamic models // Computer Research and Modeling. — 2011. — Vol. 3 (4). — P. 389–412.

Papageorgiou M. Some remarks on macroscopic flow modeling // Transportation Research A. — 1998. — Vol. 32 (5). — P. 323–329.

Payne H. J. Models of freeway traffic and control, in: Simulation Council Proc // Mathematical Models of Public Systems. Edited by G. A. Bekey. — 1971. — Vol. 1. — P. 51–61.

Prokoptsev N. G., Alekseenko A. E., Kholodov Ya. A. Traffic flow speed prediction on transportation graph with convolutional neural networks // Computer Research and Modeling. — 2018. — Vol. 10 (3). — P. 359–367. — DOI: 10.20537/2076-7633-2018-10-3-359-367

Severov D. S., Kholodov A. S., Kholodov Ya. A. Comparison of packet-level and fluid models of IP networks // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2012. — Vol. 4 (4). — P. 385-393. — DOI: https://doi.org/10.1134/S2070048212040072

Siebel F., Mauser W. On the fundamental diagram of traffic flow // SIAM Journal of Applied Mathematics. — 2006a. — Vol. 66 (4). — P. 1150–1162.

Siebel F., Mauser W. Synchronized flow and wide moving jams from balanced vehicular traffic // Phys. Rev. E. — 2006b. — Vol. 73. — P. 066108.

Simakov S. S., Kholodov A. S., Yevdokimov A. V., Kholodov Ya. A. Numerical Simulations of Cardiovascular Diseases and Global Matter Transport // Advanced Information and Telemedicine Technologies for Health. — 2005. — Vol. 2. — P. 188–192.

Simakov S. S., Kholodov A. S., Kholodov Ya. A., Nadolskiy A. A., Shushlebin A. N. Global Dynamical Model of the Cardiovascular System // Motasoares C. A. et al. (eds.) III European Conference on Computational Mechanics. — 2006a. — Springer, Dordrecht. — https://doi.org/10.1007/1-4020-5370-3_204

Simakov S. S., Kholodov A. S., Kholodov Ya. A., Nadolskiy A. A., Shushlebin A. N. Computational Study of the Vibrating Disturbances to the Lung Function // Motasoares C. A. et al. (eds.) III European Conference on Computational Mechanics. — 2006b. — Springer, Dordrecht. — https://doi.org/10.1007/1-4020-5370-3_205

Simakov S. S. Modern methods of mathematical modeling of blood flow using reduced order methods // Computer Research and Modeling. — 2018. — Vol. 10 (5). — P. 581–604. — https://doi.org/10.20537/2076-7633-2018-10-5-581-604

Trifonov S. V., Kholodov Ya. A. Study and optimization of wireless sensor network based on ZigBee protocol // Computer Research and Modeling. — 2012. — Vol. 4 (4). — P. 855–869.

Vasenin I. M., Shrager E. R., Krainov A. Y., Paleev D. Y., Lukashev O. Y., Kosterenko V. N. Mathematical simulation of non-stationary ventilation processes of coal mining // Computer Research and Modeling. — 2011. — Vol. 3 (2). — P. 155–163.

Zhang H. M. A non-equilibrium traffic model devoid of gas-like behavior // Transportation Research B. — 2002. — Vol. 36. — P. 275–290. — https://doi.org/10.1016/S0191-2615(00)00050-3

Zhang H. M. Anisotropic property revisited — does it hold in multi-lane traffic? // Transportation Research B. — 2003. — Vol. 37 (6). — P. 561–577.