

УДК: 519.8

Моделирование одномерных нелинейных пульсовых волн в эластичных сосудах на основе решеточных уравнений Больцмана

О. В. Ильин

Вычислительный центр им. А. А. Дородницына Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук,
Россия, 119133, г. Москва, ул. Вавилова, д. 40

E-mail: oilyin@gmail.com

Получено 28.02.2019, после доработки — 25.05.2019.

Принято к публикации 06.06.2019.

В работе рассмотрено приложение методов кинетической теории к задачам гемодинамики. Для моделирования выбраны решеточные уравнения Больцмана. Данные модели описывают дискретизированную по пространственной и временной координате динамику движения частиц на одномерной решетке. Хорошо известно, что в пределе малых длин свободного пробега решеточные уравнения Больцмана описывают уравнения гидродинамики. Если течение достаточно медленное (мало число Маха), то данные уравнения гидродинамики переходят в уравнения Навье–Стокса для сжимаемого газа. Если в получающихся гидродинамических уравнениях переменные, отвечающие плотности и скорости звука, считать площадью поперечного сечения сосуда и скоростью распространения пульсовой волны давления, то выводятся хорошо известные в биомеханике нелинейные уравнения распространения несжимаемой вязкой жидкости (крови) в эластичном сосуде для частного случая постоянной пульсовой скорости.

В общем случае скорость распространения пульсовой волны зависит от площади просвета сосуда. Следует отметить интересную аналогию: уравнение состояния решеточного газа в новых переменных становится законом, связывающим давление и площадь поперечного сечения сосуда. Таким образом, в общем случае требуется модифицировать уравнение состояния для решеточного уравнения Больцмана. Данная процедура хорошо известна в теории неидеального газа и многофазных течений и эквивалентна введению в уравнения виртуальной силы. Получающиеся уравнения могут использоваться для моделирования любых законов, связывающих скорость пульсовой волны и площадь просвета сосуда.

В качестве тестовых задач рассмотрено распространение уединенной нелинейной пульсовой волны в сосуде с упругими свойствами, описываемыми законом Лапласа. Во второй задаче рассмотрено распространение пульсовых волн для бифуркации сосудов. Показано, что результаты расчетов хорошо совпадают с данными из предыдущих исследований.

Ключевые слова: гемодинамика, метод решеточных уравнений Больцмана, эластичные сосуды

UDC: 519.8

The modeling of nonlinear pulse waves in elastic vessels using the Lattice Boltzmann method

O. V. Ilyin

Dorodnicyn Computing Center, Federal Research Center “Computer Science and Control”
of Russian Academy of Science,
40 Vavilova st., Moscow, 119133, Russia

E-mail: oilyin@gmail.com

Received 28.02.2019, after completion — 25.05.2019.

Accepted for publication 06.06.2019.

In the present paper the application of the kinetic methods to the blood flow problems in elastic vessels is studied. The Lattice Boltzmann (LB) kinetic equation is applied. This model describes the discretized in space and time dynamics of particles traveling in a one-dimensional Cartesian lattice. At the limit of the small times between collisions LB models describe hydrodynamic equations which are equivalent to the Navier–Stokes for compressible if the considered flow is slow (small Mach number). If one formally changes in the resulting hydrodynamic equations the variables corresponding to density and sound wave velocity by luminal area and pulse wave velocity then a well-known 1D equations for the blood flow motion in elastic vessels are obtained for a particular case of constant pulse wave speed.

In reality the pulse wave velocity is a function of luminal area. Here an interesting analogy is observed: the equation of state (which defines sound wave velocity) becomes pressure-area relation. Thus, a generalization of the equation of state is needed. This procedure popular in the modeling of non-ideal gas and is performed using an introduction of a virtual force. This allows to model arbitrary pressure-area dependence in the resulting hemodynamic equations.

Two test case problems are considered. In the first problem a propagation of a sole nonlinear pulse wave is studied in the case of the Laplace pressure-area response. In the second problem the pulse wave dynamics is considered for a vessel bifurcation. The results show good precision in comparison with the data from literature.

Keywords: hemodynamics, lattice Boltzmann method, elastic vessels

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2019, vol. 11, no. 4, pp. 707–722 (Russian).

1. Введение

Современные подходы к моделированию тока крови основаны на решении уравнений гидродинамики с учетом механических свойств стенки сосудов, а именно способности сосудов к растяжению при изменении давления [Taylor, Draney, 2004]. Методы можно условно разделить на несколько классов: самые простые — модели аналоги электрических цепей (models of lumped elements); одномерные модели распространения пульсовых волн, получающиеся осреднением трехмерных уравнений по радиальной переменной (по просвету сосуда); трехмерное моделирование сосудистой сети с полным учетом их геометрических свойств [Taylor, Draney, 2004]. Модели типа электрических цепей слишком просты и могут использоваться в основном для оценки свойств дистальной васкулатуры, трехмерные модели обычно слишком сложны, и расчеты для реалистичной геометрии требуют использования суперкомпьютеров. Одномерные модели, получающиеся из трехмерных уравнений вязкой несжимаемой жидкости усреднением по площади просвета сосуда, являются разумным компромиссом между потерей точности и сложностью счета. Для численного решения таких уравнений разработано множество различных методов, здесь лишь отметим, что одним из самых популярных является метод Тейлора–Галёркина [Taylor, Draney, 2004; Sherwin et al., 2003; Formaggia et al., 2003; Mynard, Nithiarasu, 2008].

Альтернативой классическим уравнениям гидродинамики является относительно новый метод решеточных уравнений Больцмана (Lattice Boltzmann method, далее обозначаемый как LB) [Kruger et al., 2017; Succi, 2018]. В данном подходе моделируются движение и взаимодействие частиц на пространственной решетке, на каждом временном шаге частицы могут переходить из узла в узел, возможные скорости движения частиц принимают значения из конечного дискретного набора. В пределе коротких длин свободного пробега данные уравнения описывают гидродинамику, для стандартных решеточных уравнений Больцмана ошибка относительно уравнений Навье–Стокса имеет порядок Ma^3 , где Ma есть число Маха, то есть метод пригоден для медленных течений. Популярность метода LB для задач гидродинамики обусловлена простотой написания программного кода и развитием в последние несколько десятилетий многоядерных процессоров, здесь следует заметить, что расчеты на основе метода легко могут быть распараллелены (см., например, [Kruger et al., 2017, § 13]).

Метод LB применяется для моделирования течения крови [Melchionna et al., 2011; Bisson et al., 2011; Pontrelli et al., 2014; Fang et al., 2002; Chen, 2006], в работах [Melchionna et al., 2011; Bisson et al., 2011; Pontrelli et al., 2014; Gounley et al., 2019] представлены результаты расчетов для реалистичных трехмерных сетей сосудов, при этом LB-уравнения используются для расчета движения плазмы крови, тогда как клетки крови моделируются методом Монте-Карло. Данный подход активно применяется для оценки касательных напряжений крови на стенке сосуда. Расчеты проводятся на суперкомпьютере, эластичные эффекты в данном подходе не учитываются. Постановка граничных условий для LB-моделей при моделировании тока крови в трехмерном сосуде с переменной во времени геометрией (учет эластичности) разобрана в работе [Fang et al., 2002]. Одномерные уравнения движения крови для сосудов с учетом их эластичных свойств еще не рассматривались на основе LB.

Настоящая работа призвана восполнить этот пробел. В работе предлагается LB-модель, способная учесть практически любые упругие свойства сосудов (функциональные связи между давлением на стенке и площадью просвета сосуда или связь между скоростью пульсовой волны и площадью просвета). Предлагаемый метод достаточно прост в программировании и дает хорошие результаты на тестовых задачах: распространение нелинейной пульсовой волны в сосуде (изменение формы волны), распространение пульсовой волны в бифуркации сосудов.

2. Одномерные уравнения тока крови в эластичных сосудах

Рассмотрим эластичную бесконечную трубку, наполненную несжимаемой жидкостью (кровь в сосуде). Законы сохранения массы и изменения импульса жидкости вдоль оси сосуда получаются из уравнений Навье – Стокса усреднением скорости тока по просвету сосуда. При интегрировании считается, что профиль скорости плоский. В результате получаются следующие уравнения [Hughes, Lubliner, 1973; Sherwin et al., 2003; Formaggia et al., 2003; van de Vosse, Stergiopulos, 2011; Bessonov et al., 2016; Симаков, 2018]:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Au}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2/2}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (1)$$

где ρ_0 — плотность крови, A , u — площадь просвета сосуда и скорость крови. Здесь x — координата по направлению оси сосуда, p — давление крови. Вязкие силы исключены из уравнений (1).

В системе (1) имеются три неизвестные: u , A , p , но уравнений всего два. Для замыкания системы (1) требуется ввести дополнительное условие — закон изменения просвета сосуда от приложенного давления:

$$p = f(A), \quad (2)$$

где f — некоторая функция, ее форма должна быть определена из эластичных свойств сосуда. В настоящее время предложено много функциональных зависимостей $p = f(A)$. Для реальных сосудов данная зависимость может быть достаточно сложной [Taylor, Draney, 2004; Sherwin et al., 2003; Василевский и др., 2015], например, при высоких значениях артериального давления наблюдаются эффекты насыщения — площадь просвета сосуда практически перестает увеличиваться при росте давления [Langewouters et al., 1984]. На практике часто ограничиваются законом Лапласа, для которого $p \sim \sqrt{A}$ (см. [Taylor, Draney, 2004; Sherwin et al., 2003]).

Из соотношения, связывающего площадь просвета сосуда и давления, можно вычислить скорость пульсовой волны давления (она полностью определяется упругими свойствами сосуда):

$$c_{\text{pulse}}^2(A) = \frac{A}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial A}. \quad (3)$$

Теперь, используя определение пульсовой скорости (3), уравнения (1), (2) можно переписать в следующей форме:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Au}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2/2}{\partial x} = -\frac{c_{\text{pulse}}^2(A)}{A} \frac{\partial A}{\partial x}. \quad (4)$$

Отметим, что движение крови существенно дозвуковое, $Ma \sim 0.1$, при условии, что число Маха определено как u/c_{pulse} . Введенное число Маха не следует путать со стандартным определением, где потоковая скорость делится на скорость звука.

Различные граничные и начальные условия для гемодинамических уравнений рассмотрены в работах [Абакумов и др., 1997; Ашметков и др., 2000; Ашметков и др., 2004; Буничева и др., 2001], а также постановка граничных условий в виде моделей Виндкесселя, ветвящихся деревьев сосудов может быть найдена в работах [Westerhof et al., 2009; Olufsen, 1999].

3. Метод решеточных уравнений Больцмана для неидельного газа в приложении к задачам гемодинамики в эластичных сосудах

В настоящем параграфе решается задача построения разностного метода для моделирования системы (4) на основе методов кинетической теории, а именно с использованием метода решеточных уравнений Больцмана.

3.1. Решеточная модель $D1Q3$

Простейшей решеточной моделью уравнения Больцмана для одной пространственной переменной, способной воспроизводить дозвуковую гидродинамику, является модель $D1Q3$ (здесь D — число пространственных координат, Q — число скоростей) [Kruger et al., 2017]. Данная модель описывает динамику концентраций $f_{\pm 1}(t, x)$, $f_0(t, x)$ трех типов частиц: движущихся в положительном направлении оси x со скоростью c , в отрицательном со скоростью $-c$ и с нулевой скоростью. За каждый временной шаг Δt частицы в зависимости от скорости могут сместиться в соседние узлы решетки на расстояние $c\Delta t$ или остаться в узле x . Кроме описанной выше адвекции, частицы сталкиваются между собой. Здесь процесс столкновения описывается феноменологическим образом — детали столкновения не рассматриваются, но считается, что в результате столкновений система стремится к состоянию локального равновесия f^{eq} . Трехпопуляционная модель $D1Q3$ имеет вид

$$\begin{aligned} f_{-1}(t + \Delta t, x - c\Delta t) - f_{-1}(t, x) &= \frac{\Delta t}{\tau + \frac{\Delta t}{2}} \left(f_{-1}^{eq}(t, x) - f_{-1}(t, x) \right) + \frac{\tau \Delta t}{\tau + \frac{\Delta t}{2}} F_{-1}(t, x), \\ f_0(t + \Delta t, x) - f_0(t, x) &= \frac{\Delta t}{\tau + \frac{\Delta t}{2}} \left(f_0^{eq}(t, x) - f_0(t, x) \right) + \frac{\tau \Delta t}{\tau + \frac{\Delta t}{2}} F_0(t, x), \\ f_1(t + \Delta t, x + c\Delta t) - f_1(t, x) &= \frac{\Delta t}{\tau + \frac{\Delta t}{2}} \left(f_1^{eq}(t, x) - f_1(t, x) \right) + \frac{\tau \Delta t}{\tau + \frac{\Delta t}{2}} F_1(t, x), \end{aligned}$$

где τ — время релаксации системы, F_i — компоненты внешней силы, $f_{\pm 1}^{eq}$, f_0^{eq} — состояния локального равновесия (аналоги Максвелловского распределения), они имеют следующую форму:

$$\begin{aligned} f_{-1}^{eq}(t, x) &= w_{-1} \rho(t, x) \left(1 - 3 \frac{u(t, x)}{c} + 3 \frac{u(t, x)^2}{c^2} \right), \\ f_0^{eq}(t, x) &= w_0 \rho(t, x) \left(1 - 3 \frac{u(t, x)^2}{2c^2} \right), \\ f_1^{eq}(t, x) &= w_1 \rho(t, x) \left(1 + 3 \frac{u(t, x)}{c} + 3 \frac{u(t, x)^2}{c^2} \right), \end{aligned}$$

где $w_{\pm 1} = 1/6$, $w_0 = 4/6$ — веса решетки, ρ , u — плотность и потоковая скорость, определяемые как

$$\begin{aligned} \rho(t, x) &= f_{-1}(t, x) + f_0(t, x) + f_1(t, x), \\ \rho(t, x)u(t, x) &= (-f_{-1}(t, x)c + f_1(t, x)c) + \frac{\Delta t}{2} \sum_i F_i(t, x)c_i; \end{aligned}$$

также определим полную энергию решеточного газа:

$$\rho(t, x)(u(t, x)^2 + c_s^2) = (f_{-1}(t, x) + f_1(t, x))c^2,$$

здесь c_s — скорость звука решеточного газа, для модели $D1Q3$ она равна

$$c_s = \sqrt{\frac{1}{3}} c.$$

Внешнюю силу будем рассматривать в простейшей линеаризованной форме [Kruger et al., 2017]:

$$F_i = w_i(c_i/c_s^2)a, \quad i = \pm 1, 0, \tag{5}$$

где a — модуль внешней силы.

3.2. Асимптотика модели D1Q3 для сплошной среды и уравнения гидродинамики

В пределе малых времен релаксации τ и, как следствие, коротких времен свободного пробега решеточные уравнения Больцмана описывают некоторые уравнения гидродинамики. В данном сплошносредном пределе гидродинамические уравнения получаются разложением по малому параметру, пропорциональному τ (разложения Чепмена–Энскога), детали разложения для одномерных решеточных уравнений Больцмана могут быть найдены в работе [Karlin et al., 2007]. Идея метода изложена ниже. Для краткости не будем включать внешнюю в рассмотрение.

Левую часть решеточной модели аппроксимируем следующим образом:

$$f_i(t + \Delta t, x + c_i \Delta t) - f_i(t, x) = \Delta t (\partial_t + c_i \partial_x) f_i(t, x) + \Delta t^2 / 2 (\partial_t + c_i \partial_x)^2 f_i(t, x) + O(\Delta t^3),$$

где $c_i = -c, 0, c$.

В сплошносредном пределе время релаксации близко к времени свободного пробега, то есть τ пропорционально временному шагу решетки Δt , т. е. $\tau = \tau_0 \Delta t$, где $\tau_0 \sim 1$.

С другой стороны, время свободного пробега Δt и длина свободного пробега Δx малы по сравнению с характерными размерами течения (времени T , за которое частица проходит сосуд, и длине сосуда L). Тогда естественно ввести малый параметр

$$\epsilon = \Delta t / T = \Delta x / L = \tau / (\tau_0 T).$$

В переменных $t' = t/T$, $x' = x/L$ решеточное уравнение переписывается в виде

$$\epsilon (\partial_{t'} + c_i \partial_{x'}) f_i + \epsilon^2 / 2 (\partial_{t'} + c_i \partial_{x'})^2 f_i = \frac{1}{(\tau_0 + \frac{1}{2})} (f_i^{eq} - f_i). \quad (6)$$

Решение ищется в виде разложения

$$f_i = f_i^{eq} + \epsilon J_i^{neq} + O(\epsilon^2),$$

причем считается, что имеются два масштаба по времени — быстрое время t'_1 (отвечает адвекции) и медленное t'_2 (отвечает диффузии), т. е.

$$\epsilon \partial_{t'} = \epsilon \partial_{t'_1} + \epsilon^2 \partial_{t'_2} + O(\epsilon^3).$$

Правая часть решеточной модели удовлетворяет условиям

$$\sum_i (J_i^{eq} - f_i) = 0, \quad \sum_i (J_i^{eq} - f_i) c_i = 0.$$

Тогда, суммируя левую и правую часть модели (6) с весами $(1, c_i)$, вспоминая определения гидродинамических величин через решеточные функции, собирая члены, пропорциональные ϵ , получаем

$$\frac{\partial \rho}{\partial t'_1} + \frac{\partial \rho u}{\partial x'} = 0, \quad \frac{\partial \rho u}{\partial t'_1} + \frac{\partial P}{\partial x'} = 0,$$

где $P = \sum_i f_i^{eq} c_i^2 = \rho u^2 + \rho c_s^2$. Очевидно, что получающаяся система есть уравнения Эйлера. Члены, пропорциональные ϵ^2 , вносят вязкие поправки в уравнения гидродинамики (за счет введенного медленного времени t'_2), в итоге получаются уравнения Навье–Стокса с дополнительным членом, пропорциональным u^3 .

Для модели D1Q3 уравнения гидродинамики с учетом вязких сил имеют вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2 / 2}{\partial x} = -\frac{c_s^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{2\nu}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{a}{\rho} + O(u^3) + O(\Delta t^2), \quad (7)$$

где $O(u^3)$ — погрешности, появляющиеся в уравнениях гидродинамики из-за того, что состояние локального равновесия имеет вид полинома второй степени по u , а более высокие степени исключены. $O(\Delta t^2)$ — ошибка дискретизации (решеточные уравнения Больцмана имеют второй порядок точности), также $\nu = c_s^2 \tau$ — вязкость газа. Если течение медленное, $u \ll c_s$ (число Маха $Ma = u/c_s$ мало), и временной шаг Δt мал, тогда можно считать, что уравнение D1Q3 правильно описывает гидродинамику медленного слабосжимаемого газа.

3.3. Переход к уравнениям гемодинамики

Можно заметить, что площадь просвета сосуда A входит в уравнения (4) таким же образом, как и плотность ρ — в уравнения (7). Если произвести формальную замену ρ на A и c_s на c_{pulse} в уравнениях (7), то (7) становятся (4) при условии, что ошибка дискретизации мала, течение медленное и вязкостью можно пренебречь. Ошибка дискретизации легко контролируется величиной Δt , скорость течения крови относительно пульсовой скорости мала, а продольная вязкость почти не оказывает влияния, так как обычно распространение волны рассматривается на длинах несколько десятков сантиметров, где вязкость слабо влияет на форму пульсовой волны (отметим, что члены, отвечающие продольной вязкости, можно включить в уравнения (4), но они несколько отличаются от аналогичных в (7)).

Здесь следует заметить, что рассматриваемые решеточные уравнения Больцмана для случая отсутствия внешней силы соответствуют частному случаю постоянной пульсовой скорости c_{pulse} . В этом случае c_s — постоянная величина, уравнение состояния здесь соответствует идеальному газу $p = c_s^2 \rho$, в случае же описания данными уравнениями пульсовых волн из уравнения (3) имеем $p \sim \log(A)$. Логарифмическая зависимость не является корректной, например, она не учитывает то, что растяжимость сосуда падает при высоком давлении. Таким образом, желательно обобщение модели.

Идея заключается в том, чтобы выбрать внешнюю силу таким образом, чтобы получить желаемое соотношение между давлением и площадью просвета сосуда. Аналогичное использование внешней силы, меняющее уравнение состояния, для решеточных уравнений Больцмана очень популярно в приложениях к моделированию неидеального газа и фазовых переходов [Zhang, Chen, 2003; Yuan, Schaefer, 2006; Kupershtokh et al., 2009; Kupershtokh, 2010; Kupershtokh et al., 2018]. Следуя статьям [Kupershtokh et al., 2009; Kupershtokh, 2010; Kupershtokh et al., 2018], введем силу с помощью псевдопотенциала U :

$$F_i = -w_i(c_i/c_s^2) \frac{\partial U}{\partial x}, \quad U = h(\rho) - \rho c_s^2, \quad (8)$$

где $h(\rho)$ — некоторая пока неизвестная функция. При использовании выражений (8) члены $-\frac{c_s^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{a}{\rho}$ переходят в $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial h}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}$ для гидродинамических уравнений (7), далее заменим ρ на A и выберем $h(A)$ таким образом, что

$$\frac{\partial h(A)}{\partial A} = c_{\text{pulse}}^2(A) = \frac{A}{\rho_0} \frac{\partial p(A)}{\partial A},$$

где $p(A)$ есть желаемая связь между давлением и площадью просвета сосуда, в результате получаются уравнения (4).

Следуя статье [Kupershtokh, 2010], псевдопотенциал U можно записать в форме $U = -\Phi^2$, $\Phi = \sqrt{Ac_s^2 - h(A)}$, и для решеточных уравнений Больцмана градиент потенциала записывается через центральную разность

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -2\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x} \approx -2\Phi(x) \frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x - \Delta x)}{2\Delta x}, \quad (9)$$

где $\Delta x = c\Delta t$ — шаг решетки. Для модели D1Q3 с силой, записанной в форме (9), известны условия устойчивости [Kupershtokh, 2010]

$$\frac{\partial h(A)}{\partial A} \leq c^2 + c_s^2 = \frac{4}{3}c^2. \quad (10)$$

Из соотношений (10) видно, что устойчивость может быть достигнута регулировкой величины $c = \Delta x/\Delta t$.

4. Итоговая модель

Для наглядности соберем результаты предыдущего параграфа. Итоговое решеточное уравнение Больцмана, применяемое для решения задач динамики пульсовых волн, имеет вид

$$\begin{aligned} f_{-1}(t + \Delta t, x - c\Delta t) - f_{-1}(t, x) &= \frac{\Delta t}{\tau + \frac{\Delta t}{2}} (f_{-1}^{eq}(t, x) - f_{-1}(t, x)) - \\ &- \frac{\tau}{2c^2 \left(\tau + \frac{\Delta t}{2} \right)} \Phi(x) (\Phi(x + c\Delta t) - \Phi(x - c\Delta t)), \end{aligned} \quad (11)$$

$$f_0(t + \Delta t, x) - f_0(t, x) = \frac{\Delta t}{\tau + \frac{\Delta t}{2}} (f_0^{eq}(t, x) - f_0(t, x)), \quad (12)$$

$$\begin{aligned} f_1(t + \Delta t, x + c\Delta t) - f_1(t, x) &= \frac{\Delta t}{\tau + \frac{\Delta t}{2}} (f_1^{eq}(t, x) - f_1(t, x)) + \\ &+ \frac{\tau}{2c^2 \left(\tau + \frac{\Delta t}{2} \right)} \Phi(x) (\Phi(x + c\Delta t) - \Phi(x - c\Delta t)), \end{aligned} \quad (13)$$

где $\Phi(x) = \sqrt{Ac_s^2 - h(A)}$ и $c_s^2 = (c^2/3)$, $c = \Delta x/\Delta t$. Функция $h(A)$ получается из уравнения

$$\frac{\partial h(A)}{\partial A} = c_{\text{pulse}}^2(A) = \frac{A}{\rho_0} \frac{\partial p(A)}{\partial A},$$

где $c_{\text{pulse}}(A)$, $p(A)$ есть целевые зависимости скорости пульсовых волн и давления от площади просвета сосуда. Состояния локального равновесия $f_{\pm 1}^{eq}$, f_0^{eq} определяются как

$$f_{\pm 1}^{eq} = \frac{A}{6} \left(1 \pm 3\frac{u}{c} + 3\frac{u^2}{c^2} \right), \quad f_0^{eq} = \frac{4A}{6} \left(1 - 3\frac{u^2}{2c^2} \right),$$

где

$$A(t, x) = (f_{-1} + f_0 + f_1)(t, x), \quad (14)$$

$$A(t, x)u(t, x) = (f_1(t, x) - f_{-1}(t, x))c + a\Delta t/2, \quad (15)$$

$$a = \Phi(t, x)(\Phi(t, x + c\Delta t) - \Phi(t, x - c\Delta t)).$$

Время релаксации τ связано с вязкостью $\nu = (c^2/3)\tau$, его следует брать малым, если моделируется невязкое течение. Отметим, что использование стандартного значения вязкости крови 4×10^{-6} м²/с вполне достаточно для того, чтобы во всех моделируемых случаях не наблюдалось растекания волнового пакета (характерного для продольных вязких сил). Силы трения крови

о стенки сосуда здесь не рассмотрены, но могут быть легко учтены введением дополнительных членов во внешнюю силу.

В работе используется следующее отношение между давлением и площадью просвета сосуда:

$$p(A) = p_0 + \frac{1}{nD_0}(A^n - A_0^n), \quad (16)$$

где D_0 , p_0 , ρ_0 , n есть растяжимость, диастолическое давление и плотность крови соответственно и $n > 0$, в случае $n = 0.5$ получается закон Лапласа.

В текущей работе рассматривается значение n , равное 0.5 для всех тестовых задач.

Величина p_0 может быть взята произвольной, так как основной интерес представляет отклонение от диастолического давления $p - p_0$. Вместо растяжимости D_0 удобно ввести линеаризованную пульсовую скорость:

$$c_{\text{pulse}}(A_0) = \sqrt{A_0^n / \rho_0 D_0}.$$

При реализации счета каждая временная итерация состоит из двух шагов. На первом шаге в каждом узле вычисляется правая часть (11)–(13), то есть учитывается эффект столкновений. На втором шаге учитывается левая часть (11)–(13), то есть результаты столкновений в зависимости от решеточных скоростей разносятся по соседним узлам (адвекция). Данный метод обладает замечательными свойствами: нелинейность локальна, адвекция линейна [Succi, 2018].

5. Распространение нелинейной пульсовой волны

Рассмотрим распространение уединенной нелинейной пульсовой волны в эластичном полубесконечном сосуде $x > 0$ с постоянными механическими свойствами [Puin, 2019].

Для волны, распространяющейся в положительном направлении оси x , имеется соотношение, связывающее скорость движения крови u и площадь просвета сосуда A [Puin, 2019]:

$$u = \int_{A_0}^A \frac{dz}{\sqrt{\rho_0 D_0 / z^n}}, \quad (17)$$

тогда уравнения (1), (2) преобразуются в одно дифференциальное уравнение для A :

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{\rho_0 D_0}} \left(\left(1 + \frac{2}{n}\right) A^{n/2} - \frac{2}{n} A_0^{n/2} \right) \frac{\partial A}{\partial x} = 0. \quad (18)$$

Введем начально-граничные условия для $x = 0$ при $t \in [0, T_0]$, также для $x > 0$, $t = 0$ (здесь T_0 — продолжительность одного сердечного цикла):

$$A(t, x)|_{x=0} = A_0 + at, \quad t \in [0, t_0], \quad (19)$$

$$A(t, x)|_{x=0} = A_0 + a(2t_0 - t), \quad t \in [t_0, 2t_0], \quad (20)$$

$$A(t, x)|_{x=0} = A_0, \quad t \in (2t_0, T_0], \quad (21)$$

и

$$A(t, x)|_{t=0} = A_0, \quad x > 0, \quad (22)$$

где $2t_0$ — продолжительность систолической фазы. Аналитические решения данной задачи представлены в работе [Puin, 2019]. Для решения данной задачи применялись уравнения (11)–(13)

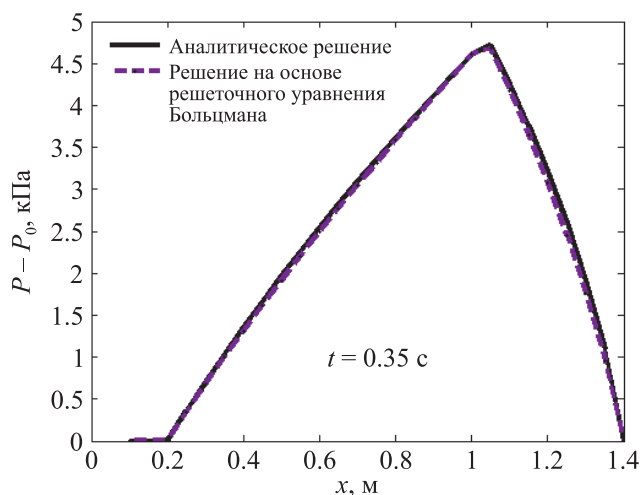


Рис. 1. Пульсовая волна $p - p_0$ в момент времени $t = 0.35$ с, полученная двумя методами. В начальный момент времени волна имела симметричную форму относительно $x = 0$, при распространении в положительном направлении оси x искажение пульсовой волны происходит из-за нелинейных эффектов. Аналитическое решение обозначено сплошной линией, численным решением на основе решеточного уравнения Больцмана обозначено пунктиром. Оба подхода дают близкие профили. Вязкость выбиралась равной $\nu = c_s^2 \tau = 4 \times 10^{-6}$ м²/с, плотность крови $\rho_0 = 10^3$ кг/м³, скорость линейризованной пульсовой волны равна 4 м/с, невозмущенная площадь просвета сосуда $A_0 = 7 \times 10^{-4}$ м²

вместе с граничными условиями (19)–(22). В терминах функций распределения, входящих в решеточные уравнения Больцмана, граничные условия (19)–(22) записываются в следующем виде:

$$f_{\pm 1}(t, x) = w_{\pm 1} A_b(t, x), \quad f_0(t, x) = w_0 A_b(t, x),$$

где $A_b(t, x)|_{x=0} = A(t, x)|_{x=0}$, $t > 0$ и $A_b(t, x)|_{t=0} = A(t, x)|_{t=0}$, $x > 0$.

Результаты расчетов представлены на рис. 1. Волна давления значительно меняет свою форму из-за нелинейных эффектов. Расчеты на основе решеточного уравнения Больцмана практически совпадают с аналитическим решением.

6. Распространение и отражение пульсовых волн в бифуркации сосудов

Задача о распространении пульсовой волны и ее отражениях в простой сети сосудов (три сосуда и одна бифуркация) рассматривалась ранее в статье [Mynard, Nithiarasu, 2008]. Данная задача является хорошим эталонным тестом, показывающим, насколько правильно модель может описывать множественные отражения волн давления в сети сосудов.

Моделируемая геометрия представлена на рис. 2. От широкого сосуда с невозмущенной площадью просвета (диастолическая площадь) $A_0 = 4 \cdot 10^{-4}$ м² отходят две артерии с площадями просвета $0.875A_0 = 3.5 \cdot 10^{-4}$ м², $0.125A_0 = 0.5 \cdot 10^{-4}$ м². Первый сосуд имеет длину $L = 0.1$ м, второй сосуд имеет длину $0.5L = 0.05$ м, третий сосуд имеет длину $L = 0.1$ м. Линеаризованная скорость распространения пульсовой волны в широкой артерии равна 3 м/с, две отходящие узкие артерии менее эластичны: для артерии с площадью просвета $0.125A_0$ линеаризованная скорость в два раза больше и равна 6 м/с, для артерии с площадью просвета $0.875A_0$ линеаризованная пульсовая скорость равна $\sqrt{2} \times 3 \approx 4.24$ м/с. Данная сеть сосудов не является идеально

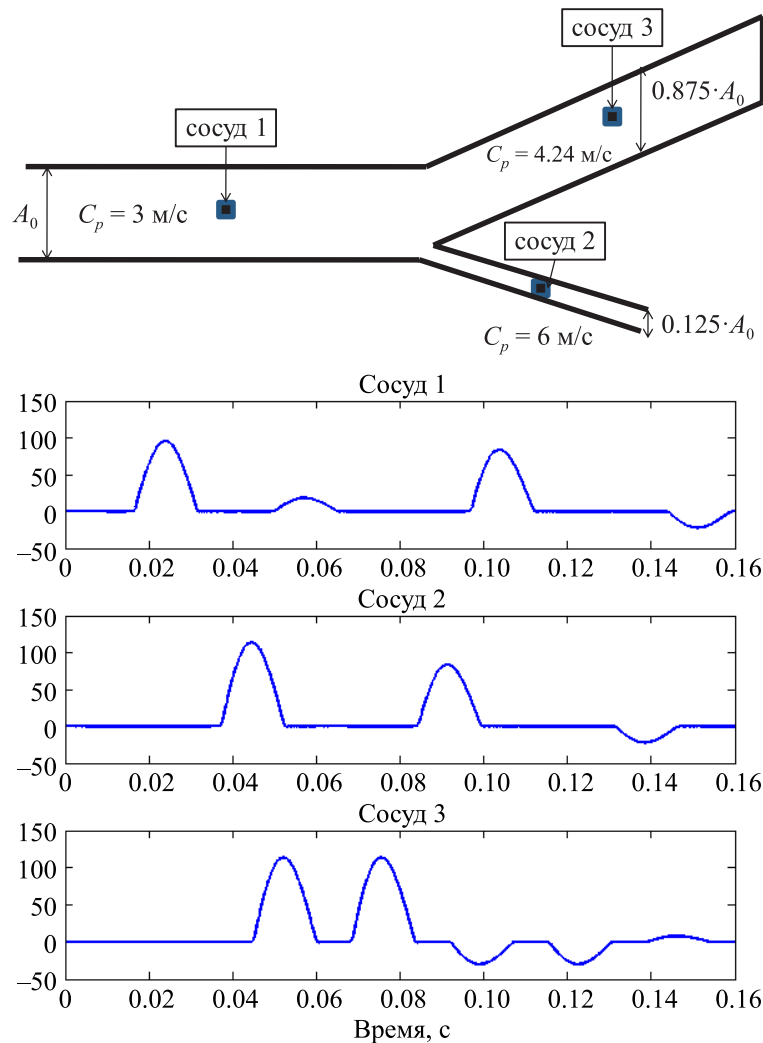


Рис. 2. Динамика пульсовых волн и их отражений для бифуркации артерий. Исследуемая геометрия представлена на верхнем слайде. Графики зависимости давления (ось y, Паскали) от времени (ось x, секунды) измерены в середине каждого из сосудов. Здесь A_0 есть площадь просвета первого сосуда, равная $4 \cdot 10^{-4}$ м²; C_p — значения линейризованной скорости пульсовых волн. Сосуды 1, 2 имеют длину 0.1 м, сосуд 3 имеет длину 0.05 м; вязкость выбиралась равной $\nu = c_s^2 \tau = 4 \times 10^{-6}$ м²/с, плотность крови $\rho_0 = 1060$ кг/м³. Правый конец третьего сосуда полностью закрыт, левый конец первого сосуда и правый конец второго сосуда открыты. Начальный импульс имеет синусоидальную форму, длительность — 0.02 с, амплитуда равна 100 Па

согласованной — часть пульсовой волны отражается назад. В линейной теории коэффициент отражения R определяется как [Lighthill, 1978]

$$R = \frac{\frac{A_0^{(0)}}{c_0^0} - \frac{A_0^{(1)}}{c_0^1} - \frac{A_0^{(2)}}{c_0^2}}{\frac{A_0^{(0)}}{c_0^0} + \frac{A_0^{(1)}}{c_0^1} + \frac{A_0^{(2)}}{c_0^2}},$$

где $A_0^{(0)}, c_0^0$ — площадь просвета и линейризованная пульсовая скорость широкого сосуда, а $A_0^{(i)}, c_0^i$, $i = 1, 2$, — аналогичные значения для двух отходящих сосудов. В рассматриваемом случае $R \approx 0.1896$.

Возникает вопрос, как ставить граничные условия для бифуркации сосудов. Каждый сосуд моделируется отдельно, в точках соединения происходит обмен данными между соседними сосудами. Рассмотрим общий случай: имеется сосуд с невозмущенной площадью сечения и линейной пульсовой скоростью $A_0^{(0)}$, $c_{\text{pulse}}(A_0^{(0)})$, назовем этот сосуд корневым, через этот сосуд распространяется пульсовая волна, в точке разветвления от начальной артерии отходят N артерий с площадями сечения и линейными пульсовыми скоростями $A_0^{(i)}$, $c_{\text{pulse}}(A_0^{(i)})$, $i = 1, \dots, N$. В точке бифуркации ставятся условия непрерывности давления (падением давления в бифуркации пренебрегаем) и сохранения массового потока крови [Sherwin et al., 2003]. Считаем, что закон, связывающий площадь просвета и давления, имеет вид (16), то есть $p(A) = p_0 + \frac{1}{nD_0}(A^n - A_0^n)$, или, используя определение линейной пульсовой волны $\sqrt{A_0^n/\rho_0 D_0}$, получаем

$$\Delta p(A) \equiv p(A) - p_0 = (1/n)\rho_0 c_{\text{pulse}}^2(A_0)(A^n/A_0^n - 1),$$

последнее равенство линеаризуем относительно A_0 (площадь просвета во время диастолической фазы):

$$\Delta p(A) \equiv p(A) - p_0 = \rho_0 c_{\text{pulse}}^2(A_0)(A/A_0 - 1).$$

Условия непрерывности давлений в бифуркации имеют вид

$$\Delta p^{(0)} = \Delta p^{(i)}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (23)$$

где $\Delta p^{(i)}$ — давления в бифуркации для сосудов, $i = 0, \dots, N$. Условие сохранения протекающего через бифуркацию объема крови имеет следующий вид:

$$A^{(0)}u^{(0)} = \sum_{i=1}^N A^{(i)}u^{(i)}, \quad (24)$$

где $u^{(i)}$ — массовые скорости крови в сосудах, $i = 0, \dots, N$.

Допустим, течение крови в i -м сосуде описывается решеточными функциями распределения $f_{-1}^{(i)}$, $f_0^{(i)}$, $f_1^{(i)}$. В терминах решеточных уравнений Больцмана и с использованием (14)–(15) условия (23)–(24) в точке бифуркации сосудов принимают следующий вид:

$$(f_{-1}^{(0)} + f_0^{(0)} + f_1^{(0)} - A_0^{(0)}) \frac{c_{\text{pulse}}(A_0^{(0)})^2}{A_0^{(0)}} = (f_{-1}^{(i)} + f_0^{(i)} + f_1^{(i)} - A_0^{(i)}) \frac{c_{\text{pulse}}(A_0^{(i)})^2}{A_0^{(i)}}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (25)$$

$$(f_1^{(0)} - f_{-1}^{(0)})c^{(0)} = \sum_{i=1}^N (f_1^{(i)} - f_{-1}^{(i)})c^{(i)} + \Delta a, \quad (26)$$

где $c^{(i)}$ — скорость решеточного газа в i -м сосуде, кроме того,

$$\Delta a = \sum_{i=1}^N a^{(i)}\Delta t/2 - a^{(0)}\Delta t/2, \quad i = 1, \dots, N,$$

где $a^{(i)}$, $i = 0, \dots, N$, — модуль внешней силы, применяемой в i -м сосуде (см. определение силы (5), (8)). Временной шаг Δt считаем постоянным для всех сосудов, а скорости решеточного газа $c^{(i)} = \Delta x^{(i)}/\Delta t$ неодинаковы, здесь $\Delta x^{(i)}$ — пространственный шаг решетки в i -м сосуде. Скорости $c^{(i)}$ следует выбирать из соотношения

$$\frac{c^{(i)}}{c^{(j)}} = \frac{c_{\text{pulse}}(A_0^{(i)})}{c_{\text{pulse}}(A_0^{(j)})}.$$

Последнее соотношение может быть получено из следующих соображений. В точке бифуркации условия непрерывности давлений рассматриваются в линеаризованном виде, пульсовые скорости постоянны в линейной теории: $\frac{A}{\rho_0} \frac{dp}{dA} \Big|_{A=A_0} = c_{\text{pulse}}^2(A_0^{(i)})$, то есть $\Delta p = \rho_0 c_{\text{pulse}}^2(A_0^{(i)}) \Delta A / A_0$.

Заметим, что модель *D1Q3* с постоянной скоростью распространения волны давления соответствует стандартному случаю идеального газа, для которого $c_s^2 = c^2/3$, где c_s — скорость звука. Имеем $c/c_s = \text{const}$. В гемодинамических терминах скорость звука есть скорость распространения пульсовой волны, то есть $c_{\text{pulse}}(A_0^{(i)})$, и тогда

$$c_{\text{pulse}}(A_0^{(i)})/c^{(i)} = \text{const}$$

для всех сосудов с номерами i в рассматриваемой бифуркации. Отсюда сразу следует и требуемое соотношение.

Отметим, что для корневого сосуда $A_0^{(0)}$, $c_{\text{pulse}}(A_0^{(0)})$ в точке бифуркации x функция распределения $f_{-1}^{(0)}(t, x)$ не может быть вычислена непосредственно из уравнений, так как для этого необходимо знать величину $f_{-1}^{(0)}(t - \Delta t, x + c^{(0)}\Delta t)$, но точка $x + c^{(0)}\Delta t$ уже не принадлежит корневному сосуду. Таким образом, $f_{-1}^{(0)}(t, x)$ — неизвестная величина, и она должна вычисляться из граничных условий. Аналогично: неизвестными являются $f_1^{(i)}(t, x)$, $i = 1, \dots, N$. Эти величины вычисляются из системы $(N + 1)$ линейных уравнений (25), (26). Имеем

$$f_{-1}^{(0)} = f_1^{(0)} - \sum_{i=1}^N (f_1^{(i)} - f_{-1}^{(i)})k^{(i)} + \Delta b, \tag{27}$$

где все $f_1^{(i)}$, $i = 1, \dots, N$ вычисляются из линейной системы N уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{j \neq i}^N k^{(j)} \Delta f_1^{(j)} + (k^{(i)} + (r^{(i)})^2) \Delta f_1^{(i)} &= \\ = \sum_{j=1}^N k^{(j)} \Delta f_{-1}^{(j)} - (r^{(i)})^2 (\Delta f_0^{(i)} + \Delta f_{-1}^{(i)}) + (2\Delta f_1^{(0)} + \Delta f_0^{(0)}) - \Delta b, \end{aligned} \tag{28}$$

где $i = 1, \dots, N$, здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} \Delta b &\equiv \frac{\Delta a}{c^{(0)}}, \quad k^{(i)} \equiv \frac{c^{(i)}}{c^{(0)}}, \quad r^{(i)} \equiv k^{(i)} \sqrt{\frac{A_0^{(0)}}{A_0^{(i)}}}, \\ \Delta f_\alpha^{(i)} &= f_\alpha^{(i)} - w_\alpha A_0^{(i)}. \end{aligned}$$

Вначале решается линейная система (28) относительно $f_1^{(i)}$, $i = 1, \dots, N$, затем из (27) восстанавливается $f_{-1}^{(0)}$.

Также требуется определить условия полного отражения и поглощения на границах сосудов. Для полного отражения волны на конце i -го сосуда требуется поставить следующее условие:

$$f_{-1}^{(i)} = f_1^{(i)},$$

т. е. падающая компонента волны $f_1^{(i)}$ переходит в отраженную $f_{-1}^{(i)}$.

На рис. 2 изображено, что конец третьего сосуда полностью закрыт (окклюзия сосуда), здесь задается условие отражения. Если на конце сосуда импульс не поглощается, а полностью

уходит дальше, то математически необходимо задать условия полного поглощения волны на границе. С точки зрения сосудистой сети условия поглощения на границе соответствуют идеальной согласованности (отсутствие отражений) рассматриваемой артерии и отходящих от данной артерии мелких сосудов. Для решеточных уравнений Больцмана это не совсем тривиально, но в настоящее время граничные условия поглощения детально разработаны. Для настоящей задачи используются импедансные граничные условия [Schlaffer, 2013]. Они задаются на левой границе первого сосуда и правой границе второго сосуда.

Модель правильно описывает динамику множественных отражений для бифуркации (см. рис. 2). Результаты расчетов совершенно аналогичны данным из [Mynard, Nithiarasu, 2008]. На левой границе первого сосуда задается короткий синусоидальный импульс длительностью 0.02 с и амплитудой 100 Па. Начальная пульсовая волна распространяется от левого конца первого сосуда и регистрируется в середине сосуда. Волна достигает точки бифуркации, частично отражается, отраженная часть распространяется назад, импульс снова регистрируется в середине первого сосуда, волна доходит до левого края, где полностью поглощается. Вторая часть волны (неотраженная) распространяется по артериям 2 и 3 и регистрируется в центре каждой из артерий. Отметим, что во втором сосуде волна регистрируется чуть раньше, чем в третьем, так как во втором сосуде скорость распространения пульсовой волны выше. В конце второго сосуда прошедшая волна полностью поглощается границей. В конце третьего сосуда волна полностью отражается и снова регистрируется в середине, затем доходит до точки бифуркации. Здесь волна частично отражается и частично уходит дальше в первый и второй сосуды — во втором сосуде волна регистрируется чуть раньше, чем в первом. Отраженная волна в третьем сосуде уже имеет отрицательную амплитуду. В дальнейшем картина снова повторяется, но амплитуды волн затухают, так как постепенно поглощаются границами.

7. Заключение

В настоящей работе предложен новый подход к решению задач распространения пульсовых волн в сосудах на основе методов статистической механики, а именно с использованием решеточных уравнений Больцмана. Показано, что метод может описывать как изменение формы пульсовой волны при распространении по сосуду, так и сложную картину множественных отражений пульсовых волн в бифуркации и на закрытых концах сосудов.

Метод расчета достаточно прост в программировании, имеет большой потенциал для параллельного счета [Kruger et al., 2017], широкий класс зависимостей между давлением и площадью просвета сосуда может быть включен в модель. Трение крови о стенку сосуда может быть легко учтено в модели как дополнительная внешняя сила. Из небольших недостатков метода следует отметить то, что гидродинамика, описываемая трехскоростной решеточной моделью, содержит дополнительные члены, пропорциональные Ma^3 , которых не содержится в уравнениях Навье–Стокса. Однако точное описание гидродинамики возможно, если использовать пятискоростную решеточную модель. Также интересной особенностью модели является то, что описываемое течение всегда будет содержать члены, отвечающие за продольную вязкость. Описание сосудов с непрерывно изменяющейся геометрией, например с постепенными сужениями (tapering), требует включения дополнительных членов с пространственными производными, данные члены могут быть включены в модель, однако потребуются дополнительный анализ модели на устойчивость.

В дальнейшем планируется продолжить исследование решеточных уравнений Больцмана в приложении к задачам гемодинамики для более сложных и реалистичных геометрий, также учесть некоторые тонкие эффекты, такие как трение крови о стенки артерий, вязкоэластичные свойства стенок сосудов, постепенное изменение площади просвета сосуда вдоль его оси.

Список литературы (References)

- Абакумов М., Гаврылюк К., Есикова Н., Лушкин А., Мухин С., Соснин Н., Тишкин В., Фаворский А. Математическая модель гемодинамики сердечно-сосудистой системы // Дифференц. уравнения. — 1997. — Т. 33. — С. 892–898.
- Abakumov M., Gavrylyuk K., Esikova N., Lukshin A., Mukhin S., Sosnin N., Tishkin V., Favorski A.* A mathematical model of the hemodynamics of a cardio-vascular system // Differ. Equ. — 1997. — Vol. 33. — P. 895–901. (Original Russian paper: *Abakumov M., Gavrylyuk K., Esikova N., Lukshin A., Mukhin S., Sosnin N., Tishkin V., Favorski A.* Matematicheskaya model' gemodinamiki serdechno-sosudistoy sistemy // Differents. uravneniya. — 1997. — Vol. 33. — P. 892–898.)
- Ашметков И., Мухин С., Соснин Н., Фаворский А., Хруленко А. Анализ и сравнение некоторых аналитических и численных решений задач гемодинамики // Дифференц. уравнения. — 2000. — Т. 36. — С. 919–924.
- Ashmetkov I., Mukhin S., Sosnin N., Favorski A., Khrulenko A.* Analysis and comparison of some analytic and numerical solutions of hemodynamic problems // Differ. Equ. — 2000. — Vol. 36. — P. 1021–1026. (Original Russian paper: *Ashmetkov I., Mukhin S., Sosnin N., Favorski A., Khrulenko A.* Analiz i sravneniye nekotorykh analiticheskikh i chislennykh resheniy zadach gemodinamiki // Differents. uravneniya. — 2000. — Vol. 36. — P. 919–924.)
- Ашметков И., Мухин С., Соснин Н., Фаворский А. Краевая задача для линеаризованных гемодинамических уравнений на графе // Дифференц. уравнения. — 2004. — Т. 40. — С. 87–97.
- Ashmetkov I., Mukhin S., Sosnin N., Favorski A.* A Boundary Value Problem for the Linearized Haemodynamic Equations on a Graph // Differ. Equ. — 2004. — Vol. 40. — P. 94–104. (Original Russian paper: *Ashmetkov I., Mukhin S., Sosnin N., Favorski A.* Krayevaya zadacha dlya linearizovannykh gemodinamicheskikh uravneniy na grafe // Differents. uravneniya. — 2004. — Vol. 40. — P. 87–97.)
- Буничева А., Мухин С., Соснин Н., Фаворский А. Осредненная нелинейная модель гемодинамики на графе сосудов // Дифференц. уравнения. — 2001. — Т. 37. — С. 905–912.
- Bunicheva A., Mukhin S., Sosnin N., Favorski A.* An Averaged Nonlinear Model of Hemodynamics on the Vessel Graph // Differ. Equ. — 2001. — Vol. 37. — P. 949–956. (Original Russian paper: *Bunicheva A., Mukhin S., Sosnin N., Favorski A.* Osrednennaya nelineynaya model' gemodinamiki na grafe sudov // Differents. uravneniya. — 2001. — Vol. 37. — P. 905–912.)
- Василевский Ю. В., Саламатова В. Ю., Симаков С. С. Об эластичности сосудов в одномерных моделях гемодинамики // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2015. — Т. 55. — С. 1599–1610.
- Vasilevskiy Yu. V., Salamatova V. Yu., Simakov S. S.* On the elasticity of blood vessels in one-dimensional problems of hemodynamics // Comput. Math. Math. Phys. — 2015. — Vol. 55. — P. 1567–1578. (Original Russian paper: *Vasilevskiy Yu. V., Salamatova V. Yu., Simakov S. S.* Ob elastichnosti sudov v odnomernykh modelyakh gemodinamiki // Zh. vychisl. matem. i matem. fiz. — 2015. — Vol. 55. — P. 1599–1610.)
- Симаков С. С. Современные методы математического моделирования кровотока с помощью осредненных моделей // Компьютерные исследования и моделирование. — 2018. — Т. 10. — С. 581–604.
- Simakov S. S.* Sovremennyye metody matematicheskogo modelirovaniya krovotoka s pomoshch'yu osrednennykh modeley [Modern methods of mathematical modeling of blood flow using reduced order methods] // Computer Research and Modeling. — 2018. — Vol. 10. — P. 581–604 (in Russian).
- Bessonov N., Sequeira A., Simakov S., Vassilevskii Yu., Volpert V. Methods of Blood Flow Modelling // Math. Model. Nat. Phenom. — 2016. — Vol. 11. — P. 1–25.
- Bisson M., Bernaschi M., Melchionna S., Succi S., Kaxiras E. Multiscale hemodynamics using clusters of GPU // Commun. Comput. Phys. — 2011. — Vol. 11. — P. 48–64.
- Chen C., Chen H., Freed D., Shock R., Staroselsky I., Zhang R., Coşkun A., Stone P., Feldman C. Simulation of blood flow using extended Boltzmann kinetic approach // Physica A. — 2006. — Vol. 362. — P. 174–181.
- Fang H., Wang Z., Lin Z., Liu M. Lattice Boltzmann method for simulating the viscous flow in large distensible blood vessels // Phys. Rev. E. — 2002. — Vol. 65. — P. 051925.
- Gounley J., Vardhan M., Randles A. A framework for comparing vascular hemodynamics at different points in time // Comput. Phys. Comm. — 2019. — Vol. 235. — P. 1–8.
- Formaggia L., Lamponi D., Quarteroni A. One-dimensional models for blood flow in arteries // J. Engng. Maths. — 2003. — Vol. 47. — P. 251–276.

- Mynard J., Nithiarasu P.* A 1D arterial blood flow model incorporating ventricular pressure, aortic valve and regional coronary flow using the locally conservative Galerkin (LCG) method // Commun. in Numer. Meth. in Eng. — 2008. — Vol. 24. — P. 367–417.
- Hughes T., Lubliner J.* On the one-dimensional theory of blood flow in the larger vessels // Math. Biosci. — 1973. — Vol. 18. — P. 161–170.
- Ilyin O.* Nonlinear pressure–velocity waveforms in large arteries, shock waves and wave separation // Wave Motion. — 2019. — Vol. 84. — P. 56–67.
- Karlin I., Chikatamarla S., Ansumali S.* Elements of the lattice Boltzmann method II: kinetics and hydrodynamics in one dimension // Commun. in Comput. Phys. — 2007. — Vol. 2. — P. 196–238.
- Krüger T., Kusumaatmaja H., Kuzmin A., Shardt O., Silva G., Viggen E.* The Lattice Boltzmann Method. Principles and Practice. — Springer, 2017.
- Kupershtokh A., Medvedev D., Karpov D.* On equations of state in a lattice Boltzmann method // Comput. Math. Appl. — 2009. — Vol. 58. — P. 965–974.
- Kupershtokh A.* Criterion of numerical instability of liquid state in LBE simulations // Comput. Math. Appl. — 2010. — Vol. 59. — P. 2236–2245.
- Kupershtokh A., Medvedev D., Griбанov I.* Thermal lattice Boltzmann method for multiphase flows // Phys. Rev. E. — 2018. — Vol. 98. — P. 023308.
- Langewouters G., Wesseling K., Goedhard W.* The static elastic properties of 45 human thoracic and 20 abdominal aortas in vitro and the parameters of a new model // J. Biomech. — 1984. — Vol. 17. — P. 425–435.
- Lighthill J.* Waves in Fluids. — Cambridge University Press, 1978.
- Melchionna S., Kaxiras E., Bernaschi M., Succi S.* Endothelial shear stress hemodynamic simulation // Philos. Trans. A: Math. Phys. Eng. Sci. — 2011. — Vol. 369. — P. 2354–2361.
- Olufsen M.* Structured tree outflow condition for blood flow in larger systemic arteries // Am. J. Physiol. — 1999. — Vol. 276. — P. H257–H268.
- Pontrelli G., Halliday I., Melchionna S., Spencer T., Succi S.* On the lattice Boltzmann method as a computational framework for multiscale hemodynamics // Math. Comp. Model. of Dyn. Syst. — 2014. — Vol. 20. — P. 470–490.
- Sherwin S., Franke V., Peiró J., Parker K.* One-dimensional modelling of a vascular network in space-time variables // J. Engng. Maths. — 2003. — Vol. 47. — P. 217–250.
- Schlaffer M.* Non-reflecting Boundary Conditions for the Lattice Boltzmann Method. — Technical University of Munich, 2013.
- Succi S.* The Lattice Boltzmann Equation: For Complex States of Flowing Matter. — Oxford, 2018.
- Taylor C., Draney M.* Experimental and computational methods in cardiovascular fluid mechanics // Rev. Fluid Mech. — 2004. — Vol. 36. — P. 197–231.
- van de Vosse F., Stergiopoulos N.* Pulse Wave Propagation in the Arterial Tree // Ann. Rev. of Fluid Mech. — 2011. — Vol. 43. — P. 467–499.
- Westerhof N., Lankhaar J.-W., Westerhof B.* The arterial Windkessel // Med. Biol. Eng. Comput. — 2009. — Vol. 47. — P. 131–141.
- Yuan P., Schaefer L.* Equations of state in a lattice Boltzmann model // Phys. Fluids. — 2006. — Vol. 18. — P. 042101.
- Zhang R., Chen H.* Lattice Boltzmann method for simulations of liquid-vapor thermal flows // Phys. Rev. E. — 2003. — Vol. 67. — P. 066711.