

УДК: 004.896: 621.865

Моделирование жесткости для шагающих роботов

Д. И. Попов^a, А. С. Климчик^b

Центр технологий компонентов робототехники и мехатроники, Университет «Иннополис»,
Россия, 420500, г. Иннополис, ул. Университетская, д. 1

E-mail: ^a d.popov@innopolis.ru, ^b a.klimchik@innopolis.ru

Получено 26.03.2019, после доработки — 05.08.2019.

Принято к публикации 15.08.2019.

В работе рассматривается построение модели жесткости для антропоморфных платформ. Применяется эластостатическая модель жесткости для определения ошибок позиционирования для нижних конечностей робота. Одной из ключевых проблем в достижении быстрой и стабильной ходьбы двуногого робота являются отклонения, вызванные податливостью элементов робота. Эта проблема была решена с использованием метода виртуальных пружин для моделирования жесткости и нахождения деформаций, вызванных весом робота и силами, возникающими во время ходьбы в одноопорной и двухопорной фазах.

Для моделирования робота в фазе одноопорной поддержки робот представлен как последовательная кинематическая цепочка с базой в месте контакта опорной ноги и рабочим органом в ступне свободной ноги. Для фазы двухопорной поддержки робот моделируется как параллельный манипулятор с базой в точках контакта ног с поверхностью и рабочим органом в тазу.

В большинстве работ, связанных с моделированием жесткости, как правило, моделируется только податливость шарниров. В данной работе используются два метода построения модели: с учетом податливости звеньев и шарниров и с учетом податливости только шарниров. При этом производится идентификация значения жесткости каждого шарнира на полной модели, что позволяет учесть часть влияния податливости звена, пересчитанную на шарнир. Идентификация параметров жесткости шарниров произведена для двух антропоморфных роботов: малой платформы и полноразмерного AR-601M.

Для идентифицированных параметров были построены карты отклонений, показывающие ошибку позиционирования в зависимости от положения ступни робота в рабочем пространстве. Максимальную амплитуду в данном случае имеет Z компонента вектора отклонений вследствие влияния массы робота на его конструкцию.

Ключевые слова: моделирование жесткости, эластостатика, антропоморфный робот, двуногий робот

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 18-38-00880/19.

UDC: 004.896: 621.865

Stiffness modeling for anthropomorphic robots

D. I. Popov^a, A. S. Klimchik^b

Center for Technologies in Robotics and Mechatronics Components, Innopolis University,
1 University st., Innopolis, 420500, Russia

E-mail: ^a d.popov@innopolis.ru, ^b a.klimchik@innopolis.ru

Received 26.03.2019, after completion — 05.08.2019.

Accepted for publication 15.08.2019.

In the work modeling method of anthropomorphic platforms is presented. An elastostatic stiffness model is used to determine positioning errors in the robot's lower limbs. One of the main problems in achieving a fast and stable gait are deflections caused by the flexibility in the elements of the robot. This problem was solved using virtual joint modeling to predict stiffness and deformation caused by the robot weight and external forces.

To simulate a robot in the single-support phase, the robot is represented as a serial kinematic chain with a base at the supporting leg point of contact and an end effector in the swing leg foot. In the double support phase robot modeled as a parallel manipulator with an end effector in the pelvis. In this work, two cases of stiffness modeling are used: taking into account the compliance of the links and joints and taking into account only the compliance of joints. In the last case, joint compliances also include part of the link compliances. The joint stiffness parameters have been identified for two anthropomorphic robots: a small platform and a full-sized AR-601M.

Deflections maps were calculated using identified stiffness parameters and showing errors depending on the position of the robot end effector in the workspace. The errors in Z directions have maximum amplitude, due to the influence of the robot mass on its structure.

Keywords: stiffness modeling, elastostatic modeling, anthropomorphic platform, biped

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2019, vol. 11, no. 4, pp. 631–651 (Russian).

This work was supported by RFBR grant No. 18-38-00880/19.

Введение

Одной из основных целей робототехники является замена людей в опасных условиях, таких как радиация, химическое, биологическое загрязнение или последствия техногенной катастрофы. Большинство этих задач требуют навыков и маневренности человека для успешного выполнения операций. Разработка человекоподобных роботов является одним из наиболее актуальных решений для успешной работы робота в среде человека с расширенными возможностями. Эти роботы обычно напоминают людей по внешнему виду и/или внутренней конструкции, обладая схожей структурой тела и принципами ходьбы. Одной из наиболее важных частей антропоморфного робота является таз с нижними конечностями, которые образуют нижнюю часть тела. В течение последних десятилетий сообщество робототехники предложило несколько успешных моделей двуногих роботов с аналогичной структурой нижних конечностей с 6 степенями свободы в ноге, 3 в бедре, 1 в колене и 2 в голени. Известные андройды размером с человека — это Honda ASIMO [Sakagami et al., 2002], WABIAN [Yamaguchi et al., 1999] из Университета Васэда, Android Technics AR-600 [Khusainov et al., 2015] и т. д. Среди роботов небольшого размера наиболее популярными моделями являются ROBOTIS Darwin [Ha et al., 2011], Aldebaran Robotics Nao [Gouaillier et al., 2009] и Poppy Humanoid [Lapeyre et al., 2013].

Антропоморфные роботы в будущем будут играть важную роль в нашей повседневной жизни, и для того, чтобы быть полезными для человека, подобным роботам необходимо уметь уверенно передвигаться. Двуногое движение — одна из базовых способностей антропоморфного робота, без нее робот не сможет полноценно оперировать в естественном для человека окружении. На текущий момент одной из наиболее важных задач робототехники является разработка высоко-проходимого робота, способного на выполнение широкого спектра задач.

При проектировании и разработке двуногих роботов, как правило, все расчеты и модели производятся для робота без учета внешней нагрузки, однако один из основных подходов использования антропоморфных роботов (например, как робот-помощник) предусматривает возможность переносить различные грузы. Дополнительный груз и/или оборудование, добавленное к роботу, в данном случае можно рассматривать как внешнюю силу, действующую на робота, под действием которой, ввиду небесконечной жесткости деталей и суставов робота, могут возникнуть ошибки податливости. Более того, ошибки податливости возникают даже без присутствия внешнего воздействия, только вследствие собственного веса робота. Наличие ошибок позиционирования в бипедальном роботе может привести к отклонениям от желаемой траектории ступни в фазе одноопорной поддержки (момент шага, когда робот стоит на одной ноге), преждевременному контакту ступни с землей и, как следствие, падению робота.

На сегодняшний день не существует единого подхода для компенсации ошибок податливости: оффлайн методы хороши только, когда деформации известны заранее, а онлайн методы требуют точных измерений и зачастую сильно ограничены в своих возможностях. В случае с динамически генерируемым шагом робота эффективны только онлайн методы компенсирования ошибок податливости.

Моделирование жесткости в робототехнике на данный момент в основном рассматривается для промышленных манипуляторов, где проблема точного позиционирования рабочего органа робота под воздействием внешней и внутренней нагрузки является критической. У роботов-гуманоидов точное позиционирование не всегда необходимо, но при высокой податливости в звеньях или шарнирах отклонения, вызванные полезной нагрузкой или весом звеньев, могут повлиять на устойчивость робота. При высокоскоростном движении также следует учитывать влияние динамических сил, действующих на робота.

Обзор предшествующих работ

Проблемы, которые решаются в рамках данной работы, основаны на различных аспектах моделирования жесткости роботов и компенсации ошибок податливости. Текущее состояние этой области по наиболее важным из них описано ниже. Стоит отметить, что все исследования в данной области сосредоточены на промышленных роботах, примеров применения модели жесткости для антропоморфных роботов обнаружено не было.

Моделирование жесткости для манипуляторов было начато в 1980-х годах пионерской работой Солсбери по активному контролю жесткости [Salisbury, 1980]. В первых моделях учитывались только эластичности шарниров, а параметры жесткости оценивались довольно простым способом [Pigoski et al., 1998]. Последние разработки позволяют смоделировать гибкость как шарниров, так и звеньев [Klimchik et al., 2014], что приводит к трем основным подходам для моделирования жесткости в робототехнике: метод конечных элементов (МКЭ), матричный структурный анализ (МСА) и метод виртуальных пружин (МВП). Наиболее точным из них является МКЭ, который рассматривает компоненты манипулятора, учитывая их истинные форму и размеры. Основная идея, стоящая за МКЭ, состоит в том, чтобы разложить физическую модель механизма на несколько небольших элементов и ввести связь между соседними узлами с помощью соответствующих матриц жесткости [Corradini et al., 2003]. Этот метод является очень точным, но количество конечных элементов ограничено памятью компьютера, и инверсия матрицы большого размера становится проблемой. Метод МСА включает в себя основные идеи МКЭ, но оперирует с достаточно большими элементами — 3D-балками. МСА обрабатывает большие элементы, что уменьшает вычислительные требования [Martin, 1966; Klimchik et al., 2019]. Тем не менее, этот подход трудно применить для манипулятора в нагруженном состоянии [Klimchik et al., 2012]. МВП [Pashkevich et al., 2009] основан на расширении традиционной жесткой (недеформируемой) модели, добавляя виртуальные пружины, которые описывают упругие деформации звеньев, суставов и приводов. Эта методика обеспечивает разумный компромисс между точностью модели и вычислительной сложностью.

Идентификация направлена на настройку параметров модели в соответствии с экспериментальными данными. Следует отметить, что в литературе существуют различные алгоритмы для решения этой проблемы, которые отличаются по типу исходных измерительных данных (декартовы координаты, расстояние до контрольной точки/линии, ориентация исполнительного органа и т. д.) и методов численной оптимизации (градиентный поиск, генетические алгоритмы и т. д.), которые могут быть применены для калибровки как последовательных, так и параллельных роботов с использованием измерительного инструмента. В [Liu et al., 2007] авторы применили нейронные сети для компенсации ошибки нейрохирургической робототехнической системы. Модель МВП требует параметров виртуальных пружин, чтобы компенсировать отклонения рабочего органа, которые неизвестны. Есть несколько способов для того, чтобы справиться с этим. Первый заключается в моделировании звеньев робота как балок и использовании известных уравнений для расчета их жесткости. Но этот метод является скорее упрощением рассматриваемой проблемы и не приведет к точной компенсации отклонения. Второй — использовать CAD-модель манипулятора [Pashkevich et al., 2011], однако этот метод ограничен из-за различий и возможной неоднородности свойств материала. Кроме того, производители роботов обычно не предоставляют исходные модели. Наиболее надежный подход заключается в применении методов калибровки модели с использованием данных реальных экспериментов [Alici, Shirinzadeh, 2005; Nubiola, Bonev, 2013]. Поскольку основной целью является компенсация всех отклонений, параметры виртуальных пружин должны быть наилучшей оценкой реальных параметров.

Постановка задачи

В данный момент создание эффективного, стабильного и быстрого шага для бипедального робота является не решенной задачей. Многие примеры антропоморфных роботов показывают впечатляющие результаты в «стерильных» лабораторных условиях, где роботы ограждены от различных внешних воздействий и нагрузок, однако подобные условия далеки от вероятных условий реальной эксплуатации. В данной работе предлагается разработать систему, которая приблизит используемые в данный момент модели путем добавления такого параметра, как жесткость для узлов робота, и впоследствии позволит разработать систему для онлайн компенсации ошибок податливости, используя модель жесткости робота и информацию о заданной и реальной конфигурациях робота. Данный подход позволит существенно повысить точность позиционирования робота под нагрузкой и поспособствует увеличению стабильности и эффективности методов передвижения антропоморфных систем.

Используемые методы

Моделирование виртуальных пружин

Подход моделирования виртуальных пружин (Virtual Joint Modeling, VJM) позволяет разработать более детальную и полную геометрическую модель манипулятора, которая обеспечивает более точную оценку положения и ориентации конечного органа робота. Предполагается, что исходная модель дополняется виртуальными пружинами, которые описывают деформации звеньев. Кроме того, виртуальные пружины включены в активные шарниры, чтобы учесть жесткость редуктора и управления двигателя. В результате сформулирована так называемая расширенная геометрическая модель робота:

$$\mathbf{t} = g(\mathbf{q}, \boldsymbol{\theta}), \quad (1)$$

где \mathbf{q} — вектор обобщенных координат робота, а $\boldsymbol{\theta}$ — вектор координат виртуальных пружин. Вектор \mathbf{q} полностью определяется геометрией робота, а значения координат виртуальных пружин $\boldsymbol{\theta}$ зависят от внешней нагрузки \mathbf{w} , приложенной к рабочему органу робота.

Математические основы выражения для отношения сила – отклонение и декартовой матрицы жесткости были представлены в нескольких предыдущих работах [Klimchik et al., 2014; Olabi et al., 2012; Ozaki et al., 1991], здесь для полноты изложения дается краткое описание методов. Изменения в значении виртуальных пружин $\boldsymbol{\theta}$ генерируют силы реакции и моменты в соответствующем податливом элементе, которые соответствуют обобщенному закону Гука для манипулятора в пространстве виртуальных пружин, и формулируется следующим образом:

$$\boldsymbol{\tau}_\theta = \mathbf{K}_\theta \boldsymbol{\theta}, \quad (2)$$

где $\mathbf{K}_\theta = \text{diag}(\mathbf{K}_\theta^1, \mathbf{K}_\theta^2, \dots, \mathbf{K}_\theta^{n_\theta})$ — общая матрица жесткости виртуальных пружин, $\mathbf{K}_\theta^{(i)}$ — матрица жесткости пружины соответствующего звена/шарнира, а $\boldsymbol{\tau}_\theta$ является вектором момента виртуальных пружин.

Применив принцип виртуальной работы, предположим, что смещения в виртуальных шарнирах $\Delta\boldsymbol{\theta}$ невелики. Затем возможно получить значение виртуальной работы, совершенной внешним воздействием \mathbf{w} , как

$$\delta W = (\mathbf{w}^T \mathbf{J}_\theta) \Delta\boldsymbol{\theta}, \quad (3)$$

где $\mathbf{J}_\theta = \partial g(\mathbf{q}, \boldsymbol{\theta}) / \partial \boldsymbol{\theta}$ — матрица Якобиана относительно $\boldsymbol{\theta}$. С другой стороны, виртуальная работа для внутренних сил $\boldsymbol{\tau}_\theta$ равна

$$\delta W = -\boldsymbol{\tau}_\theta^T \Delta\boldsymbol{\theta}. \quad (4)$$

В случае статического равновесия общая виртуальная работа равна нулю для любого виртуального смещения. Следовательно, условия равновесия могут быть представлены как

$$\tau_\theta = J_\theta^T w. \quad (5)$$

Объединив уравнения (2), (5) и линеаризуя (1) вокруг точки равновесия, получим выражение для отклонения рабочего органа робота:

$$\Delta t = J_\theta K_\theta^{-1} J_\theta^T w. \quad (6)$$

Теперь выражение для декартовой матрицы жесткости можно извлечь из уравнения (6):

$$K_C = (J_\theta K_\theta^{-1} J_\theta^T)^{-1}. \quad (7)$$

Идентификация параметров

Для получения желаемых параметров модели жесткости из экспериментальных данных следует произвести процедуру идентификации. Основная цель — найти неизвестные параметры жесткости из измерений момента и смещения пружин относительно желаемого значения. Уравнение (6) устанавливает связь между смещением рабочего органа робота и приложенной внешней силой через матрицу жесткости шарниров и позволяет сформулировать проблему идентификации параметров. Первым этапом удобнее переписать уравнение в виде [Klimchik et al., 2015]:

$$\Delta t = \sum_{i=1}^n (J_{\theta,i} k_{\theta,i} J_{\theta,i}^T) w, \quad (8)$$

где n — количество измерений, матрицы $k_\theta^{(i)}$ обозначают податливость звеньев/шарниров, которые необходимо найти, и $J_\theta^{(i)}$ обозначает Якобианы — $J_\theta = [J_{\theta,1}, J_{\theta,2} \dots]$. Далее возможно переписать уравнение (8) в стандартном виде для задачи идентификации, как линейную функцию по отношению к искомым параметрам:

$$\Delta t = A_k(q, w)k + \epsilon, \quad (9)$$

где $A_k = [J_{\theta,1} J_{\theta,1}^T w, \dots, J_{\theta,n\theta} J_{\theta,n\theta}^T w]$ — так называемая матрица наблюдений, и $k = (k_{\theta,1}, k_{\theta,2}, \dots, k_{\theta,n\theta})^T$ — вектор податливостей. Уравнение (9) включает в себя шум измерения ϵ , который рассматривается как независимая одинаково распределенная случайная величина с нулевым средним значением и стандартным отклонением σ . По этой причине применяется метод наименьших квадратов, который минимизирует сумму квадратов ошибок:

$$\sum_{i=1}^m \|\Delta t_i - A_k(q_i, w_i)k\| \rightarrow \min_k. \quad (10)$$

Индекс i определяет номер конфигурации робота. Решение для уравнения (10) имеет вид:

$$\hat{k} = \left(\sum_{i=1}^m A_i^T A_i \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^m A_i^T \Delta t_i \right) + \left(\sum_{i=1}^m A_i^T A_i \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^m A_i^T \Delta \epsilon_i \right), \quad (11)$$

где второе слагаемое описывает стохастическую составляющую. Влияние ошибок измерения определяется ковариационной матрицей, которая определяет точность идентификации:

$$\text{cov}(\hat{k}) = \sigma^2 \left(\sum_{i=1}^m A_i^T A_i \right)^{-1}, \quad (12)$$

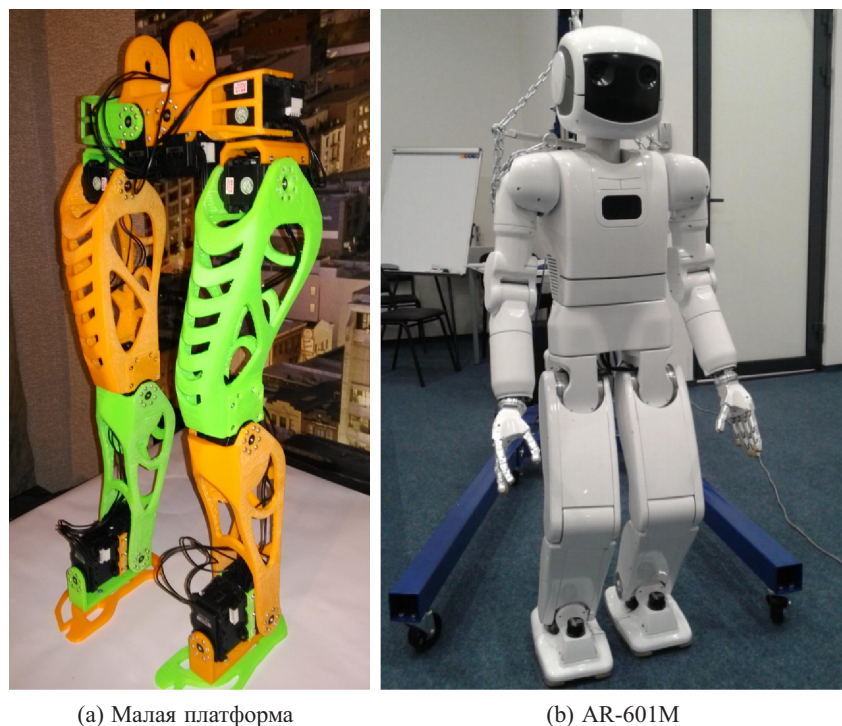


Рис. 1. Внешний вид антропоморфных роботов, выбранных для симуляции

Таблица 1. Размеры антропоморфных роботов

Название	Малая платформа, мм	AR-601M, мм
Бедро	181	280
Голень	178	280
Ступня	26	105
Длина ноги	385	665

где σ — стандартное отклонение, а $\sum_{i=1}^m A_i^T A_i$ называется информационной матрицей. Полученная ковариационная матрица может использоваться как для оценки точности идентифицированных параметров, так и для планирования эксперимента по калибровке. Уравнение (12) предполагает, что ошибки измерения одинаковы для всех направлений и конфигураций. Если это предположение неверно, можно ввести дополнительную весовую матрицу для исправления результата.

Модели

Антропоморфная платформа

Ранее упоминалось, что МВП подходит для моделирования жесткости ноги-манипулятора [Klimchik et al., 2014]. В рамках этого подхода было предложено несколько альтернативных методов. Они различаются по ряду параметров и количеству виртуальных шарниров-пружин, описывающих эластостатические свойства шарнира/звена. Рассмотрим одну ногу антропоморфного робота с 6 степенями свободы. Этот робот состоит из неподвижного основания в тазу робота, последовательной цепочки звеньев с неидеальной жесткостью, нескольких эластичных суставов,

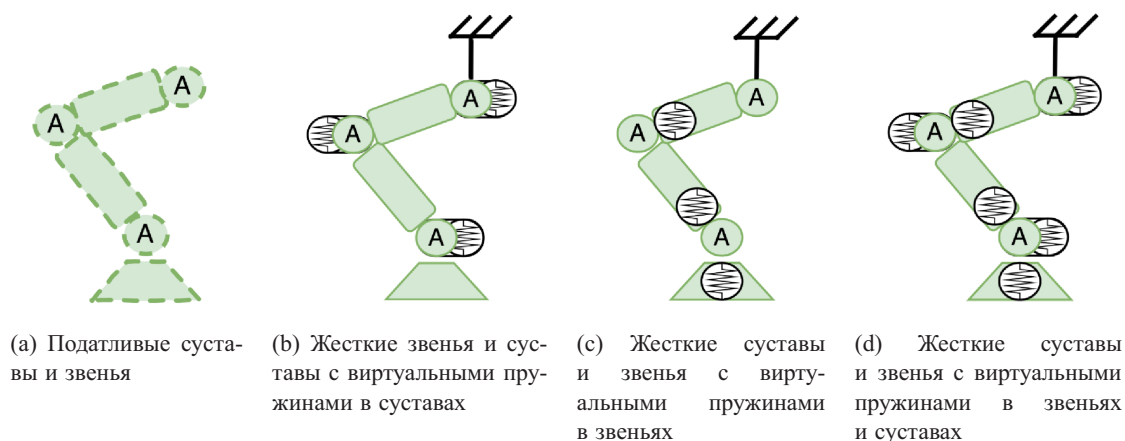


Рис. 2. Возможные методы реализации модели с использованием метода моделирования виртуальных пружин

рабочего органа робота, который контактирует с поверхностью, к которому приложена внешняя сила \mathbf{w} . Чтобы построить полную модель жесткости робота, МВП предлагает смоделировать жесткость каждого звена шарниром с 6-осевой пружиной (три из которых соответствуют перемещению, а три — ориентации), а жесткость шарнира с использованием шарнира и одноосевой пружины, расположенной вдоль оси вращения (рис. 2, *d*), которая приводит к полной матрице жесткости манипулятора $\mathbf{K}_f \in \mathbb{R}^{42 \times 42}$. Более 250 параметров должны быть известны для использования этой модели [Klimchik et al., 2013], которые в идеале можно получить из CAD-модели робота. Проблема в том, что правильная модель со всеми свойствами материала не всегда известна конечному пользователю. В результате было приложено много усилий для создания более простых моделей, которые могут обеспечить результаты, близкие к полной модели, и при этом могут быть идентифицированы.

Существует три основных подхода к разработке упрощенной модели жесткости [Mamedov et al., 2018]. Первый используется, когда жесткость шарниров значительно выше, чем жесткость звеньев, поэтому шарниры можно считать жесткими (рис. 2, *c*). В этом случае модель сокращается, и матрица жесткости \mathbf{K}_{rl} имеет размерность 36×36 . Второй подход используется в противоположном случае, то есть когда жесткость звеньев намного выше, чем жесткость шарниров, поэтому звенья принимаются за жесткие (рис. 2, *b*). Матрица жесткости \mathbf{K}_{rj} в этом случае диагональная и имеет размерность 6×6 . Последний подход используется, когда жесткость звена выше, чем жесткость шарнира, но не может быть игнорирована. Здесь часть жесткости звена включена в жесткость соответствующего шарнира. Как и в предыдущем случае, размер матрицы жесткости \mathbf{K}_{rjl} равен 6×6 и является диагональным.

Первый подход редко используется, так как звенья большинства роботов гораздо жестче по сравнению с приводами, и что также важно, метод требует модели CAD. Что касается второго подхода, звенья обычно недостаточно жесткие, чтобы полностью пренебрегать их податливостью. Третья модель используется в данной работе, чтобы понять вклад каждого упругого компонента в общую матрицу жесткости. Далее упоминание сокращенной модели подразумевает модель, полученную третьим подходом. МВП-модель системы для случая полной и сокращенной модели представлен на рис. 3.

На основе параметров виртуальных пружин и геометрии ноги робота могут быть получены расширенные геометрические полные и сокращенные модели. Обе модели графически представлены на рис. 2. Для полной модели (см. уравнение (13)) звенья аппроксимируются полыми цилиндрическими или квадратными балками соответствующей длины (таблица 2) и, основываясь

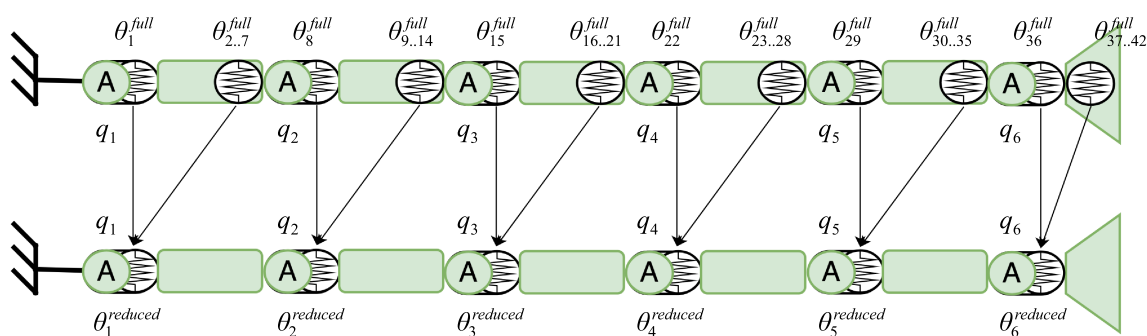


Рис. 3. Полная и сокращенная модели с добавленными виртуальными пружинами

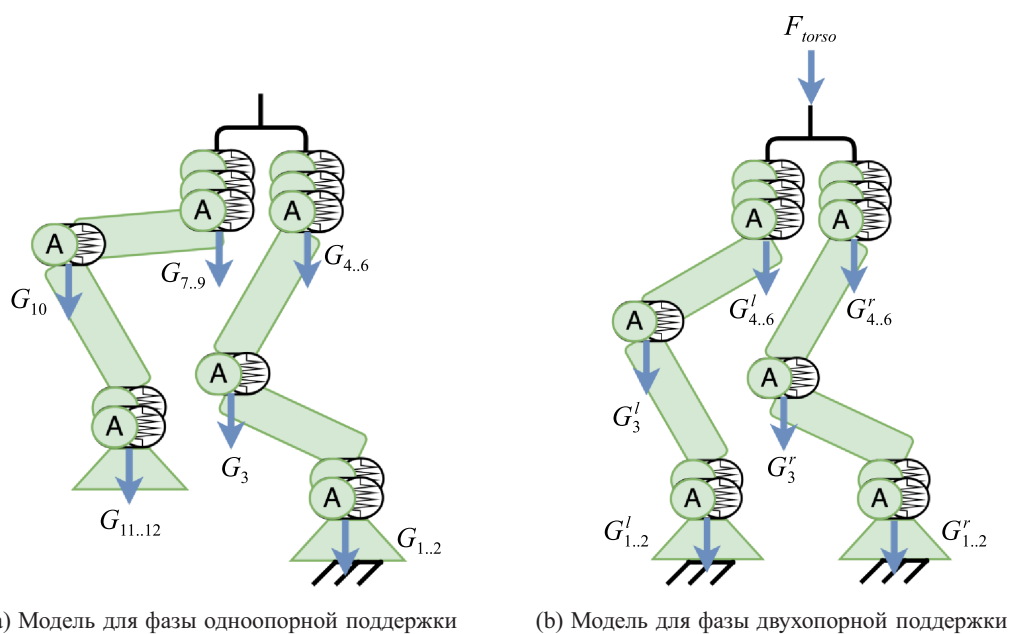


Рис. 4. Модель виртуальных пружин для разных фаз шага робота

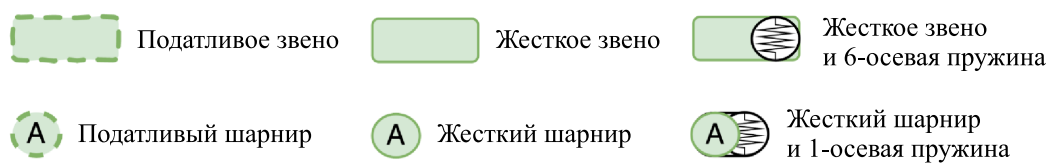


Рис. 5. Нотация для моделей метода моделирования виртуальных пружин

Таблица 2. Параметры аппроксимации звеньев, мм

Звено	Малая платформа		AR-601M	
	Внешний размер	Ширина стенки	Внешний размер	Ширина стенки
Бедро	55	4	125	10
Голень	50	4	110	8
Ступня	88	4	130	8

Таблица 3. Параметры материала звеньев

Параметр	Значение	
	Малая платформа	AR-601M
Модуль упругости, Па	$3.0 \cdot 10^9$	$70.0 \cdot 10^9$
Коэффициент Пуассона	0.35	0.334
Плотность, кг/м ³	$1.07 \cdot 10^3$	$2.7 \cdot 10^3$

Таблица 4. Параметры суставов для робота AR-601M

Шарнир	Изначальная податливость, м/Н	Идентифицированная податливость, м/Н	Нижний предел, град	Верхний предел, град
1	$1 \cdot 10^{-5}$	$0.97 \cdot 10^{-5}$	-11	20
2	$1 \cdot 10^{-5}$	$0.96 \cdot 10^{-5}$	-20	20
3	$1 \cdot 10^{-5}$	$1.21 \cdot 10^{-5}$	-45	70
4	$5 \cdot 10^{-6}$	$5.3 \cdot 10^{-6}$	0	140
5	$1.42 \cdot 10^{-5}$	$1.52 \cdot 10^{-5}$	-33	70
6	$1.42 \cdot 10^{-5}$	$1.4 \cdot 10^{-5}$	-11	20

Таблица 5. Параметры суставов для малой антропоморфной платформы

Шарнир	Изначальная податливость, м/Н	Идентифицированная податливость, м/Н	Нижний предел, град	Верхний предел, град
1	$1 \cdot 10^{-4}$	$0.95 \cdot 10^{-4}$	-25	45
2	$1 \cdot 10^{-4}$	$0.91 \cdot 10^{-4}$	-40	60
3	$1 \cdot 10^{-4}$	$1.67 \cdot 10^{-4}$	-60	100
4	$1 \cdot 10^{-4}$	$0.98 \cdot 10^{-4}$	-6	112
5	$1 \cdot 10^{-4}$	$1.17 \cdot 10^{-4}$	-35	30
6	$1 \cdot 10^{-4}$	$1.03 \cdot 10^{-4}$	-35	35

на этом и на свойствах материала (таблица 3), вычисляется матрица жесткости звена. Для сокращенной модели (14) используется определенная жесткость шарнира, полученная с помощью идентификации (таблица 4 и 5), которая учитывает жесткость звеньев.

$$\begin{aligned}
 t_f = & R_y(q_1)R_y(\theta_1^f)T_z(d_1)T_{3D}(\theta_{2:7}^f)T_x(d_2)T_{3D}(\theta_{8:13}^f) \times \\
 & \times R_y(q_2)R_y(\theta_{14}^f)T_z(d_3)T_{3D}(\theta_{15:20}^f)R_x(q_3)R_x(\theta_{21}^f) \times \\
 & \times T_z(d_4)T_{3D}(\theta_{22:27}^f)T_z(d_5)T_{3D}(\theta_{28:33}^f)R_x(q_4)R_x(\theta_{34}^f) \times \\
 & \times R_x(q_5)R_x(\theta_{35}^f)R_y(q_6)R_y(\theta_{36}^f)T_z(d_6)T_{3D}(\theta_{37:42}^f),
 \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
 t_r = & R_y(q_1)R_y(\theta_1^r)T_z(d_1)T_x(d_2)R_z(q_2)R_z(\theta_2^r) \times \\
 & \times T_z(d_3)R_x(q_3)R_x(\theta_3^r)T_x(-d_4)T_z(d_5)R_x(q_4) \times \\
 & \times R_x(\theta_4^r)R_x(q_5)R_x(\theta_5^r)R_y(q_6)R_y(\theta_6^r)T_z(d_6),
 \end{aligned} \tag{14}$$

где T_u — матрица однородного преобразования со сдвигом в направлении u , R_u — матрица однородного преобразования с вращением вокруг оси u , $u = x, y, z$, T_{3D} — матрица однородного преобразования с тремя компонентами сдвига и вращения.

Поскольку вес звеньев является основным источником отклонений у антропоморфных роботов, это следует учитывать и в модели. Внешняя нагрузка, вызванная весом звеньев, может

быть представлена как силы, действующие в узлах-точках, соответствующих местоположениям виртуальных пружин-шарниров. В упрощенной модели, использованной в данной статье, эти виртуальные пружины учитывают податливость как звеньев, так и шарниров. Применяя принцип виртуальной работы, статическое равновесие соответствующей статической системы можно найти как [Klimchik et al., 2014]

$$J_{\theta}^{(G)T} \cdot G + J_{\theta}^{(F)T} \cdot F = K_{\theta} \cdot \theta, \quad (15)$$

где матрица $J_{\theta}^{(G)} = [J_{\theta}^{(1)T}, \dots, J_{\theta}^{(n)T}]^T$ агрегирует частичные Якобианы от базы робота до соответствующей узловой точки с нагрузкой в виде гравитации, $J_{\theta}^{(F)}$ — Якобиан от основания робота до рабочего органа робота с внешней нагрузкой, вектор G агрегирует силы, приложенные во внутренних узлах (вызванные гравитацией), F — вектор внешней нагрузки, приложенной к рабочему органу, и $K_{\theta} = \text{diag}(K_{\theta 1}, \dots, K_{\theta n})$ — диагональная матрица с жесткостью всех виртуальных суставов-пружин. Требуемая конфигурация статического равновесия может быть найдена с использованием итерационного алгоритма [Klimchik et al., 2014]:

$$\begin{aligned} F_{i+1} &= (J_{\theta}^{(F)} \cdot K_{\theta}^{-1} \cdot J_{\theta}^{(F)T})^{-1} \cdot (t_{i+1} - g(q, \theta_i) + J_{\theta_i}^{(F)} \cdot \theta_i - J_{\theta}^{(F)} \cdot K_{\theta}^{-1} \cdot J_{\theta}^{(G)T} \cdot G_i), \\ \theta_{i+1} &= K_{\theta}^{-1} (J_{\theta}^{(G)T} \cdot G_i + J_{\theta}^{(F)T} \cdot F_{i+1}), \end{aligned} \quad (16)$$

и декартова матрица жесткости K_C может быть найдена как

$$K_C = (J_{\theta} \cdot K_{\theta}^{-1} \cdot J_{\theta}^T)^{-1}, \quad (17)$$

что позволяет вычислить соотношение силы и отклонения:

$$\Delta p = K_C^{-1} \cdot F, \quad (18)$$

где Δp — отклонения рабочего органа под воздействием внешних сил и гравитации.

Рассмотрим пару типовых антропоморфных робота. Первый представляет собой малую антропоморфную платформу (рис. 1, а) [Porov et al., 2017], изготовленную методом 3D-печати из ABS-пластика и использующую хобби сервоприводы в шарнирах. Второй AR-601M фирмы «Андроидная техника» представляет собой робота размером с человека (рис. 1, б). Размеры роботов обозначены в таблице 1, таблица 2 представляет параметры аппроксимации, использованные для моделирования жесткости звеньев, 4 и 5 показывает параметры каждого сустава робота. Для рассматриваемых антропоморфных роботов основной источник эластичности связан с жесткостью суставов. Таким образом, для простоты все звенья считаются жесткими, а приводные соединения — деформируемыми. Силы трения не учитываются. Согласно нотации МВП (рис. 5), по одному виртуальному шарниру будет добавлено после каждого привода.

Для анализа жесткости шагающего робота (аналогично кинематическому и динамическому анализу) следует рассмотреть две фазы ходьбы: фазу одноопорной поддержки (ФОП) и фазу двухопорной поддержки (ФДП) [Porov, Klimchik, 2018]. На стадии двухопорной поддержки обе ноги находятся на земле. Предполагая, что между поверхностью и ступнями робота нет скольжения, его можно представить как параллельный манипулятор с двумя последовательными цепочками. Отклонения от внешних сил будут влиять только на положение туловища робота и, предполагая, что отклонения слишком малы, чтобы вывести центр масс робота (ЦМ) из многоугольника поддержки, не критичны для устойчивости робота.

Наиболее важным этапом для двуногого робота, где отклонения могут оказать сильное влияние на стабильность, является фаза одноопорной поддержки. На этом этапе одна из ног робота находится в воздухе, и отклонения, вызванные силой тяжести или внешней нагрузкой, могут сместить эту ногу ближе к земле или даже вызвать контакт с землей. Этот нежелательный контакт

может привести к падению робота. Модель МВП робота на этом этапе может быть представлена как одна последовательная цепочка (рис. 4, *a*). Цепочка состоит из 12 активных и 12 виртуальных пружин, базу этой последовательной цепочки примем прикрепленной к поверхности.

Модель жесткости для фазы двухопорной поддержки представлена на рис. 4, *b*. Она состоит из одного параллельного манипулятора с двумя последовательными цепями, по 6 активных и 6 виртуальных пружин в каждой. Матрицу общей жесткости для параллельного манипулятора можно найти как сумму матриц декартовой жесткости для каждой цепочки при условии, что рабочим органом является одна точка:

$$K_C = \sum_i K_{C(i)}, \quad (19)$$

где $K_{C(i)}$ — матрица жесткости для последовательной цепочки. В отличие от большинства параллельных роботов в данном случае отсутствуют пассивные суставы, что приводит к тому, что матрица жесткости каждой цепи будет полного ранга.

Определение параметров жесткости

Идентификация состоит из двух этапов: сбор данных и обработка данных. В случае идентификации жесткости данные представляют собой измерения смещения рабочего органа робота в различных конфигурациях под действием внешней силы различной величины и направления. В данной работе для задачи идентификации будут проводиться виртуальные эксперименты, основанные на полной геометрической и эластостатической модели робота. Таким образом, сначала мы предполагаем, что и звенья и шарниры обладают податливостью, затем для каждой конфигурации мы вычисляем Якобиан и используем уравнение (8) для получения вектора отклонений. Далее добавляются ошибки измерения, чтобы имитировать условия реального измерения. Эти ошибки рассматриваются как независимые идентично распределенные (то есть случайные) значения с нулевым средним и стандартным отклонением σ . В этой статье мы принимаем σ как $100 \mu\text{m}$, что является типичной точностью измерительных устройств, таких как лазерный трекер FARO. Для генерации данных были использованы 100 случайных конфигураций и сил случайного направления и постоянной величины $10^2 N$.

Что касается обработки данных, то на этом этапе происходит подгонка данных к выбранной модели. В нашем случае модель приведена к сокращенной модели жесткости манипулятора, для которой находятся диагональные элементы матрицы жесткости. То есть, предполагая, что все отклонения как из-за шарниров, так и из звеньев сосредоточены в суставах, находится эквивалентный манипулятор с податливыми шарнирами и жесткими звеньями, которые дали бы такое же отклонение, как полная эластостатическая модель данного манипулятора.

Декартова матрица податливости k_c является обратной к декартовой матрице жесткости K_c . Она устанавливает взаимосвязь между обобщенным смещением рабочего органа и прикладываемым внешним усилием (уравнения (6)–(7)). Проблема в том, что k_c имеет элементы с разными физическими единицами. Это вызывает трудности при анализе податливости робота. Здесь мы представляем анализ поступательных и вращательных отклонений. Объединив уравнения (6) и уравнения (7), получаем:

$$\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{tr} \\ \Delta \mathbf{o} \end{bmatrix} = k_c \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (20)$$

где $\Delta \mathbf{tr} = [\Delta tr_x, \Delta tr_y, \Delta tr_z]^T$ — вектор отклонений по положению, $\Delta \mathbf{o} = [\Delta o_x, \Delta o_y, \Delta o_z]^T$ — вектор отклонений по ориентации и $\mathbf{F} = [F_x, F_y, F_z]^T$. Матрица податливости k_c может быть разбита на 4 подматрицы [Guo et al., 2015]:

$$k_c = \begin{bmatrix} k_{c,tt} & k_{c,tr} \\ k_{c,tr}^T & k_{c,rr} \end{bmatrix}, \quad (21)$$

где $k_{c,tt}$ — подматрица податливости смещения, $k_{c,rr}$ — подматрица податливости вращения, а $k_{c,tr}$ — подматрица соответствия связям. Прямую связь между Δtr и F , а также между Δo и F можно получить, подставив уравнение (21) в уравнение (20):

$$\begin{aligned}\Delta tr &= k_{c,tt}F, \\ \Delta o &= k_{c,tr}^T F.\end{aligned}\quad (22)$$

Уравнение (22) далее будет использовано для построения карт отклонения.

Карты отклонений

Когда значения жесткости шарниров известны, можно рассчитать отклонения для любой конфигурации. На основании этого мы можем получить отклонения вдоль траектории рабочего органа или для всей плоскости рабочего пространства (карта отклонения). Есть несколько проблем, с которыми можно столкнуться при расчете карты отклонения. Одной из них является конфигурация робота, так как некоторые части рабочей области могут быть доступны с использованием нескольких конфигураций, а другие части — только одной. Каждая конфигурация характеризуется собственной декартовой матрицей жесткости, поэтому неизвестно, какую из них использовать для расчета в случае, когда существует несколько возможных конфигураций.

Вторая проблема — это значение приложенной силы и направление ее вектора, которая может обеспечить наилучший результат, то есть максимальное отклонение. Эта проблема может быть решена путем использования метода [Leon et al., 1980] сингулярного разложения, применяемого к подматрицам смещенной и сопряженной податливости (уравнение (22)):

$$\begin{aligned}k_{c,tt} &= U_{tt} S_{tt} V_{tt}^T, \\ k_{c,tr} &= U_{rt} S_{rt} V_{rt}^T,\end{aligned}\quad (23)$$

где диагональные элементы S_{tt} и S_{rt} являются неотрицательными сингулярными значениями в порядке убывания, столбцы U_{tt} и U_{rt} являются левыми сингулярными векторами, а столбцы V_{tt} и V_{rt} — правыми сингулярными векторами.

Первые элементы матриц S_{tt} и S_{rt} являются абсолютными значениями максимального отклонения, полученного под действием единичной силы (1 N). Направление этого отклонения соответствует левому сингулярному вектору, то есть первому столбцу матрицы V . Аналогичный подход был использован в [Mamedov et al., 2018].

Результаты

Параметры жесткости каждого сустава робота, включающего в себя часть податливости звена для упрощенной модели, представлены в таблицах 4 и 5. Влияние добавленной податливости звена наиболее заметно для малого робота, так как материал, из которого изготовлены его звенья, обладает худшими характеристиками, более чем 20 раз меньшим модулем упругости.

Используя идентифицированные значения для малого робота, были построены карты отклонений. Величина отклонения в фазе одноопорной поддержки зависит от высоты свободной ноги. Рассмотрим четыре возможные высоты подъема ноги с расстоянием между ступней и тазом, равным 325, 350, 375 и 430 мм. Примеры конфигураций с этими высотами и достижимым рабочим пространством в плоскости $X-Z$ показаны на рис. 6. Высота правой ноги (зафиксированной на полу), используемая в этих графиках, равна 430 мм. Можно заметить, что отклонения растут вблизи границы рабочей области. Компоненты вектора отклонения для свободной ноги на высоте 430 мм показаны на рис. 10, вместе с абсолютными значениями максимального отклонения для положения и ориентации. Дополнительные графики для других высот подъема

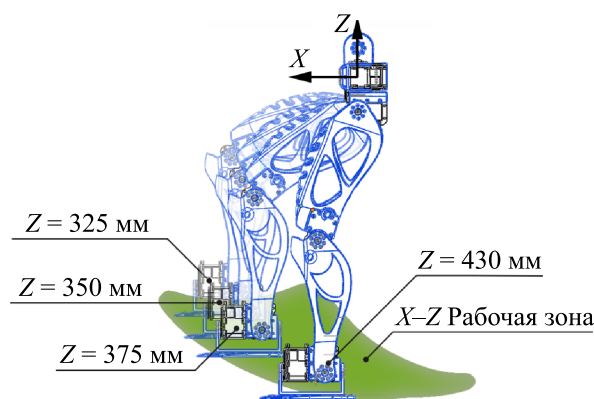
Рис. 6. Положение ступни относительно торса по оси Z для карт отклонений

Таблица 6. Отклонения положения ступни робота относительно таза для фазы одноопорной поддержки

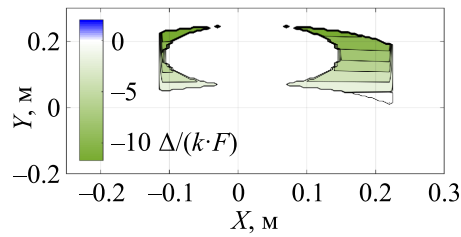
Параметр	Высота подъема ноги, мм			
	325	350	375	430
Среднее отклонение в направлении X , $\Delta/(kF)$	5.2216	5.2829	4.1656	3.7092
Среднее отклонение в направлении Y , $\Delta/(kF)$	7.1889	7.2216	8.7375	8.4503
Среднее отклонение в направлении Z , $\Delta/(kF)$	4.8953	3.9417	3.6007	2.4370
Средняя амплитуда отклонений для положения	6.1976	6.5353	6.8075	7.0888
Средняя амплитуда отклонений для ориентации	3.8875	4.7847	4.4924	4.0934

Таблица 7. Отклонения положения таза робота для фазы двухопорной поддержки

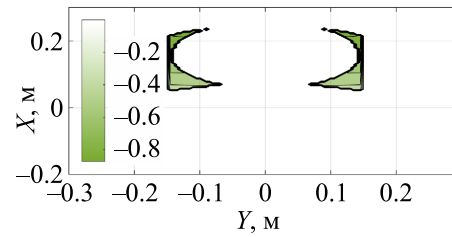
Параметр	Высота подъема ноги, мм			
	325	350	375	430
Среднее отклонение в направлении X , $\Delta/(kF)$	0.4971	0.6130	0.5310	0.3794
Среднее отклонение в направлении Y , $\Delta/(kF)$	0.1722	0.1505	0.2076	0.2095
Среднее отклонение в направлении Z , $\Delta/(kF)$	0.4206	0.4440	0.3344	0.1993
Средняя амплитуда отклонений для положения	0.4881	0.5433	0.6121	0.6722
Средняя амплитуда отклонений для ориентации	0.3663	0.4501	0.4198	0.3985

ноги представлены на рис. 7, 8, 9, *a, c, e, g, i*. Отклонения в направлениях X и Y могут быть положительными или отрицательными, в зависимости от конфигурации ноги. Такое поведение объясняется смещением центра масс робота. Отклонения в направлении Z имеют максимальную величину и являются наиболее критическими, поскольку они смещают ногу робота ближе к земле. Средние значения для отклонений приведены в таблице 6.

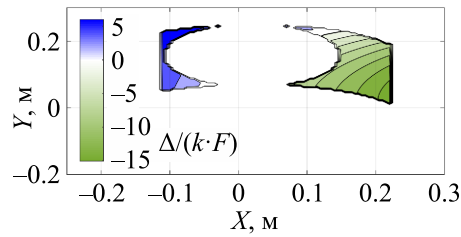
Для фазы двухопорной поддержки обе ноги прикреплены к земле. Расстояние в направлении Y между ступнями равно 7 см, что соответствует расстоянию, используемому для ходьбы. Полученное отклонение показывает ошибку в позиционировании таза робота. Пример карты отклонения для высоты таза 430 мм представлен на рис. 10, для отклонения в направлении X , Y , Z и абсолютных значений максимального отклонения для положения и ориентации. Величина ошибки положения примерно в 10 раз меньше, чем в фазе одноопорной поддержки, таким образом в общем случае это отклонение можно игнорировать. Тем не менее, использование неуправляемых степеней свободы в последовательных кинематических цепочках ног или высокая масса тела с податливыми двигателями сделает эти отклонения достаточно большими. Дополнительные карты для $Z = 325, 350, 375$ мм представлены на рис. 7, 8, 9, *b, d, f, h, j*. Средние значения для отклонений приведены в таблице 7.



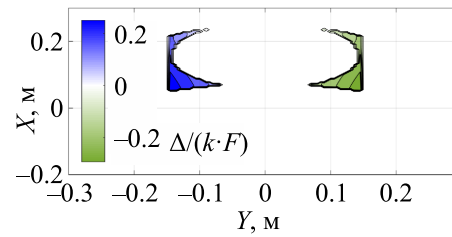
(a) Отклонения в направлении X



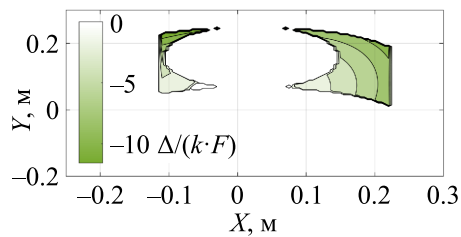
(b) Отклонения в направлении X



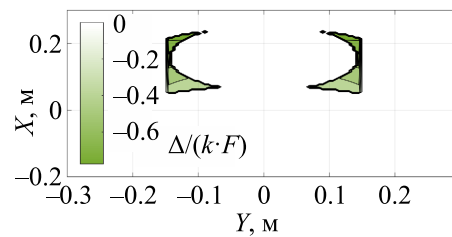
(c) Отклонения в направлении Y



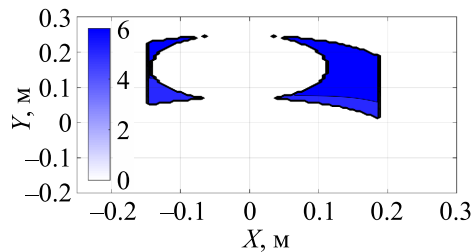
(d) Отклонения в направлении Y



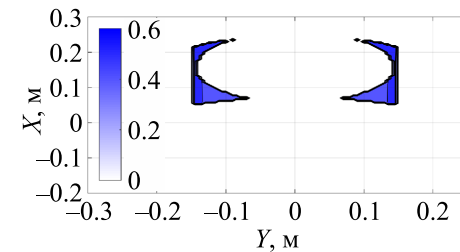
(e) Отклонения в направлении Z



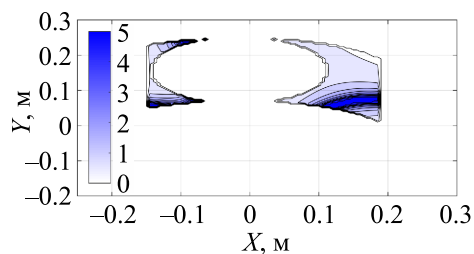
(f) Отклонения в направлении Z



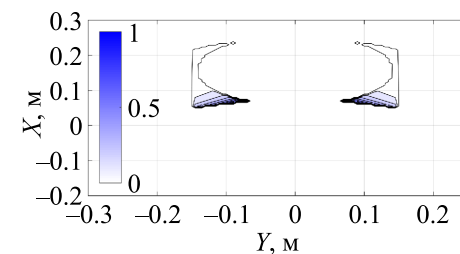
(g) Амплитуда отклонений для положения



(h) Амплитуда отклонений для положения

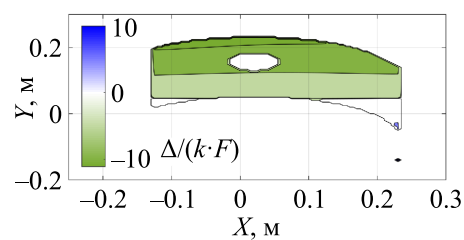


(i) Амплитуда отклонений для ориентации

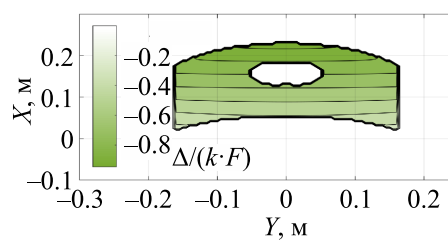


(j) Амплитуда отклонений для ориентации

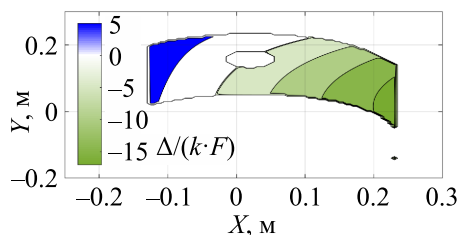
Рис. 7. Карты отклонений для стопы в фазе одноопорной поддержки (левый столбец) и таза в фазе двухопорной поддержки (правый столбец) при $Z = 325$ мм. Значение отклонения Δ нормализовано относительно внешней силы F и податливости шарниров k



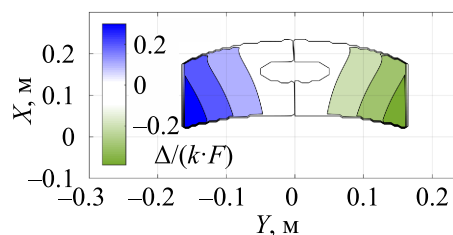
(a) Отклонения в направлении X



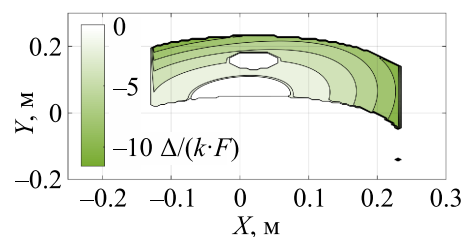
(b) Отклонения в направлении X



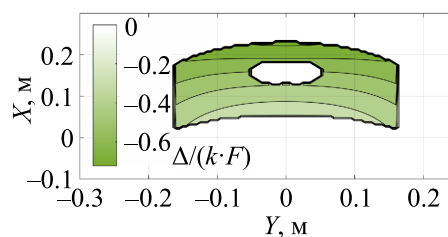
(c) Отклонения в направлении Y



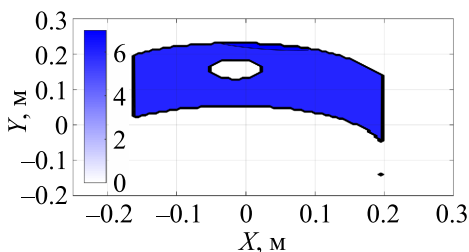
(d) Отклонения в направлении Y



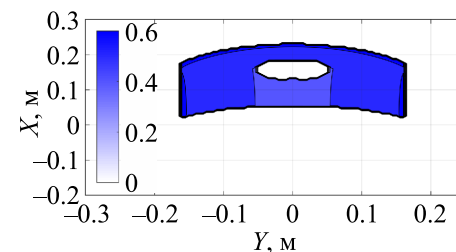
(e) Отклонения в направлении Z



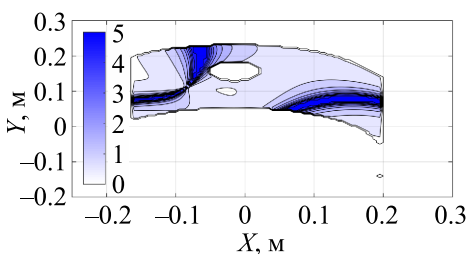
(f) Отклонения в направлении Z



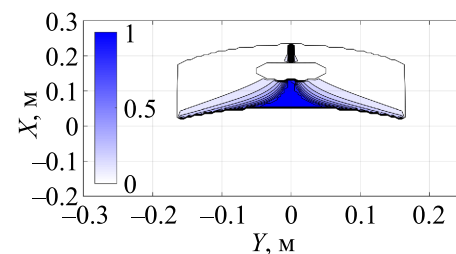
(g) Амплитуда отклонений для положения



(h) Амплитуда отклонений для положения

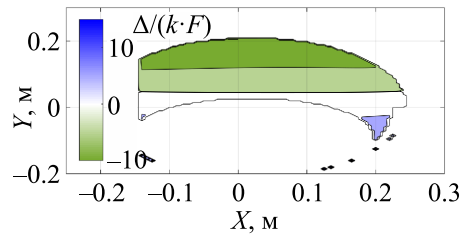


(i) Амплитуда отклонений для ориентации

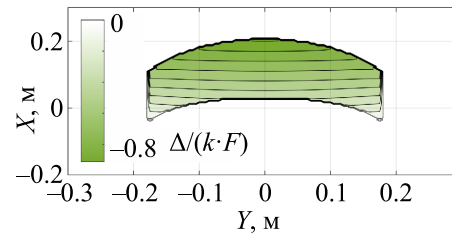


(j) Амплитуда отклонений для ориентации

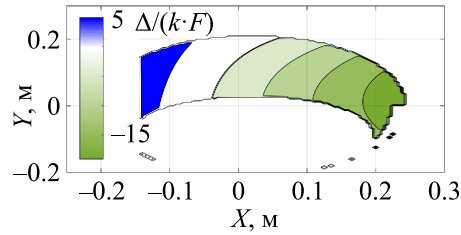
Рис. 8. Карты отклонений для стопы в фазе одноопорной поддержки (левый столбец) и таза в фазе двухопорной поддержки (правый столбец) при $Z = 350$ мм. Значение отклонения Δ нормализовано относительно внешней силы F и податливости шарниров k



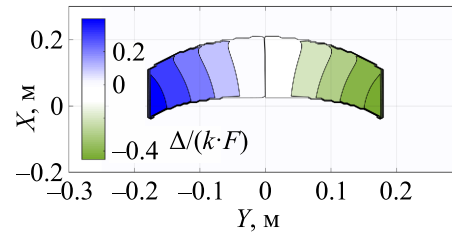
(a) Отклонения в направлении X



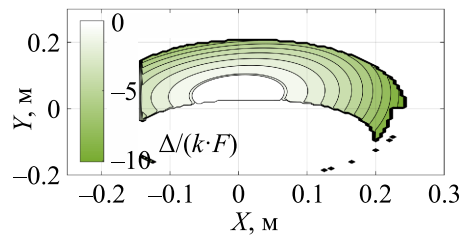
(b) Отклонения в направлении X



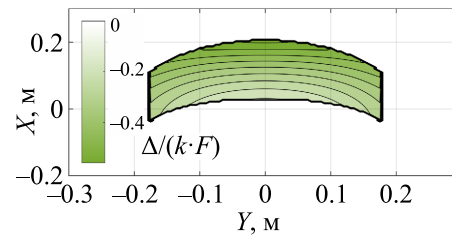
(c) Отклонения в направлении Y



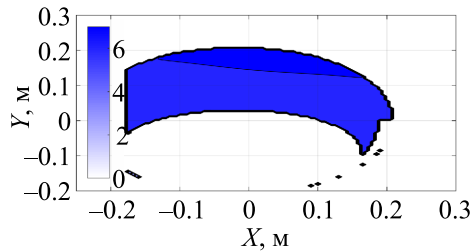
(d) Отклонения в направлении Y



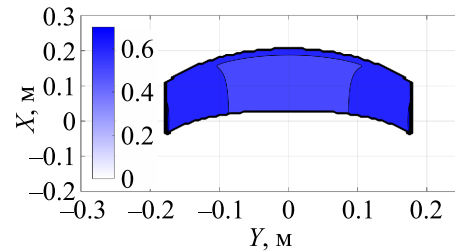
(e) Отклонения в направлении Z



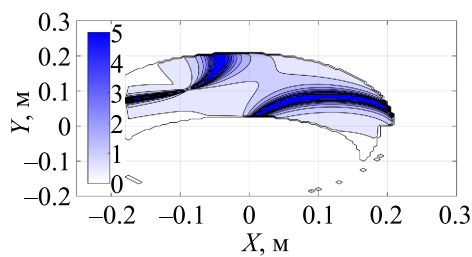
(f) Отклонения в направлении Z



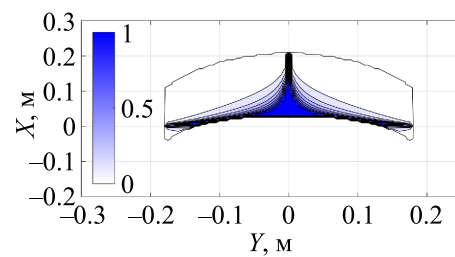
(g) Амплитуда отклонений для положения



(h) Амплитуда отклонений для положения

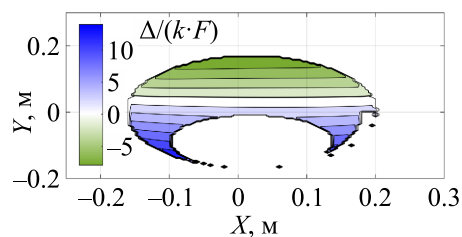


(i) Амплитуда отклонений для ориентации

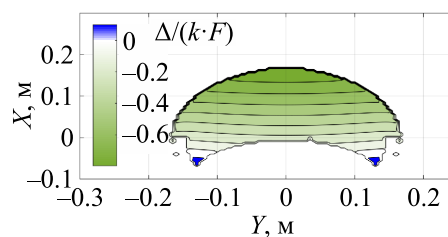


(j) Амплитуда отклонений для ориентации

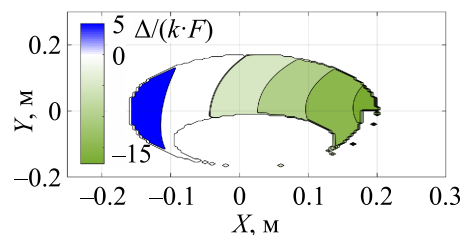
Рис. 9. Карты отклонений для стопы в фазе одноопорной поддержки (левый столбец) и таза в фазе двухопорной поддержки (правый столбец) при $Z = 375$ мм. Значение отклонения Δ нормализовано относительно внешней силы F и податливости шарниров k



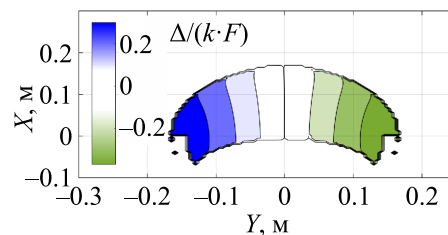
(a) Отклонения в направлении X



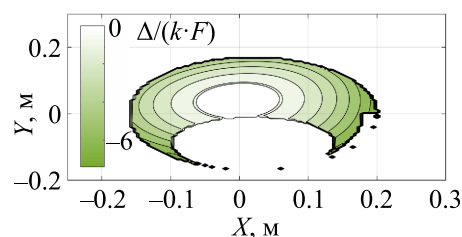
(b) Отклонения в направлении X



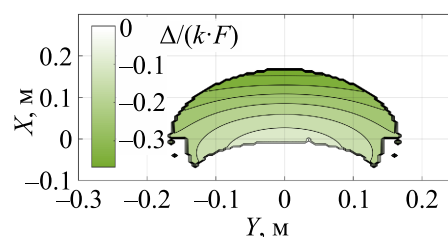
(c) Отклонения в направлении Y



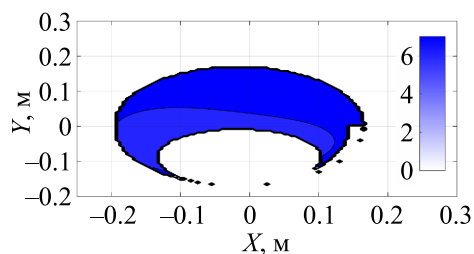
(d) Отклонения в направлении Y



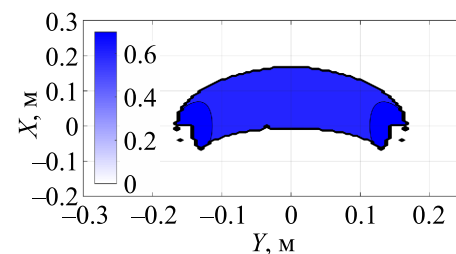
(e) Отклонения в направлении Z



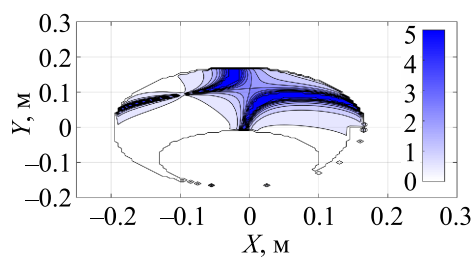
(f) Отклонения в направлении Z



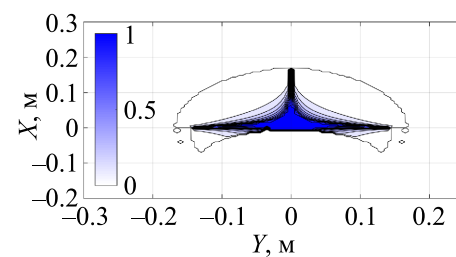
(g) Амплитуда отклонений для положения



(h) Амплитуда отклонений для положения



(i) Амплитуда отклонений для ориентации



(j) Амплитуда отклонений для ориентации

Рис. 10. Карты отклонений для стопы в фазе одноопорной поддержки (левый столбец) и таза в фазе двухопорной поддержки (правый столбец) при $Z = 430$ мм. Значение отклонения Δ нормализовано относительно внешней силы F и податливости шарниров k

Моделирование жесткости для двуногих роботов позволяет снизить погрешность в позиционировании ног робота, особенно в направлении Z, что имеет решающее значение для стабильной ходьбы. Учет податливости звеньев более ценен для полноразмерных роботов, где масса звеньев робота велика. Необходимы дальнейшие эксперименты, чтобы понять, как внедрение более сложной модели повысит эффективность движения при ходьбе. Другим способом уменьшения ошибок является реализация нелинейной модели, которая может дополнительно уменьшить ошибку.

Одним из применений полученных результатов является использование подходов для двуногих роботов с пассивными либо нагруженными пружиной шарнирами. Заменяя некоторые степени свободы в ногах робота пассивным шарниром или пружиной, можно добиться снижения энергопотребления и способности адаптироваться к шероховатостям поверхности. В этом случае, чтобы обеспечить точное размещение стопы, необходима модель жесткости. Другое приложение может быть применено к роботам, оснащенным приводами переменной жесткости. В обоих случаях необходимо моделирование возможных отклонений в суставах.

Заключение

В работе представлен метод для моделирования жесткости антропоморфной платформы. Моделирование выполнено с использованием метода виртуальных пружин. Были построены две модели: с учетом податливости звеньев и шарниров; с учетом податливости только шарниров. Так как в реальном роботе определение параметров жесткости элементов из конструкторской документации может быть затруднительным, был предложен метод для идентификации параметров жесткости шарниров робота. В этом случае идентифицированная податливость будет включать в себя не только податливость шарнира, но и часть податливости звеньев. Идентификация параметров была выполнена для двух роботов: для малой платформы, звенья которой выполнены из пластика, и для полноразмерного антропоморфного робота AR-601M, выполненного из алюминия. Как видно из результатов, влияние звеньев в податливости шарниров наиболее заметно в случае с малой платформой. Основываясь на полученных параметрах, были построены как карты отклонений, включающие в себя карты, показывающие отклонения по осям глобальных координат, так и абсолютные значения ошибки позиционирования и ориентации, полученные при использовании сингулярного разложения матрицы жесткости робота.

Дальнейшая работа включает в себя более глубокое рассмотрение процессов движения робота, создание и реализацию онлайн генерации, компенсации траектории с использованием модели жесткости, а также апробирование алгоритмов идентификации на реальном роботе.

Список литературы (References)

- Alici G., Shirinzadeh B.* Enhanced stiffness modeling, identification and characterization for robot manipulators // IEEE transactions on robotics. — 2005. — Vol. 21, No. 4. — P. 554–564.
- Corradini C., Fauroux J.-C., Krut S. et al.* Evaluation of a 4-degree of freedom parallel manipulator stiffness // Proceedings of the 11th World Congress in Mechanisms and Machine Science, Tianjin (China). — 2003.
- Gouaillier D., Hugel V., Blazevic P. et al.* Mechatronic design of NAO humanoid // IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2009. — P. 769–774.
- Guo Y., Dong H., Ke Y.* Stiffness-oriented posture optimization in robotic machining applications // Robotics and Computer-Integrated Manufacturing. — 2015. — Vol. 35. — P. 69–76.
- Ha I., Tamura Y., Asama H. et al.* Development of open humanoid platform DARwIn-OP // Proceedings of SICE Annual Conference (SICE). — 2011. — P. 2178–2181.

- Khusainov R., Shimchik I., Afanasyev I., Magid E.* Toward a human-like locomotion: Modelling dynamically stable locomotion of an anthropomorphic robot in simulink environment // International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics. — 2015. — Vol. 02. — P. 141–148.
- Klimchik A., Wu Y., Pashkevich A. et al.* Optimal selection of measurement configurations for stiffness model calibration of anthropomorphic manipulators // Applied Mechanics and Materials / Trans. Tech. Publ. — 2012. — Vol. 162. — P. 161–170.
- Klimchik A., Pashkevich A., Chablat D.* CAD-based approach for identification of elasto-static parameters of robotic manipulators // Finite Elements in Analysis and Design. — 2013. — Vol. 75. — P. 19–30.
- Klimchik A., Chablat D., Pashkevich A.* Stiffness modeling for perfect and non-perfect parallel manipulators under internal and external loadings // Mechanism and Machine Theory. — 2014. — Vol. 79. — P. 1–28.
- Klimchik A., Furet B., Caro S., Pashkevich A.* Identification of the manipulator stiffness model parameters in industrial environment // Mechanism and Machine Theory. — 2015. — Vol. 90. — P. 1–22.
- Klimchik A., Pashkevich A., Chablat D.* Fundamentals of manipulator stiffness modeling using matrix structural analysis // Mechanism and Machine Theory. — 2019. — Vol. 133. — P. 365–394.
- Lapeyre M., Rouanet P., Oudeyer P.-Y.* The poppy humanoid robot: Leg design for biped locomotion // IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. — 2013. — P. 349–356.
- Leon S. J., Bica I., Hohn T.* Linear algebra with applications. — Macmillan New York, 1980.
- Liu J., Zhang Y., Li Z.* Improving the positioning accuracy of a neurosurgical robot system // IEEE/ASME Transactions on Mechatronics. — 2007. — Vol. 12, No. 5. — P. 527–533.
- Mamedov S., Popov D., Mikhel S., Klimchik A.* Compliance Error Compensation based on Reduced Model for Industrial Robots // International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics. — 2018. — Vol. 2. — P. 190–201.
- Martin H. C.* Introduction to matrix methods of structural analysis. — McGraw-Hill, 1966.
- Nubiola A., Bonev I. A.* Absolute calibration of an ABB IRB 1600 robot using a laser tracker // Robotics and Computer-Integrated Manufacturing. — 2013. — Vol. 29, No. 1. — P. 236–245.
- Olabi A., Damak M., Bearee R. et al.* Improving the accuracy of industrial robots by offline compensation of joints errors // IEEE International Conference on Industrial Technology (ICIT). — 2012. — P. 492–497.
- Ozaki T., Suzuki T., Furuhashi T. et al.* Trajectory control of robotic manipulators using neural networks // IEEE Transactions on Industrial Electronics. — 1991. — Vol. 38, No. 3. — P. 195–202.
- Pashkevich A., Chablat D., Wenger P.* Stiffness analysis of overconstrained parallel manipulators // Mechanism and Machine Theory. — 2009. — Vol. 44, No. 5. — P. 966–982.
- Pashkevich A., Klimchik A., Chablat D.* Enhanced stiffness modeling of manipulators with passive joints // Mechanism and machine theory. — 2011. — Vol. 46, No. 5. — P. 662–679.
- Pigoski T., Griffis M., Duffy J.* Stiffness mappings employing different frames of reference // Mechanism and machine theory. — 1998. — Vol. 33, No. 6. — P. 825–838.
- Popov D., Klimchik A., Afanasyev I.* Design and Stiffness Analysis of 12 DoF Poppy-inspired Humanoid // International Conference on Informatics in Control, Automation, and Robotics. — 2017. — P. 66–78.

- Popov D., Klimchik A.* Stiffness Analysis for Anthropomorphic Platform // 2nd School on Dynamics of Complex Networks and their Application in Intellectual Robotics (DCNAIR). — 2018. — P. 106–108.
- Sakagami Y., Watanabe R., Aoyama C. et al.* The intelligent ASIMO: System overview and integration // IEEE/RSJ international conference on intelligent robots and systems. — 2002. — Vol. 3. — P. 2478–2483.
- Salisbury J.K.* Active stiffness control of a manipulator in cartesian coordinates // 19th IEEE Conference on Decision and Control including the Symposium on Adaptive Processes. — 1980. — Vol. 19. — P. 95–100.
- Yamaguchi J., Soga E., Inoue S., Takanishi A.* Development of a bipedal humanoid robot-control method of whole body cooperative dynamic biped walking // IEEE International Conference on Robotics and Automation. — 1999. — Vol. 1. — P. 368–374.